

TRAVAUX PERSONNELS ENCADRÉS (PREMIÈRE S) : IMAGES

IMAGERIE MÉDICALE : LE SCANNER

Jean-Michel KANTOR

Institut Mathématique de Jussieu et IREM Paris 7

1. TPE : réflexions préalables

Le document qui suit est destiné aux professeurs de première S et aux amateurs de tous bords. Il a pour but de traiter un exemple de TPE mathématiques/physique autour du thème des images, ici de l'imagerie médicale, sans aborder les questions liées aux SVT (interprétation anatomique). C'est l'occasion de montrer que contrairement au discours répandu chez les non-spécialistes par a priori idéologique (voir les fadaises dignes de Monsieur Homais sur la « réalité insaisissable » [1]), les mathématiques ont un lien crucial avec le monde, qui ne se limite pas à des mots-valises comme « modèle » qu'on place à toutes les sauces. À l'heure de progrès colossaux en physique, en biologie et en mathématiques exploitant des fertilisations croisées il est urgent de montrer aux élèves ces relations étroites entre les sciences, et sous un jour moderne (voir [4], [3'])

Que ceux qui en doutent s'engagent à ne jamais passer au scanner !

De ce point de vue l'initiative des TPE est excellente.

Citons un spécialiste :

“ Mathematics is not subordinate to natural science. But it is fair to say that Mathematics is the language of science in a deep sense... and just as language of true literacy not only specifies and expresses thoughts and processes of thinking but also creates them in turn, so does mathematics not only specify, clarify and make rigorously workable concepts... but at certain crucial instances it is an indispensable constituent of their creation and emergence as well.”

S. BOCHNER : *The role of mathematics in the rise of science*, Princeton University Press, 1981.

Cette fécondation mutuelle ne peut que profiter aux enseignants et aux élèves des autres disciplines. L'exemple de l'imagerie médicale (scanner) permet aussi de montrer des développements récents des mathématiques et des technologies nouvelles. De plus l'exemple choisi permet d'envisager les sérieuses difficultés qui peuvent se rencontrer et qui ne peuvent être résolues que par un véritable travail pluridisciplinaire. Par exemple, dans le cas qui nous intéresse, le seul article en français que nous ayons trouvé sur les mathématiques de l'imagerie médicale [4] mélange allègrement les fondements, les détails techniques et les apports des sciences physiques et des mathématiques.

2. Limites, frontières et historique

Nous précisons les limites de l'imagerie médicale, car les sujets voisins sont nombreux. Le terme technique qui prétend tout recouvrir dans le langage mathématique appliqué est **contrôle non-destructif** (cf. [5,6]). Par exemple aujourd'hui on peut avec des ondes sonores vous vendre un camembert sans blanc sans avoir pressé le doigt dessus.

On trouve ainsi le contrôle non-destructif en acoustique, en recherche pétrolière, en stéréométrie mais il y a aussi recoupement avec la morphologie mathématique. Ces sujets ne seront pas abordés ici, ni non plus la magnifique géométrie intégrale qui prétend retrouver par exemple un convexe par ses projections (cf. [7]).

Commençons donc par le vocabulaire :

scanner (anglais *to scan* : examiner, scruter) ;

tomographie (grec *tomos* : « morceau coupé ») ;

scanner CT *computerized tomography*, tomographie numérique.

À la fin des années 60 l'ingénieur Hounsfield imagine la situation suivante :

On envoie un mince faisceau parallèle F de rayons X sur un objet (un cerveau), avec l'idée de faire varier la direction. Pour une direction donnée l'intensité du rayon recueilli fournit une information sur les tissus traversés.

Le manque d'information obtenue par la technique de rayons classique peut se représenter grâce au schéma suivant :

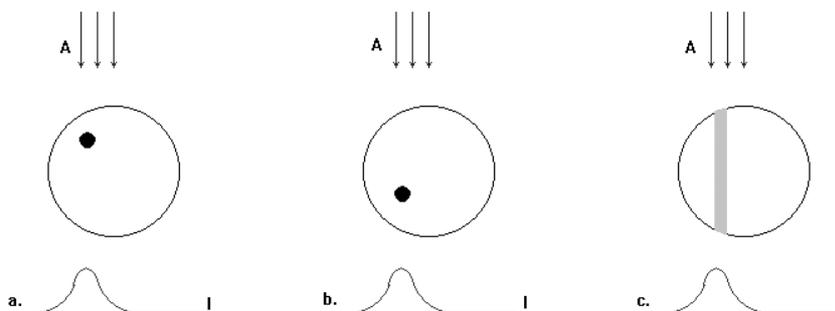


FIGURE 1

On a le même résultat (intensité obtenue I) selon les deux différentes positions de la tache (a ou b) ou même avec une tache diffuse (cas c).

La tache T à l'intérieur concentrée ou non, donne la même information quand on mesure l'atténuation dans une seule direction et on ne peut distinguer les deux positions en a et b. On renouvelle la mesure sous différents angles d'un plan donné, il faut encore « recoller l'information » obtenue par les multiples « clichés » à l'aide d'un ordinateur qui reconstitue la vue d'une tranche du corps. On peut espérer résoudre le problème. Par exemple à la figure 2 on distingue déjà les positions de la tache.

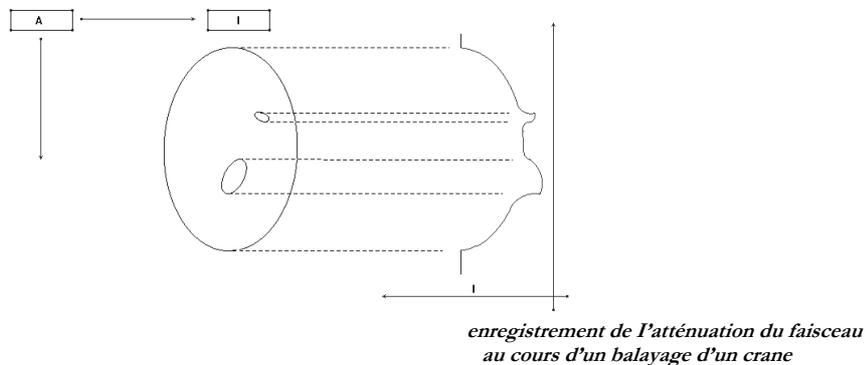
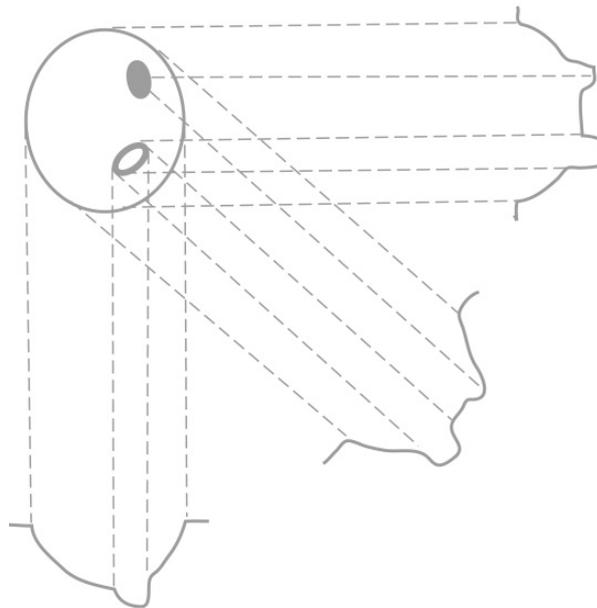


FIGURE 2([4])



Plus facile à dire qu'à réaliser ! Il faudra plus de dix ans de travail. Les premiers essais pratiques utilisent 28 800 clichés à partir desquels 24 000 points de trame sont calculés. Neuf jours d'enregistrement et une nuit de calcul sont nécessaires... Mais l'ambition de Hounsfield ne se limite ni à énoncer une théorie, ni à créer un système de calcul. Il veut créer un produit commercialisable. En 1979, il sera récompensé du prix Nobel avec le physicien Allan McLod Cormak, de l'université Tufts (Massachusetts). Ce dernier est l'auteur des travaux théoriques.

Quelques années plus tard Mc Cormack découvre par hasard en bavardant à Harvard que ses calculs à la base de la tomographie ont été faits, en 1929, sous le nom de transformée de Radon (il s'agit en fait d'une interprétation géométrique de la transformation de Fourier). Belle leçon d'humilité pour les mathématiciens démiurges : oui, on peut arriver à se passer de nous !

Le principe est simple : le passage de rayons X dans une seule direction ne suffit pas, de multiples passages dans des directions différentes vont permettre de reconstituer le paysage (ici une section plane d'un cerveau).

Essayons de comprendre le processus qui donne l'intensité I à partir de l'intensité initiale A et des tissus traversés.

D'abord comme dans toute approximation numérique chaque quantité dépendant de paramètres continus est discrétisée. Pour les images on remplace par exemple les points d'une photo par une grille de 100×100 . De plus à chaque case est attaché un nombre qui tient compte de l'intensité de couleur (ou plus simplement 0 ou 1 suivant qu'il s'agit de noir ou blanc). Dans le cas de l'imagerie médicale imaginons qu'un rayon traverse une bande de n cases

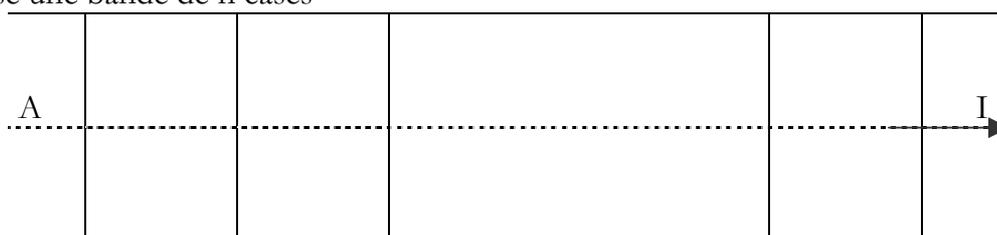


FIGURE 3

et que dans chaque case le rayon soit atténué d'un facteur $f(i)$ qui dépende de la case i , et qui mesure les capacités d'absorption de la matière présente.

À la sortie le rayon a une intensité :

$$I = A \cdot f(1) \dots f(n)$$

$$\log I = \log A + \sum \log f(i).$$

Autrement dit, le passage aux logarithmes est secondaire ; connaissant A on connaît la somme des $g(i)$ où $g(i) = \log f(i)$.

Pour se représenter le problème, on va imaginer une grille carrée de N cases, d'abord pour de très faibles valeurs de N , qui conduisent à l'idée de solution approchée (étudiée en Appendice 1).

Le rayon X soit traverse la case (i, j) soit ne la traverse pas ; quand il la traverse il est absorbé selon un facteur $f(i, j)$, et à la sortie il ne reste qu'une portion de l'intensité du rayon initial.

L'objet à deux dimensions que nous devons analyser par la tomographie est quadrillé en général par une grille $80 \times 80 = 6400$ cases.

3. Exemples miniatures

Pour comprendre le principe, examinons des exemples très simples. Examinons d'abord un carré de deux mailles ; on considère l'opération suivante : on trace un rayon et on ajoute les nombres qui sont dans les cases que le rayon traverse.

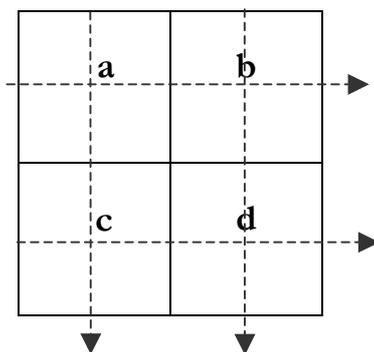


FIGURE 4

1. Les quatre sommes associées à la figure 4 nous permettent-elles de reconstituer les nombres (a, b, c, d) ?
2. Fixez l'un des nombres et cherchez les autres. Conclusions ?
3. On ajoute deux rayons diagonaux correspondant aux sommes U et V .

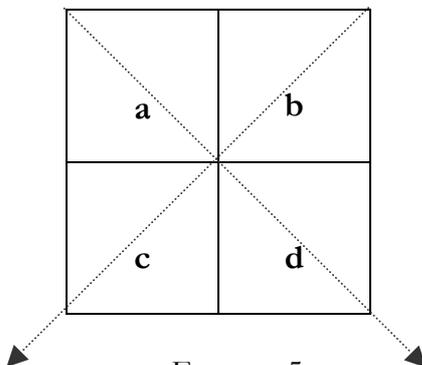


FIGURE 5

Peut-on résoudre ?

4. En général les conditions expérimentales ne donnent que des données approchées. Voici un exemple :

$$X = a + b = 4$$

$$Y = c + d = 6$$

$$Z = a + c = 5$$

$$T = b + d = 5$$

$$U = a + d = 7$$

$$V = c + b = 3$$

Si on remplace les première et quatrième équations par les suivantes :

$$X = a + b = 4,01$$

$$Y = b + d = 5,02$$

On constate que le système n'a plus de solutions.

La méthode du pivot de Gauss permet d'écrire les conditions de compatibilité. Même si on part d'un système qui possède une solution (ou une infinité) les données approchées peuvent conduire à un système impossible à résoudre.

Le système précédent représente en miniature le problème du scanner discrétisé (il faudra remplacer le carré par une grille de côté N). Même pour le carré de côté 2, il n'y a pas de système naturel qui possède de solution unique et bien déterminée, c'est là la difficulté intrinsèque. Regardons par exemple la question 4 de l'exercice précédent : on a six équations linéaires dans un espace vectoriel de dimension quatre : pas de solutions en général, il y a des conditions de compatibilité.

On généralise avec 3×3 : FIGURE 6

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Peut-on généraliser ? Comment ?

Montrer qu'avec le choix des seules horizontales et diagonales on ne peut trouver les variables, mais que le choix de certaines directions supplémentaires le permet. Rappelons que cette méthode doit être étendue à 80×80 pour s'appliquer à la tomographie

Évidemment il n'est pas question d'étudier solutions et solutions approchées en général ; on renvoie soit aux cours d'algèbre linéaire soit aux cours d'analyse numérique. Cependant le point commun à tous ces exemples, ainsi que celui du scanner, c'est qu'il s'agit de systèmes linéaires d'équations, qui sont plus nombreuses que le nombre d'inconnues. En général de tels systèmes n'ont pas de solutions ! Il faut que des conditions de compatibilité soient satisfaites.

Considérons un système de trois équations à deux inconnues qui résume l'essence de la difficulté du problème : dans le plan des coordonnées (x, y) les équations sont représentées par des droites.

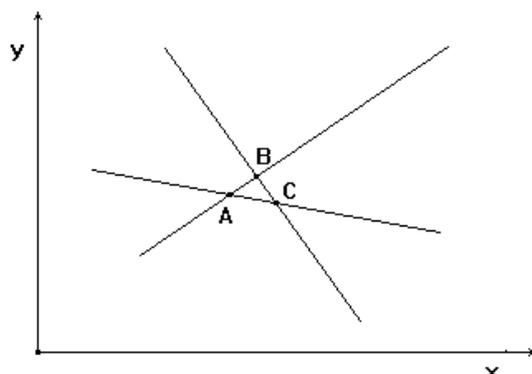


FIGURE 7

Si elles sont concourantes on a une unique solution A on peut d'ailleurs écrire la condition de compatibilité sous forme de la nullité d'un déterminant sinon il n'y a que des solutions approchées qu'on peut représenter par le triangle ABC , qui est une sorte de « solution généralisée ». Dans le cas général où il y a 80 variables, on utilise une méthode de résolution approchée que j'explique ci-dessous en dimension deux.

4. Résolutions approchées de systèmes surdéterminés d'équations linéaires

On étudie le cas de trois équations à trois inconnues. Considérons un système (coordonnées x, y) $\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \\ ex + fy = w \end{cases}$. On ne connaît pas dans la pratique les six coefficients, mais on sait que le système possède une solution ; on se donne un nouveau système proche et *connu* (l'erreur est due aux conditions physiques, au bruit...).

Étant donné un point $P(p_1, p_2)$ et une droite L d'équation $ax + by = c$, on note Q la projection orthogonale de P sur L puis $\vec{A} = (a, b)$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$ et $\vec{q} = (q_1, q_2)$. Alors :

$$\vec{q} = \vec{p} + \left(\frac{c - \vec{A} \cdot \vec{p}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \right) \vec{A}.$$

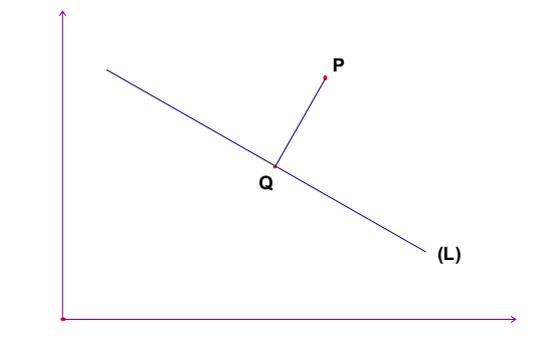


FIGURE 8

Étant donné les trois droites L_i dont on ne connaît pas les intersections deux à deux on part d'un point P_0 quelconque et on définit :

$$\begin{array}{lll} P_1 & P_4 & = & P'_1 \\ P_2 & P_5 & = & P'_2 \\ P_3 & P_6 & = & P'_3 \end{array}$$

... où P'_1 est la projection de P_0 sur L_1 , P'_2 celle de P_1 sur L_2 ... et on recommence.

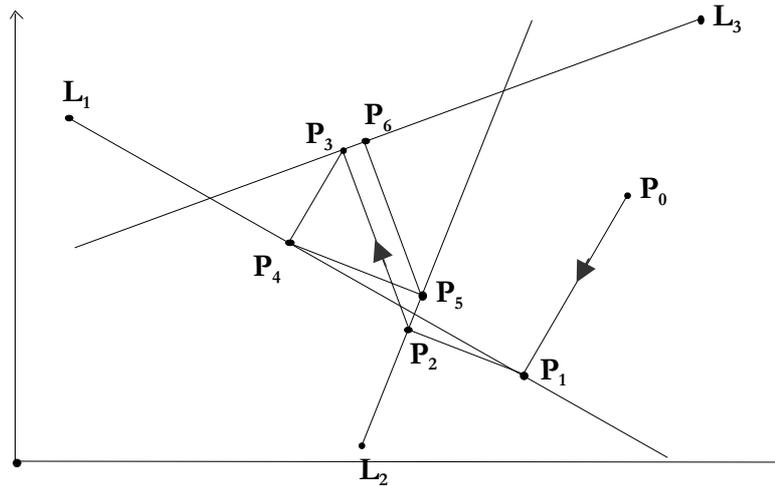


FIGURE 9

Exemples

$$\begin{array}{ll} x + y & = 3 \\ x + 4y & = 4 \\ 3x - y & = -1 \end{array}$$

Exercice : Partez de $A_0 = (2, 3)$ et appliquez la construction précédente, par exemple avec une calculette programmable que remarquerez-vous ?

On peut montrer qu'en partant d'un point arbitraire on obtient ainsi trois suites qui convergent vers trois points des côtés du triangle, et que Ces points-limite ne dépendent pas du point de départ (à condition que les trois droites ne soient pas parallèles).

L'un des intérêts de cette méthode est le suivant : si on part d'un système avec N équations et environ N inconnues la méthode de résolution classique utilise environ N^3 opérations de multiplication ou division, celle-ci environ N^2 seulement.

Exemple : on considère le cas

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 & = & 06 \\ x_3 + x_4 & = & 12,02 \\ x_1 + x_3 & = & 07,9 \\ x_2 + x_4 & = & 10 \\ x_2 + x_3 & = & 09,94 \\ x_1 + x_4 & = & 08,12 \end{array}$$

On peut construire l'analogue de la situation précédente : les droites sont remplacées par des hyperplans de \mathbb{R}^4 , l'analogue de la formule permet de construire un algorithme et trois suites de points par exemple partant de $(0, 0, 0)$ on obtient :

P_0	0,00	0,00	0,00	0,00
P_1	3,00	3,00	0,00	0,00
P_2	3,00	3,00	6,01	6,01
P_3	2,44	3,49	5,45	6,01
P_4	2,44	3,49	5,45	6,51
P_5	2,44	3,99	5,95	6,51
P_6	2,03	3,99	5,95	6,19
P_1	2,02	3,98	5,95	6,09
P_2	2,02	3,98	5,94	6,08
P_3	1,99	3,95	5,91	6,08
P_4	1,99	3,95	5,91	6,05
P_5	1,99	3,99	5,95	6,05
P_6	2,03	3,99	5,95	6,09
P_1	2,02	3,98	5,95	6,09
P_2	2,02	3,98	5,94	6,08
P_3	1,99	3,98	5,91	6,08
P_4	1,99	3,95	5,91	6,05
P_5	1,99	3,99	5,95	6,05
P_6	2,03	3,99	5,95	6,09

On peut encore montrer que l'algorithme détermine six suites qui convergent séparément vers six points de chaque hyperplan de l'espace \mathbb{R}^4 . Dans la technique de l'imagerie on choisit (avec des critères complémentaires) l'un des points comme solution approchée et donne un point de l'image.

En conclusion, précisons que l'imagerie médicale est un immense domaine où peuvent se rencontrer des sujets raisonnables de TPE (mathématiques, SVT, sciences physiques) et d'autres qui le sont beaucoup moins, prendre garde !

5. La transformation de Radon

Nous avons évoqué les mathématiques discrètes de l'imagerie médicale, plus précisément du scanner, sur des mini-exemples (les méthodes numériques utilisent par exemple des matrices ayant des dizaines de milliers de lignes).

Nous allons traiter l'analogue continu de ce qui a été vu sous la forme discrète. Historiquement c'est l'aspect continu qui est apparu le premier.

Essayons de voir quel serait l'analogue continu de la méthode discrète (3. Exemples miniatures). On considère une fonction f à support compact dans l'espace numérique, à deux dimensions ici, et on lui associe la fonction F qui à toute droite ℓ associe

$$(1) \quad F(\ell) = \int_{\ell} f(x) dx$$

Il s'agit de définir ce que cela signifie, voir ensuite si l'on peut récupérer f à partir de la connaissance de F . Ce problème est un type de *problème inverse* en ce sens qu'il s'agit de récupérer une donnée inconnue f à partir de sa transformée F par une certaine opération effectivement calculable.

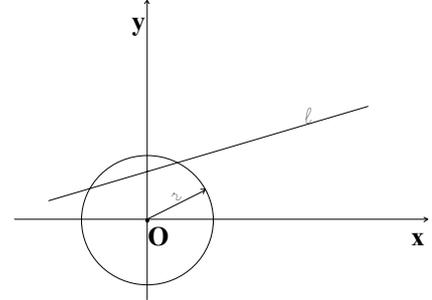
Exercice 1. Montrez qu'on peut écrire la droite ℓ sous la forme $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$, $p \geq 0$, (φ défini modulo 2π) et que dans ce cas

$$(2) \quad F(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p \cos\varphi - s \sin\varphi, p \sin\varphi + s \cos\varphi) ds .$$

Et donc il s'agit de déterminer f connaissant F .

Exercice 2. On imagine f valant m dans une petite boule de rayon r centrée à l'origine et nulle en dehors.

FIGURE 10



a. Montrer qu'on a à peu près

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(p, \varphi)}{2\sqrt{r^2 - p^2}} d\varphi, \quad p \leq r.$$

b. On suppose que f a son support dans une boule de rayon R mais en fait est nulle en dehors de la boule de rayon $A < R$.

Faire un dessin approximatif du graphe de F en tant que fonction de la distance à l'origine. En général on considère la valeur moyenne de la fonction F sur toutes les droites situées à la distance fixée PO du point P (disons $P =$ l'Origine)

$$(3) \quad F_p(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(p, \varphi) d\varphi .$$

On a alors : **Théorème de Radon** (1917)

Si f est assez régulière on a :

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dF_p(q)}{dq}$$

Dès 1917 Radon a vu l'intérêt et la puissance potentielle de ces résultats. En particulier il a énoncé :

- a) Le caractère linéaire de l'opérateur $f \mapsto F$. Rappelons que l'œuvre de Banach, qui marque le début de la théorie des opérateurs linéaires date des années vingt.
- b) Le caractère intrinsèque de ces notions. La transformation de Radon commute au groupe des déplacements, et c'est ce caractère qui permet une démonstration rapide de la formule car on peut dès lors se limiter aux fonctions radiales. Ce caractère d'invariance est aussi remarqué dans un autre contexte par Poincaré.

Le rapport avec Fourier : on note :

$$(4) \quad \hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

la transformée de Fourier de f , avec les notations habituelles à une ou plusieurs variables.

Exercice 3

Montrez qu'en intégrant par parties dans la formule (4) d'abord à

$x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n = \langle \xi, x \rangle =$ Constante, la transformation de Radon peut être considérée comme l'image par la transformation de Fourier à une variable (qui est un isomorphisme) de la transformation de Fourier à n variables. Pour voir une étude détaillée très intéressante, consulter [8]

6. Plus récemment

La transformation de Radon a connu un nouveau développement à partir des années soixante :

1) méthodes numériques pour l'imagerie (voir première partie), et pour d'autres applications en radioastronomie ;

2) on peut évidemment chercher des extensions en dimension supérieures. Radon avait compris que les dimensions paire et impaire ont un comportement radicalement différent. Pour les dimensions impaires on a une formule d'inversion de nature locale : la valeur de f au point P peut être obtenue si on connaît seulement les intégrales de f sur les hyperplans passant par P ou voisins de P . C'est faux en dimensions paires !

Dimension 3 : Si on note la moyenne sur les plans passant par P

$$F_p(q) = \int_{S^2} F(\langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega$$

où $d\omega$ est l'intégrale sur S^2 (l'ensemble des hyperplans à distance q est identifié à S^2), on a :

$$f(P) = C \times \left. \frac{\partial^2 F_p}{\partial q^2}(q) \right|_{q=0}$$

(C constante) ce qui montre que la valeur en P de f peut être récupérée si on connaît seulement les intégrales de f sur les hyperplans voisins de P .

3) généralisations (liées à d'autres domaines des mathématiques, en particulier à la théorie des groupes : travaux de l'école russe autour de Gelfand)

Le point de vue actuel est le suivant : on considère trois espaces X , Y et Z , où Z est une partie de $X \times Y$.

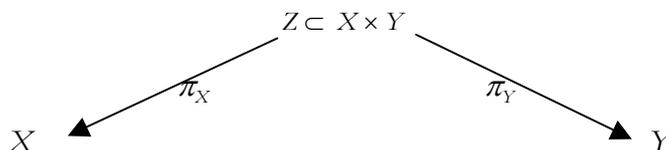


FIGURE 11

La fonction f sur X donne par composition une fonction sur $X \times Y$, donc sur Z par restriction, à laquelle on associe une image sur Y , obtenue *par intégration sur les fibres*. La question est de décrire les fonctions obtenues et de refaire le chemin dans l'autre sens pour récupérer f .

Exemple 1 : X est \mathbb{E}^2 , Y est l'ensemble des droites affines de \mathbb{E}^2 et Z est formé des couples (x, ℓ) où x est un point de ℓ . Z définit la relation d'incidence des points et des droites. L'ensemble Y est assez simple.

Exercice 4.

a) Décrire Y .

b) Dans \mathbb{E}^n on considère l'ensemble Y des hyperplans affines ; décrire Y (on pourra considérer le vecteur normal définissant l'hyperplan).

Remarque : l'ensemble $G(k)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k a une structure plus compliquée.

Exercice 5. On se propose de décrire l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{E}^4 . Essayez de décrire l'ensemble des plans de dimension 2 dans l'espace de dimension 4. On peut identifier l'ensemble des plans à une quadrique dans un espace projectif. C'est en fait

la théorie de Plücker (coordonnées pluckériennes) qui fut le premier essai de décrire ces espaces.

Exemple 2. On donne un exemple différent :

On considère la sphère \mathbf{S}^2 et les fonctions continues ou dérivables sur la sphère.

1. Montrer qu'on peut décomposer de manière unique toute fonction en somme d'une partie paire et d'une partie impaire.

2. À chaque grand cercle c de \mathbf{S}^2 on associe l'intégrale de f sur c :

$$F(c) = \int_c f(x) \, d\gamma_c$$

Montrer, en utilisant 1., que l'application $f \mapsto F$ n'est pas injective. En 1927 Funk a montré que si f est paire la donnée de F permet de déterminer f .

Références

A

- [1] Repères, n° 86, juil. 1999.
- [2] Edward BENDER, *An introduction to mathematical modeling*, Dover 2000.
- [3] The UMAP journal of undergraduate mathematics and its Applications, *Mathematics made visible*, Vol. 21 n° 1, 2000 ainsi que toutes les publications du Consortium of mathematics and applications (COMAP), Boston (USA).
- [4] A. AMSALEM, *Bases physiques et mathématiques du scanner aux rayons X (exploration tomographique)* Bulletin APMEP, 563, Déc. 1988.
- [5] J. SERRA, *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press 1982
- [6] Sur le contrôle non-destructif :
 - a. M. FINK *et al.* : La Recherche n°291, oct. 1996. *Ultrasons, remonter le temps malgré le désordre.*
 - b. R. HALMSHAW : *Non destructive testing*, Ed. E. Arnold London, 1991.
 - c. R. HALRNSHAW : *Industrial radiology, theory and practice*, Applied Science London and New Jersey, 1982.
 - d. G. DEVEY, P. WEFLS : *Ultrasound in medical diagnosis*, Scientific American, mai 1978, pp98-112
- [7] GARDINER, *Geometric tomography*, Cambridge University Press.
- [8] Études fondamentales :
 - a. L. SANTALO & M. KAC, *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley, 1976.
 - b. W. SWINDELL & H. FLARRETT, *Computerized tomography*, Physics Today, déc. 1977.
- [9] G.T. HERMAN : *Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography*, New York, Academic Press.

B

- [1'] Michael ATIYAH : *Geometry of yang-Mills fields*, Pisa Accademia dei lincei 1979.
- [2'] R.N. BRACEWELL, A.C. RIDDLE : *Inversion of fan-beam scans in radio astronomy*, Astrophysics Journal, vol. 150, pp. 427-434, nov. 1967.
- [3'] Simeon GINDIKIN : *75 Years of Radon transform*, International press 1994.
- [4'] Sigurdur HELGASON : *The Radon transform*, Birkhäuser, Boston 1999.
- [5'] D. MUMFORD : *Algebraic geometry I*, Complex projective varieties p.172, Springer 1976(1995).
- [6'] RADON : *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, 1917.
- [7'] SANTALO : *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley, 1976.
- [8'] Alain YGER , *Signaux, CAT-Scanner, Quelques aspects du rôle des mathématiques dans d'autres sciences*, Fête de la science, Bordeaux, Octobre 2000.