Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Première

Exercice 1

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AC]. Soit M un point quelconque de [IC].
Où placer le point P sur [AB] pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

Exercice 2

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Ils attendent le lendemain matin pour se partager le butin.
Durant la nuit, l'un des pirates se lève sans bruit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Lucile, Sainte Patronne des Pirates, et peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche la sienne et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario.
Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales.
Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

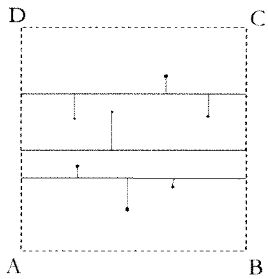
Exercice 3

On décompose un entier naturel non nul N en somme d'entiers naturels. On effectue le produit des termes intervenant dans la somme.
Par exemple, pour N = 10, les décompositions $10 = 5 + 4 + 1$ et $10 = 4 + 3 + 2 + 1$ donnent respectivement les produits : $5 \times 4 \times 1 = 20$ et $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
Proposer pour N quelconque une décomposition donnant le produit le plus grand possible.

Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Terminale

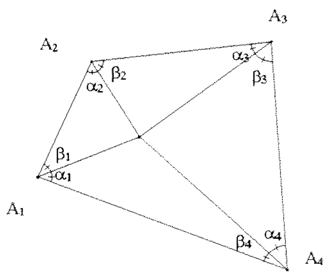
Exercice 1



Dans un parc carré ABCD d'un kilomètre de côté sont placées 288 statues.
On construit dans ce parc un réseau de la manière suivante :
1. On construit un certain nombre de chemins parallèles à (AB) allant de [CD] à [BC].
2. On construit d'autre part des chemins secondaires perpendiculaires aux précédents, partant de chacune des 2S8 statues et aboutissant aux chemins principaux (voir la figure).

Montrer qu'on peut ainsi construire un réseau de telle sorte que sa longueur totale soit inférieure à 24 kilomètres (la largeur des chemins est négligeable).

Exercice 2



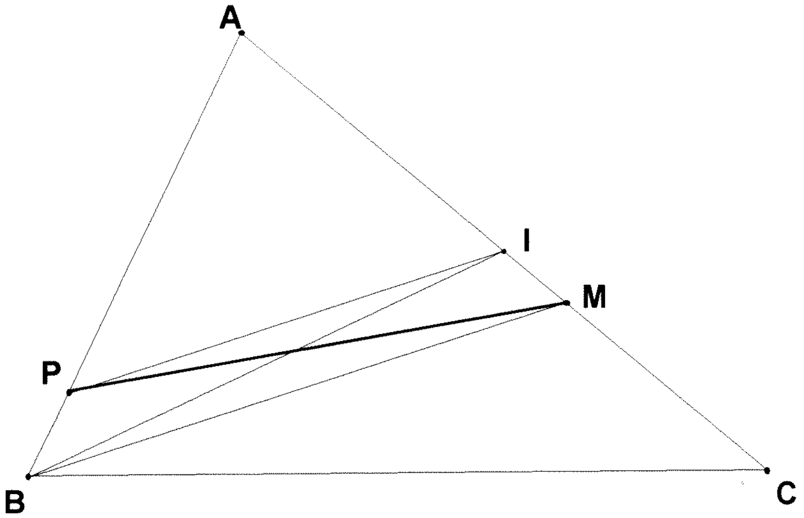
On se donne un quadrilatère convexe $\{ A_1A_2A_3A_4 \}$ et M un point quelconque intérieur à ce quadrilatère.
On définit les angles géométriques α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4, comme indiqué sur la figure.
Montrer l'existence de i entre 1 et 4 tel que : $\alpha_i \leq \beta_i$.

Exercice 3

Quels entiers sont somme d'au moins 2 entiers strictement positifs, tous consécutifs ?

CORRIGÉ RALLYE MATHÉMATIQUE 2002 CLASSE DE PREMIÈRE

Exercice 1



Menons par I la parallèle à la droite (MB). Elle rencontre le côté AB en un point P. Le triangle APM est réunion des triangles API et IPM (en particulier, l'aire de APM est la somme des aires de API et IPM). Et l'aire du triangle IPM est elle-même égale à l'aire du triangle IPB {les deux triangles ont la même base IP et leurs sommets M et B sont situés sur une parallèle à (IP)}. Or la réunion des triangles API et PIB constitue le triangle ABI. Et puisque I est le milieu de [AC], l'aire du triangle ABI est la moitié de celle du triangle ABC. Finalement, l'aire du triangle APM est la moitié de celle du triangle ABC.

Exercice 2

L'ultime somme contenue dans la cassette est de la forme $1 + 3x$, où x est un nombre entier supérieur ou égal à 1. À partir de là, remontons le temps pour reconstituer les étapes successives de l'évolution subie par le contenu de la cassette.

- Le contenu que le pirate 3 avait trouvé était $1 + (1 + 3x) \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant : $(5 + 9x)/2$.
- Le contenu que le pirate 2 avait trouvé était $1 + [(5 + 9x)/2] \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant : $(19 + 27x)/4$
- Le contenu initial, trouvé par le pirate 1, était $y = 1 + [(19 + 27x)/4] \times 3/2$, c'est-à-dire en réduisant :

$$y = (65 + 81x)/8.$$

Ce contenu initial y doit être entier. Nous sommes ainsi conduits à l'équation en entiers (on dit aussi *équation diophantienne*) :

$$8y - 81x = 65.$$

Remarquant que $8 \times 10 - 81 = -1$, nous obtenons (en multipliant par -65) la solution particulière suivante de l'équation :

$$y = -650 \text{ et } x = -65,$$

à partir de laquelle la solution générale s'écrit :

$$y = -650 + 81k \text{ et } \quad x = -65 + 8k.$$

Cette résolution a été envisagée jusqu'à présent pour les entiers relatifs sans considération de signes. Il convient à présent de prendre en compte le fait que l'on cherche des entiers positifs. La plus petite valeur de k qui convienne pour cela est $k = 9$, qui conduit à $x = 7$ et $y = 79$, qui est la réponse cherchée.

Pour avoir l'esprit parfaitement tranquille, on peut vérifier : au départ, la cassette contient 79 louis d'or. Le premier pirate jette un louis et prend le tiers des 78 restant, soit 26 ; il en reste alors 52. Le second pirate jette un louis et prend le tiers des 51 restant, soit 17 ; il en reste alors 34. Le troisième pirate jette un louis et prend le tiers des 33 restant, soit 11 ; il en reste alors 22. Enfin, les trois pirates ensemble jettent un louis et se partagent les 21 restant, à raison de 7 pour chacun.

Exercice 3

On remarque tout d'abord que $4 = 2 + 2$, et 2×2 est égal à 4, puis que $5 = 3 + 2$, et 3×2 est plus grand que 5. Les entiers plus grands s'écrivent soit sous la forme 2p s'ils sont pairs, soit sous la forme $2p + 1 = p + (p + 1)$ s'ils sont impairs, avec $p > 2$.
Alors $p \times p > 2p$ et $p \times (p + 1) > 2p + 1$. Autrement dit, un entier a plus grand que 4 s'exprime comme somme de deux entiers dont le produit est plus grand que a. Et 4 lui-même peut être remplacé par $2 + 2$, dont le produit est égal à 4.

Il en résulte que quand un entier N sera exprimé comme somme de termes donnant lieu au plus grand produit possible, ces termes pourront tous être pris plus petits que 4. Les valeurs à considérer pour les termes dans ces conditions sont donc 1, 2 et 3.

La valeur 1 ne peut pas apparaître plus d'une fois, car $1 + 1 = 2$, et $2 > 1 \times 1 = 1$.

La valeur 2 ne pas apparaître plus de deux fois, car $2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3$
et $2 \times 2 \times 2 = 8 < 9 = 3 \times 3$.

À partir de là, on est conduit à des répétitions du terme 3, ce qui conduit aux valeurs suivantes pour le maximum que le produit puisse atteindre :

- Si $N = 3n - 1$, $n > 1$, le terme 3 peut être répété $(n - 1)$ fois et il reste alors 2 ; le produit maximal obtenu est ainsi $3^{n-1} \times 2$.

- Si $N = 3n$, le terme 3 peut être répété n fois et le produit maximal obtenu est ainsi 3^n.

- Si $N = 3n + 1$, il convient de comparer le produit obtenu en répétant n fois le terme 3, après quoi il reste 1, et le produit obtenu en ne répétant que $(n - 1)$ fois le terme 3, après quoi il reste $4 = 2 + 2$. Dans le premier cas, on obtient comme précédemment 3^n et dans le second, on obtient $3^{n-1} \times 4$. C'est le second produit qui l'emporte et qu'il convient donc de préférer.

CORRIGÉ RALLYE MATHÉMATIQUE 2002 CLASSE DE TERMINALE

Exercice 1

Traçons une famille de a parallèles à (AB) équidistantes, la première étant située à la distance $1/2a$ de (AB). La distance des parallèles entre elles est alors égale à $1/a$ et la dernière est à la distance $1/2a$ de (CD). De la sorte, la distance d'une statue au chemin qui lui est le plus proche est au plus égale à $1/2a$. Traçant alors depuis chaque statue un chemin qui suit ce parcours le plus court, nous obtiendrons un réseau dont la longueur totale sera au plus égale à :

$$a + 288/2a = a + 144/a,$$

puisque la longueur en km de chacun des a premiers chemins est égale à 1.

Nous souhaitons établir qu'en choisissant convenablement la valeur de a, nous pouvons ne pas dépasser une longueur totale de 24 km, ce qui signifie réaliser l'inégalité :

$$a + 144/a \leq 24,$$

$$\text{ou : } a^2 - 24a + 144 \leq 0.$$

Or $a^2 - 24a + 144 = (a - 12)^2$. Donc la seule possibilité d'obtenir une valeur négative ou nulle s'obtient en prenant $a = 12$.

Vérification : On trace 12 chemins principaux, régulièrement espacés, auxquels les statues sont reliées chacune par un chemin de liaison allant droit au chemin principal le plus proche. La longueur, exprimée en km, de ces chemins de liaison est ainsi au plus égale à $1/24$. Le réseau construit de la sorte a au total une longueur en km majorée par $12 + 288/24 = 12 + 12 = 24$.

Prolongements de cet exercice : Le principe de tracé pour le réseau, par des parallèles équidistantes, permet de répondre à la question posée ; en revanche, des emplacements des statues étant supposés donnés, ce principe ne serait guère satisfaisant pour atteindre la longueur totale la plus courte possible. Cette question peut être étudiée en prolongement de l'exercice.

Il est facile de simuler des emplacements aléatoires pour les statues, en utilisant par exemple les ressources du site Mathematikos de Jean-Paul Quelen. Ayant ainsi placé 288 points, on peut avoir l'idée de considérer des segments mobiles parallèles à AB et de travailler sur la considération d'effectifs. Par exemple, pour le premier segment, on peut le faire progressivement monter jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse un certain nombre, disons 12 pour fixer les idées, en dessous de lui. Puis on trace alors un second segment, en le faisant monter depuis le niveau atteint par le premier, jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse 24 (le double de l'effectif précédemment fixé) entre le premier segment et lui. Et ainsi de suite pour obtenir les chemins principaux, parallèles à AB. Ensuite, on achève le réseau comme précédemment par la liaison de chaque statue avec le chemin principal le plus proche.

Il serait intéressant d'avoir une idée de la longueur que l'on peut ainsi espérer atteindre pour ce réseau ; c'est certainement nettement moins de 24 km. Autre étude possible : quelle disposition des emplacements de statues nécessite-t-elle le plus long réseau ?

Exercice 2

Projetons orthogonalement M en H_1 sur A_1A_2, H_2 sur A_2A_3, H_3 sur A_3A_4, H_4 sur A_4A_1.

L'inégalité $MH_1 > MH_2$ équivaut à $a_2 > b_2$.
De même $MH_2 > MH_3$ équivaut à $a_3 > b_3$,
$MH_3 > MH_4$ équivaut à $a_4 > b_4$ et
$MH_4 > MH_1$ équivaut à $a_1 > b_1$.

Par transitivité de la relation d'ordre, trois des inégalités précédentes entre les MH_i ($i = 1, ,4$) excluent la quatrième.

Exercice 3

De l'identité $0 + 1 + \cdots + (n - 1) + n = n(n + 1)/2$, n entier, $n > 0$, on déduit pour p entier quelconque :

$$p + (p + 1) + \cdots + (p + n - 1) + (p + n) = (n + 1)(n + 2p)/2.$$

Soit N un entier. Écrire N comme somme d'entiers consécutifs, en nombre au moins égal à deux, revient ainsi à trouver $n > 0$ et p tels que :

$$2N = (n + 1)(n + 2p).$$

Les deux facteurs qui apparaissent au second membre sont de parités différentes. La question devient d'écrire 2N comme produit d'un nombre pair et d'un nombre impair plus grand que 1.

Cela sera possible, en mettant dans N autant de fois que possible 2 en facteur, si et seulement s'il subsiste alors un facteur impair plus grand que 1. Par exemple, si $N = 20$, on écrira $2N = 5 \times 8$ et on pourra ainsi prendre $n = 4$ et $p = 2$.

(vérification : $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$)

Tous les entiers supérieurs à 1 sauf les puissances de 2 sont dans ce cas. Mais si N est une puissance de 2, comme 2 lui-même, puis 4, 8, 16 et ainsi de suite, il n'est pas possible de l'exprimer comme somme d'entiers consécutifs.