LETTRE... OUVERTE

MICHÈLE AUDIN

Institut de Recherche Mathématique Avancée, U.L.P. Strasbourg

Cher OUVERT,

C'est avec plaisir[(1)] que j'ai vu que tu avais publié un article [**4**] sur quelques théorèmes sur les cercles dans ton numéro 105 d'avril 2002.

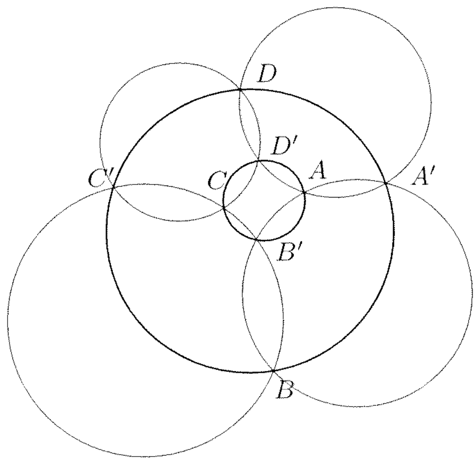


FIGURE 1

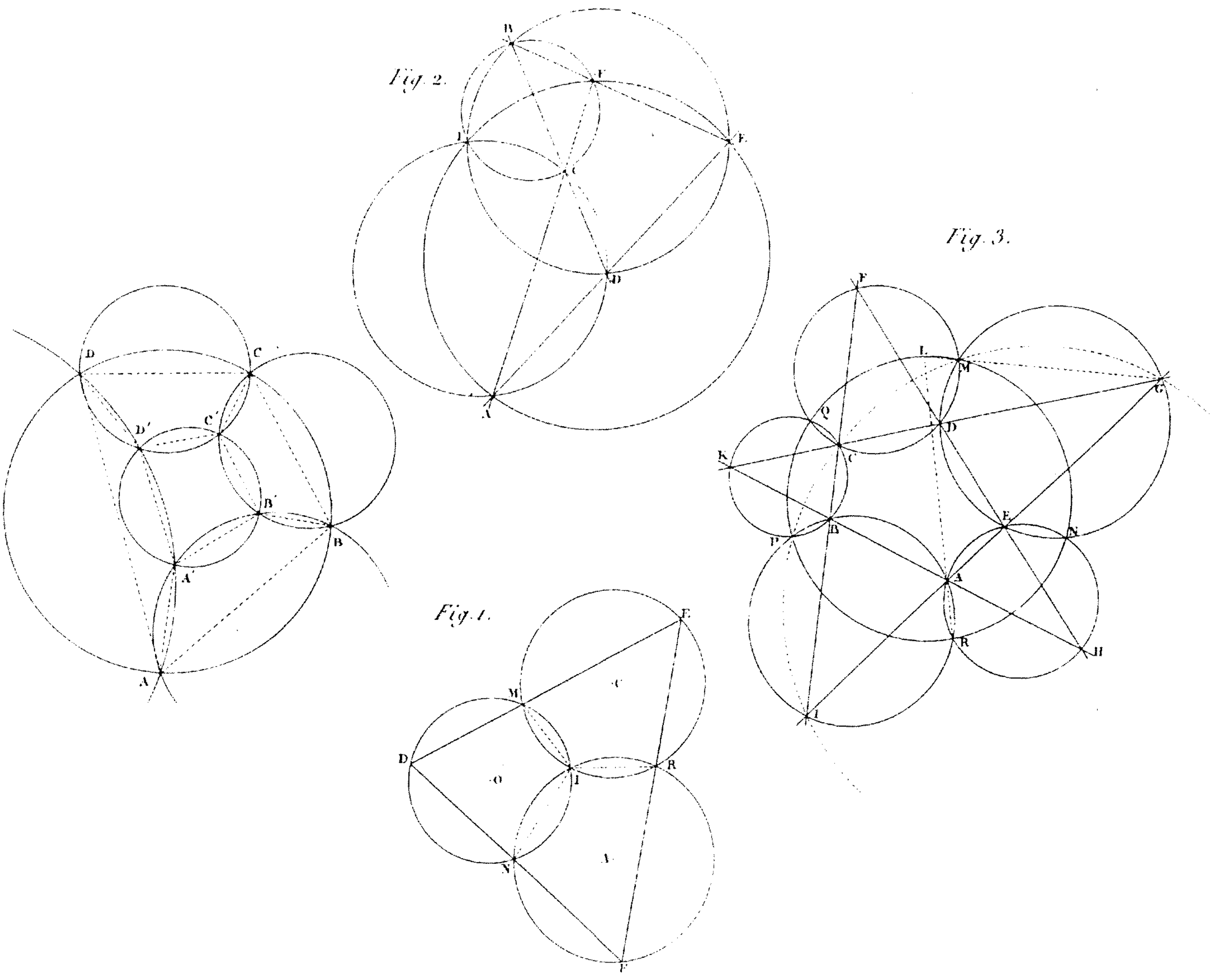
C'est une erreur commune[(2)], puisqu'on la trouve même dans l'excellent livre [**5**] (BERGER [**3**, 10.9.7.2], lui, ne commet pas l'erreur) que de citer le théorème résumé par la figure 1 sous le nom de « théorème de MIGUEL ». Il s'agit en fait d'AUGUSTE MIQUEL, avec un « Q », comme me l'a fait remarquer DANIEL PERRIN avant la publication de [**1**] (heureusement !), dont ledit théorème fait, si j'ose dire, la « une ».

Le théorème de MIQUEL est un des résultats d'un des trois articles publiés par AUGUSTE MIQUEL, régent à Nantua, dans le troisième volume du *Journal* de LIOUVILLE en 1838 (il y a aussi, dans ce volume quelques articles de JACOBI, LIOUVILLE et d'autres mathématiciens dont l'histoire a choisi de garder les noms). Voici des reproductions des figures qui accompagnent ces articles (tu y verras sans doute, cher OUVERT, que les figures qu'on publiait en 1838 sont plus belles que les tiennes — même si le « scannage » des planches pour la BNF, que j'ai utilisé pour ne pas déteriorer les volumes de la bibliothèque de l'IRMA, a été fait de façon désastreuse).

(1) Mais je ne te félicite pas pour la qualité de la reproduction des figures !

(2) Presque aussi commune que celle de confondre SIMSON (1687–1768) — à qui PONCELET attribue à tort la droite qui porte désormais son nom, mais aurait été découverte par WALLACE — et SIMPSON (1710–1761), inventeur d'une méthode d'intégration.

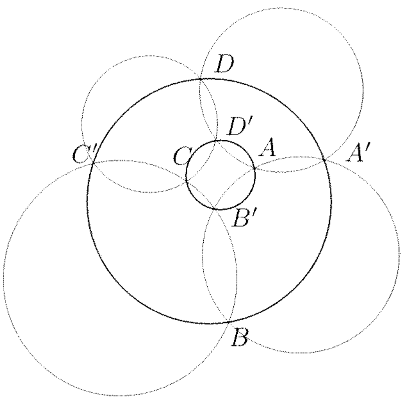
Journal de Mathématiques. Octobre 1838.



Les figures de Miquel

Bon, trêve de critiques (pour l'instant). Je t'écrivais surtout pour ajouter mon grain de sel aux « ouvertures possibles » de [4]. Je rebondis sur le point à l'infini mentionné dans la partie sur les cercles « de Ceva ». Comment passe-t-on du théorème de Miquel à celui du « pivot » (figure 2 ci-dessous et la Fig. 1 de Miquel)) ? On « envoie » un des points à l'infini, disons D' avec les notations de la figure 1. Les cercles passant par D' deviennent les droites $AB'C$, $BC'A$ et $CA'B$, les trois autres cercles restent des cercles et passent par D, le pivot. On peut bien sûr considérer l'expédition de D' à l'infini comme l'application d'une inversion de pôle D' et ainsi éviter de prononcer le nom de ce point à l'infini.

L'avoir nommé laisse à penser... que ce type de problème gagnerait à être traité à sa place véritable, dans **C** (le plan euclidien !) auquel on a ajouté un point à l'infini,



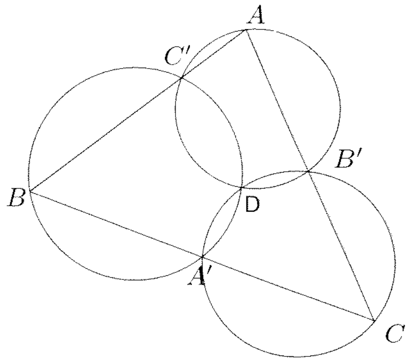


FIGURE 2

en d'autres termes, au choix, dans la sphère (par projection stéréographique) ou la droite projective complexe (ces diverses façons de décrire la sphère sont explicitées dans [**1**, Chap. V]).

Ce qu'on gagne ? Mon cher OUVERT, tu l'as compris, les théorèmes présentés dans [**4**] sont des théorèmes de cocyclicité, ils se démontrent à grands coups d'égalités d'angles (inscrits). Mais, puisqu'on est dans $\mathbf{C}$, il y a une façon élégante, tu le sais bien, d'exprimer la cocyclicité de quatre points : quatre points (distincts) A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{C-A}{C-B}\Big/\frac{D-A}{D-B} \in \mathbf{R}$$

(une manière de dire qu'un argument de ce nombre vaut 0 modulo π). Ce (bi-)rapport se note $[A, B, C, D]$... ajoutons que rien n'empêche un des points d'être à l'infini. Le birapport est une notion projective.

Et alors ? Je te sens impatient. J'en viens à nos moutons, c'est-à-dire à nos théorèmes. DANIEL PERRIN (encore lui) m'a appris que si A, B, C, D, A', B', C', D' sont huit points de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, on a :

$$[A, B, C, D'][B, C, A, D'][C, A, B, D'][A', B', C', D][B', C', A', D][C', A', B', D] = 1$$

(vérification immédiate). Appelons ce résultat « théorème des six birapports de PERRIN ». Il a des conséquences spectaculaires, simplement parce que, si cinq de ces birapports sont réels, le sixième l'est aussi. J'ai ainsi démontré MIQUEL et le pivot.

Pourquoi je te parle de ça ? Eh bien parce que, dans [**4**], il y avait MIQUEL, le pivot, même le pentagone des figures de MIQUEL, le point de CLIFFORD, mais il y manquait un théorème. Un célèbre, un facile, un que tout le monde connaît et dont le théorème de PERRIN nous révèle qu'il est de la même nature. Je te laisse le découvrir, mais je t'aide un peu : tu appliques le truc du haut au cas où A', B' et C (il n'y a pas de faute de frappe) sont les projetés orthogonaux d'un point D' sur les trois côtés d'un triangle ABC'. Je t'ai mis une indication au début de cette lettre. En désespoir de cause, tourne la page, regarde la figure 3 et retourne-toi pour trouver une autre indication.

Bien ouvertement à toi,

Michèle

P.S. Ma dernière critique : comme j'ai déjà eu l'occasion de te le dire, je ne suis pas sûre que tu relises les articles avec beaucoup de soin. Autrement, t'aurait-il échappé que le M. CLAUDE MITCHI mentionné au tout début de [**4**] est ma collègue (Madame) CLAUDE MITSCHI ? et qu'elle était bien jeune, en 1971, pour avoir pu donner des exercices aux auteurs de [**4**] ?

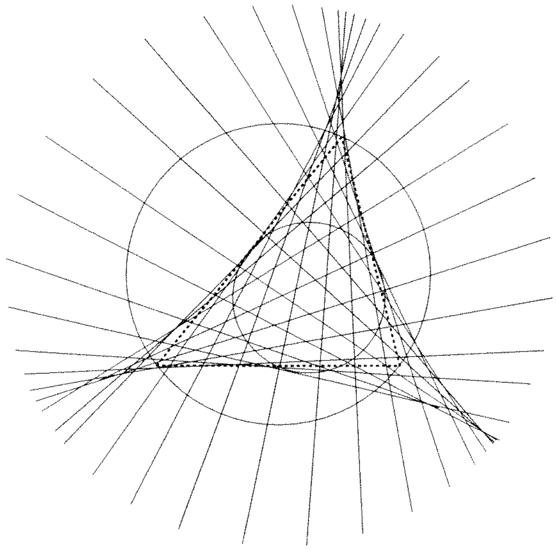


FIGURE 3

Références

[1] M. Audin. *Géométrie*. Espaces34 et Belin, 1998.

[2] M. Audin. *Geometry*. Springer, 2002.

[3] M. Berger. *Géométrie*. CEDIC, 1977. Réédition Nathan, 1990.

[4] C. Comparon and R. Voltz. Point de Clifford. *L'Ouvert*, 105 :29–35, 2002.

[5] J.-C. Sidler. *Géométrie projective*. InterÉditions, 1993.

Le théorème célèbre, c'est la droite de SIMSON ! — une famille de droites dont la figure 3, copiée dans [2], montre l'enveloppe.