La théorie des nœuds et des tresses à la Fête de la Science 2001

par Marc WAMBST [1]

L'an 2000 proclamé « année mondiale des mathématiques » par l'U.N.E.S.C.O. et l'Union Mathématique Internationale a marqué le début d'un plus grand intérêt des mathématiciens strasbourgeois pour la vulgarisation de leur discipline. À Strasbourg, c'est à l'occasion de cette « année mondiale » que les mathématiques ont fait leur entrée à la « Fête de la Science». Cette manifestation nationale organisée par le Ministère de la Recherche a pour but de promouvoir les connaissances scientifiques et techniques. Elle se concrétise par une semaine (en octobre pour ce qui est de 2001) de manifestations centrées sur la vulgarisation scientifique. Traditionnellement, se tient, place Kleber, durant trois jours, le « Village des Sciences » qui est un chapiteau à entrée libre où des instituts de recherche publics ou privés, des associations, des entreprises « communiquent » sur des thèmes scientifiques. L'organisation du Village est prise en charge par la « Boutique de Sciences [2]».

Jusqu'à l'automne 2000, alors que de nombreux laboratoires universitaires ou du C.N.R.S. participaient à la « Fête», les mathématiques n'y étaient pas représentées. L'année 2000 a vu fleurir de nombreuses manifestations autour des mathématiques. En Alsace, l'I.R.E.M. de Strasbourg a piloté l'organisation de la plupart d'entre elles: expositions, journées au C.R.D.P., participation des établissements scolaires... Dans ce climat favorable à la vulgarisation, l'I.R.M.A. [3] s'est chargé de tenir un stand au Village des Sciences. Nous [4] avions décidé de présenter et de commenter des affiches du concours d'affiches de l'année mondiale des mathématiques ainsi que des affiches de l'I.R.E.M. qui reprenaient des couvertures de *l'Ouvert*. Quelques textes distribués aux visiteurs commentaient certaines d'entre-elles : la courbe du dragon, le nombre de spirales du tournesol, les empilements de sphères, les polyèdres réguliers, les pavages du plan, les carrés latins...

L'année 2001, nous nous sommes restreint à un seul thème. Notre choix s'est porté sur la théorie des nœuds et des tresses qui présente l'avantage de reposer sur des problèmes concrets.

Ce texte a pour but de présenter le matériel élaboré à cette occasion et de décrire le déroulement de la manifestation.

Le matériel

Notre stand avait une dizaine de mètres carrés. Nous disposions de tables, de chaises, de panneaux d'affichage, d'un tableau blanc, d'un téléviseur et d'un magné-

2. La Boutique de Sciences est une association à but non lucratif, subventionnée sur projet, qui se charge de la diffusion de la culture scientifique et technique au niveau départemental

3. L'Institut de Recherche Mathématique Avancée est une unité mixte de recherche de l'Université Louis Pasteur et du C.N.R.S. et est le laboratoire qui réunit la plupart des mathématiciens strasbourgeois.

4. Le *nous* désigne un petit comité constitué de personnes volontaires et de bonne volonté.

toscope. Nous avions réalisé des affiches d'une ou deux pages de format A2 présentant chacune un aspect de la théorie des nœuds ou des tresses. Le titres des affiches étaient les suivants : *L'analysis situs ou la topologie, Les problèmes en théorie des nœuds,*

Les mouvements de Reidemeister, Comment différencier les nœuds? Tresses et groupes des tresses, Arithmétique des nœuds, Les espaces hyperboliques, Les nœuds dans les sciences. Un alpiniste nous avait gracieusement fourni des cordes qui nous ont permis de réaliser des nœuds aisément manipulables. Nous offrions au public de petits questionnaires sur les nœuds et les tresses ainsi que des bandes de papier destinées à reproduire le « thêta tressé» (voir annexe). Aux personnes plus intéressées, nous avons également distribué des copies de la table des nœuds premiers, une bibliographie et les textes des affiches. Le téléviseur passait en boucle deux courts films tirés de la cassette *Video Math-Festival at ICM '98* (édité par H.-Chr. Hege et K. Polthier, ISBN 3-540-92634-8). Le premier s'intitulait *Meditation on Homotopy* et montrait comment un personnage dessiné se déformait homotopiquement. Le second s'intitulait *Knot energies* et montrait des images modélisant des nœuds flottant dans l'espace et soumis à des interactions énergétiques à leur surface. Enfin, nous avions apporté des copies d'articles de recherche mathématique destinées à « montrer » la production d'un mathématicien aux visiteurs.

Certains documents cités ci-dessus sont reproduits dans l'annexe. Nous invitons le lecteur à la feuilleter avant de poursuivre. La plupart des documents sont en couleur. Nous n'en donnons ici que des reproductions en noir et blanc.

Le déroulement

La manifestation se déroulait les 19, 20 et 21 octobre 2001, c'est-à-dire un vendredi, un samedi et un dimanche, de 9h à 19h. Des collègues de l'I.R.M.A. ont tenu des permanences de deux heures. Il y avait toujours au moins deux animateurs sur le stand.

L'attention des visiteurs était d'emblée attirée par les modèles en corde que nous avions disposés sur une table devant nous. Grâce à ces objets et aux petits questionnaires, nous pouvions amorcer le dialogue. Des gens de tout âge se sont prêté au jeu et ont essayé de répondre aux problèmes du questionnaire ou à celles que nous leur posions directement comme : *Peut-on défaire ce nœud ? Ces nœuds (par exemple le nœud de trèfle droit et le nœud de trèfle gauche) sont-ils les mêmes ?*

Aux personnes moins « réceptives» ou aux jeunes enfants, nous proposions de réaliser le « theta tressé». Les questions étaient volontairement très simples, leurs réponses, en revanche, pouvaient se trouver soit à l'aide de quelques manipulations simples, soit à l'aide de la théorie des invariants. Nous justifiions ainsi le recours aux mathématiques.

Une fois le problème de la différenciation des nœuds posé et compris, il nous était possible de parler de mathématiques et d'esquisser le concept d'invariant à l'aide duquel on expliquait que le nœud de trèfle droit n'est pas isotopes au nœud de trèfle gauche.

À l'occasion, nous pouvions faire passer l'idée que l'impossibilité d'une chose peut se démonter. Par ailleurs, nous parlions aussi de classification et de nœuds premiers et montrions la table de ces nœuds. Il ne nous restait alors qu'à répondre à l'habituelle question *À quoi ça sert?*

Apparemment, les visiteurs ont apprécié la forme ludique du dialogue qui s'instaurait, mais étaient malheureusement peu enclins à lire le texte des affiches ou même à regarder les films. De plus, les quelques personnes qui ont lu les affiches nous ont rarement demandé des explications complémentaires. Néanmoins, un dialogue plus approfondis s'est quelque fois instauré avec des lycéens, des étudiants ou des personnes de formation scientifique.

Conclusion

En guise de conclusion, nous remarquons que le dialogue entre les visiteurs et les animateurs du stand n'a pu s'instaurer que grâce au support matériel des modèles de nœuds en cordage. Ce support, son aspect ludique de « casse-tête» et la simplicité de la problématique de départ ont contribué à ce que le public se pose des questions. Il était ensuite possible de lui présenter les aspects théoriques de la solution. Le thème choisi a permis ce biais d'approche, mais tous les thèmes de la recherche mathématique actuelle ne présentent pas cet avantage. En fait, peu d'entre nous étaient spécialistes de la théorie des nœuds et nous pouvions nous trouver frustrés de vulgariser un domaine des mathématiques qui n'est pas le nôtre. Pour la réalisation des affiches, nous avons largement utilisé du matériel existant déjà (textes, sites internet, dossiers spéciaux de magazines,...), nous trouvant parfois dans la situation de faire de la vulgarisation de vulgarisation.

De plus, certain d'entre nous auraient aimé donner l'idée de la nature de la recherche en mathématique en soulignant qu'elle est actuellement en train de se faire et qu'elle résulte du travail d'individus. C'est la raison pour laquelle chaque affiche reproduit le portrait d'un mathématicien et que nous avions apporté des articles de recherche. Hélas, le public était peu curieux de ces articles et de la qualité[5] des personnes animant le stand.

Il reste que l'expérience du contact avec « le grand public» fut très agréable. L'I.R.M.A. devrait continuer à participer à la fête et vous invite à visiter son stand en 2002.

5. Au sens de profession.

BIBLIOGRAPHIE

Des ouvrages de vulgarisation en relation avec le thème des nœuds

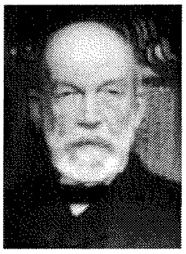
— *La science des nœuds*, dossier de Pour la Science, (1997).
— Alexei Sossinsky, *Nœuds, Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, (1999).
— Jean-Pierre Petit, *Le topologicon, les aventures d'Anselme Lanturlu*, (bande dessinée), Belin (1980).
— Ian Stewart, *Ah les beaux groupes, les chroniques de Rose Polymath*, (bande dessinée), Belin (1982).

Un ouvrage sur les nœuds marins :
— Geoffrey Budworth, *Le livre des nœuds*, De Vecchi Poche, (1993).

Des ouvrages plus mathématiques mais abordables sur les nœuds (en anglais):
— C. Livingston, *Knot theory*, Carus Mathematical Monographs no. 24 The Mathematical Association of America, (1993).
— E. Flapan, *When topology meets chemistry (a topological look at molecular chirality)*, Cambridge University Press/The Mathematical Association of America, (2000)

Des sites internet sur le thème

— David Eppstein, *The Geometry Junkyard Page on Knot Theory*, Site de l'Université de Californie, Irvine.
`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/knot.html`
— Serge Mehl, « Notions sur la théorie des nœuds», In *Petite Chronologie des Mathématiques*, site de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille.
`http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/LudoMath/ThNoeud.html`
— Center for the Popularization of Mathematics, *Exhibition of knots*, Site de l'Université du Pays de Galles, Bangor,
`http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/exhib/menu.htm`
— Depart. of Computer Science, *The knot plot site*, Site de l'Université de Colombie Britannique, Vancouver,
`http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html`
— Peter Suber, *Knots on the Web*, Site d'Earlham College, Richmond, Indiana,
`http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm`



Peter G. Tait
(1831–1901)

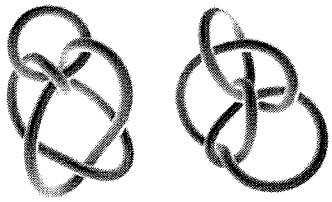
Fête de la Science, octobre 2001
Institut de **R**echerche **M**athématique **A**vancée
Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

LES PROBLEMES EN THEORIE DES NŒUDS

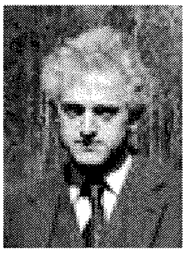
Dans la vie courante, un nœud peut toujours être dénoué s'il n'est pas trop serré : il suffit de faire passer une extrémité libre de la ficelle dans les différentes boucles pour le défaire.

La théorie des nœuds s'intéresse à un problème légèrement différent : il n'est pas permis de trop serrer les nœuds (il y a une façon précise de dire cela) mais pour que le nœud ne se défasse pas, on raboute l'une à l'autre les deux extrémités de la ficelle.

Le problème central de la théorie des nœuds est de savoir dire si deux nœuds sont « isotopes », c'est-à-dire si on peut arriver à l'un en déformant l'autre. Pour des nœuds peu complexes, l'intuition s'avère être un guide fiable. Et pourtant... en 1974 Kenneth Perko (un avocat New-Yorkais) remarqua que les nœuds ci-contre sont isotopes, alors qu'ils avaient été considérés comme différents dans plusieurs travaux antérieurs.



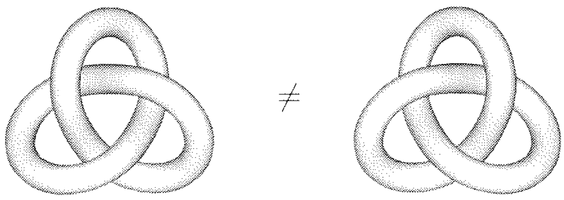
Johann Listing
(1808–1882)



Marwen
Thistlethwaite

Le premier mathématicien à s'être intéressé sérieusement à la théorie des nœuds est Johann Benedict Listing en 1847 ; ses contributions sont aujourd'hui oubliées. Trente ans plus tard, Peter Guthrie Tait commençait à publier des tables de nœuds : il s'agissait de dresser une liste des nœuds, classés par complexité croissante. Ni Tait ni ses successeurs, T. P. Kirkman et C. N. Little, n'avaient de méthode systématique ; ils se sont arrêtés là où la complexité combinatoire du problème a excédé les capacités de leur intuition. Cette étude a été prolongée par Morwen Thistlethwaite au début des années 1980 avec l'aide d'ordinateurs.

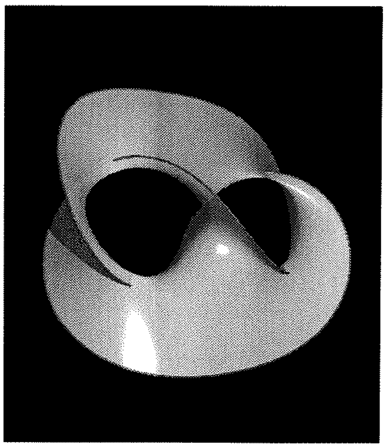
La théorie des nœuds s'est beaucoup développée au XX$^{\text{e}}$ siècle. Un des premiers résultats fut obtenu par Max Dehn en 1914 : les nœuds de trèfle gauche et droit ne sont pas isotopes.



Max Dehn
(1878–1952)

Karl Seifert
(1907–1996)

En 1934, Karl Seifert montra pourquoi l'étude des surfaces orientées dont le bord est un nœud apporte des informations sur ce nœud ; c'est en utilisant de telles méthodes géométriques que Horst Schubert démontra en 1949 que les noeuds peuvent être décomposés en morceaux élémentaires, appelés « nœuds premiers ». Ce sont ces nœuds premiers dont les tables donnent la liste. Toutefois, même aujourd'hui, on ne connaît pas de méthode générale qui permette de savoir si un nœud est premier ou non.

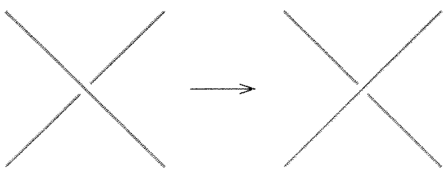


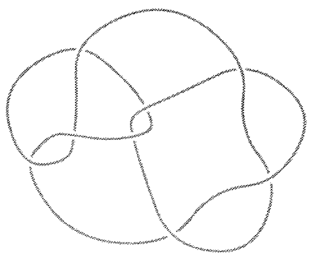
D'autres problèmes sont ouverts. Par exemple, étant donné un nœud, on peut vouloir le dessiner de la façon la plus simple possible, avec le plus petit nombre possible de croisements. Par exemple, on dessine le nœud de trêfle par des diagrammes avec 3 croisements, car on ne peut pas faire moins.

Le problème est qu'on ne connaît pas de méthode générale pour calculer ce nombre minimal de croisements, bien que dans les tables, les nœuds soient rangés selon ce nombre. Autre question ouverte : combien existe-t-il de nœuds (premiers) à nombre minimal de croisements donné ? On connaît la réponse pour les petites valeurs (dans le tableau ci-dessous, on n'a pas fait la distinction entre un nœud et son image dans un miroir) :

Nombre de croisements	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de nœuds	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2 176	9 988	46 972	253 293

En guise de conclusion, voici un dernier thème de problème. Prenons un noeud. Impossible de le dénouer sans ciseaux. Autorisons-nous donc ciseaux et colle, mais avec une règle précise : entre le moment où on coupe et le moment où on recolle, on n'a le droit de ne faire passer qu'une seule fois un brin de ficelle dans la brèche ainsi ménagée.



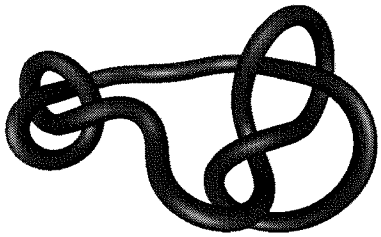


Question : combien d'opérations sont-elles nécessaires pour arriver à dénouer complètement le nœud ? On ne connaît pas de méthode qui permette d'évaluer ce nombre pour n'importe quel nœud. Sauriez-vous montrer qu'on ne peut pas résoudre le noeud dessiné ci-dessus avec moins de 3 échanges ?

Fête de la Science, octobre 2001
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur — C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

ARITHMETIQUE DES NŒUDS

Un nœud peut être constitué de plusieurs nœuds mis côte-à-côte sur une même corde, comme on le voit ci-dessous où l'on reconnait le nœud de trèfle à gauche et le nœud en 8 à droite. A partir de plusieurs nœuds, on peut créer un nœud plus compliqué en les réunissant sur une même corde.

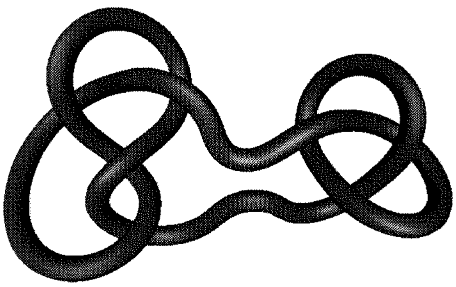


On définit ainsi une opération sur les nœuds, qui a des propriétés comparables à celles de la multiplication des nombres entiers et qu'on appelle **composition des nœuds**. Mentionnons certaines de ces propriétés.

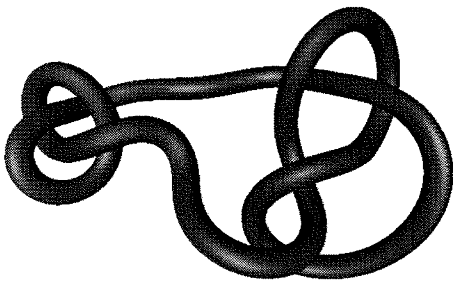
• **La commutativité** : lorsque l'on multiplie des entiers, peu importe l'ordre dans lequel on effectue le produit

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \quad \text{ou plus généralement} \quad a \times b = b \times a \quad .$$

La composition des nœuds a la même propriété : le nœud produit ne dépend pas de l'ordre des deux nœuds de départ.



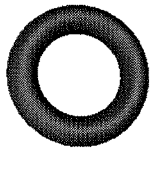
=



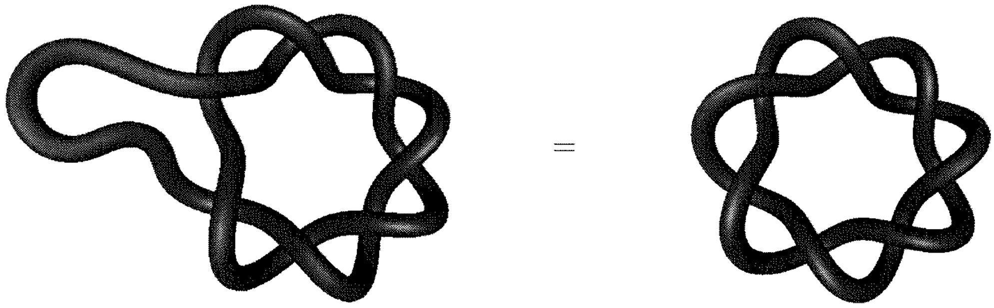
• **Le nœud trivial** : il existe un nœud qui joue le même rôle que 1 pour les entiers, c'est-à-dire

$$1 \times a = a \times 1 = a \quad \text{pour n'importe quel entier } a \text{ ;}$$

c'est le nœud trivial.

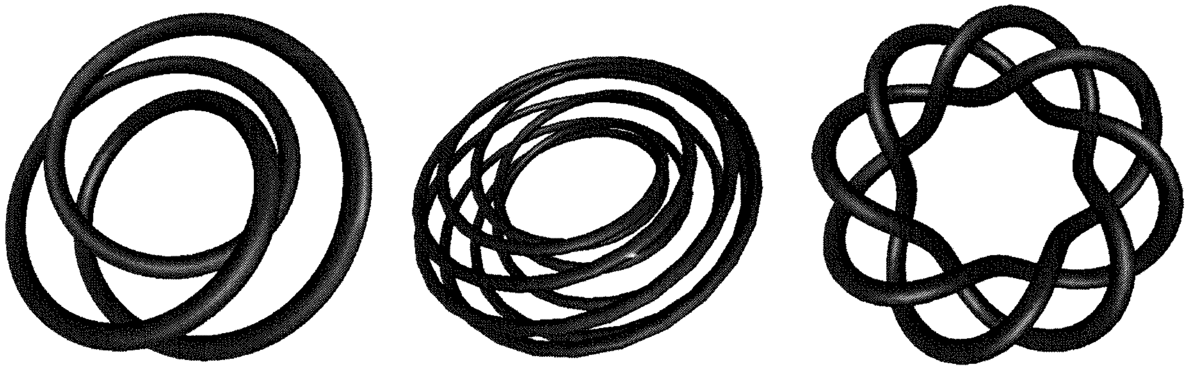


Si l'on compose un nœud avec le nœud trivial, le nœud obtenu reste le nœud de départ.



• **Les nœuds premiers** : on connait bien les nombres premiers qui sont des nombres entiers ne pouvant pas se décomposer en un produit de nombres entiers distincts d'eux-mêmes ou de 1, comme 17, 3, 101, etc... Les mathématiciens ont constaté que certains nœuds ne pouvaient pas se décomposer en produit de plusieurs nœuds ; on les appelle les **nœuds premiers**.
Par exemple, le nœud de trèfle, le nœud de 8, le nœud représenté ci-dessus sont des nœuds premiers. Le fait de savoir si un nœud est premier est un problème délicat et important car il est lié à la classification des nœuds.

• De même qu'il existe une infinité de nombres premiers, il existe une infinité de nœuds premiers. Pour démontrer ce résultat, une famille infinie de nœuds, dont tous les éléments sont des nœuds premiers a été construite. Ces nœuds sont obtenus en enroulant une corde sur une chambre à air et sont appelés les **nœuds toriques**. Le nœud de trèfle appartient à cette famille, ainsi que les nœuds suivants :



• **La décomposition en nœuds premiers** : tout nombre entier est le produit de nombres premiers ; par exemple

$$35 = 5 \times 7, \quad 189 = 3 \times 3 \times 3 \times 7, \quad \text{etc...}$$

Tout nœud se décompose en un produit de nœuds premiers (c'est un théorème qui a été démontré en 1949). Ce résultat est très important, car il indique qu'il suffit de classifier les nœuds premiers pour connaître les autres nœuds.

• Et pour finir, de même qu'en multipliant deux entiers différents de 1, on n'obtient jamais 1, il n'est pas possible de retrouver le nœud trivial en multipliant des nœuds ; en termes mathématiques, les nœuds ne forment pas un groupe et c'est l'une des raisons pour lesquelles on s'intéresse aux tresses.