CENT ANS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

par Christian KASSEL [1]

" On peut déjà prédire sans grand risque d'erreur que le XX^e siècle restera dans l'histoire des mathématiques comme le siècle de la Topologie, ... "

J. Dieudonné [D1]

Considérons la famille d'ellipses E_a définies dans un repère orthonormé d'un plan euclidien par l'équation

$$x^2 + y^2/a^2 = 1,$$

où $a > 0$ (voir la figure 1). Si $a \neq a'$, les ellipses E_a et $E_{a'}$ sont deux objets géométriques différents (considérez les longueurs du petit axe et du grand axe de E_a).

Par contre pour un topologue, elles sont équivalentes. En effet, la transformation f du plan dans lui-même donnée par $f(x,y) = (x,a'y/a)$ est une bijection continue qui envoie l'ellipse E_a sur $E_{a'}$, et son inverse $(x,y) \mapsto (x,ay/a')$ est également continue. Une telle bijection "bicontinue" est ce que les topologues appellent un *homéomorphisme*.

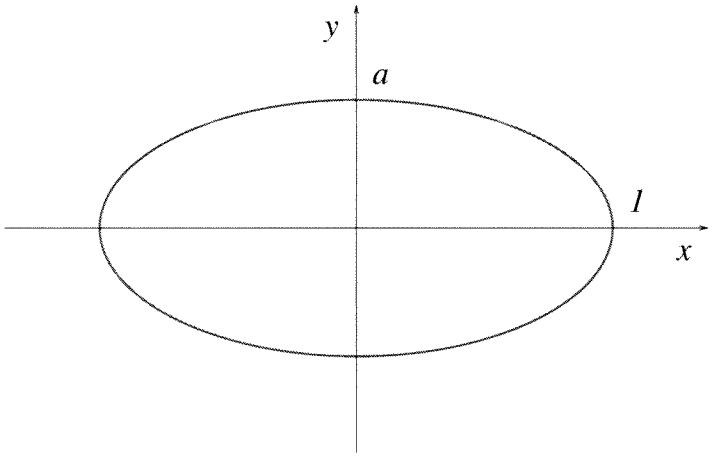

Figure 1. L'ellipse E_a

Le but de la topologie est de classer les figures géométriques à homéomorphisme près. Intuitivement, un homéomorphisme transforme une figure sans la déchirer, ni l'écraser. Ainsi un carré (plein) est homéomorphe à un disque, un cube à une boule, mais un carré n'est homéomorphe ni à un cube, ni à un segment. Cantor([5]) a bien découvert en 1877 des bijections entre segment, carré et cube, mais de telles bijections ne peuvent être des homéomorphismes, comme l'a démontré Brouwer([4]) autour de 1910.

Comment démontrer qu'il existe ou qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre deux figures données?

1. © L'OUVERT 106 (2002)

Cette question, parmi d'autres, a donné naissance à la fin du XIX^e siècle à ce que l'on appelle maintenant la topologie algébrique. Ce domaine des mathématiques, désormais centenaire, mériterait d'être aussi familier au public éclairé et aux lycéens que l'algèbre, la géométrie ou l'analyse, mais il faut attendre le deuxième, voire le troisième cycle universitaire pour qu'un étudiant apprenne les premières notions de topologie algébrique ; même un ouvrage aussi vaste que le Dictionnaire des Mathématiques de l'Encyclopædia Universalis [EU] ne consacre aucune rubrique à la topologie algébrique.

Pourtant au cours du vingtième siècle, cette dernière a radicalement changé la face des mathématiques, introduisant des concepts et des techniques nouvelles qui non seulement ont permis des résultats spectaculaires en topologie, mais sont également devenus indispensables dans d'autres domaines, au point que de nombreux mathématiciens pensent comme Dieudonné que « le XX^e siècle restera dans l'histoire des mathématiques comme le siècle de la topologie.»Le but de cet article est de donner une idée de ce qu'est la topologie algébrique et de mentionner quelques travaux actuels et des problèmes ouverts. Il n'est pas question ici d'esquisser une histoire de la topologie, pour laquelle il existe d'excellentes références comme [D2], [HT], [P2]. Contentons-nous de signaler que le mot "topologie" a été créé par Listing([16]) en 1836, mais n'a guère été utilisé avant 1920. Auparavant on utilisait l'expression *analysis situs* par opposition à *analysis magnitudinis*, l'analyse des grandeurs mesurables, c'est-à-dire la géométrie. Si la géométrie remonte à l'Antiquité grecque, il a fallu attendre la fin du XVII^e et le début du XVIII^e siècle pour que l'on attaque des problèmes géométriques dans lesquels la mesure des éléments qui les constituent ne joue aucun rôle, mais où seule importe la position des uns par rapport aux autres. On estime parfois que le célèbre "problème des ponts de Kœnigsberg" posé et résolu par Euler([10]) autour de 1735 est le point de départ de la topologie, mais ce problème relève plutôt de la théorie des graphes.

Le texte fondateur de la topologie algébrique est le mémoire intitulé *Analysis Situs* et publié par Poincaré([18]) en 1895 ([P1], pp. 193–288). En une centaine de pages magistrales, Poincaré introduit le concept d'homologie, les nombres de Betti, le groupe fondamental, la caractéristique d'Euler-Poincaré, et établit ce que l'on appelle maintenant la dualité de Poincaré (on retrouvera ces concepts fondamentaux dans les pages qui suivent).

Le but poursuivi par Poincaré est d'appliquer son *analysis situs* à l'étude qualitative des équations différentielles, à celle des fonctions algébriques à deux variables, et à la recherche des groupes finis dans ce que nous appelons aujourd'hui les groupes de Lie.

1 La caractéristique d'Euler-Poincaré

Considérons chacun des cinq polyèdres réguliers, et notons s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces (voir le tableau ci-dessous). On voit que pour chaque polyèdre la formule suivante, découverte en 1750 par Euler, est vérifiée :

$$s - a + f = 2. \tag{1}$$

	s	a	f
Tétraèdre	4	6	4
Cube	8	12	6
Octaèdre	6	12	8
Dodécaèdre	20	30	12
Icosaèdre	12	30	20

Si les polyèdres réguliers relèvent de la géométrie au sens le plus primitif, celui de la science des longueurs et des angles, un instant de réflexion montre qu'il n'en est rien de la formule (1). En effet, un allongement ou un raccourcissement des arêtes, une déformation du polyèdre ne modifient pas les entiers s, a, f et, par conséquent, la somme alternée $s - a + f = 2$ reste constante au cours de ces transformations. À vrai dire, la formule (1) est davantage une propriété de la sphère que des polyèdres réguliers. En effet, projetons un polyèdre à partir de son centre de gravité sur la sphère qui le circonscrit. On obtient un dessin sur la sphère constitué de f faces séparées par a arêtes courbes reliant s points qui jouent le rôle de sommets. Nous pouvons raffiner cette subdivision de la sphère en coupant certaines faces par de nouvelles arêtes. Si l'on coupe une face par une arête reliant deux sommets existants, on augmente à la fois le nombre d'arêtes et le nombre de faces d'une unité ; la somme alternée $s - a + f$ reste, elle, constante. Si cette arête part du milieu d'une autre arête jusqu'à un sommet existant, le nombre de sommets et le nombre de faces ont été augmenté d'un, mais le nombre d'arêtes de deux, ce qui entraîne également que $s - a + f$ reste constante. C'est là un fait général. Chaque fois que l'on raffine une subdivision, l'entier $s - a + f$ ne varie pas. Si maintenant on a deux subdivisions polygonales distinctes Σ et Σ' de la sphère, quitte à les bouger un tout petit peu, on voit qu'il existe une subdivision polygonale (c'est la superposition de Σ et de Σ') qui raffine à la fois Σ et Σ'. De l'analyse précédente, il résulte que la valeur de $s - a + f$ est la même pour Σ et pour Σ'. Cette valeur identique pour toutes les subdivisions polygonales de la sphère $\mathbf{S}^2$ est appelée la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de $\mathbf{S}^2$, et notée $\chi(\mathbf{S}^2)$. On a $\chi(\mathbf{S}^2) = 2$ comme conséquence de (1).

Le raisonnement que nous avons fait pour une sphère marche pour n'importe quelle surface S ; celle-ci possède une caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S)$ qui est la valeur de $s - a + f$ pour n'importe quelle subdivision polygonale de S :

$$\chi(S) = s - a + f. \tag{2}$$

Un homéomorphisme d'une surface S sur une autre surface S' transporte une subdivision polygonale de S en une subdivision polygonale de S' avec le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Il en résulte que deux surfaces homéomorphes ont même caractéristique d'Euler-Poincaré : $\chi(S) = \chi(S')$.

On sait qu'une surface arbitraire connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), compacte et sans bord, plongée dans $\mathbf{R}^3$, s'obtient à homéomorphisme près en rajoutant un nombre fini d'anses à une sphère. Rajouter une anse à une surface S, c'est d'abord découper deux disques dans S, ce qui crée une surface trouée dont le bord est l'union disjointe de deux cercles, puis recoller bord à bord un cyclidre avec la surface trouée (voir la figure 2). Soit S' la surface ainsi obtenue. En prenant des subdivisions po-

lygonales adaptées à la découpure, on voit que

$$\chi(S') = \chi(S) - 2. \tag{3}$$

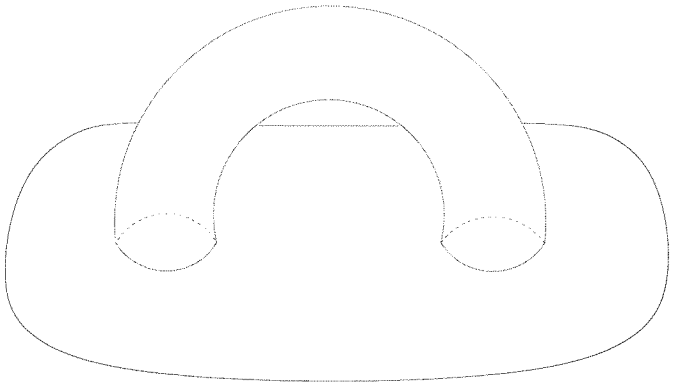

Figure 2. Recollement d'une anse

Il résulte de (3) que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface $\mathbf{S}_g$ obtenue à partir d'une sphère en lui rajoutant g anses vaut

$$\chi(\mathbf{S}_g) = 2 - 2g, \tag{4}$$

ce qui montre que $\mathbf{S}_g$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S}_{g'}$ si $g \neq g'$. Le cas $g = 1$ est celui du tore $\mathbf{T} = \mathbf{S}_1$ ("chambre à air" représentée dans la figure 8) pour lequel on a $\chi(\mathbf{T}) = 0$.

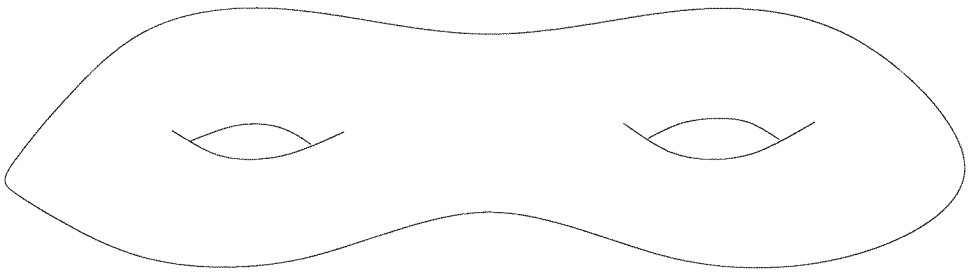

Figure 3. Exemple de surface $\mathbf{S}_2$

2 Type d'homotopie

La caractéristique d'Euler-Poincaré définie plus haut est ce que l'on appelle un *invariant topologique* des surfaces, c'est-à-dire une façon d'attacher un nombre à une surface de telle manière que ce nombre soit le même pour deux surfaces homéomorphes. On verra plus loin que l'on peut construire d'autres invariants de surfaces qui ne sont plus des nombres, mais des objets algébriques tels des espaces vectoriels ou des groupes.

La caractéristique d'Euler-Poincaré, comme d'autres invariants topologiques considérés plus bas, a une propriété d'invariance plus forte encore ; c'est un invariant du type d'homotopie. Pour expliquer ce qu'est le type d'homotopie d'une surface ou d'un espace topologique, il nous faut d'abord introduire la définition suivante : on dit que deux applications continues $f, f' : X \to Y$ entre deux espaces topologiques sont *homotopes* s'il existe une famille d'applications continues $h_t : X \to Y$ dépendant

continûment d'un paramètre $t \in [0,1]$, telle que pour $t = 0$ et $t = 1$ on a: $h_0 = f$ et $h_1 = f'$. La famille h_t est appelée une homotopie. Par exemple la famille d'applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ définies pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $t \in [0,1]$ par $h_t(x) = (1-t)x$ est une homotopie entre l'identité de $\mathbf{R}^n$ et l'application constante nulle.

Étant donné deux espaces topologiques X et Y, on dit qu'ils ont le même *type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que les applications composées $g \circ f : X \to X$ et $f \circ g : Y \to Y$ soient homotopes à l'identité. Deux espaces homéomorphes ont évidemment le même type d'homotopie, mais deux espaces peuvent avoir le même type d'homotopie sans être homéomorphes. Ainsi l'homotopie donnée quelques lignes plus haut montre que tout espace topologique homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point, alors que $\mathbf{R}^n$ et l'espace réduit à un point ne sont pas en bijection, *a fortiori* ne sont pas homéomorphes. On peut de même montrer qu'un cylindre a le même type d'homotopie que sa base; plus généralement, un espace que l'on peut "écraser" continûment sur un autre a le même type d'homotopie que lui.

Un invariant topologique est dit *homotopique* s'il prend la même valeur sur des espaces qui ont le même type d'homotopie. La caractéristique d'Euler-Poincaré étant un invariant homotopique (on verra pourquoi au § 4), on voit que deux surfaces $\mathbf{S}_g$ et $\mathbf{S}_{g'}$ n'ont le même type d'homotopie que si $g = g'$.

3 Les nombres de Betti

Ce sont des invariants homotopiques plus fins que la caractéristique d'Euler-Poincaré. Pour une surface S il y a trois nombres de Betti: $\beta_0(S)$, $\beta_1(S)$ et $\beta_2(S)$; ce sont des entiers naturels qui vérifient la relation

$$\chi(S) = \beta_0(S) - \beta_1(S) + \beta_2(S). \tag{5}$$

En comparant (5) et (2), on pourrait penser que $\beta_0(S)$ est le nombre de sommets d'une subdivision polygonale de la surface, $\beta_1(S)$ le nombre d'arêtes et $\beta_2(S)$ le nombre de faces, mais on sait que ces nombres varient d'une subdivision à l'autre. Une définition rigoureuse des nombres de Betti requiert l'introduction des premiers éléments de ce que l'on appelle *l'algèbre homologique.*

Si Σ est une subdivision polygonale d'une surface S, notons $C_0(\Sigma)$ (resp. $C_1(\Sigma)$, resp. $C_2(\Sigma)$) l'espace vectoriel réel dont une base est formée par tous les sommets (resp. par toutes les arêtes, resp. par toutes les faces) de Σ. Un élément de $C_0(\Sigma)$ est une combinaison linéaire formelle finie $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ de sommets $v_1, \ldots, v_k$ de Σ, les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ étant des nombres réels. De la même façon les éléments de $C_1(\Sigma)$ (resp. de $C_2(\Sigma)$) sont des combinaisons linéaires à coefficients réels d'arêtes (resp. de faces) de Σ. Les dimensions de ces espaces vectoriels sont égales au cardinal de leurs bases respectives, ce qui donne

$$\dim C_0(\Sigma) = s, \quad \dim C_1(\Sigma) = a, \quad \dim C_2(\Sigma) = f,$$

où s (resp. a, resp. f) est le nombre de sommets (resp. d'arêtes, resp. de faces) de Σ. Nous allons maintenant définir deux applications linéaires $d_1 : C_1(\Sigma) \to C_0(\Sigma)$ et

$d_2 : C_2(\Sigma) \to C_1(\Sigma)$. Munissons au préalable chaque arête et chaque face d'une orientation. Pour définir d_1, il suffit de donner la valeur de d_1 sur chaque élément de la base de $C_1(\Sigma)$, c'est-à-dire sur chaque arête A : si l'arête orientée A va du sommet v_0 vers le sommet v_1, on pose

$$d_1(A) = v_1 - v_0.$$

On définit d_2 en donnant sa valeur sur chaque face F de Σ : si le bord de F est composé des arêtes $A_1, \ldots, A_k$, on pose

$$d_2(F) = \varepsilon(F,A_1)\, A_1 + \cdots + \varepsilon(F,A_k)\, A_k,$$

où $\varepsilon(F,A_i) = +1$ si les orientations de F et de A_i sont compatibles et $\varepsilon(F,A_i) = -1$ sinon.

Il est facile de voir que $d_1(d_2(F)) = 0$ pour toute face F de Σ. La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{0} C_2(\Sigma) \xrightarrow{d_2} C_1(\Sigma) \xrightarrow{d_1} C_0(\Sigma) \xrightarrow{0} \{0\} \tag{6}$$

est ce que l'on appelle un *complexe*, à savoir une suite d'applications linéaires telle que la composée de deux applications consécutives de la suite soit nulle. De cette dernière condition il résulte que l'image d'une application de la suite est contenue dans le noyau de la suivante. Les nombres de Betti $\beta_i(\Sigma)$ associés à la subdivision polygonale Σ sont par définition égaux à la différence — positive — des dimensions du noyau et de l'image contenue dans ce noyau. Dans notre cas, cela donne

$$\begin{aligned}
\beta_0(\Sigma) &= \dim C_0(\Sigma) - \dim \mathrm{Im}(d_1), \\
\beta_1(\Sigma) &= \dim \mathrm{Ker}(d_1) - \dim \mathrm{Im}(d_2), \\
\beta_2(\Sigma) &= \dim \mathrm{Ker}(d_2) - \dim \{0\}.
\end{aligned}$$

On a utilisé ici la notation Im pour l'image d'une application linéaire et Ker pour le noyau (cette dernière notation renvoie au mot allemand *Kern*). L'espace vectoriel $C_0(\Sigma)$ intervient dans la définition de $\beta_0(\Sigma)$ car c'est le noyau de l'application nulle $C_0(\Sigma) \to \{0\}$. De la relation $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ qui est valide pour toute application linéaire $f : E \to F$, on déduit

$$\begin{aligned}
\beta_0(\Sigma) - \beta_1(\Sigma) + \beta_2(\Sigma) &= \dim C_0(\Sigma) - \dim C_1(\Sigma) + \dim C_2(\Sigma) \\
&= s - a + f = \chi(S).
\end{aligned} \tag{7}$$

On voit ainsi que la somme alternée des entiers $\beta_i(\Sigma)$ ne dépend pas de la subdivision polygonale Σ choisie. Poincaré a conjecturé, et Alexander([1]) a démontré vers 1915, que chaque entier $\beta_i(\Sigma)$ est indépendant de la subdivision polygonale et des orientations choisies, ce qui permet de définir les nombres de Betti de la surface S par $\beta_i(S) = \beta_i(\Sigma)$ pour $i = 0,1,2$. La relation (5) est alors conséquence de (7). On montre aisément que $\beta_0(S)$ est le nombre de composantes connexes de S (donc $\beta_0(S) = 1$ si S est connexe).

Ce procédé marche pour n'importe quel espace topologique raisonnable. Considérons par exemple un disque $\mathbf{D}^2$. Comme le montre la figure 4, le disque possède

une subdivision polygonale Σ avec une seule face F, à savoir le disque tout entier, une seule arête A, qui est le bord du disque, et un seul sommet v sur le bord. Dans ce cas les espaces vectoriels $C_i(\Sigma)$ $(i = 0,1,2)$ sont tous unidimensionnels. On vérifie que l'on a

$$d_2(F) = A \quad \text{et} \quad d_1(A) = v - v = 0.$$

Il en résulte que $\mathrm{Ker}(d_2) = \{0\}$, que $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathrm{Im}(d_2)$ et que $\mathrm{Im}(d_1) = \{0\}$. Par conséquent,

$$\beta_0(\mathbf{D}^2) = 1 \quad \text{et} \quad \beta_1(\mathbf{D}^2) = \beta_2(\mathbf{D}^2) = 0. \tag{8}$$

Si l'on enlève la face F au disque $\mathbf{D}^2$, il reste un cercle, que nous noterons $\mathbf{S}^1$. Dans ce cas, $C_2(\Sigma) = \{0\}$, les applications d_2 et d_1 sont nulles, et donc

$$\beta_0(\mathbf{S}^1) = \beta_1(\mathbf{S}^1) = 1 \quad \text{et} \quad \beta_2(\mathbf{S}^1) = 0. \tag{9}$$

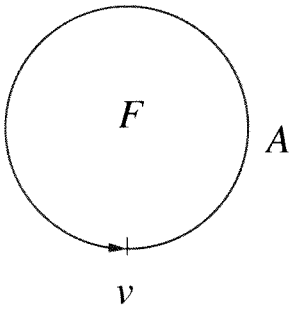

Figure 4. Une subdivision polygonale d'un disque

4 Les groupes d'homologie

Un grand pas a été franchi lorsqu'au lieu de considérer les nombres de Betti qui sont des entiers naturels, on a considéré des espaces vectoriels dont ils sont les dimensions. En reprenant les notations du § 3, on définit les espaces vectoriels quotients

$$H_0(\Sigma) = C_0(\Sigma)/\mathrm{Im}(d_1), \quad H_1(\Sigma) = \mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_2), \quad H_2(\Sigma) = \mathrm{Ker}(d_2)/\{0\}.$$

Puisque leur dimension $\beta_i(\Sigma)$ est indépendante de Σ, il en est de même (à isomorphisme près) des espaces vectoriels $H_i(\Sigma)$. On pose $H_i(S) = H_i(\Sigma)$. Les espaces vectoriels $H_i(S)$ sont appelés les *groupes d'homologie* de S.

Qu'a-t-on gagné à remplacer les nombres de Betti par un objet plus compliqué, à savoir les espaces vectoriels dont ils sont les dimensions alors qu'un espace vectoriel de dimension finie est entièrement déterminé par sa dimension? C'est que les groupes d'homologie peuvent être caractérisés par quatre axiomes qui ne pourraient que difficilement s'exprimer à l'aide des nombres de Betti. Nous allons énoncer ces axiomes, qui ont été dégagés dans les années 1940 par Eilenberg([9]) et Steenrod([19]), et montrer comment en déduire les groupes d'homologie de la sphère et, plus généralement, de la sphère n-dimensionnelle $\mathbf{S}^n$ définie comme le sous-ensemble des points $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

(a) Le premier axiome énonce la *naturalité* (ou encore la *fonctorialité*) des groupes d'homologie. Il signifie qu'on associe à tout espace topologique X des espaces

vectoriels réels $H_i(X)$ ($i \in \mathbf{N}$) et à toute application continue $f : X \to Y$ des applications linéaires $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ de manière que, si f est l'application identité d'un espace topologique X, alors f_* est l'application identité de $H_i(X)$, et que, si $g : Y \to Z$ est une autre application continue, on a $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Il en résulte aussitôt que $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.

(b) Le second axiome énonce que, si f et $g : X \to Y$ sont deux applications continues *homotopes*, alors $f_* = g_*$. Les axiomes (a) et (b) ont pour conséquence que les groupes d'homologie sont des invariants homotopiques.

(c) Le troisième axiome considère le cas où X est un espace topologique recouvert par deux sous-espaces U et V. Alors, sous certaines conditions naturelles que nous ne préciserons pas, les groupes d'homologie de X, de U, de V et de l'intersection $U \cap V$ sont reliés par une longue suite exacte d'applications linéaires

$$\cdots \to H_i(U \cap V) \to H_i(U) \oplus H_i(V) \to H_i(X) \to H_{i-1}(U \cap V) \to H_{i-1}(U) \oplus H_{i-1}(V) \to \cdots$$

où l'on dit qu'une suite est *exacte* si l'image de chaque application linéaire de la suite est égale au noyau de la suivante.

(d) Le dernier axiome est un axiome de *normalisation*. Il affirme que pour un espace réduit à un point P on a

$$H_0(\{P\}) = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad H_i(\{P\}) = \{0\} \ \text{ pour tout } i > 0.$$

Lorsque X est une variété de dimension n, c'est-à-dire un espace topologique dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la boule n-dimensionnelle $\mathbf{D}^n$ de centre $P = (0,\ldots,0)$ et de rayon 1, autrement dit, au sous-ensemble des points $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$, alors les espaces vectoriels $H_i(X)$ sont tous de dimension finie et $H_i(X) = \{0\}$ pour tout $i > n$. Dans ce cas, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X)$ de X est bien définie et on a la généralisation suivante de (5) :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \beta_i(X)$$

où $\beta_i(X) = \dim H_i(X)$. Jointe à l'axiome (b), cette formule entraîne que la caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant homotopique.

Pour une variété X de dimension n Poincaré a également établi l'existence d'un isomorphisme entre l'espace vectoriel $H_i(X)$ et le dual de l'espace vectoriel $H_{n-i}(X)$ (pour $0 \leq i \leq n$). Cette dualité entraîne l'égalité $\beta_i(X) = \beta_{n-i}(X)$ entre nombres de Betti.

Utilisons maintenant les axiomes (a), (b) et (d) pour montrer que pour la boule $\mathbf{D}^n$ on a

$$H_0(\mathbf{D}^n) = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad H_i(\mathbf{D}^n) = \{0\} \ \text{ pour tout } i > 0. \tag{10}$$

Soit p la projection de $\mathbf{D}^n$ sur le centre P de la boule et q l'inclusion de P dans $\mathbf{D}^n$. L'application composée $p \circ q$ est l'application identité id du singleton $\{P\}$, ce qui implique $p_* \circ q_* = \mathrm{id}_*$ au vu de l'axiome (a). Par ailleurs, la composée $q \circ p$ est reliée à

l'application identité de $\mathbf{D}^n$ par l'homotopie suivante : h_t est l'application de la boule dans elle-même définie par $h_t(x_1,\ldots,x_n) = (tx_1,\ldots,tx_n)$ pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{D}^n$ et $t \in [0,1]$ (il est clair que $h_0 = q \circ p$ et $h_1 = \mathrm{id}$). Par conséquent, d'après (b), on a $q_* \circ p_* = \mathrm{id}_*$. Nous venons donc d'établir que q_* est un isomorphisme de $H_i(\{P\})$ sur $H_i(\mathbf{D}^n)$ pour tout $i \geq 0$. On conclut avec (d).

Montrons à l'aide de l'axiome (c) que les groupes d'homologie de la sphère $\mathbf{S}^n$ sont donnés pour $n \geq 1$ par

$$H_i(\mathbf{S}^n) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } i = 0 \text{ ou } n, \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

Si $n = 1$, alors (11) est une conséquence de (9). Si $n > 1$, supposons les formules (11) vérifiées pour $\mathbf{S}^{n-1}$ et montrons-les pour $\mathbf{S}^n$. Soit U et V les deux hémisphères de $\mathbf{S}^n$ définis respectivement comme les points $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbf{S}^n$ tels que $x_0 \geq 0$ (resp. $x \leq 0$). Ces hémisphères sont tous deux homéomorphes à la boule $\mathbf{D}^n$. Par ailleurs, l'intersection $U \cap V$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$. En appliquant l'axiome (c) et (10), on obtient pour tout $i \geq 2$ la suite exacte

$$\{0\} \to H_i(\mathbf{S}^n) \to H_{i-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \to \{0\}.$$

Le lecteur montrera que ceci implique que les espaces $H_i(\mathbf{S}^n)$ et $H_{i-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ sont isomorphes pour tout $i \geq 2$. Il reste à traiter les cas où $i = 0,1$; c'est à peine plus compliqué.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'invariance de Brouwer, qui énonce que deux boules $\mathbf{D}^m$ et $\mathbf{D}^n$ ne peuvent être homéomorphes que si $m = n$ (m et n sont des entiers ≥ 1). Observons d'abord qu'en contractant le bord de la boule $\mathbf{D}^m$ en un point, on obtient un espace homéomorphe à $\mathbf{S}^m$. Par conséquent, un homéomorphisme $f : \mathbf{D}^m \to \mathbf{D}^n$ induit par contraction du bord un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbf{S}^m \to \mathbf{S}^n$. En passant à l'homologie, on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels $\tilde{f}_* : H_m(\mathbf{S}^m) \cong H_m(\mathbf{S}^n)$. Comme $H_m(\mathbf{S}^m) = \mathbf{R}$ d'après (11), l'isomorphisme $H_m(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{R}$, joint à (11), force l'égalité $m = n$. Notons pour finir que $\mathbf{D}^1$ est un segment, que $\mathbf{D}^2$ est homéomorphe à un carré et $\mathbf{D}^3$ à un cube. Nous avons ainsi établi qu'un segment, un carré et un cube ne sont pas homéomorphes. Cette application des groupes d'homologie et des propriétés qu'ils vérifient illustre bien la puissance des techniques de topologie algébrique.

5 L'algèbre homologique, un langage universel

Donnons une idée des techniques d'algèbre linéaire cachées derrière les groupes d'homologie. Nous avons vu au § 3 comment associer un complexe à une surface munie d'une subdivision polygonale. Plus généralement, à un espace topologique X on sait associer un complexe (qui peut être infini)

$$\cdots \xrightarrow{d_4} C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to \{0\}$$

composé d'espaces vectoriels $(C_i)_{i\geq 0}$ et d'applications linéaires $(d_i : C_i \to C_{i-1})_{i>0}$, appelées *différentielles*, telles que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour tout $i > 0$. On définit les groupes

d'homologie $H_i(X)$ de l'espace topologique X comme les espaces vectoriels quotients

$$H_i(X) = \frac{\mathrm{Ker}(d_i : C_i \to C_{i-1})}{\mathrm{Im}(d_{i+1} : C_{i+1} \to C_i)}.$$

Une application continue $f : X \to Y$ donne naissance à un *morphisme de complexes* entre les complexes (C_i,d_i) et (C'_i,d'_i) respectivement associés aux espaces X et Y, c'est-à-dire à une famille d'applications linéaires $(f_i : C_i \to C'_i)_{i\geq 0}$ telle que l'on ait

$$f_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ f_i \tag{12}$$

pour tout $i \geq 1$. C'est à partir de la famille $(f_i)_{i\geq 0}$ que l'on construit les applications linéaires $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ prévues par l'axiome (a) du § 4. En effet, la condition (12) implique que f_i envoie $\mathrm{Ker}(d_i : C_i \to C_{i-1})$ dans $\mathrm{Ker}(d'_i : C'_i \to C'_{i-1})$, et $\mathrm{Im}(d_{i+1} : C_{i+1} \to C_i)$ dans $\mathrm{Im}(d'_{i+1} : C'_{i+1} \to C'_i)$.

Une homotopie entre deux applications continues $f,f' : X \to Y$ donne naissance à une *homotopie algébrique*, c'est-à-dire à une famille d'applications linéaires $(h_i : C_i \to C'_{i+1})_{i\geq 0}$ telle que

$$f'_i - f_i = d'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i \tag{13}$$

pour tout i. Etablissons l'axiome (b) du § 4 à partir de (13). Un élément ω de $H_i(X)$ est la classe modulo $\mathrm{Im}(d_{i+1})$ d'un élément x du noyau de $d_i : C_i \to C_{i-1}$. D'après (13) on a

$$f'_i(x) - f_i(x) = d'_{i+1}(h_i(x)) + h_{i-1}(d_i(x)) = d'_{i+1}(h_i(x)).$$

Par conséquent, $f'_i(x)$ et $f_i(x)$ diffèrent par un élément de l'image de $d'_{i+1} : C'_{i+1} \to C'_i$, ce qui implique $f'_*(\omega) = f_*(\omega)$.

Illustrons les définitions précédentes sur le complexe $(C_i,d_i)_i$ utilisé à la fin du § 3 pour calculer les nombres de Betti du disque $\mathbf{D}^2$. Les espaces vectoriels C_0, C_1 et C_2 sont unidimensionnels, engendrés respectivement par le sommet v, l'arête A et la face F. Les différentielles d_i sont toutes nulles, à l'exception de $d_2 : C_2 \to C_1$ qui est donnée par $d_2(F) = A$.

Considérons un autre complexe $(C'_i,d'_i)_i$ défini par $C'_i = \{0\}$ et $d'_i = 0$ pour tout $i > 0$, et $C'_0 = C_0 = \mathbf{R}v$ où v est le même point que précédemment. Ce complexe donne l'homologie de l'espace réduit au point v.

L'inclusion q de v dans $\mathbf{D}^2$ donne lieu à un morphisme de complexes $(q_i : C'_i \to C_i)_{i\geq 0}$ qui est l'identité sur $C'_0 = C_0$ et nul ailleurs ; en d'autres termes $q_0 = \mathrm{id}$ et $q_i = 0$ si $i > 0$. De même la projection p qui écrase $\mathbf{D}^n$ sur v donne lieu en sens inverse à un morphisme de complexes $(p_i : C_i \to C'_i)_{i\geq 0}$ qui est également l'identité sur $C'_0 = C_0$ et nul ailleurs. Il en résulte que les composés $p_i \circ q_i$ et $q_i \circ p_i$ sont tous deux l'identité en degré 0 et nuls en degré > 0. Mais, comme morphismes de complexes, $(p_i \circ q_i)_i$ et $(q_i \circ p_i)_i$ sont différents. En effet, $(p_i \circ q_i : C'_i \to C'_i)_i$ est le morphisme identité du complexe $(C'_i,d'_i)_i$ (l'endomorphisme nul d'un espace vectoriel nul est évidemment aussi l'identité de cet espace). Par conséquent, l'application $p_* \circ q_*$ induite sur les groupes d'homologie est l'identité de $H_i(\{v\})$ pour tout $i \geq 0$.

Par contre, le morphisme de complexes $(q_i \circ p_i : C_i \to C_i)_i$ n'est pas le morphisme identité du complexe $(C_i,d_i)_i$. Cependant, si on définit la famille d'applications linéaires $(h_i : C_i \to C_{i+1})_{i\geq 0}$ par $h_i = 0$ si $i \neq 1$ et $h_1(A) = F$, alors un calcul rapide montre que la relation (13) est vérifiée avec $f'_i = \mathrm{id}$ et $f_i = q_i \circ p_i$; autrement dit, $(h_i)_i$ est une homotopie algébrique entre le morphisme de complexes $(q_i \circ p_i)_i$ et le morphisme identité. Comme nous l'avons vu plus haut, ceci implique que $q_* \circ p_* = \mathrm{id}_*$ sur les groupes d'homologie, ce qui démontre à nouveau que le disque $\mathbf{D}^2$ a la même homologie qu'un point.

Ce que nous venons de présenter en détail, c'est un exemple très élémentaire de la machinerie algébrique sophistiquée que les topologues (notamment Eilenberg([9]), Mac Lane([17]), H. Cartan([7])) ont développée à partir des années 1940 et 1950 et qu'ils ont appelée *l'algèbre homologique* ; avec elle la topologie, de combinatoire qu'elle était au début du vingtième siècle (pensons aux subdivisions polygonales des §§ 1–3), est rapidement devenue algébrique.

On s'est aperçu dans les années 1950–60 que ces techniques s'appliquaient à d'autres domaines que la topologie, comme l'analyse, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres. En analyse elles permettent d'étudier les propriétés globales des équations différentielles. Depuis plus récemment, la physique mathématique et l'informatique théorique font également appel à l'idée d'homologie. Des concepts et des termes comme "catégorie", "foncteur", "cohomologie", "fibré", "revêtement", "classes caractéristiques", "suite exacte", "suite spectrale", introduits par les topologues sont maintenant utilisés dans de nombreux domaines mathématiques.

6 Nœuds

Dans les paragraphes qui suivent nous présentons quelques recherches contemporaines en topologie algébrique.

Le problème de base de la topologie qui est de classifier les espaces topologiques à homéomorphisme près peut être étendu aux paires (X,K) où K est un sous-espace de X. Si X est fixé, on dira que K et $K' \subset X$ sont *isotopes* s'il existe un homéomorphisme f de X dans lui-même tel que $f(K) = K'$. Au tout début du vingtième siècle, Schönflies a montré que tous les plongements du cercle dans le plan $\mathbf{R}^2$ sont isotopes, autrement dit on peut toujours transformer n'importe quelle courbe continue fermée sans points multiples du plan dans le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ par une déformation continue du plan.

Il en va différemment si l'on considère des *nœuds*, c'est-à-dire des courbes continues fermées sans points multiples plongées dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ (voir les figures 5 et 6). Intuitivement, on sent qu'il existe des nœuds qui ne se "dénouent" pas et qui donc ne sont pas isotopes au nœud trivial formé par les points d'un cercle standard. Classifier les nœuds, c'est établir une liste de nœuds telle que tout nœud soit isotope à un nœud de la liste et que deux nœuds distincts de la liste ne soient pas isotopes. Pour l'instant, on ne dispose pas d'une telle liste ; on sait seulement qu'elle ne peut pas être finie.

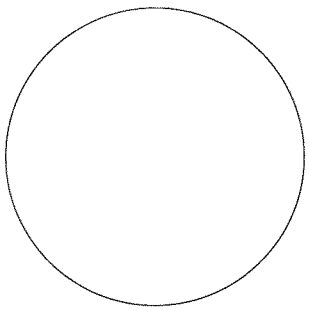

Figure 5. Un nœud trivial

Comment montrer que deux nœuds ne sont pas isotopes ou qu'un nœud n'est pas trivial ? Une des méthodes les plus efficaces dont on dispose pour répondre à ces questions est de construire un *invariant de nœuds*. Un tel invariant associe à chaque nœud un nombre, ou plus généralement un objet algébrique, de façon que le nombre (ou l'objet algébrique) soit le même pour deux nœuds isotopes. *A contrario*, si l'invariant prend des valeurs différentes pour deux nœuds donnés, c'est que ces nœuds ne sont pas isotopes.

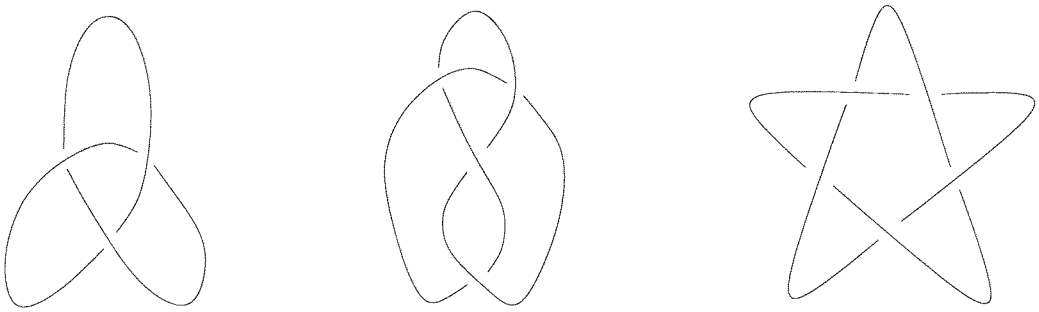

Figure 6. Trois nœuds non isotopes entre eux

Construire un invariant de nœuds n'est pas une tâche facile. Pendant longtemps, on a essentiellement disposé d'un invariant, construit par Alexander([1]) dans les années 1920, qui associe à tout nœud K un polynôme $P_K(z)$ à coefficients entiers.

Voici comment on peut calculer le polynôme d'Alexander $P_K(z)$ d'un nœud K. Tout d'abord on oriente K, c'est-à-dire on choisit un sens de parcours. Ensuite on le projette sur un plan de telle manière que la projection n'ait que des points doubles à tangentes transversales. La courbe plane orientée ainsi obtenue a deux sortes de croisements, les croisements positifs et les croisements négatifs (le dessin de gauche de la figure 7 représente un croisement positif et celui du milieu un croisement négatif ; les flèches indiquent le sens de parcours). Etant donné un croisement positif, on obtient un nouveau nœud K' en remplaçant ce croisement par un croisement négatif. En éliminant le croisement comme dans le dessin de droite de la figure 7, on obtient un nouvel objet que nous noterons K'' : c'est une courbe à une ou deux composantes. La règle qui relie les polynômes d'Alexander de K, K' et K' est la suivante :

$$P_K(z) - P_{K'}(z) = zP_{K''}(z). \tag{14}$$

Cette règle, jointe à l'axiome qui impose au polynôme d'Alexander d'être invariant par isotopie, permet de supprimer les croisements les uns après les autres. Il reste à fixer la valeur du polynôme d'Alexander pour un cercle et pour une union disjointe

de cercles : $P_K(z) = 1$ si K est un cercle et $P_K(z) = 0$ si K est une union de plusieurs cercles.

Ces règles permettent de calculer facilement les polynômes d'Alexander de nœuds simples. J'encourage le lecteur à vérifier que pour le nœud de trèfle T (à gauche dans la figure 6) on a $P_T(z) = z^2 + 1$, démontrant ainsi que T n'est pas un nœud trivial. Ce qui est moins évident, c'est de montrer que le polynôme d'Alexander ne dépend pas des choix ci-dessus et qu'il définit bien un invariant de nœuds.

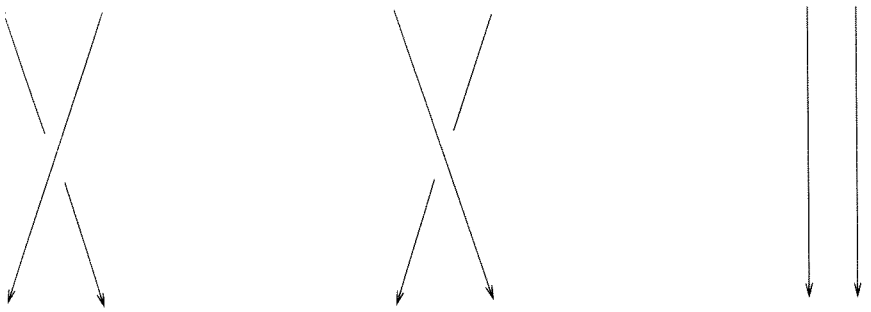

Figure 7

Le polynôme d'Alexander date des années 1920. Il a fallu attendre 1984 pour que Vaughan Jones([12]) découvre un nouvel invariant polynomial qui permet de distinguer des nœuds pour lesquels le polynôme d'Alexander prend les mêmes valeurs. Sa découverte a créé une grande excitation dans le monde mathématique et donné un nouvel essor à la théorie des nœuds. Une des raisons à cela a été la nouveauté de cet invariant ; une autre, plus importante encore, est venue des méthodes utilisées par Jones pour construire son invariant (étude de certaines algèbres d'opérateurs sur un espace de Hilbert) et des liens inattendus qui ont pu être établis entre cet invariant et la mécanique statistique (modèles exactement calculables de systèmes de particules en interaction disposées sur un réseau) ainsi qu'entre l'invariant de Jones et la théorie des *groupes quantiques*, une théorie algébrique nouvelle fondée au début des années 1980 par Drinfeld([8]) sous l'influence de physiciens soviétiques. La théorie des groupes quantiques est une généralisation audacieuse, "non commutative", de la théorie des groupes de Lie dont les fondateurs sont Lie([15]), Killing([13]), E. Cartan([6]). Ces liens inattendus et spectaculaires entre la topologie, la physique et l'algèbre illustrent une fois de plus l'unité des mathématiques et la fécondité de la méthode qui consiste à approcher un objet mathématique de côtés très différents. Ils ont attiré un grand nombre de mathématiciens désireux de comprendre ces nouvelles relations. Deux ou trois années après la découverte de l'invariant de Jones, une myriade de nouveaux invariants de nœuds ont été découverts, tous construits à partir des groupes quantiques (on pourra feuilleter [KRT] pour en apprendre plus sur ce sujet).

Ces nouveaux invariants de nœuds appartiennent tous à une classe d'invariants de nœuds qui a été dégagée en 1989–90 par Vassiliev. Peu de temps après, Kontsevich([14]) a construit un invariant de nœuds qui a deux particularités étonnantes : d'une part l'invariant de Kontsevich prend ses valeurs dans une étrange algèbre combinatoire dont les éléments sont des combinaisons linéaires de graphes trivalents (c'est-à-dire

tels que de chaque sommet partent trois arêtes), et d'autre part la connaissance de cet invariant est équivalente à la connaissance de tous les invariants de Vassiliev réunis. On conjecture que cet invariant prend des valeurs distinctes pour deux nœuds quelconques non isotopes.

7 Le groupe fondamental

Le polynôme d'Alexander d'un nœud orienté K peut se calculer à partir des groupes d'homologie du complémentaire $\mathbf{R}^3 - K$ du nœud dans $\mathbf{R}^3$. Il existe un invariant topologique plus fin que l'homologie qui permet de distinguer certains nœuds dont le polynôme d'Alexander est le même. C'est le groupe fondamental introduit par Poincaré([18]) dans son *"Analysis Situs"* pour montrer que des variétés dont l'homologie est la même ne sont pas nécessairement homéomorphes.

Donnons-nous un espace topologique X et fixons un point $x \in X$ (on pourra songer au cas où X est une surface). Définissons un lacet comme une application continue f de l'intervalle [0,1] dans X telle que $f(0) = f(1) = x$. Un lacet est donc une courbe fermée dans X commençant et aboutissant au point x (voir la figure 8).

Lorsqu'on a deux lacets f et g, on en obtient un troisième, que l'on notera fg, en parcourant d'abord le lacet f, puis le lacet g. On peut définir de manière précise le lacet fg comme l'application donnée pour tout $t \in [0,1]$ par

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La composition des lacets met sur l'ensemble de tous les lacets de X une opération binaire qui possède des propriétés rappelant celles d'un groupe. En effet, étant donné trois lacets f, g et h, alors, bien que les lacets $(fg)h$ et $f(gh)$ ne soient pas les mêmes, il sont cependant homotopes.

De même, si u désigne le lacet constant, c'est-à-dire l'application définie par $u(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$, alors les trois lacets f, fu et uf sont homotopes. Enfin, si l'on définit $\bar{f} : [0,1] \to X$ par $\bar{f}(t) = f(1-t)$ pour tout t, alors on obtient un lacet $\bar{f}$ tel que $\bar{f}f$ et $f\bar{f}$ soient homotopes au lacet constant u. Par conséquent, la composition des lacets induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X)$ des classes d'homotopie de lacets de X. Le groupe $\pi_1(X)$ est appelé le *groupe fondamental* de X. C'est un invariant qui ne dépend que du type d'homotopie de X.

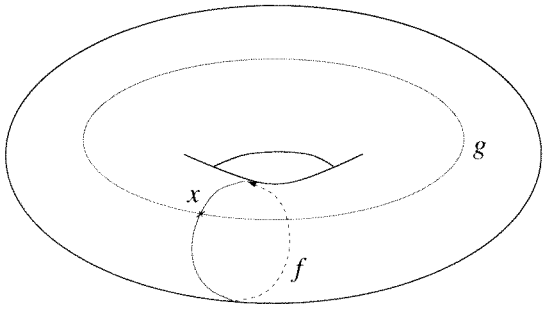

Figure 8. Lacets sur un tore

Pour le cercle, la classe d'homotopie d'un lacet est entièrement déterminée par le nombre de tours qu'il fait, ce qui donne $\pi_1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbf{Z}$. Pour le tore, on a $\pi_1(\mathbf{T}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Pour la sphère $\mathbf{S}^2$ et, plus généralement, pour les sphères $\mathbf{S}^n$ de dimension $n \geq 2$, on montre que $\pi_1(\mathbf{S}^n)$ est le groupe trivial à un seul élément ; intuitivement, tout lacet sur $\mathbf{S}^n$ se "contracte" en le lacet constant. Rappelons à ce sujet la célèbre conjecture de Poincaré qui reste l'un des grands problèmes ouverts en mathématiques : toute variété compacte de dimension trois dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^3$.

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{R}^3 - K)$ du complémentaire $\mathbf{R}^3 - K$ d'un nœud est un invariant de nœuds. Il permet de caractériser les nœuds triviaux. En effet, un nœud K est trivial si et seulement si $\pi_1(\mathbf{R}^3 - K) \cong \mathbf{Z}$. Pour les nœuds non triviaux, les groupes fondamentaux sont non abéliens et il est généralement très difficile de déterminer si deux d'entre eux sont isomorphes ou non. Cela fait du groupe fondamental du complémentaire d'un nœud un invariant important, mais difficilement maniable.

Le groupe fondamental appartient à une série infinie de groupes $(\pi_i(X))_{i\geq 1}$ que l'on appelle les *groupes d'homotopie* de X. Ces invariants homotopiques ont été définis en 1935 par Hurewicz([11]) qui a construit en même temps des homomorphismes naturels de groupes de $\pi_i(X)$ vers $H_i(X)$. Les groupes d'homotopie sont difficile à calculer ; ainsi le problème de calculer les groupes d'homotopie d'une sphère $\mathbf{S}^n$ est encore largement ouvert.

8 Tresses

Suspendons n brins de ficelle à n clous alignés horizontalement, croisons-les et considérons l'objet ainsi obtenu dans un plan vertical. Pour le maintenir on fixe les n extrémités inférieures des brins à autant de clous alignés horizontalement plus bas, à l'exacte verticale des clous supérieurs. On a ainsi une réalisation concrète d'une tresse mathématique (voir la figure 9).

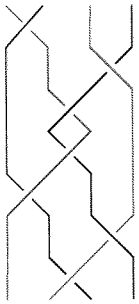

Figure 9. Une tresse à quatre brins

En coupant une tresse par un plan horizontal qui se meut du haut vers le bas, on obtient un lacet dans l'espace $C(n;\mathbf{R}^2)$ de toutes les configurations formées par n points dans le plan. Réciproquement, tout lacet de $C(n;\mathbf{R}^2)$ provient d'une tresse à n brins. L'ensemble $\pi_1(C(n;\mathbf{R}^2))$ des classes d'homotopie de lacets de $C(n;\mathbf{R}^2)$ a une structure de groupe que nous avons décrite au § 7. Au niveau des tresses, la loi de groupe associe à deux tresses la tresse obtenue en raboutant les extrémités inférieures de la première aux extrémités supérieures de l'autre. Ce groupe, noté B_n, a été introduit par Artin([2]) autour de 1925. C'est un groupe non abélien si $n \geq 3$ (si $n = 2$, alors $B_n \cong \mathbf{Z}$).

Artin a montré que B_n est engendré comme groupe par $n-1$ éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ soumis aux deux familles de relations

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{si } |i-j| = 1, \tag{15}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1. \tag{16}$$

Une des manières les plus efficaces d'étudier un groupe est de construire des représentations du groupe, c'est-à-dire des homomorphismes du groupe vers le groupe $GL_N(\mathbf{C})$ des matrices inversibles de taille N à coefficients complexes ; autrement dit, on fait agir ce groupe sur $\mathbf{C}^n$ *via* des endomorphismes linéaires inversibles. Pour construire une représentation du groupe B_n, il suffit de trouver $n-1$ matrices $M_1, \ldots, M_{n-1} \in GL_N(\mathbf{C})$ satisfaisant les relations obtenues à partir de (15–16) en remplaçant σ_i par M_i.

Voici un exemple célèbre de représentation de B_n, découvert par Burau dans les années 1930. La représentation $\rho_B : B_n \to GL_n(\mathbf{C})$ en question dépend d'un paramètre complexe transcendant t ; elle est déterminée par les valeurs $\rho_B(\sigma_i) = M_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ où M_i est la matrice carrée (de taille $n \times n$) suivante :

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & 1-t & t & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice M_i le coefficient $1-t$ se trouve sur la ligne i et dans la colonne i.

On a longtemps pensé que la représentation de Burau était fidèle, c'est-à-dire que l'homomorphisme de groupes $\rho_B : B_n \to GL_n(\mathbf{C})$ était injectif. L'avantage de disposer d'une représentation fidèle d'un groupe, c'est qu'elle permet de vérifier à l'aide de matrices si deux éléments du groupe sont égaux ou non. Ce n'est que depuis les années 1990 que l'on sait que la représentation de Burau n'est pas fidèle pour $n \geq 5$. Par contre, elle est fidèle si $n = 2$ ou 3 ; la question reste ouverte pour $n = 4$ (avis aux amateurs !).

Nœuds et tresses sont intimement liés à travers l'opération de fermeture des tresses. On ferme une tresse en reliant chaque clou supérieur au clou inférieur situé à sa verticale par une ficelle qui passe à l'extérieur du plan de la tresse, par exemple à l'arrière de ce plan. Alexander([1]) a montré qu'à isotopie près tout nœud orienté dans $\mathbf{R}^3$ s'obtient par fermeture d'une tresse, à condition d'utiliser un nombre suffisamment grand de brins. La correspondance ainsi obtenue entre tresses et nœuds n'est pas bijective car deux tresses différentes peuvent donner deux nœuds isotopes. Cependant, on connaît les relations exactes qui existent entre deux tresses dont les fermetures sont isotopes. Cette connaissance donne une méthode pour construire des invariants de nœuds à partir des tresses.

Voici comment. Supposons que l'on dispose d'une famille d'applications f_n : $B_n \to \mathbf{C}$ indexée par les entiers $n \geq 2$, à valeurs complexes, vérifiant les trois

conditions suivantes :

$$f_n(gh) = f_n(hg), \quad f_{n+1}(g\sigma_n) = f_n(g), \quad f_{n+1}(g\sigma_n^{-1}) = f_n(g) \tag{17}$$

pour tout entier $n \geq 2$ et tout couple (g,h) d'éléments de B_n. Alors on obtient un invariant I_K pour un nœud orienté K comme suit : on choisit une tresse $g \in B_n$ dont la fermeture est K, et on pose $I_K = f_n(g)$, où n est l'indice du groupe B_n auquel appartient la tresse g. On peut montrer que cette définition de I_K ne dépend pas de la tresse g et définit un invariant de nœuds.

Les invariants quantiques mentionnés au § 6 s'obtiennent tous de cette manière. La théorie des groupes quantiques produit naturellement des familles de représentations $\rho_n : B_n \to GL_N(\mathbf{C})$. Prenons la trace des matrices données par la représentation et posons $f_n(g) = \mathrm{tr}(\rho_n(g))$ pour tout $g \in B_n$. La famille d'applications $f_n : B_n \to \mathbf{C}$ ainsi obtenue vérifie les conditions (17). La première de ces conditions est conséquence de la propriété bien connue de la trace d'un produit de deux matrices : $\mathrm{tr}(MM') = \mathrm{tr}(M'M)$. Par contre, la vérification des deux autres, qui portent à la fois sur f_n et sur f_{n+1}, découle de propriétés non triviales des groupes quantiques.

À l'heure actuelle les groupes de tresses continuent de susciter l'intérêt des chercheurs. Comme on l'a dit plus haut, la représentation de Burau n'est pas fidèle, contrairement à ce que l'on a longtemps pensé. Tout récemment, en 1999, le mathématicien néerlandais Daan Krammer a construit le premier exemple de représentation fidèle pour les groupes de tresses à plus de trois brins (voir [T]).

En 2001 des mathématiciens de l'Université de Caen et des ingénieurs de France Télécom ont déposé un brevet pour utiliser les groupes de tresses en cryptographie. Leur idée est fondée sur le fait que la résolution de certaines équations, pourtant très simples, dans B_n dépasse de loin les capacités actuelles des ordinateurs les plus puissants.

Pour terminer nous recommandons la lecture du livre [S] de Sossinsky, qui est une merveilleuse vulgarisation de la théorie des nœuds et des tresses.

REMERCIEMENTS. Je remercie P. Baumann pour avoir lu très soigneusement ce manuscrit et pour m'avoir appris à faire les figures avec *xfig*. Je suis également reconnaissant à A. Kuzniak et C. Mitschi pour leurs excellents conseils.

Notes

[1] James Waddell ALEXANDER (1888–1971), professeur à l'Institute for Advanced Study de Princeton.

[2] Emil ARTIN (1898–1962), mathématicien allemand, professeur à l'Université de Hambourg jusqu'en 1938, année où il émigre aux États-Unis, professeur aux États-Unis, notamment à Princeton.

[3] Enrico BETTI (1823–1892), professeur à l'Université de Pise.

[4] Luitzen BROUWER (1881–1966), professeur à l'Université d'Amsterdam, très connu pour avoir développé l'intuitionnisme.

[5] Georg CANTOR (1845–1918), mathématicien allemand, un des fondateurs de la théorie des ensembles.

[6] Élie CARTAN (1869–1951), professeur à la Sorbonne.

[7] Henri CARTAN, né à Nancy en 1904, fils d'Élie Cartan, professeur à l'Université de Strasbourg dans les années 1930 et de 1945 à 1947, puis à l'École Normale Supérieure de Paris et à l'Université Paris-Sud.

[8] Vladimir DRINFELD, né en 1954, a obtenu la Médaille Fields en 1990. Professeur à l'Université de Chicago.

[9] Samuel EILENBERG (1913–1998), professeur à l'Université Columbia de New York, un des pères de l'algèbre homologique.

[10] Leonhard EULER, né en 1707 à Bâle et mort en 1783 à Saint-Pétersbourg, a abordé tous les domaines des mathématiques dans son œuvre colossale.

[11] Witold HUREWICZ (1904–1956), mathématicien polonais émigré aux Etats-Unis.

[12] Vaughan JONES, mathématicien néo-zélandais né en 1952, a obtenu la Médaille Fields en 1990. Professeur à l'Université de Californie à Berkeley depuis 1985.

[13] Wilhelm KILLING (1847–1923), professeur à l'Université de Münster en Westphalie.

[14] Maxim KONTSEVITCH, né en 1964, a obtenu la Médaille Fields en 1998. Professeur à l'Institut de Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette depuis 1995.

[15] Sophus LIE (1842–1899), mathématicien norvégien, professeur à l'Université de Leipzig.

[16] Johann Benedikt LISTING (1808–1882), élève de Gauss, professeur de physique à l'Université de Göttingen.

[17] Saunders MAC LANE, né en 1909, professeur à l'Université de Chicago, un des pères de l'algèbre homologique.

[18] Henri POINCARÉ (1854–1912), mathématicien et physicien, professeur à l'Université de Caen, puis à celle de Paris à partir de 1881, considéré comme le fondateur de la topologie algébrique.

[19] Norman STEENROD (1910–1971), professeur à l'Université de Princeton.

Certaines des informations biographiques précédentes sont tirées de [HS], [HT] et du site Web [M].

Références bibliographiques

- [D1] J. DIEUDONNÉ, *Panorama des mathématiques pures, Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.
- [D2] J. DIEUDONNÉ, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser, Basel, 1989.
- [EU] *Dictionnaire des Mathématiques, Algèbre, Analyse, Géométrie*, Encyclopædia Universalis, Albin Michel, Paris, 1997.
- [F] W. FULTON, *Algebraic topology, a first course*, Grad. Texts in Math., vol. 153, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [HS] B. HAUCHECORNE, D. SURATTEAU, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, Paris, 1996.
- [HT] *History of topology*, ed. I. M. James, Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [KRT] C. KASSEL, M. ROSSO, V. TURAEV, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1997. ISBN 2-85629-055-8, ISSN 1272-3835.
- [M] *The MacTutor History of Mathematics Archive:* http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
- [P1] H. POINCARÉ, *Œuvres*, vol. 6, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [P2] J.-C. PONT, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses universitaires de France, Paris, 1974.
- [S] A. SOSSINSKY, *Nœuds, genèse d'une théorie mathématique*, Éditions du Seuil, Paris, 1999.
- [T] V. TURAEV, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki n° 878 (juin 2000), Astérisque, vol. 276, Soc. Math. France, Paris 2002, pp. 389–409.

Christian KASSEL
Institut de Recherche Mathématique Avancée
C.N.R.S. - Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail: kassel@math.u-strasbg.fr
Fax: +33 (0)3 90 240 328
http://www-irma.u-strasbg.fr/~kassel/