

RÉFORMES DE L'ÉDUCATION ET DÉMOCRATIE

Lors d'un récent colloque à Mulhouse, Michelle ARTIGUE posait le problème de la viabilité des réformes éducatives.

La réforme des lycées est à mi-parcours : commencée en septembre 2000 en 2nde elle s'achèvera avec les bacheliers nouveau cru de juillet 2003. Il faudra alors commencer à évaluer cette réforme et observer sa viabilité.

Cette réforme a proposé un redéploiement de l'horaire scolaire (qui comme tout le monde le sait n'est pas extensible à l'infini) en diminuant l'horaire de plusieurs disciplines pour augmenter l'horaire de travail en groupe et en proposant de nouvelles formes de « travail » (travaux personnels encadrés, aide individualisée, heure de vie de classe, éducation civique et citoyenne). Certains enseignants vivent mal cette diminution, à tel point que l'association des professeurs de mathématiques (APMEP) lance une pétition réclamant une augmentation des horaires aux motifs suivants : « Enseigner les mathématiques devient de plus en plus difficile : les exigences institutionnelles sont de plus en plus confuses, les apprentissages se multiplient (calculatrices, informatique,...), les horaires diminuent ce qui nécessiterait un accroissement du travail personnel des élèves alors qu'ils en fournissent de moins en moins. Il aurait donc fallu une prise en charge plus importante des élèves ; au contraire, les réductions d'horaires pénalisent surtout les élèves les plus fragiles... En conséquence, nous demandons un minimum hebdomadaire de :

- au collège : 4h d'un enseignement commun pour tous les élèves ;
- au lycée :

en 2nde : 3h en classe entière + 1,5h de module en demi-classe + 1h d'aide individualisée ;

en première et terminale S : 5h en classe entière + 1h en demi-classe ;

en série L : le retour à l'offre d'une spécialité mathématique ;

- quel que soit le niveau, des moyens supplémentaires pour remédier effectivement aux difficultés des élèves dès qu'elles se présentent. »

Marie-Hélène SALIN, présidente de l'association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM) rappelle que « *la question de l'insuffisance des horaires ne nous paraît pas seule en cause dans les difficultés actuelles de l'enseignement des mathématiques* » et il lui paraît nécessaire d'engager une réflexion sur « *la formation des professeurs, avant, pendant et après le passage à l'IUFM, les concours de recrutement des professeurs (école et enseignement secondaire), l'image des mathématiques et de son enseignement dans la société.* »

Et certains vont jusqu'à remarquer que « *plutôt qu'avoir le regard fixé sur le nombre d'heures de cours, il est plus urgent de travailler au contenu de ces heures et de s'employer à tenter d'y faire des mathématiques plus en phase avec les réalités d'aujourd'hui.* »

La réforme des contenus et de l'esprit des programmes d'enseignement des mathématiques ont été également un élément important de la réforme actuelle, qui par exemple renforce l'enseignement des statistiques et des probabilités, avec notamment

un retour en force des probabilités continues en séries scientifique. J. FRANCHI nous explique, dans ce numéro de l'Ouvert, comment s'enroulent les processus aléatoires ; un bel exemple de la richesse des apports de l'analyse et de la géométrie pour résoudre des problèmes complexes de probabilités.

Les T.P.E., travaux personnels encadrés, sont une nouveauté de la réforme des lycées : ils fournissent aux élèves le temps (2 heures hebdomadaires inscrites à l'emploi du temps) de mener un véritable travail, en partie collectif (l'élève pouvant s'intégrer à une équipe de plusieurs élèves), croisant au moins deux disciplines, et aboutissant à une production concrète (document, site internet,...) qui leur permet d'enrichir leurs savoirs, de développer des compétences et d'affiner leur méthode.

Francis JAMM quant à lui nous relate l'aventure d'un club scientifique, une autre manière de développer l'esprit scientifique, en s'affranchissant des contraintes d'horaires et de programmes, motivé par le goût de la découverte. C'est un témoignage qui montre, que malgré les difficultés matérielles, il est encore possible, ici ou là, de trouver des élèves et des professeurs volontaires pour s'enthousiasmer sur les chemins de la recherche.

COMPARON Claude nous propose quelques constructions sur le point de Clifford. L'idée de ces constructions prend son origine dans la formation initiale de COMPARON et traverseront son expérience d'enseignant en collège, mettant à contribution un parent d'élève.

L'article d'Alain KUZNIAK et de Catherine HOUEMENT permet de réfléchir sur l'articulation entre la figure réelle et la figure abstraite, entre l'expérimental et le théorique. Où se situe la frontière de la rigueur ? La réflexion du début du siècle dernier redevient actuelle avec l'essor de l'outil informatique.

Les exemples précédents ont montré comment le cloisonnement disciplinaire, curriculaire ou historique peut être éclaté : on peut alors entrevoir le concept de formation tout au long de la vie qui émerge de la campagne électorale.

Lors de la précédente élection présidentielle, un candidat était allé jusqu'à proposer un référendum sur l'éducation. La législature qui vient de s'écouler a connu des propositions de réformes qui ont rassemblé beaucoup d'enseignants dans les rues, et ils n'avaient pas un litre de vin rouge dans la poche, comme l'a prétendu le précédent ministre de l'éducation.

Or, pour cette nouvelle élection présidentielle, l'éducation est curieusement absente du débat démocratique. Les propositions des uns ressemblent beaucoup aux propositions des autres : de sages principes sur lesquels tout le monde est d'accord.

Peut-être qu'une condition nécessaire de viabilité des réformes de l'éducation est qu'elles soient un objet de débat démocratique. Sous cette hypothèse, l'actuelle campagne présidentielle est de mauvais augure.

Richard Cabassut

COMMENT S'ENROULENT LES PROCESSUS ALÉATOIRES

J. FRANCHI

I.R.M.A., Université Louis Pasteur de Strasbourg¹

Résumé

Il s'agit ici de présenter un thème bien particulier de la très riche et très active recherche en théorie des probabilités : l'étude des enroulements effectués par un processus aléatoire, et en particulier par le mouvement brownien ou le flot géodésique, autour d'un point ou d'une courbe ou d'une pointe. Le but principal est d'obtenir pour ces enroulements à l'instant t la bonne normalisation, c'est-à-dire la vitesse à laquelle ils évoluent, et la loi asymptotique de ces enroulements normalisés lorsque le temps t tend vers l'infini.

Bien entendu, le choix de ce thème et la présentation qui en est faite ci-dessous reflètent l'intérêt et le point de vue personnels de l'auteur, et donc ne prétendent ni à l'objectivité ni à l'exhaustivité, et n'engagent que lui.

Introduction

Le mouvement brownien est un objet fondamental dans plusieurs branches scientifiques, et pas seulement dans la théorie des probabilités.

Il intervient beaucoup en particulier en analyse mathématique, en physique théorique, comme par exemple pour appréhender les intégrales de chemin de Feynman et pour modéliser la croissance des polymères, en mathématiques financières ; il a des connexions encore avec la géométrie différentielle, la géométrie hyperbolique et les systèmes dynamiques.

Introduit à l'origine de façon heuristique par le biologiste Brown observant de fines particules soumises à des multitudes de petits chocs, il est rapidement devenu un concept de base pour bien des physiciens théoriciens et des mathématiciens, et est passé du stade d'outil à celui d'objet d'études à part entière, après avoir été dûment formalisé par les mathématiciens de la première moitié du vingtième siècle. Il offre en effet entre autres l'avantage d'être au carrefour de plusieurs notions essentielles en théorie des probabilités : c'est tout à la fois un processus gaussien, une martingale, et un processus de Markov ; sans pour cela que ce soit un objet dont il soit possible de faire rapidement le tour... Les travaux dont il est le cœur se multiplient à vive allure depuis le milieu du vingtième siècle.

Quelques unes des grandes étapes ont été les découvertes suivantes : ses liens avec les marches aléatoires, avec la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques, avec la théorie de la mesure, avec les équations de Laplace et de la chaleur : l'intégration stochastique et le calcul stochastique d'Itô, la théorie des martingales, la résolution des équations différentielles stochastiques, le temps local, la théorie des excursions, le calcul de Malliavin.

Insistons sur la nature géométrique du mouvement brownien, car cela importe pour le propos de cet article. La géométrie étudie essentiellement les espaces courbes,

1. © L'OUVERT 105 (2002)

et en premier lieu ceux qui sont approximativement localement faits comme les espaces euclidiens, à savoir les variétés riemanniennes. Une telle variété est naturellement munie d'un laplacien (généralisant le laplacien euclidien usuel), lequel donne naturellement naissance à un mouvement brownien vivant sur la variété; par conséquent le mouvement brownien est aussi un objet intrinsèquement géométrique. Et les quantités qu'on pourra calculer par son intermédiaire seront donc des quantités relevant de la géométrie de la variété qui le porte. Il en est ainsi en particulier des enroulements, ou nombres de tours, produits par le mouvement brownien, qui font pour une bonne part l'objet de cet article.

Un autre objet naturel et important sur une variété (complète), ou plutôt sur le fibré tangent de cette variété (constitué par l'ensemble de ses éléments de contact), est son flot géodésique: partant au temps 0 d'un élément de contact (id est un point et un vecteur tangent unitaire basé en ce point), on suit à vitesse constante la géodésique qu'il détermine. Considérant simultanément le flot géodésique agissant sur tous les éléments de contact, on obtient un exemple fondamental de système dynamique. Le comportement au cours du temps d'un tel système dynamique est frappant en particulier lorsque la variété qui le porte est de courbure partout négative. Il est alors connu depuis Hadamard que ce comportement est "ergodique": en temps suffisamment grand, la moyenne temporelle par rapport au flot de toute fonctionnelle raisonnable sur le fibré tangent s'identifie génériquement (par rapport à certaines lois de départ des géodésiques) à une moyenne spatiale; ce qui signifie que le flot géodésique passe statistiquement un temps bien réparti dans toutes les configurations possibles.

Ce comportement ergodique du flot géodésique le rapproche de façon surprenante a priori du mouvement brownien. Et de fait l'analogie entre ces deux processus, de natures très différentes pourtant, puisque l'un est totalement déterministe (une fois son origine fixée) et l'autre totalement aléatoire, peut être précisée et amplifiée, en courbure négative toujours, et permet de calculer au moyen du mouvement brownien des quantités subtiles relatives au flot géodésique, qu'on ne sait pas calculer autrement, comme justement la loi asymptotique de certains enroulements.

1. Mouvement brownien plan et théorème de Spitzer

Donnons d'abord une façon de définir le mouvement brownien plan: pour chaque entier n , quadrillons le plan par un grillage régulier parallèle aux axes et de maille formant un carré de côté $1/\sqrt{n}$. La marche aléatoire simple sur ce quadrillage est obtenue par la règle de déplacement suivante: en chaque point atteint on lance deux pièces de monnaie, la première décidant si on se déplace horizontalement ou verticalement et la seconde si on se déplace de $+1$ ou de -1 . Choisissons de plus de ne regarder cette marche qu'aux instants multiples de n . A toute suite illimitée de lancers de pièces est ainsi associée une trajectoire de la marche aléatoire. Reliant les points successifs par où passe une trajectoire, on la voit comme une ligne brisée continue dans le plan. Nous avons donc, pour tout n , correspondant à toutes les suites illimitées possibles de lancers de pièces, un ensemble de trajectoires continues du plan. On démontre que lorsque n tend vers l'infini ces trajectoires convergent

localement uniformément vers d'autres trajectoires, qui sont celles du mouvement brownien plan : on tire au sort finalement une telle trajectoire ω , et le mouvement brownien B est simplement défini par : pour tout temps réel $t \geq 0$, $B_t(\omega)$ est le point aléatoire $\omega(t)$ du plan où est la trajectoire ω à l'instant t .

On nomme "mesure de Wiener" la loi ou mesure de probabilité suivant laquelle sont tirées au sort les trajectoires browniennes ω ; la procédure décrite ci-dessus la présente comme une image de la loi de probabilité régissant le lancer d'une suite illimitée de pièces.

La convergence ci-dessus fait que les trajectoires du mouvement brownien plan sont continues. Puisque pour chaque n la marche est markovienne, et même à accroissements indépendants et homogènes, le mouvement brownien plan est markovien, et même à accroissements indépendants et homogènes. Le théorème central-limite assure qu'il est de plus un processus gaussien. La propriété d'autosimilarité de la famille des marches se traduit aussi en une propriété d'autosimilarité du mouvement brownien : la loi de $t \mapsto B_t$ est pour tout $s > 0$ la même que celle de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{s}} B_{st}$. On démontre que les trajectoires browniennes ne sont dérivables en aucun de leurs points.

Il est assez clair que cette construction n'est pas liée à la dimension deux du plan, et que de fait on obtient de la même façon la mesure de Wiener et donc le mouvement brownien de l'espace euclidien de dimension d quelconque, \mathbb{R}^d . Il est moins clair, mais tout aussi exact dans l'essentiel des cas, qu'on peut de même quadriller une variété riemannienne et la munir ainsi de sa mesure de Wiener, c'est à dire de son mouvement brownien naturel. Cela peut aussi être obtenu à partir du mouvement brownien euclidien de même dimension, en le transportant dans l'espace tangent en un point de la variété, et en faisant rouler sans glissement sur la variété cet espace tangent, le long de sa trajectoire brownienne générique. La fonction exponentielle étant entière dans le plan complexe, on peut observer que l'exponentielle du mouvement brownien plan a encore des trajectoires de mouvement brownien plan, à condition de les parcourir à une certaine vitesse non uniforme, et elle-même aléatoire. Une conséquence est que le mouvement brownien plan $t \mapsto B_t$ ne passe jamais par 0 en un temps > 0 , ni par aucun point de tout ensemble dénombrable fixé à l'avance. (Il passe en revanche de temps à autre arbitrairement près de tout point ; on dit pour cela qu'il est "récurrent".) On peut donc définir ses coordonnées polaires $(r_t, \theta_t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta_t$ étant une détermination continue de son angle polaire, qui représente l'enroulement accompli par le mouvement brownien plan $t \mapsto B_t$ autour de l'origine 0.

F. Spitzer a obtenu en 1958 le théorème suivant, qui est le point de départ de toutes les études effectuées depuis et jusqu'à aujourd'hui sur les enroulements des processus.

Théorème 1 *Lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire $\frac{\theta_t}{\log t}$ converge vers une loi de Cauchy (de paramètre $\frac{1}{2}$).*

La loi de Cauchy de paramètre p a pour densité sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto \frac{p/\pi}{p^2+x^2}$.

Les premières preuves de ce théorème étaient longues et difficiles. Les progrès du calcul stochastique ont permis d'en donner une preuve simple et courte en 1982, preuve qui à son tour a permis de progresser rapidement dans les questions découlant naturellement du théorème de Spitzer, qui était resté assez longtemps un résultat isolé.

Écrivons rapidement une telle preuve. L'écriture du Laplacien en coordonnées polaires et la formule d'Itô, formule de base du calcul stochastique, montrent qu'on peut trouver deux mouvements browniens réels indépendants β et W , c'est-à-dire un mouvement brownien plan (β, W) , de sorte que pour tout $t \geq 0$ on ait :

$$r_t = r_0 e^{\beta(\sigma_t)} \quad \text{et} \quad \theta_t = \theta_0 + W(\sigma_t), \quad \text{où} \quad \sigma_t := \inf\{s > 0 \mid \int_0^s e^{2\beta u} du > t\}.$$

Utilisant l'autosimilarité pour changer :

$$(\beta_s, W_s) \quad \text{en} \quad (\log t) \times \left(\beta(s/\log^2 t), W(s/\log^2 t) \right),$$

(à t fixé), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log t} (\theta_t - \theta_0) &\equiv W\left(\inf\left\{(\log^{-2} t) s > 0 \mid \int_0^s e^{2(\log t)\beta(u/\log^2 t)} du > t\right\}\right) \\ &= W\left(\inf\left\{s > 0 \mid \frac{1}{\log t} \times \log\left[\int_0^s e^{2(\log t)\beta v} dv\right] > 1 - \frac{2\log\log t}{\log t}\right\}\right) \\ &\longrightarrow W\left(\inf\{s > 0 \mid 2 \max_{[0,s]} \beta > 1\}\right) = W\left(\inf\{s > 0 \mid \beta_s > \frac{1}{2}\}\right), \end{aligned}$$

qui a la loi de Cauchy annoncée.

2. Première extension du théorème de Spitzer

La première des questions découlant naturellement du théorème de Spitzer est : qu'en est-il de la loi conjointe des enroulements du brownien plan autour de plusieurs points ? Fixons donc n points distincts A_1, \dots, A_n du plan, et notons θ_t^j la détermination continue de l'angle polaire relatif à A_j du brownien B_t , c'est-à-dire son enroulement autour de A_j . Le théorème de Spitzer assure que chaque variable $\frac{\theta_t^j}{\log t}$ converge vers une loi de Cauchy, mais ne dit pas quelle est la loi limite du vecteur aléatoire $\frac{1}{\log t}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$, ni même si une telle loi limite existe. Cette question, sensiblement plus délicate que celle traitée par Spitzer, a été résolue par Pitman et Yor en 1986.

Pour comprendre un peu ce qui se passe, introduisons les notions de petits et grands tours. L'enroulement θ_t^j est en fait donné par intégration de la forme différentielle élémentaire $d\theta^j$ le long de la trajectoire brownienne entre les instants 0 et t :

$$\theta_t^j = \int_0^t d\theta_s^j = \int_{B[0,t]} d\theta^j.$$

Ceci est clair pour toute courbe de classe C^1 , et reste vrai pour la "courbe" brownienne, dans le cadre du calcul stochastique. Les petits tours autour du point A_j sont

obtenus en ne considérant la courbe brownienne que lorsqu'elle passe suffisamment près de A_j : pour un paramètre $r > 0$ fixé, ils sont donnés par $\int_0^t 1_{\{r_s^j < r\}} d\theta_s^j$, où r_s^j désigne la distance entre A^j et B_s .

De même, pour $R > r$ fixé, les grands tours sont donnés par $\int_0^t 1_{\{r_s^j > R\}} d\theta_s^j$. Ce sont des petits tours autour du point à l'infini du plan complexe, mais dans une échelle de temps tenant compte de la géométrie du plan ; on peut le réaliser en appliquant une inversion. On prouve que la contribution restante, constituée par les "tours moyens" $\int_0^t 1_{\{r \leq r_s^j \leq R\}} d\theta_s^j$, n'importe asymptotiquement pas : $\frac{1}{\log t} \int_0^t 1_{\{r \leq r_s^j \leq R\}} d\theta_s^j$ converge vers 0 en probabilité lorsque $t \rightarrow \infty$, pour tous r et R fixés.

Observons dès maintenant que c'est là un fait général dans ces questions d'enroulement (autour de points, de courbes ou de pointes) : les contributions qui importent asymptotiquement sont celles dues aux moments où la trajectoire passe près de la singularité autour de laquelle elle tourne. C'est facile à concevoir en songeant au comportement de l'aiguille d'une boussole, qui ne fait beaucoup de tours que lorsqu'elle passe près du pôle nord. Lorsque le temps est très grand, du fait de la normalisation par un facteur (pour l'instant $\log t$) tendant vers l'infini, on ne voit l'enroulement évoluer que par à-coups, et, à la limite, par sauts correspondant aux affolements de la boussole lorsqu'elle frôle le pôle nord.

Fixons ensuite r et R de façon que les n disques $D(A^j, r)$ soient disjoints deux à deux et inclus dans $D(0, R)$. Du fait de ces disjonctions, des symétries radiales et de la propriété de Markov, les n petits tours dans les $D(A^j, r)$ et les grands tours hors de $D(0, R)$ sont indépendants, à condition toutefois de supposer connu le temps passé entre les instants 0 et t dans la zone intermédiaire, ce temps étant mesuré dans une échelle de temps rendant plus symétriques les rôles des A^j et de l'infini. Ce temps passé, normalisé encore par $\log t$, converge en loi vers une variable limite L à densité exponentielle. On peut par ailleurs, supposant connue cette variable limite L , évaluer séparément les lois limites indépendantes des petits et grands tours dans le théorème de Spitzer : la loi limite des petits tours est de Cauchy de paramètre L , mais la loi limite des grands tours n'est pas de Cauchy. La contribution des grands tours est bien sûr commune aux n points A^j . Ces considérations constituent les grandes lignes de la preuve du résultat suivant, dû à Pitman et Yor.

Théorème 2 *Lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire*

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$$

converge vers la loi de $(W + LC_1, \dots, W + LC_n)$, où C_1, \dots, C_n sont des variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes, et L et W sont indépendantes des C^j , de loi déterminée par

$$\mathbb{E} \left(e^{iuW - a^2 L} \right) = \left(chu + a^2 \frac{shu}{u} \right)^{-1}.$$

Le symbole \mathbb{E} ci-dessus désigne l'espérance, à savoir l'intégrale, ou la moyenne, suivant toutes les trajectoires possibles.

Pitman et Yor remarquèrent aussi que leur résultat peut s'exprimer sous la forme d'un théorème des résidus stochastique donnant la loi limite d'une seule intégrale

stochastique $\frac{1}{\log t} \int_0^t f(B_s) dB_s$, où f est une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann.

Signalons qu'une telle intégrale stochastique peut être définie par limite de sommes de Riemann-Stieltjes, comme les intégrales de Riemann-Stieltjes (dont en particulier les intégrales de Riemann) classiques. Le calcul stochastique d'Itô prescrit comment peuvent se manipuler ces intégrales. La règle essentielle est donnée par la formule d'Itô, qui se substitue à la formule élémentaire du calcul usuel $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt$. Elle énonce essentiellement que

$$F(B_b) - F(B_a) = \int_a^b F'(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2} \int_a^b \Delta F(B_t) dt .$$

Notons en passant qu'elle fait apparaître le lien entre le mouvement brownien B et le laplacien Δ . Signalons encore en passant l'identité isométrique fondamentale

$$\mathbb{E} \left(\left[\int_a^b F(B_t) \cdot dB_t \right]^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_a^b |F(B_t)|^2 dt \right) ,$$

qui, elle, indique pourquoi le mouvement brownien offre pour les physiciens théoriciens le grand intérêt de fournir une racine carrée de dt .

On a ci-dessus de façon très résumée: $(dB_t)^2 \equiv dt$.

3. Extensions géométriques du théorème de Spitzer

Le théorème de Pitman-Yor répond pour l'essentiel aux questions naturelles d'enroulement asymptotique dans le plan euclidien. Comment poursuivre et amplifier ce travail?

1. Un résultat général en dimension deux

Observons d'abord que la relative complexité de l'énoncé de ce théorème vient surtout du point à l'infini du plan, le point qui lui manque pour constituer la sphère de Riemann. Et, de fait, si on transporte la question et le mouvement brownien du plan sur la sphère usuelle par projection stéréographique, on obtient la même question relativement au mouvement brownien sphérique, mais toutefois avec la différence notable que les trajectoires en sont parcourues dans une échelle de temps modifiée. On s'attend par ailleurs bien sûr à ce que dans le cas de la sphère et de son mouvement brownien tous les points autour desquels on tourne jouent le même rôle, y compris le pôle image du point à l'infini du plan. Notons qu'autour d'un point sur la sphère seuls les petits tours conservent du sens. Nous avons ainsi le résultat suivant relatif à la sphère usuelle, dans lequel les θ_t^j figurent les petits tours autour de n points distincts:

Théorème 3 *Sur la sphère \mathbb{S}^2 , lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{t}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$ converge vers la loi de (C_1, \dots, C_n) , où C_1, \dots, C_n sont des variables de Cauchy indépendantes (de paramètre $\frac{1}{4}$).*

Faisons trois remarques sur ce résultat : son énoncé est plus simple que celui du théorème relatif au plan ; la normalisation n'est plus $\frac{1}{\log t}$, mais $\frac{1}{t}$; il est plus simple de l'établir directement sur la sphère (en suivant la démarche esquissée ci-dessus pour le résultat plan, avec des difficultés en moins) que de passer par le plan et la projection stéréographique.

Ces trois remarques sont en fait liées. La différence essentielle entre le plan et la sphère est que l'un est non compact et de surface infinie, et que l'autre est compacte (et donc de surface finie). Dans le premier cas, bien que récurrent, le mouvement brownien ne peut passer entre les instants 0 et t un temps asymptotiquement proportionnel à t dans chaque disque : il y a en effet une infinité de disques disjoints de taille fixée. Tandis que dans le second cas, et dans le cas de toute variété compacte, le mouvement brownien passe effectivement entre les instants 0 et t dans chaque ouvert un temps asymptotiquement proportionnel à t et à la surface (ou au volume) de cet ouvert. C'est le phénomène d'"ergodicité".

Comme les petits tours sont liés au temps passé dans un petit disque (ou une petite calotte), cela explique la différence de normalisation du cas ergodique avec le cas plan ; cela fait sentir aussi que la preuve directe doit être en effet plus aisée.

Généralisons maintenant le résultat sphérique dans deux directions à la fois, toutes deux géométriquement très naturelles.

Il est d'abord très légitime de remplacer la sphère, exemple très particulier, par une surface compacte quelconque. Il est ensuite plus agréable et plus général d'exprimer le résultat sous forme de la loi limite d'une intégrale stochastique par rapport à une forme différentielle fermée de degré 1 arbitraire sur la variété privée d'un nombre fini de singularités ; c'est en effet la notion généralisant à la fois la 1-forme élémentaire $d\theta^j$, les combinaisons linéaires de telles formes, et les fonctions méromorphes dans le plan complexe ; et la théorie de telles intégrales stochastiques est au point depuis 1978.

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4 *Soit M une surface riemannienne connexe compacte d'aire S , et soit sur M privée de n points T_1, \dots, T_n une 1-forme ω de classe C^2 , qu'on suppose fermée au voisinage des points T_j . Notons c_j le résidu de ω en T_j , et B_t le mouvement brownien de M , issu de $B_0 \neq T_1, \dots, T_n$.*

Alors la loi de $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi de Cauchy de paramètre $\frac{\pi}{S} \sum_{j=1}^n |c_j|$.

Une telle convergence est valable conjointement pour toute famille finie de formes ω .

Pour démontrer ce théorème, on commence par montrer la convergence vers 0 lorsque la forme ω est soit sans singularité soit exacte, puis on se ramène via des intégrations par parties à l'étude conjointe des petits tours autour des points T_j . Ne disposant pas de coordonnées globales, on est conduit à considérer la contribution de chaque incursion auprès d'une singularité. La clef est alors d'utiliser des coordonnées conformes et d'observer que la variation totale de l'angle au cours d'une incursion délimitée par le rayon ne dépend pas de l'horloge (la vitesse de parcours) de la

trajectoire, et donc qu'elle est la même que dans le cas d'une incursion brownienne plane dans un disque.

On voit ainsi que la contribution d'une incursion a une loi de Cauchy, indépendante des extrémités de cette incursion ; ce qui permet de plus de montrer que les différentes incursions contribuent indépendamment les unes des autres.

On estime ensuite le nombre des incursions effectuées jusqu'au temps t , ce qui se fait au moyen du théorème ergodique et par rétrécissement des disques géodésiques entourant les singularités (pour annihiler les fluctuations de la métrique de M).

Signalons qu'il existe naturellement sur une variété une autre sorte d'enroulements, ceux dus à l'homologie de la variété (non privée d'un nombre fini de points). Dans le cas des surfaces compactes, ce sont les tours qu'on peut faire autour des anses. L'exemple le plus simple est celui d'une bouée (tore de dimension deux), pour laquelle on voit bien qu'il y a deux directions indépendantes d'enroulement ; on dit que son groupe d'homologie est \mathbb{Z}^2 . En général, le groupe d'homologie est le groupe d'homotopie abélianisé (en le quotientant par son sous-groupe dérivé). La notion duale est la cohomologie, qui est isomorphe à l'espace vectoriel des formes différentielles harmoniques sur la variété : on voit de nouveau que les enroulements sont obtenus par intégration de formes différentielles harmoniques (nécessairement de degré un lorsqu'on intègre le long de courbes).

Comme signalé ci-dessus pour établir le théorème précédent, la contribution asymptotique due à une telle forme, sans singularité, est nulle. Cela tient à ce que les enroulements browniens homologues évoluent à une vitesse moindre que les enroulements browniens singuliers qui nous occupent essentiellement dans cet article. En effet, le phénomène déjà signalé d'affolement de la boussole frôlant le pôle nord n'a pas lieu dans ce cas, et on conçoit donc que cela ralentisse notablement la vitesse d'évolution. De fait, dans le cas des enroulements browniens homologues dans une variété compacte la bonne normalisation est la racine carrée du temps, et on obtient une loi limite gaussienne, ce qui n'est pas une surprise si on songe au théorème central limite. Cette analogie est justifiée par le fait que dans le cas d'une forme régulière ω^r n'interviennent que des variables aléatoires intégrables. Un tel résultat se démontre essentiellement en appliquant le théorème ergodique et un théorème central limite relatif à la martingale de carré intégrable définie par l'intégrale stochastique $\int_{B[0,t]} \omega^r$.

De plus la contribution asymptotique d'une forme harmonique régulière est bien répartie dans la variété, par ergodicité, et on peut donc négliger la contribution due à un petit voisinage d'un point donné ; tandis que, comme nous l'avons vu plus haut, seul un tel petit voisinage d'un point contribue asymptotiquement aux enroulements autour de ce point. La propriété de Markov permet par suite d'établir que les deux sortes d'enroulement s'effectuent de manière asymptotiquement indépendante. Donc les résultats d'enroulements browniens singuliers présentés dans cet article ont toujours lieu conjointement avec les résultats (considérablement plus faciles) d'enroulements browniens réguliers. Dans le cas d'une variété compacte, nous aurons de la sorte systématiquement convergence conjointe en loi d'un nombre fini quelconque d'enroulements singuliers $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega_j$ et d'enroulements réguliers $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{B[0,t]} \omega_k^r$, respectivement vers des variables de Cauchy et vers des variables gaussiennes, toutes

ces variables étant indépendantes.

2. En dimension supérieure

Le résultat précédent pose clairement la question de son analogue en dimension $d \geq 3$.

Dans \mathbb{R}^3 , les enroulements ne peuvent avoir de sens qu'entre courbes sans point commun, et sont donnés entre deux lacets de classe C^1 qui ne s'intersectent pas par l'indice d'entrelacement de Gauss ; celui-ci peut s'exprimer par une intégrale double faisant intervenir les vecteurs tangents des deux lacets et leur produit vectoriel, intégrale dans laquelle un des deux lacets peut être remplacé par un chemin, en renonçant seulement à obtenir une valeur entière.

Par ailleurs, puisque le brownien plan ne rencontre pas l'origine et puisque la projection sur tout plan du brownien de \mathbb{R}^3 est un brownien plan, le brownien de \mathbb{R}^3 ne rencontre aucune droite fixée à l'avance. Par déformation, cela entraîne qu'il ne rencontre aucune courbe régulière fixée à l'avance, et que ceci reste vrai pour toute variété de dimension 3.

Nous avons donc une bonne notion d'enroulements pour le brownien d'une variété riemannienne de dimension trois autour d'un lacet lisse de cette variété. Mais le calcul de ces enroulements n'est pas évident. Revenons à \mathbb{R}^3 , et souvenons-nous des leçons classiques d'électrostatique et de magnétostatique, et pour commencer remémorons-nous le théorème d'Ampère, qui servait à dénombrer le nombre de spires d'un solénoïde : l'enroulement d'une courbe autour d'une autre, c'est à dire l'entrelacement de Gauss, est égal à la circulation le long d'une des deux courbes du champ magnétique produit par un courant uniforme dans l'autre. Or il se trouve que sur notre variété compacte existe une généralisation naturelle, sinon du champ magnétique, du moins de la 1-forme de circulation du champ magnétique engendré par un lacet lisse ; c'est une 1-forme harmonique connue depuis 1960 par le livre de G. de Rham sur les variétés différentiables.

De plus tout ceci reste valable aussi en dimension $d \geq 3$, à condition de remplacer le lacet \mathcal{L} par une sous-variété orientée compacte de dimension $(d-2)$, disons encore \mathcal{L} .

Nous avons alors l'enroulement du brownien B de M qui est donné à l'instant t par l'intégrale stochastique $\int_{B[0,t]} H_{\mathcal{L}}$, où $H_{\mathcal{L}}$ est la 1-forme harmonique de circulation magnétique et donc d'enroulement autour de \mathcal{L} mentionnée ci-dessus. Le problème est ainsi bien posé.

Mais une difficulté importante se présente par rapport à la dimension deux, pour laquelle nous avons fait un usage crucial des coordonnées conformes : de telles coordonnées n'existent plus en dimension plus grande. La solution est de nouveau inspirée par nos anciens cours d'électrostatique, et les liens bien connus entre le mouvement brownien, la théorie du potentiel (newtonnien ou non), et l'électrostatique.

Le noyau de la chaleur $p_t(x,y)$ de la variété compacte M donne la probabilité infinitésimale pour le brownien B de passer de x à y en un temps t ; l'intégrale $\int_0^\infty (p_t(x,y) - 1) dt$ fournit la fonction de Green $g(x,y)$ de M ; l'intégrale $\int_{\mathcal{L}} g(x,y) dy$ fournit le potentiel électrostatique $V(x)$ de \mathcal{L} au point x ; $E := -dV$ est la 1-forme de circulation du champ électrique engendré par \mathcal{L} .

On utilise V pour définir un petit condensateur tubulaire à armatures équipotentielles autour de \mathcal{L} , dans lequel la distance à \mathcal{L} , disons r , est bien définie, puis on vérifie que, près de \mathcal{L} , $V + \frac{1}{2\pi} \log r$ est borné et $E \sim \frac{dr}{2\pi r}$. On calcule aussi une approximation de $H_{\mathcal{L}}$ dans ce condensateur, montrant qu'on peut y remplacer $H_{\mathcal{L}}$ par une 1-forme orthogonale à E . Ceci permet de calculer des lois de contribution d'incursion de B dans le condensateur. Enfin il faut estimer par ergodicité la fréquence de ces incursions, d'où le paramètre de la loi de Cauchy limite en fonction de la capacité du condensateur, qu'on peut finalement elle aussi calculer.

Il est en outre possible de modifier tout ceci pour l'adapter au cas d'une variété M plus nécessairement compacte, B devenant alors une diffusion (c'est-à-dire essentiellement un processus de Markov continu) plus générale que le mouvement brownien, à condition toutefois d'exiger qu'elle reste ergodique.

Résumons ce qui précède, sous la forme précise d'un énoncé très général d'enroulements browniens asymptotiques conjoints.

Soit M une variété riemannienne connexe orientée complète de classe C^3 et de dimension $d \geq 3$. Soit \mathcal{L} une sous-variété compacte de M , de classe C^2 et de dimension $d - 2$. Soit F une fonction de classe C^3 sur M telle que la mesure μ ayant la densité e^{-2F} par rapport à la mesure de volume de M soit une probabilité. Soit X la diffusion sur M de générateur $\frac{1}{2}\Delta - (\nabla F) \cdot \nabla$ (c'est un opérateur différentiel d'ordre deux uniformément elliptique, obtenu en perturbant le laplacien de Beltrami de M par un terme d'ordre un). X est non dégénérée, ergodique, symétrique, et admet la mesure invariante μ (ce qui signifie que si sa loi à l'instant 0 est μ , alors elle est aussi μ à tout instant). Si M est de volume fini, on peut prendre F constante, et alors X est le mouvement brownien de M .

Notons λ la mesure de volume de \mathcal{L} induite par celle de M . Pour les composantes connexes $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_j, \dots, \mathcal{L}_k$ de \mathcal{L} , posons $\alpha_j := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_j} e^{-2F} d\lambda_j$. Lorsque F est constante (et donc X brownien), on a simplement α_j égal au volume de \mathcal{L}_j divisé par deux fois le volume de M .

Il faut bien sûr supposer que la loi de départ, celle de X_0 , ne charge pas \mathcal{L} : ainsi X ne peut démarrer d'un point situé sur \mathcal{L} , et ses enroulements autour de \mathcal{L} sont bien définis.

Le résultat dans ce cadre général est le suivant.

Théorème 5 *Soit ω une 1-forme différentielle dans $M \setminus \mathcal{L}$, fermée près de \mathcal{L} et telle que $\omega(\nabla F)$ et la divergence $\delta\omega$ soient μ -intégrables. Notons ρ_j le résidu de ω autour de \mathcal{L}_j . Alors, la loi de $\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \omega$ converge lorsque $t \rightarrow \infty$ vers la loi de Cauchy de paramètre $\sum_{j=1}^k |\rho_j| \alpha_j$.*

Comme précédemment, cet énoncé est valable conjointement pour tout nombre fini de formes ω . Il est aussi, comme l'étaient déjà tous les énoncés précédents, valable conjointement pour tout nombre fini de temps fixés a priori : on a pour tous $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_p$ convergence conjointe lorsque $t \rightarrow \infty$ des $\frac{1}{t} \int_{X[0, s_\ell t]} \omega$ vers

$\sum_{j=1}^k \rho_j \alpha_j \sum_{i=1}^{\ell} (s_i - s_{i-1}) C_{i,j}$, pour $1 \leq \ell \leq p$, où les $C_{i,j}$ sont kp variables de Cauchy indépendantes de paramètre 1.

Enfin cet énoncé est encore valable si on remplace la diffusion X par son “pont” basé en $x \in M$, c’est-à-dire si on la contraint à partir d’un point fixé x et à y revenir au temps t . Notons qu’en dimension trois, on récupère ainsi un résultat asymptotique portant sur de vrais coefficients (entiers) d’entrelacement de Gauss entre le lacet aléatoire constitué par la trajectoire générique du pont de diffusion et les lacets déterministes lisses autour desquels elle tourne.

Si on particularise au cas de la sphère \mathbb{S}^3 (qui topologiquement est \mathbb{R}^3 compactifié par un point à l’infini), le théorème ci-dessus décrit les enroulements asymptotiques du mouvement brownien (ou d’une autre diffusion ergodique) autour d’un nombre fini de nœuds disjoints (sans tenir compte de l’ordre dans lequel il entoure ces différents nœuds). Les paramètres α_j rencontrés ci-dessus dans la loi limite sont ici proportionnels aux longueurs des nœuds.

S’il n’y a qu’un nœud et qu’en gros il n’est pas traçable sur un tore, le théorème d’uniformisation de Thurston énonce qu’il existe une variété hyperbolique de volume fini homéomorphe au complémentaire de ce nœud dans \mathbb{S}^3 ; et cette variété hyperbolique est unique d’après le théorème de rigidité de Mostow. Dans un tel homéomorphisme, le nœud a été contracté en l’unique point à l’infini de la variété hyperbolique, appelé pointe; et tout petit voisinage tubulaire (torique) du nœud est envoyé sur un voisinage de la pointe homéomorphe au produit d’un tore \mathbb{T}^2 par une demi-droite \mathbb{R}_+ . Imaginons maintenant notre mouvement brownien (ou tout autre processus) allant assez loin vers la pointe: il va s’enrouler très rapidement dans les deux directions possibles du tore, et donc produire des enroulements singuliers, en quelque sorte autour du nœud situé à l’infini.

En admettant qu’on puisse uniformiser de même le complémentaire de n nœuds disjoints dans \mathbb{S}^3 , on obtient de façon canonique une variété hyperbolique de volume fini possédant n pointes, dans chacune desquelles un processus est susceptible d’aller s’enrouler comme autour d’un nœud situé à l’infini.

Cette considération est une première motivation pour s’intéresser aux variétés hyperboliques. Une autre, plus essentielle, est que le flot géodésique s’y comporte de façon suffisamment ergodique pour permettre en particulier le calcul asymptotique de ses enroulements. La difficulté de ce genre de calcul est bien plus grande pour le flot géodésique que pour une diffusion, du fait de la nature déterministe du flot, en opposition avec la propriété de Markov des diffusions (qui signifie qu’elles n’ont aucune inertie et qui fournit continuellement de l’indépendance).

4. Flot géodésique des variétés hyperboliques

Une variété hyperbolique est une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante égale à -1 . C’est nécessairement un quotient de l’espace hyperbolique réel \mathbb{H}^{d+1} par un sous groupe discret d’isométries (dites de Möbius). Dans le modèle du demi espace de Poincaré: $\mathbb{H}^{d+1} \equiv \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$, la métrique est donnée en tout point d’altitude $y \in \mathbb{R}_+^*$ par la métrique euclidienne divisée par le facteur y : $(|dx|^2 +$

$dy^2)/y^2$. Les géodésiques sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur $\mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Les isométries de Möbius constituent un sous-groupe du groupe engendré par les similitudes euclidiennes conservant le demi-espace et les inversions de pôle sur \mathbb{R}^d , à savoir le sous-groupe des isométries conservant l'orientation. Elles agissent aussi sur le bord $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ (qui est situé à distance infinie de tout point de l'espace), et sont déterminées par leur action sur le bord. Dans le cas $d = 1$ du plan hyperbolique, ce sont les homographies, qu'on peut voir comme les éléments du groupe $PSL_2(\mathbb{R})$.

1. Enroulements browniens en volume fini

Tout voisinage pas trop grand \mathcal{P}_h (sectionné à altitude h) d'une pointe donnée \mathcal{P} d'une variété hyperbolique M étant homéomorphe à $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \times \mathbb{R}_+$, pour un entier $k \in \{1, \dots, d\}$ nommé rang de \mathcal{P} , nous y disposons de coordonnées x_1, \dots, x_d, y dans lesquelles la métrique prend la forme ci-dessus, et donc dans lesquelles la mesure de volume μ est proportionnelle à $y^{-d-1} dx_1 \dots dx_d dy$. On voit que si le volume de M est fini alors nécessairement la pointe \mathcal{P} doit être de rang maximal d , autrement dit la section de \mathcal{P}_h orthogonalement à l'axe vertical Oy doit être compacte (et donc un tore \mathbb{T}^d). On voit aussi que les formes élémentaires d'enroulement dx_j , qui ont une norme en chaque point (x, y) proportionnelle à y , sont telles que $\int_{\mathcal{P}_h} |dx_j|^2 d\mu$ et $\int_1^\infty y^{1-d} dy$ sont finies en même temps. Par conséquent en volume fini et pour $d > 2$ il n'y a pas d'enroulement homologique singulier du brownien de M , puisque toutes les formes harmoniques sont alors de carré intégrable, et donc le seul résultat d'enroulement brownien homologique sur une variété hyperbolique de dimension > 3 et de volume fini est un théorème central limite, déjà mentionné. En revanche, en dimension trois ($d = 2$) les formes d'enroulement près des pointes sont intégrables mais non de carré intégrable, et en dimension deux ($d = 1$) elles sont non-intégrables. Cela va se traduire par des vitesses d'enroulement différentes dans ces deux cas.

La méthode pour calculer les enroulements browniens près des pointes est proche de celle utilisée auparavant pour calculer l'enroulement près d'un point non situé à l'infini : on considère les excursions dans le voisinage \mathcal{P}_h (pour h assez grand) et on utilise les coordonnées mentionnées ci-dessus pour décomposer le mouvement brownien au cours de chacune de ces excursions, comme on le décomposait suivant des coordonnées polaires dans le plan. Et on dispose encore de l'ergodicité pour dénombrer les excursions.

On obtient ainsi le résultat suivant (conjoint par rapport aux différentes pointes \mathcal{P}^j).

Théorème 6 *Soit M une variété hyperbolique connexe complète de volume fini V et de dimension deux ou trois. Notons B le mouvement brownien de M . Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^2 sur M , fermée près des n pointes de M . Alors lorsque $t \rightarrow \infty$:*

1) *En dimension 2, la loi de $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi de Cauchy de paramètre $\sum_{j=1}^n |\rho_j|/V$, où ρ_j désigne le résidu de ω près de la pointe \mathcal{P}^j .*

2) En dimension 3, la loi de $\frac{1}{\sqrt{t \log t}} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi gaussienne centrée de variance $\sum_{j=1}^n Q_j(\rho_j, \rho'_j)/V$, où Q_j est une forme quadratique explicite caractérisant la géométrie de la pointe \mathcal{P}^j (c'est-à-dire de sa section torique), et où ρ_j et ρ'_j sont les résidus de ω près de la pointe \mathcal{P}^j .

2. Enroulements géodésiques en volume fini

Le choix des variétés hyperboliques va être désormais essentiel, puisqu'il va permettre de transférer les résultats d'enroulements homologiques donnés ci-dessus du mouvement brownien au flot géodésique. Pour préciser cela, il nous manque encore la façon de choisir les géodésiques, c'est-à-dire l'élément de contact qui les définit et qui indique leur position dans le fibré unitaire tangent à l'instant 0. En volume fini, il y a pour cela un choix canonique, qui est la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent : projetée sur la variété de base, c'est simplement sa mesure de volume, et au-dessus de chaque point de la variété de base, c'est la mesure uniforme sur l'hypersphère de toutes les directions tangentes possibles. On démontre de fait le résultat suivant.

Théorème 7 *Soit M une variété hyperbolique de volume fini. Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^2 sur M . Notons $(\theta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ le flot géodésique (sur le fibré unitaire tangent T^1M). Alors le comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$ de la loi de $\int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ sous la mesure de Liouville de T^1M (normalisée pour en faire une probabilité) est exactement le même que celui de $\int_{B[0,t]} \omega$ sous la loi du brownien de M :*

1) *Si ω est de carré intégrable sur M (ce qui est toujours le cas si la dimension de M est > 3) alors la loi de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi gaussienne centrée.*

2) *Si la dimension de M est 3 et si ω est fermée près des pointes et n'est pas de carré intégrable sur M , alors la loi de $\frac{1}{\sqrt{t \log t}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi gaussienne centrée.*

3) *Si la dimension de M est 2 et si ω est fermée près des pointes et n'est pas de carré intégrable sur M , alors la loi de $\frac{1}{t} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi de Cauchy.*

Dans chaque cas, le paramètre non précisé ci-dessus de la loi limite est le même que pour l'intégrale brownienne correspondante.

La méthode pour prouver que le comportement géodésique est asymptotiquement le même que le comportement brownien a été inventée par Y. Le Jan, pour le cas (1) ci-dessus. Pour comprendre d'où peut provenir l'exactitude de la comparaison asymptotique entre les trajectoires géodésiques et les trajectoires browniennes, quoiqu'elles soient localement totalement dissemblables, il faut remonter dans le

revêtement universel de la variété hyperbolique M , c'est-à-dire dans l'espace hyperbolique de même dimension, que nous identifions avec le modèle du demi-espace de Poincaré : $\mathbb{H}^{d+1} \equiv \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$.

On peut faire là quelques constatations. D'abord, le mouvement brownien hyperbolique a dans le demi-espace les mêmes trajectoires que le mouvement brownien euclidien, sauf qu'elles ne sont pas parcourues de la même façon ; elles mettent en particulier un temps infini pour atteindre le bord (qui est situé à une distance hyperbolique infinie), mais elles y parviennent toujours à terme, puisque le mouvement brownien réel ne saurait rester toujours dans \mathbb{R}_+ ; il en est de même pour le flot géodésique. Ensuite (sur M comme sur \mathbb{H}^{d+1}) la mesure de Liouville est invariante pour le flot géodésique comme la mesure de volume l'est pour le mouvement brownien, ce qui signifie que, partant à l'instant 0 sous la mesure de Liouville (projetée sur la base dans le cas brownien), on y est toujours à chaque instant t . De plus, partant d'un point donné de \mathbb{H}^{d+1} , la mesure harmonique d'arrivée sur toute hypersphère hyperbolique centrée en ce point est la mesure uniforme pour les deux processus (la loi du flot géodésique étant donnée par la mesure de Liouville). Donc si on fait tendre le rayon de cette hyper-sphère vers l'infini, on obtient la même loi de sortie à l'infini pour les deux processus conditionnés à partir d'un même point.

Ces remarques poussent à associer dans \mathbb{H}^{d+1} à toute trajectoire géodésique une trajectoire brownienne issue du même point et conditionnée à sortir in fine au même point du bord.

Mais cela ne suffit pas. Les distances hyperboliques devenant facilement infinies près du bord, il faut contrôler la proximité entre ces trajectoires. Cela se fait au moyen d'un changement de contour d'intégration ; toutefois l'intégrande pour un tel changement de contour ne peut pas être directement ω , puisqu'il faut avoir une forme relevée dans \mathbb{H}^{d+1} d'une part, et d'autre part fermée (puisque'il s'agit d'appliquer le théorème de Stokes). Il faut donc construire une forme fermée prolongeant le relèvement de ω dans \mathbb{H}^{d+1} , lui appliquer le changement de contour d'intégration, établir que la partie indésirable de ce contour est de contribution asymptotiquement négligeable, et redescendre sur M .

Ce programme ne va pas sans quelques notables difficultés. En particulier il nécessite de travailler avec le mouvement brownien de la variété "feuilletée", qui est dans T^1M le bon relèvement du brownien de M ; les "feuilles" sont les parties de T^1M qui correspondent à un même point à l'infini dans le relèvement dans \mathbb{H}^{d+1} . Elles sont obtenues par l'action conjointe du flot géodésique d'une part, et d'autre part d'un deuxième flot, dit "horocyclique", dont les trajectoires sont orthogonales à celles du flot géodésique. Et le flot horocyclique empêche qu'on se contente du fibré tangent, car il n'est défini que sur le fibré des repères orthonormés.

Enfin il reste une étape importante, indispensable dans les cas (1) et (2) du théorème : il faut établir l'existence d'un trou spectral relatif au laplacien de la variété feuilletée, en se fondant sur l'existence (déjà connue) de ce trou relativement au Laplacien de M . La difficulté est là due au fait que le laplacien de la variété feuilletée n'est plus elliptique, ce qui revient à dire que le brownien de ce feuilletage ne diffuse plus dans toutes les directions en chaque point (on dit qu'il est dégénéré) ; en effet, il ne se déplace que dans la direction des feuilles, et pas dans les directions

transverses, et ne finira par diffuser quand même partout que du fait du quotient par Γ , id est du repliement des feuilles sur le fibré des repères relatif à M .

3. Enroulements des variétés hyperboliques en volume infini

Lorsque la variété hyperbolique M n'est plus de volume fini, il convient tout d'abord de voir par quoi doit être remplacée la mesure de Liouville, qui est désormais inadaptée (puisque de masse infinie). Géométriquement, la variété M possède maintenant des pointes de tout rang et des vasques, sortes d'entonnoirs allant vers l'infini en s'évasant toujours plus, responsables principales du volume infini, dans lesquelles sous la mesure de Liouville les géodésiques se perdraient irrémédiablement sans produire d'enroulement.

Il faut remonter au groupe fondamental Γ de M , fait d'isométries de Möbius de \mathbb{H}^{d+1} , et considérer son "ensemble limite", qui est l'ensemble des points d'adhérence d'une quelconque de ses orbites. C'est un sous-ensemble du bord de \mathbb{H}^{d+1} , qui a une structure du type Cantor. Sa dimension de Hausdorff, notée δ , qui peut prendre toute valeur réelle entre 0 et d , a un rôle crucial. Patterson a construit dans les années 70 une famille de mesures finies qui porte son nom et qui est canoniquement associée au groupe Γ . Les mesures de Patterson sont portées par l'ensemble limite de Γ , indexées par les points de \mathbb{H}^{d+1} , et de chaque point constituent une sorte de mesure angulaire sur le bord, de nature géométrique. Sullivan les a utilisées pour construire sur $T^1\mathbb{H}^{d+1}$ et par suite sur T^1M la mesure qui se substitue naturellement à la mesure de Liouville. Paramétrant le fibré tangent $T^1\mathbb{H}^{d+1}$ par les extrémités d'une géodésique générique et une abscisse curviligne uniforme sur cette géodésique, il a attribué à chaque extrémité de la géodésique une mesure de Patterson pour loi; la mesure qui convient, dite parfois de Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan, admet une certaine densité (dépendant de δ) par rapport au produit de ces deux lois et de la mesure de Lebesgue (pour l'abscisse curviligne). Elle est bien de masse finie, au moins sous l'hypothèse additionnelle que M est "géométriquement finie", et se réduit à la mesure de Liouville dans le cas du volume fini.

Le mouvement brownien ne convient plus non plus; il faut le remplacer par une diffusion qui sort à l'infini suivant les mesures de Patterson. Une telle diffusion existe, et peut être construite de plusieurs manières. Lorsque le paramètre géométrique δ est strictement supérieur à $d/2$, on connaît la première valeur propre du laplacien de M , qui vaut $\delta(\delta - d)$, et la fonction propre fondamentale associée Φ : elle vaut en chaque point la masse de la mesure de Patterson correspondante. De même que le mouvement brownien est gouverné par le demi-laplacien $\frac{1}{2}\Delta$, la diffusion sur M qui convient pour le remplacer est gouvernée par l'opérateur elliptique $\frac{1}{2}[\Phi^{-1}\Delta \circ \Phi - \delta(\delta - d)]$ (c'est son "générateur infinitésimal"). C'est une sorte de mouvement brownien "conditionné" à sortir suivant les mesures de Patterson.

En dépit de nombre de difficultés supplémentaires par rapport à tout ce qui précède, la stratégie globale consistant à approcher le comportement des géodésiques par les trajectoires de la diffusion fondamentale évoquée ci-dessus fonctionne, et on peut encore parvenir à calculer les enroulements de cette diffusion fondamentale. Ce

qui permet finalement de parvenir en particulier aux deux résultats suivant.

Théorème 8 *Soient M une variété hyperbolique géométriquement finie de dimension $d + 1$, δ la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de son groupe fondamental, m sa mesure de Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan normalisée, Φ sa fonction propre fondamentale, et (Z_t) la diffusion fondamentale associée.*

1) *Supposons $d = 1$ et considérons une 1-forme différentielle ω fermée dans un voisinage des pointes de M et m -intégrable dans le reste de M . Alors lorsque $t \rightarrow \infty$ les lois de $t^{\frac{-1}{2\delta-1}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ sous m et de $t^{\frac{-1}{2\delta-1}} \int_{Z[0,t]} \omega$ convergent vers une loi stable symétrique d'exposant $(2\delta - 1)$ (et de taux explicitement calculable en fonction entre autre des résidus de ω).*

2) *Supposons $\delta > d/2$, et considérons une fonction f de classe C^2 sur T^1M , avec des dérivées bornées et höldériennes, telle que $\int_{T^1M} f dm = 0$. Alors lorsque $t \rightarrow \infty$ la loi de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t f(\theta_s) ds$ sous m converge vers une loi gaussienne centrée (de variance assez explicite).*

Le deuxième énoncé ci-dessus est un théorème central limite, tandis que le premier exhibe une nouvelle vitesse d'évolution, plus rapide que toutes celles qui sont intervenues auparavant dans cet article, puisque nécessairement $1 \geq \delta > 1/2$ dès qu'existe au moins une pointe.

Ces deux énoncés concluent le présent exposé, mais pas la recherche dans le domaine présenté ici, qui continue.

Bibliographie

R. DURRETT: *A new proof of Spitzer's result on the winding of 2-dimensional Brownian motion.*, Ann. Proba. vol. 10, 244-246, 1982.

N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI, Y. LE JAN: *Stable windings on hyperbolic surfaces*, Prob. Th. Rel. Fields vol. 119, 213-255, 2001.

N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI, Y. LE JAN: *Central limit theorem for the geodesic flow associated with a Kleinian group, case $\delta > d/2$.*, J. Math. Pures Appl. 80, n° 2, 153-175, 2001.

N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI, Y. LE JAN: *Canonical lift and exit law of the fundamental diffusion associated with a Kleinian group.*, Sémin. de Probab. XXXV, 206-219, 2001.

N. ENRIQUEZ, Y. LE JAN: *Statistic of the winding of geodesics on a Riemann surface with finite area and constant negative curvature*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 13, n° 2, 377-401, 1997.

J. FRANCHI: *Théorème des résidus asymptotiques pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte*, Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 27, n° 4, 445-462, 1991.

- J. FRANCHI: *Asymptotic singular windings of ergodic diffusions*. Stochastic Processes and their Applications, vol. 62, 277-298, 1996 .
- J. FRANCHI: *Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume*, Proc. London Math. Soc. vol. 79, n° 3, 451-480, 1999.
- N. IKEDA, S. MANABE: *Integrals of differential forms along the path of diffusion processes*, Publ. RIMS Kyoto Univ. n°15, 827-852, 1978.
- N. IKEDA, S. WATANABE: *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Kodansha, 1981.
- K. ITÔ, H.P. MCKEAN: *Diffusion processes and their sample paths*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1965.
- Y. LE JAN: *The central limit theorem for the geodesic flow on non compact manifolds of constant negative curvature*, Duke Math. J. vol. 74, n° 1, 159-175, 1994.
- S.J. PATTERSON: *Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups* in “Analytical and geometrical aspects of hyperbolic space”, D. Epstein ed., 281-323, London Math. Soc., Lecture Note Series n° 111, Cambridge Univ. Press, 1987.
- J. PITMAN, M. YOR: *Asymptotic laws of planar Brownian motion*, Ann. Proba. vol. 14, 733-779, 1986.
- J. PITMAN, M. YOR: *Further asymptotic laws of planar Brownian motion*, Ann. Proba. vol. 17, 965-1011, 1989.
- D. REVUZ, M. YOR: *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, Berlin, 1991, 1994, 1999.
- F. SPITZER: *Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion*, Trans. A. M. S. vol. 87, 187-197, 1958.
- D. SULLIVAN: *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math. vol. 153, 259-277, 1984.

APPROXIMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Catherine HOUEMENT et Alain KUZNIAK ¹
IUFM de Haute-Normandie et IUFM d'Alsace

Résumé. *Une construction géométrique est meilleure qu'une autre si elle approche mieux le (ou les) point(s) à construire. Mais comment définir et mesurer cette approximation ? Nous présentons deux tentatives, élaborées au début du XX^e siècle, pour donner un sens à la comparaison des constructions géométriques à la règle et au compas : la Géométrie de LEMOINE et l'approche probabiliste de NITZ.*

L'exemple classique de la construction du pentagone régulier donnée par DÜRER dans *L'instruction sur la manière de mesurer* soulève un premier aspect du problème de l'approximation en géométrie : la construction proposée par le peintre est fautive mais efficace surtout lorsqu'on dessine un pentagone dont la longueur du côté est donnée a priori. Mais que signifie cette fausseté, de quelle efficacité parle-t-on ?

Deux univers géométriques avec leur pensée propre se confrontent ici. Le premier, celui des constructions effectives utiles aux dessinateurs et aux ingénieurs, renvoie à ce que nous désignerons dans ce texte sous le terme de Géométrie Naturelle ou Géométrie I où le vu et l'expérience instrumentée sont essentiels. Le second se déploie au milieu d'objets idéaux et la preuve des résultats est assurée par des raisonnements basés sur des axiomes inspirés de la réalité. Cette Géométrie II, à la fois axiomatique et naturelle, envisage le problème précédent comme celui de la constructibilité des figures, il s'agit de valider une suite d'opérations élémentaires et de prouver que l'ensemble obtenu à la fin de ce processus remplit les conditions imposées : le pentagone est-il vraiment régulier ?

Mais un deuxième aspect de la question de la fiabilité des constructions doit être pris en compte. Une construction, mathématiquement légitime, donne-t-elle un résultat satisfaisant lorsqu'on essaie de construire l'objet réel ? Autrement dit, la technique donnée par la Géométrie II est-elle un bon outil pour obtenir des objets de la Géométrie I ?

Ce problème va dépendre du support matériel utilisé et des instruments de construction mis en œuvre. Il se pose aujourd'hui avec beaucoup d'acuité en informatique (en DAO ou dans les divers usages de logiciels de constructions géométriques professionnels ou pédagogiques comme CABRI ou GEOPLAN). Il s'est posé autrefois dans le cadre des constructions à la règle et au compas dans le monde en pleine effervescence des dessinateurs industriels de la fin du XIX^e siècle.

Vers une théorie rationnelle de l'approximation géométrique

Felix KLEIN dans son ouvrage *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus* envisage l'approximation des constructions géométriques comme un problème

1. © L'OUVERT 105 (2002)

qui doit pouvoir être résolu avec le même degré de mathématisation que les problèmes de géodésie alors si prégnants. S’inspirant du théorème de PASCAL sur les coniques, il fournit une forme approximative de ce dernier :

*Habe ich sechs Punkte, die ungefähr auf einem Kegelschnitt liegen, ziehe deren ungefähre Verbindungsgeraden und bringe diese in a, b, c zum Schnitt, dann liegen diese Punkte ungefähr auf einer geraden Linie.*²

Le problème est bien entendu de préciser le sens de l’à peu près pour que cet énoncé en langue vernaculaire se transforme en énoncé mathématique. Dans cet article, nous allons présenter deux façons relativement élémentaires et radicalement différentes de répondre à la demande de KLEIN d’élaborer une théorie rationnelle de l’erreur dans les constructions géométriques : celle de LEMOINE et celle de NITZ.

1 La géométrographie

1.1 Émile Michel Hyacinthe LEMOINE

Dans son ouvrage *Géométrographie ou Art des Constructions géométriques* paru en 1903, LEMOINE expose une synthèse de ses différents travaux sur un domaine qu’il a introduit et développé en grande partie seul. Voici comment il définit dans l’introduction de son traité, les buts qu’il assigne à la Géométrographie

La Géométrographie a un quadruple objet :

- *a. Au moyen de certaines conventions, elle donne, pour une construction quelconque exécutée, un symbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude.*
- *b. Elle conduit aux procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la Géométrie.*
- *c. Elle discute, quand il y a lieu, une construction dont le principe est donné, pour y substituer une construction plus simple qui peut arriver à différer tout à fait de la première construction.*
- *d. Elle permet de comparer entre elles toutes les constructions que l’on connaît d’un même problème et de choisir parmi celles-là la plus simple que l’on appelle la construction géométrographique du problème, jusqu’à ce qu’on en ait trouvé une plus simple, s’il y en a, qui devient alors la construction géométrographique de ce problème.*

1.2 Le codage des constructions.

Ainsi, LEMOINE conçoit le tracé géométrique comme l’exécution d’un algorithme de tracés successifs à la règle et au compas, il faut alors coder chacun des pas élémentaires de la construction pour en évaluer le coût total.

Nous présentons les codages des différentes opérations qui s’appuient sur ceux proposés initialement par LEMOINE mais simplifiés par REUSCH, un chercheur allemand, en 1904.

2. Soient six points, à peu près situés sur une conique : si l’on trace les droites qui joignent à peu près deux points et qu’elles se coupent en a, b et c , alors ces points sont à peu près alignés.

Opérations élémentaires

- | | |
|--|--------|
| 1. Faire passer le bord d'une règle par un point placé : | R_1 |
| 2. Faire passer le bord d'une règle par deux points : | $2R_1$ |
| 3. Tracer une ligne en suivant le bord d'une règle : | R_2 |
| 4. Mettre une pointe de compas en un point placé : | C_1 |
| 5. Prendre dans le compas la distance de deux points : | $2C_1$ |
| 6. Tracer un cercle : | C_2 |

Dans son ouvrage, LEMOINE ajoute une opération qui prend en compte le fait de poser la pointe du compas sur une droite, mais cette opération intervient peu dans les constructions usuelles à la règle et au compas.

Ces différentes opérations servent ensuite à coder des opérations un peu plus complexes dont nous donnons les plus basiques.

Opérations plus complexes :

- | | |
|---|--------------|
| 1. Tracer une droite qui passe par un point placé : | $R_1 + R_2$ |
| 2. Tracer une droite qui passe par deux points placés : | $2R_1 + R_2$ |
| 3. Tracer un cercle (de rayon non fixé) dont le centre est placé : | $C_1 + C_2$ |
| 4. Tracer un cercle dont le centre est placé et qui passe par un point fixé : | $2C_1 + C_2$ |
| 5. Tracer un cercle dont le centre est placé et dont le rayon a une longueur déjà donnée par l'écartement du compas : | $C_1 + C_2$ |
| 6. Tracer un cercle dont le centre est placé et le rayon a une longueur à prendre sur un segment : | $3C_1 + C_2$ |

À toute construction complète est attaché le symbole $l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2$, le nombre $l_1 + l_2 + m_1 + m_2$ est appelé *coefficient de simplicité* et le nombre $l_1 + m_1$ *coefficient d'exactitude*. Ce nombre est fonction du nombre de points utilisés pour les divers tracés. On remarque que l_2 est le nombre de droites tracées, m_2 celui des cercles tracés.

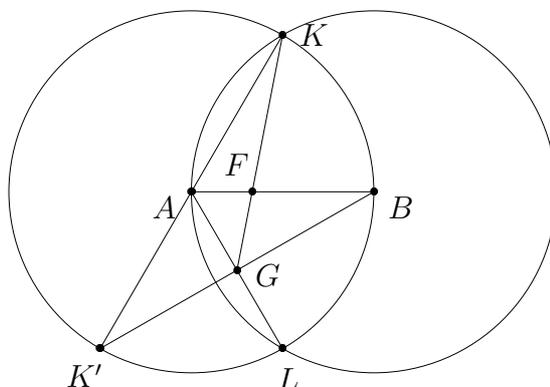
Le coefficient de simplicité de chaque construction permet de dégager le tracé *géométrographique* de la construction, celui dont la simplicité est maximale pour un coefficient minimum.

1.3 Un exemple : les trisections d'un segment

Pour illustrer la démarche de LEMOINE, nous allons classer différentes constructions à la règle et au compas de la trisection d'un segment. Des indications sur la

validation des constructions sont données à la fin de l'article.

TRISECTION 1



Pour obtenir le point F situé au $\frac{1}{3}$ de AB , on effectue les constructions suivantes :
 1- tracer les cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB , ils se coupent en K et L ; $2(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

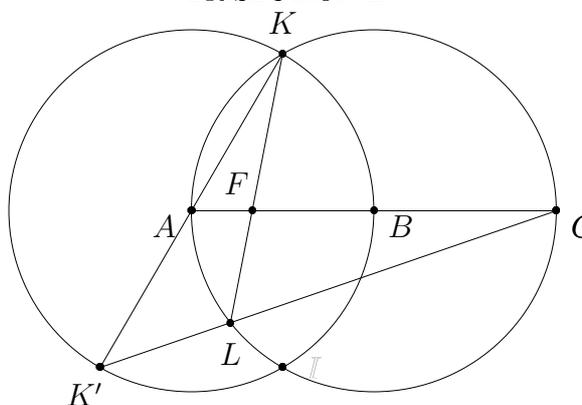
2- tracer la droite (KA) , K' est le point diamétralement opposé à K ; $2R_1 + R_2$

3- tracer la droite (AL) et la droite (BK') qui coupe (AL) en G ; $2(2R_1 + R_2)$

4- tracer la droite (KG) , elle coupe $[AB]$ en F ; $2R_1 + R_2$

Le coût total de la construction est $3C_1 + 2C_2 + 8R_1 + 4R_2$ et les coefficients de simplicité et d'exactitude sont respectivement 17 et 11

TRISECTION 2



On peut décomposer la construction en cinq étapes :

1- tracer les cercles de centres respectifs A et B de rayon AB , K un des points d'intersection; $(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

2- tracer la droite (KA) pour obtenir K' ; $2R_1 + R_2$

3- tracer la droite (AB) pour obtenir C ; $2R_1 + R_2$

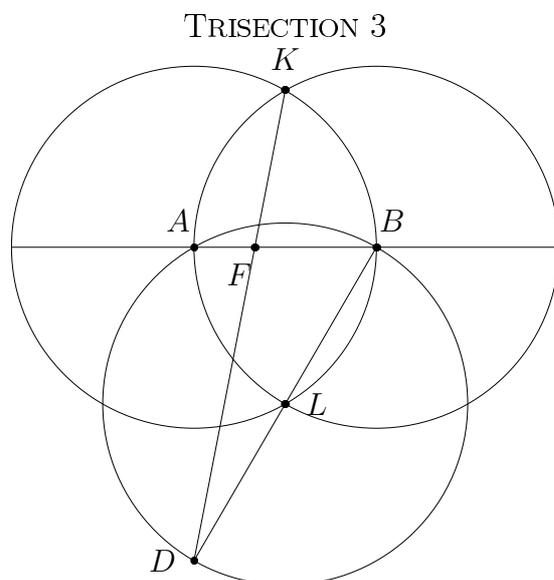
4- tracer la droite $(K'C)$ qui coupe le cercle de centre B en L ; $2R_1 + R_2$

5- enfin tracer la droite (KL) ; $2R_1 + R_2$

Total : $3C_1 + 2C_2 + 8R_1 + 4R_2$

Les coefficients associés à cette construction sont donc (17; 11). Si la droite (AB) est tracée au départ, la construction de cette droite (3) est inutile et on obtient :

$3C_1 + 2C_2 + 6R_1 + 3R_2$ et les nouveaux coefficients sont (14; 9).



Cette fois, le programme de construction est le suivant :

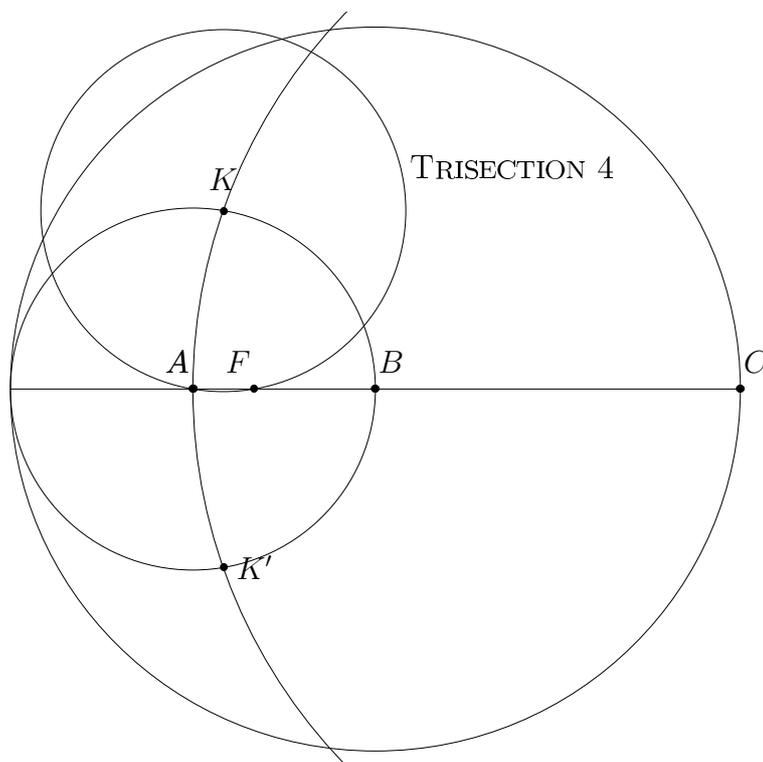
1- tracer les cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB , ils se coupent en K et L ; $(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

2- tracer le cercle de centre L et qui passe par A : $C_1 + C_2$

3- tracer la droite (BL) qui donne le point D sur le cercle de centre L ; $2R_1 + R_2$

4- tracer la droite (KL) ; $2R_1 + R_2$

Le total est $4C_1 + 3C_2 + 4R_1 + 2R_2$ et les coefficients (13; 8).



En suivant les étapes de la construction, on obtient $2R_1 + R_2$ pour la droite (AB) et $4(2C_1 + C_2)$ pour les quatre cercles : celui de centre A passant par B , celui de centre B et de rayon $2AB$, celui de centre C passant par A et enfin celui de centre K passant par A .

Le total est donc $8C_1 + 4C_2 + 2R_1 + R_2$ et les coefficients $(15; 10)$.

Cette fois encore si la droite (AB) est tracée au départ, on obtient $8C_1 + 4C_2$ et $(12; 8)$.

La construction géométrographique est donc la construction 3 si la droite (AB) n'est pas construite. Si on la suppose construite, c'est la construction 4 qui est la construction géométrographique.

On remarque que la construction 3 donne une construction du tiers d'un segment simple si on ne trace pas les cercles en entier.

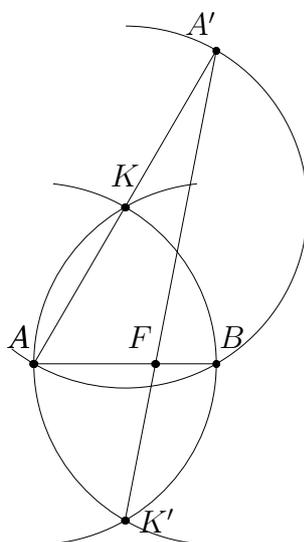


FIGURE 5

2 Une approche physique et métrique

2.1 Konrad NITZ

L'approche de LEMOINE néglige les mesures de longueur et les approximations liées aux instruments de dessin et à leur usage par les dessinateurs. Il pose un certain nombre d'hypothèses «non réalistes».

La Géométrie suppose que la feuille de dessin est aussi grande qu'il est nécessaire à l'exécution intégrale de la construction ; elle suppose que les instruments dont on se sert : compas, règle (et équerre, lorsque son usage est admis) sont aussi petits ou aussi grands que le demande le tracé ; elle suppose qu'un point est également bien déterminé quel que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent.

Au contraire, Konrad NITZ (1906), dans une étude technique du problème des constructions, se place dans le cadre «réaliste». Il s'intéresse au coût réel, en terme de précision métrique des tracés, des algorithmes de constructions. Il travaille sur des *geometrischen Realgebilden* qu'on pourra qualifier de *figures réelles*. Ainsi, les

droites ont une épaisseur qui est celle du trait du crayon ; une *droite réelle* est une petite bande droite déterminée par deux droites parallèles. De même un *point réel* est une petite surface de forme approximativement circulaire (*Punktkreise*). Mais ce point peut aussi être un parallélogramme lorsqu'il est déterminé par l'intersection de deux *droites réelles*. Le *cercle réel* est défini de la même façon que la *droite réelle*.

2.2 Erreur moyenne de type probabiliste.

NITZ distingue deux types d'erreurs : les *erreurs techniques* liées au matériel et les *erreurs subjectives* dues au dessinateur (poser la pointe du compas sur un point, poser la règle...) Il s'intéresse plus particulièrement à ces dernières.

Trois erreurs fondamentales sont alors envisagées par NITZ :

I. Erreur obtenue en plaçant la pointe du compas sur le point d'intersection, de deux droites, d'une droite et un cercle ou enfin de deux cercles ;

II. Erreur obtenue en plaçant la règle sur deux points donnés ;

III. Erreur obtenue en construisant un cercle qui est donné par son rayon et son centre.

Pour les évaluer, et c'est l'originalité de son approche, il utilise une méthode probabiliste basée sur la loi normale des erreurs de Gauss. Par exemple, pour étudier les erreurs de type I, où le point est l'intersection de deux droites faisant un angle ω , il établit un parallèle avec la théorie de la précision des déterminations d'un point développée en Géodésie. On peut aussi comparer sa méthode avec celle utilisée pour résoudre le célèbre problème du tireur à la cible. La pointe du compas est assimilée à la balle sur la cible. Ce modèle permet d'introduire des ellipses qui sont, dans un langage moderne totalement anachronique, les lignes de niveaux associées au vecteur gaussien déterminé par les coordonnées de la pointe de compas. Une de ces ellipses est l'ellipse moyenne dont les demi-axes déterminent l'erreur moyenne. Tous les points d'une même ellipse ont la même probabilité d'être touchés.

Pour chacune de ces erreurs, le travail consiste à déterminer l'écart-type des distances entre le point réel et le point géométrique. C'est cet écart qui est appelé l'erreur moyenne. Ensuite, il faut composer toutes les erreurs en suivant l'algorithme de construction.

2.3 Trois formules de base

Dans les applications de sa méthode, NITZ utilise de manière systématique trois formules pour estimer l'erreur moyenne d'une construction à la règle et au compas.

Dans le cas des erreurs de type I, il a besoin d'évaluer l'erreur quadratique moyenne K_φ suivant une direction faisant un angle φ avec une des deux droites qui déterminent le point A . L'angle entre les deux droites est ω .

$$K_\varphi = \frac{\sigma_1^2 \cos^2(\varphi - \omega) + \sigma_2^2 \cos^2(\varphi)}{\sin^2(\omega)} \quad (1)$$

Les σ_i désignent les écarts-types des distances de la pointe du compas à chacune des droites qui déterminent le point A .

Pour les erreurs de type II, deux formules sont essentielles, celle qui donne l'inclinaison de la *droite réelle* avec la droite idéale passant par deux points donnés dont

la distance est d :

$$\sin^2(\Theta) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{d^2}, \quad (2)$$

et celle qui donne cette fois l'erreur moyenne pour obtenir un point P situé entre deux points A et B et à une distance p de A :

$$M_p^2 = \sigma_1^2 \left(1 - \frac{p}{d}\right)^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{p}{d}\right)^2. \quad (3)$$

Cette fois les σ_i désignent les écarts-types des distances de la règle aux différents points.

Pour pouvoir appliquer son étude, K. NITZ a besoin de « mesurer » les différents écarts-types σ_i qu'il a introduits. Il a ainsi étudié, avec l'aide d'un microscope, les productions de dessinateurs professionnels et évalué la distance de la pointe de compas aux deux droites qui se coupent en un point donné.

2.4 La construction de la médiatrice d'un segment

Nous allons illustrer la démarche préconisée par NITZ sur l'exemple de la construction de la médiatrice et du milieu d'un segment $[AB]$ donné. La construction utilisée, dont nous devons évaluer chacun des pas, est la suivante :

- Cercle de rayon r et de centre A ; $C_1 + C_2$
- Cercle de rayon r et de centre B ; $C_1 + C_2$
- Droite passant par les points d'intersection C et D de ces deux cercles; $2R_1 + R_2$

La longueur de AB est a . Localement au point C , les deux arcs de cercles centrés en A et B peuvent être identifiés aux droites tangentes à ces cercles en C . L'angle ω de ces deux droites est égal à l'angle \widehat{ACB} formé par les rayons des deux cercles

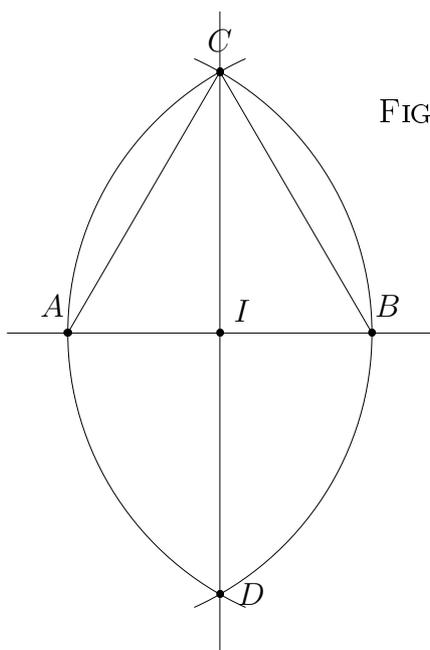


FIGURE 6

sécants en C .

1) Le placement de la pointe de compas en A (ou en B) donne une erreur moyenne δ .

2) L'erreur moyenne sur C (ou D) utile pour construire la droite (CD) est la composante de cette erreur sur une direction parallèle à (AB) . Elle correspond ici à la valeur $K_{\frac{\omega}{2}}$:

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{\sigma_1^2 \cos^2(\frac{\omega}{2}) + \sigma_2^2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}{\sin^2(\omega)}.$$

Mais ici on a $\sigma_1 = \sigma_2$ et de plus $\sigma_1 = \delta$. On obtient alors :

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{\delta^2}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}.$$

Or $\sin(\frac{\omega}{2}) = \frac{a}{2r}$. Ce qui permet finalement d'obtenir l'erreur moyenne pour C (ou D):

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{4r^2\delta^2}{a^2}.$$

Une autre valeur importante pour continuer les calculs est la dimension de CD qui est $d = \sqrt{4r^2 - a^2}$.

Nous pouvons enfin grâce aux équations (2) et (3) déterminer l'erreur moyenne faite sur I dans la direction AB . On prend $p = \frac{d}{2}$ et l'on obtient :

$$M_I = \pm \delta \frac{r}{a} \sqrt{2}$$

et l'erreur de direction pour CD est donnée par :

$$\sin(\Theta) = \pm \delta \frac{r}{a} \sqrt{\frac{8}{4r^2 - a^2}}.$$

Ces formules montrent que l'erreur sur I est minimale pour un rayon du cercle auxiliaire proche de la moitié du segment alors que l'erreur faite sur l'inclinaison de la droite est minimale lorsque r est très grand. Il n'est donc pas possible d'optimiser simultanément les deux constructions.

On constate sur cet exemple que la méthode de NITZ est complémentaire de celle de LEMOINE : elle permet de discuter pour une même construction les valeurs des paramètres utilisés comme ici la dimension du rayon du cercle auxiliaire.

Conclusion

Dans le cadre numérique, GUILBAUD distingue pour les nombres réels l'existence de plusieurs niveaux d'approximation qu'il considère comme les trois étapes de la pensée *approximative* dans le cadre des nombres réels. On peut donner :

- 1) une valeur approchée;
- 2) un encadrement;
- 3) une suite indéfinie d'encadrements.

En géométrie, que retenir comme idée de l'approximation ? Existe-t-il une approche géométrique spécifique de l'approximation des constructions géométriques ou bien celle-ci se résume-t-elle à l'approche numérique ? Pour dépasser le niveau du sens commun et définir l'approximation cherchée, il faut pouvoir ordonner des constructions géométriques selon un critère fiable qui traduit une distance à un idéal bien défini comme il peut l'être dans le cadre numérique.

Il nous semble que, chacun à leur manière, LEMOINE et NITZ répondent à cette exigence et permettent de quitter le premier niveau d'approximation vague pour un niveau où les comparaisons les plus précises sont possibles. Dans un cas l'approche est plus qualitative et suppose des calculs simples, dans le second cas l'approximation passe par une série de calculs qui essaient de rendre compte des contingences du travail du dessinateur. Les théories proposées enrichissent la Géométrie I et permettent de discuter de manière argumentée les constructions usuelles. En organisant et en codant de manière précise les détails d'une construction géométrique, ces approches, notamment celle de LEMOINE, peuvent aussi constituer une aide pour l'apprentissage de la géométrie à l'école et au collège.

Indications sur les trisections

Trisection 1 : Considérer F comme le point de concours des médianes dans le triangle AKL

Trisection 2 : Montrer, par exemple, que les triangles KAF et $K'IC$, où I est le symétrique de B par rapport à A , sont de même forme.

Trisection 3 : Remarquer que AK est parallèle à BD .

Trisection 4 : Vérifier que les triangles AKF et KCA sont semblables ou utiliser l'inversion $\mathcal{I}(A, AB^2)$ qui transforme le cercle $\mathcal{C}(C, AC)$ en la droite KK' médiatrice de AF .

Bibliographie

- GUILBAUD G.Th. : (1985) *Leçons d'à peu près* Christian Bourgois, Paris.
- HAMBLY M. : (1991) *Les instruments de dessin*. Ars Mundi, Paris.
- HOUEMENT C. et KUZNIAK A. : (2001) *Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- LEMOINE E.M.H. : (2003) *Géométopographie ou Art des Constructions géométriques*, Scientia.
- NITZ K. : (1906): Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 53.
- KLEIN F. : (1903) *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus*, 3^e édition Springer, 1928.
- REUSCH J. : (1904) *Planimetrische Konstruktionen in Geometrographischer Ausführung*, Teubner.

POINT DE CLIFFORD

VOULEZ-VOUS DES CERCLES ?

Claude COMPARON & Roland VOLTZ

1. Historique de la réalisation de la figure

- 1971 : Exercice donné par M. Claude MITCHI dans le cadre de l'enseignement de la géométrie en licence.
- Enseignant en collège, j'ai élaboré des sujets de dessins « autocorrectifs » basés sur des théorèmes de géométrie de niveau bac-deug-licence. Je me suis attaqué en vain au dessin menant au point de Clifford.
- 1998 : Rencontre avec un parent d'élève, M. Roland VOLTZ, informaticien et chef de personnel. Nous avons sympathisé, et un jour je lui ai proposé de s'attaquer à la réalisation de la construction du **point de Clifford** (nous avons, sans résultat, recherché sur INTERNET et interrogé des personnes pour savoir si quelqu'un avait déjà vu concrètement ce fameux **point de Clifford**).
- 1999 : Réalisation effective de cette figure, avec intégration d'une image (portrait du mathématicien William CLIFFORD) et d'un texte ; cette figure a été réalisée avec *Autocad 2000*. Un tableau (avec encadrement en bois massif et protection en plexiglas spécial) au format A0 a été offert au collège de Vendenheim.
- 2001 : En souvenir des TD très pédagogiques dispensés par Claude MITCHI, j'ai pensé à lui offrir un exemplaire de ce dessin.
Invité par un professeur à écrire un article sur ce sujet, je confie donc ces quelques lignes et un fichier de ce dessin au format JPEG à L'OUVERT.
Roland VOLTZ et moi-même espérons que ce dessin suscite de l'intérêt pour ce type de construction.

2. Ouvertures possibles

- Continuer cette figure en ajoutant une droite supplémentaire, donc récupérer sept points de Clifford et vérifier s'ils sont situés sur un même cercle.
 - Ce problème de [points cocycliques / cercles concourants] forme une chaîne infinie de théorèmes. La démonstration se fait par récurrence.
 - C'est CLIFFORD qui, le premier, a montré cette propriété générale en utilisant sa "*Geometric Algebra*".
 - Terminer la démonstration « élémentaire » proposée dans les pages suivantes.
- Avis aux amateurs, aux bidouilleurs et aux chercheurs.

3. Démonstration élémentaire

1. Cercles de Miguel
2. Cercles de Céva
3. Centre optique d'un quadrilatère complet
4. Cercle de Miguel de 5 droites
5. Point de Clifford

1. Cercles de Miguel

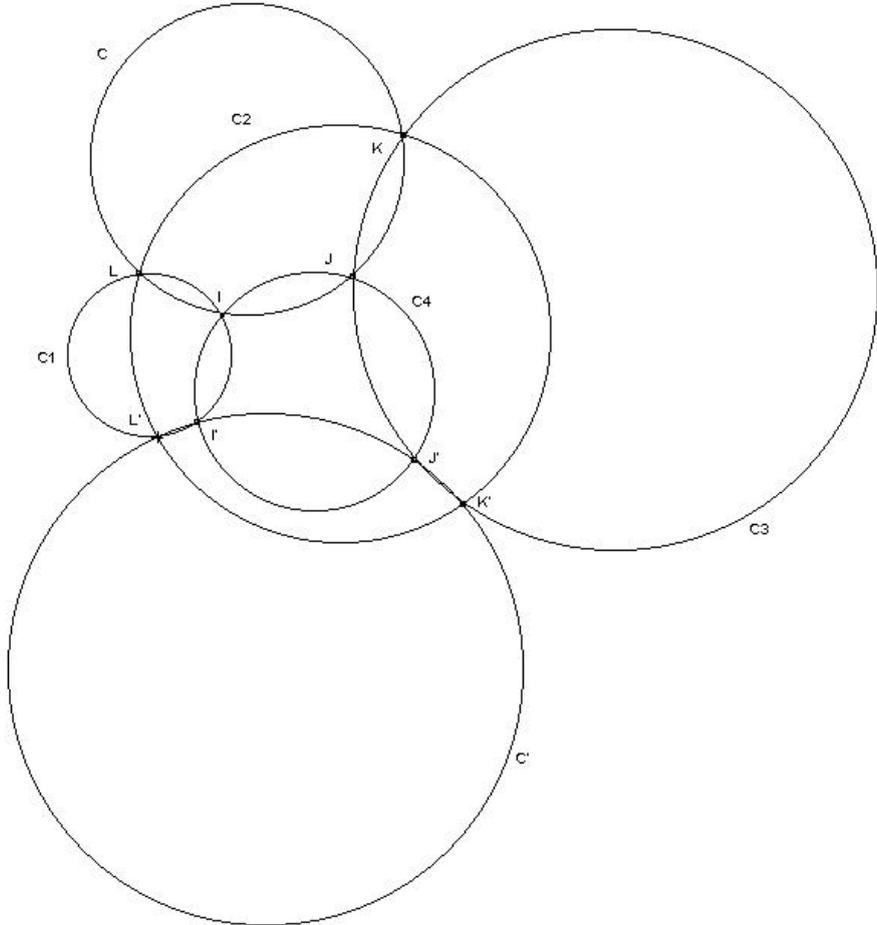
Hypothèses

- I, J, K, L cocycliques sur C ;
- I, I', J, J' cocycliques sur C4 ;
- J, J', K, K' cocycliques sur C3 ;
- K, K', L, L' cocycliques sur C2 ;
- L, L', I, I' cocycliques sur C1.

Conclusion

I', J', K', L' cocycliques sur un cercle C'.

Figure



Théorème

Soient 4 cercles C1, C2, C3, C4, L et L' les intersections de C1 et C2, K et K' celles de C2 et C3, J et J' celles de C3 et C4, enfin I et I' celles de C4 et C1.

Si quatre points choisis respectivement dans les intersections des Ci et Cj sont cocycliques, alors les quatre points restant le sont aussi.

Démonstration

$$\begin{aligned}
 (L'I', L'K') &\equiv (L'I', L'L) + (L'L, L'K') \quad [\pi] \\
 &\equiv (I'I', IL) + (KL, KK') \quad [\pi] \\
 &\equiv (I'I', IJ) + (IJ, IL) + (KL, KJ) + (KJ, KK') \quad [\pi] \\
 &\equiv (J'I', J'J) + (J'J, J'K') \quad [\pi] \\
 &\equiv (J'I', J'K') \quad [\pi] \quad \text{cqd}
 \end{aligned}$$

2. Cercles de Céva

On retrouve la configuration de Céva en envoyant, dans la configuration des cercles de Miguel, le point I à l'infini ; on obtient alors le *théorème de Céva* :

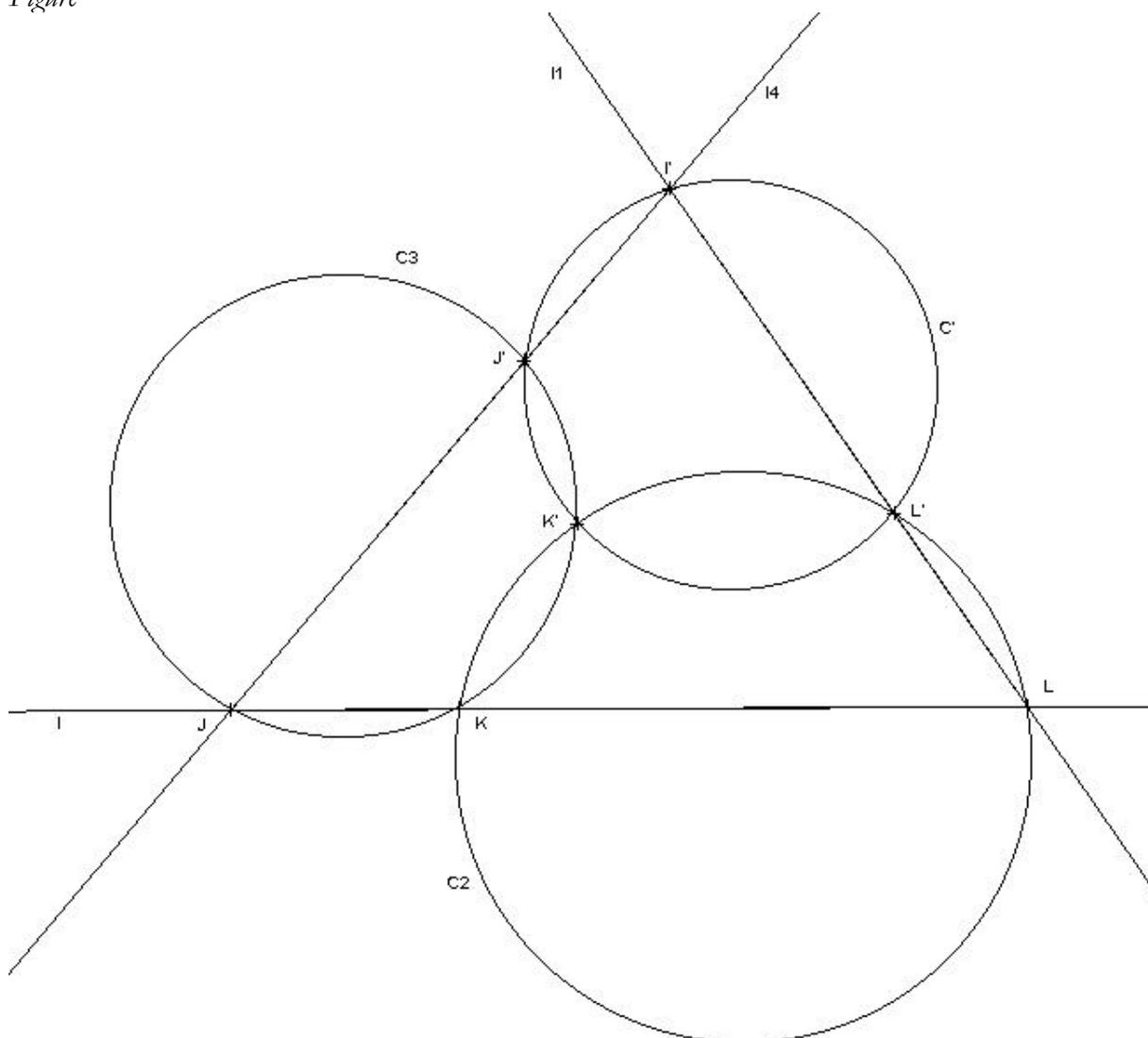
Hypothèses

- (I), I', J', J alignés sur l4 ;
- (I), I', L', L alignés sur l1 ;
- (I), J, K, L alignés sur l ;
- J, J', K, K' cocycliques sur C3 ;
- K, K', L, L' cocycliques sur C2.

Conclusion

- I', J', K', L' cocycliques sur un cercle C'.

Figure



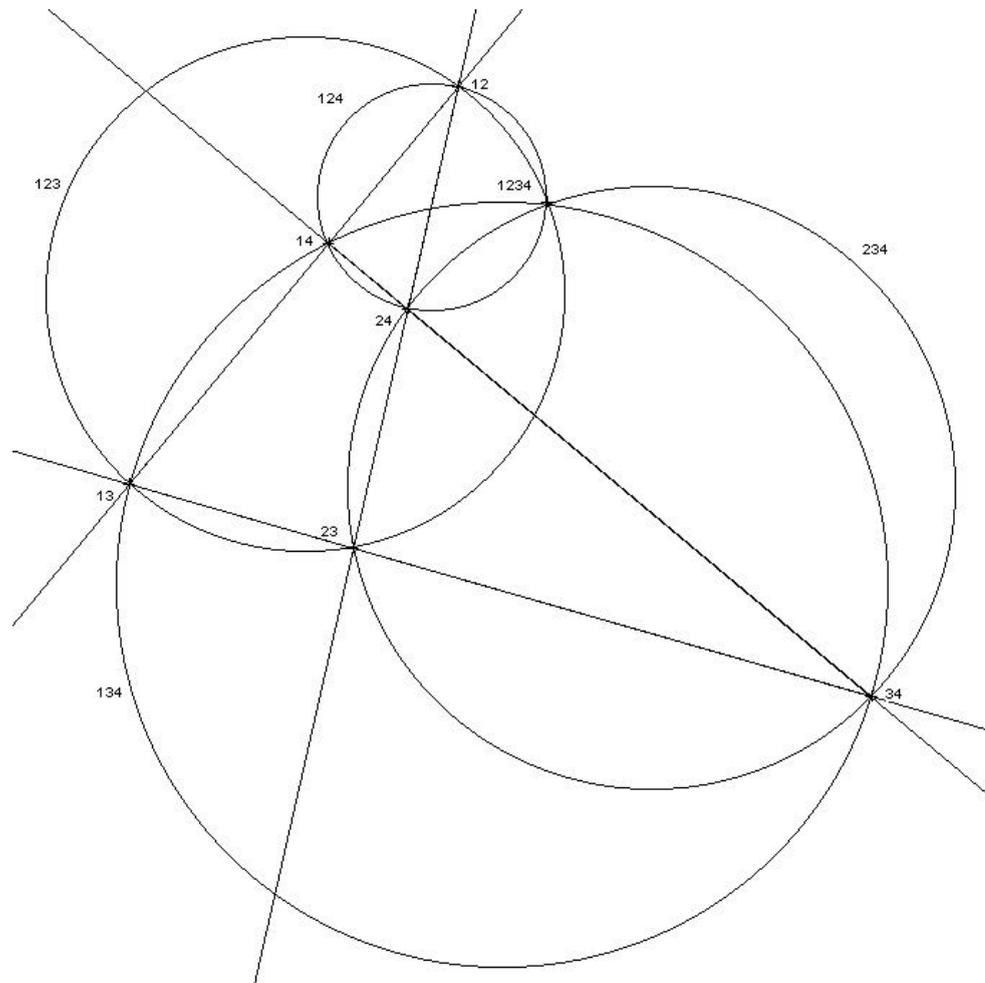
3. Centre optique d'un quadrilatère complet

Théorème du centre optique

Étant données quatre droites 1, 2, 3 et 4, elles forment quatre triangles dont les cercles circonscrits sont 123, 124, 134 et 234.

Alors les cercles 123, 124, 134 et 234 sont sécants en un point 1234.

Figure



Démonstration

Primo, voyons l'intersection des cercles 124, 134 et 234.

Dans le triangle 123, puisque $34 \in 3$ et $24 \in 2$ et $14 \in 1$, d'après la configuration de Céva, les cercles 124 (passant par 12, 14, 24), 134 (passant par 13, 14, 34), 234 (passant par 23, 24, 34), sont sécants en un point I.

Secundo, voyons l'intersection des cercles 124, 134 et 123.

Dans le triangle 234, puisque $14 \in 4$ et $13 \in 3$ et $12 \in 2$, d'après la configuration de Céva, les cercles 124 (passant par 24, 14, 12), 134 (passant par 34, 13, 14), 123 (passant par 23, 12, 13), sont sécants en un point J.

Tertio, comme I et J sont intersection de 124 et 134 autre que 14, on a $I=J (= 1234)$.

4. Cercle de Miguel de 5 droites

Théorème

Cinq droites 1, 2, 3, 4 et 5 forment cinq quadrilatères complets auxquels correspondent cinq centres optiques du type ijkl où $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui sont cocycliques (sur un cercle 12345).

Démonstration Primo le théorème des cercles de Miguel appliqué aux cercles 123, 134, 145 et 125, sachant que

$$\begin{aligned} 123 \cap 134 &= \{13 ; 1234\} & 134 \cap 145 &= \{14 ; 1345\} \\ 145 \cap 125 &= \{15 ; 1245\} & 125 \cap 123 &= \{12 ; 1235\}, \end{aligned}$$

permet de dire que, comme 12, 13, 14 et 15 sont alignés, 1234, 1345, 1245 et 1235 sont cocycliques sur 1345.

Secundo le théorème des cercles de Miguel appliqué aux cercles 234, 245, 215 et 213, sachant que

$$234 \text{ n } 245 = \{24 ; 2345\} \quad 245 \text{ n } 215 = \{25 ; 2145\}$$

$$215 \text{ n } 213 = \{21 ; 2135\} \quad 213 \text{ n } 234 = \{23 ; 2134\}$$

permet de dire que, comme 23, 24, 25 et 21 sont alignés, 2134, 2345, 2145 et 2135 sont cocycliques sur 1345.

En conséquence 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345 sont cocycliques sur un cercle 12345.

5. Point de Clifford

Théorème

Six droites 1, 2, 3, 4, 5 et 6 fournissent six cercles de Miguel du type ijklm où $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui passent par un même point (123456).

Démonstration

Appliquons le théorème des cercles de Miguel à 1356, 356, 456 et 1456.

D'après le théorème du centre optique et le théorème du cercle de Miguel de cinq droites

$$12356 \text{ n } 3564 = \{2356 ; 1356\} \quad 356 \text{ n } 456 = \{56 ; 3456\}$$

$$456 \text{ n } 12456 = \{2456 ; 1456\} \quad 1456 \text{ n } 12356 = \{1256 ; \Omega\}$$

Montrons que $\Omega \in 13456$ et $\Omega \in 23456$.

Comme 2356, 56, 2456 et 1256 $\in 256$; d'après le théorème des cercles de Miguel, il vient : 1356, 3456, 1456 et Ω sont cocycliques, d'où $\Omega \in 13456$ par théorème des cinq droites de Miguel ;

Comme 1356, 56, 1456 et 1256 $\in 156$; d'après le théorème des cercles de Miguel, il vient : 2356, 3456, 2456 et Ω sont cocycliques, d'où $\Omega \in 23456$ par théorème des cinq droites de Miguel.

On montrerait de même que $\Omega \in 12456$ et ainsi de suite, ce qui montre que tous les cercles du type ijklm passent par un même point 123456 dit **point de Clifford**.

Bibliographie

BERGER : *Problèmes de géométrie*, Éd. CÉDIC (1982)

Détail



LES TAS DE SABLE AU CLUB... SCIENTIFIQUE

Francis JAMM

Lycée LAVOISIER MULHOUSE

L'Ouvert a déjà publié de nombreux articles mathématiques, notamment sous la plume de Roger Iss, sur les tas de sables. Francis JAMM éclaire ici un autre aspect directement lié à la vie des tas de sables dans une classe de Lycée pendant un club de mathématiques. Comme le souligne en expert, Roger Iss: « *L'intérêt essentiel de cet article est la publicité que cela peut faire à ces clubs scientifiques et à la qualité des résultats qu'ils peuvent obtenir. Peut-être, Francis JAMM n'insiste pas assez sur l'étonnant palmarès obtenu par son club : finir à Paris à la fête de la Science, c'est extraordinaire !* »

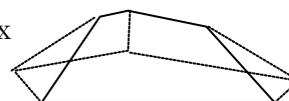
Septembre 2000, première séance du Club Scientifique du lycée Lavoisier de Mulhouse... Devant le professeur, quelques plaques de carton... Il prend une plaque, la pose sur un petit socle et verse du sable jusqu'à ce qu'il déborde de tous les côtés de la plaque. Puis il réitère l'opération avec d'autres plaques.

Une phrase : « Quelles questions peut-on se poser ? »

Et puis, plus rien... si ce n'est la moue dubitative des élèves qui pensent que le soleil a vraiment frappé très fort cet été. Et pourtant, c'est ainsi, qu'a débuté un travail de recherche qui a duré un an, sans arriver à épuiser le sujet !

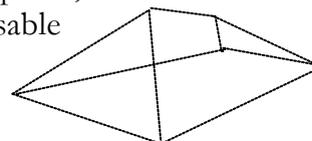
Séance 1 : UNE QUESTION ?

Curieusement les élèves commencent à s'intéresser aux plaques pentagonales. Ils me diront plus tard qu'ils pensaient que le cas des quadrilatères était trop simple.



Avec une plaque pentagonale on observe toujours le même tas de sable. À savoir une face pentagonale entourée de deux triangles et de deux quadrilatères.

Ne voyant pas bien quelles questions on pouvait se poser, ils reviennent aux quadrilatères. Là aussi on observe toujours le même tas de sable ayant pour faces deux quadrilatères et deux triangles non consécutifs.



Les premières questions arrivent :

« — Peut on avoir deux triangles consécutifs ?

— Dans le cas d'un parallélogramme, peut-on calculer la longueur de l'arête faîtière ? »

En effet les tas obtenus possèdent une arête faîtière.

D'où une nouvelle question : « Qu'est ce qui détermine l'orientation de cette arête ? »

Séance 2 : LE TRAJET D'UN GRAIN DE SABLE

Ceci les amène à se poser la question : « Comment se forme un tas de sable ? »

Ceci nous amène à faire quelques hypothèses, de nature physique, liées à l'observation. Elles nous serviront d'*axiomes* qui nous permettront de modéliser la réalité physique.

1) L'angle que fait la pente de sable avec la base est constant. Il dépend de la granulométrie du sable. Nous le mesurerons, environ 30° .

2) Une fois que la plaque déborde, les grains de sable glissent vers le bord le plus proche de leur point de chute.

3) Les faces sont donc séparées par des arêtes situées à égale distance des deux bords.

Puis, nous démontrerons, qu'en projetant les arêtes sur la plaque on obtient les bissectrices des angles formés par les bords de la plaque.

Maintenant on est capable de prévoir la forme d'un tas de sable.

En prenant une plaque trapézoïdale, l'arête faîtière **semble** parallèle à la plaque, et on obtient des faces qui **semblent** être des trapèzes. Mais, devant l'absence de certitude qu'engendre l'observation d'un tas de sable, s'impose spontanément, la nécessité de **démontrer**, afin d'avoir des **certitudes** et de pouvoir aller de l'avant.

Nous allons dorénavant travailler sur des tas de sable *idéaux*; mais avec un retour constant vers la réalité physique; que ce soit pour conforter notre modèle, ou trouver de nouvelles idées.

Par exemple, après l'avoir observé, nous démontrerons qu'il y a toujours, au moins, deux faces triangulaires et qu'elles ne peuvent pas être adjacentes.

Séance 3 : LES PYRAMIDES DE SABLE

Les élèves semblent avoir compris ce qui se passe avec un quadrilatère pour base.

Mais j'apporte des plaques, qui, oh surprise, engendrent un tas pyramidal (sans arête faîtière).

On comprend rapidement que les pyramides apparaissent quand les 4 bissectrices sont concourantes, c'est-à-dire quand le quadrilatère admet un cercle inscrit. Les élèves se posent alors une nouvelle question : «Quelle condition doivent vérifier les côtés et les angles de la plaque pour que l'on obtienne un tas de sable pyramidal ? »

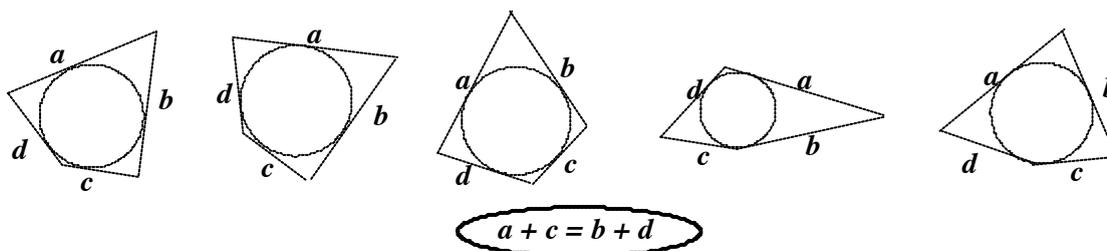
Séance 4 : ON COGITE

Recherche infructueuse de la condition. On considère le quadrilatère complet et on essaye d'utiliser un peu toutes les formules classiques dans le triangle (rayon du cercle inscrit etc.) En vain.

Séance 5 : LE THÉORÈME DE LA PYRAMIDE

David se souvient d'une question du Kangourou où l'on demandait : «Si ABCD est un quadrilatère convexe admettant un cercle inscrit a-t-on $AB + DC = AD + BC$? »

La condition, nécessaire, est-elle suffisante ? Nous fabriquons quelques plaques vérifiant cette condition. Elles engendrent bien des pyramides. Ceci nous stimule pour chercher une démonstration.



Séance 6 : ON PROUVE

David arrive avec une démonstration. Soit O le point d'intersection de 3 bissectrices. Il calcule la distance de O aux côtés de la plaque, et montre que O est équidistant des 4 côtés.

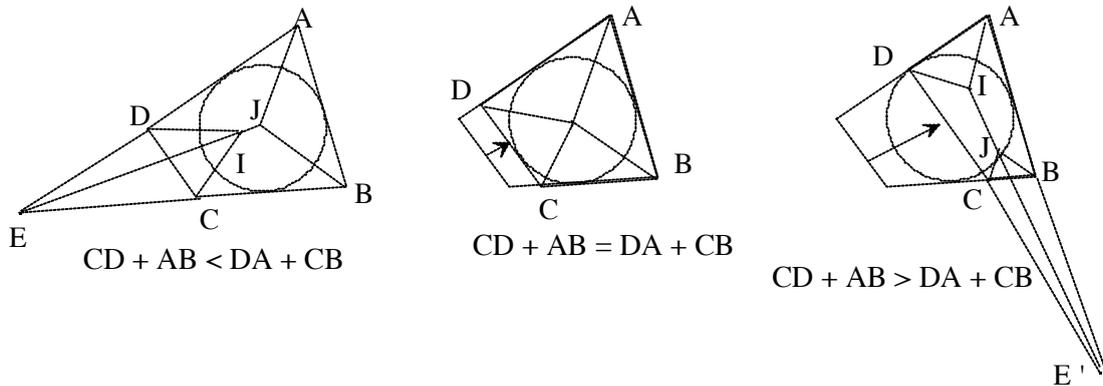
Afin de pas ne pas être en reste, j'apporte aussi une démonstration. Je montre que les projetés orthogonaux de O sur les 4 côtés sont cocycliques en faisant intervenir le théorème de l'angle inscrit. Des mois plus tard David trouvera une démonstration plus simple dans un livre d'entraînement aux Olympiades Internationales. Il généralisera cette étude aux plaques à n côtés.

Nous avons maintenant une étude complète de la position de l'arête faîtière.

Séance 7 : QUE DE TAS, QUE DE TAS...

Après avoir épuisé les joies des plaques à quatre côtés, nous passons aux bases hexagonales.

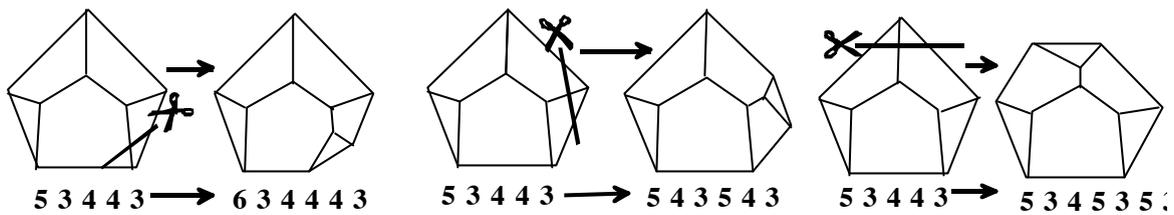
Là une grosse surprise nous attend. Nous trouvons trois types de tas de sable.



Existe-t-il d'autres cas ? Nous décidons de nommer chaque cas par une formule indiquant le nombre de côtés de chaque face et leur succession. Pour chaque cas, plusieurs formules sont possibles. Par exemple pour le cas 2 (voir infra) on aurait pu noter 354354. De toutes les formules possibles nous retenons celle qui forme le nombre le plus grand.

La question est maintenant de trouver tous les tas de sable, donc toutes les formules possibles, en fonction du nombre de côtés de la plaque. Yves trouve qu'en coupant le coin d'une plaque à n côtés on obtient une plaque à $n + 1$ côtés. Réciproquement, toute plaque à $n + 1$ côtés peut s'obtenir en coupant le coin d'une plaque à n côtés. Nous partons du pentagone et obtenons ainsi, en travaillant uniquement sur les formules, la liste des différents tas de sable possibles.

- À savoir
- 3 cas pour une plaque hexagonale,
 - 4 cas pour une plaque heptagonale,
 - 12 cas pour une plaque octogonale *etc.*



Justement, le nouveau problème réside dans le *etc.*

Car cette méthode par récurrence devient vite pénible (27 cas pour une plaque ennégonale et 82 pour une plaque décagonale !)

D'où la nécessité de chercher une méthode directe.

Séance 8 : DU CÔTÉ DES GRAPHES

Nous essayons d'abord de générer tous les formules, avec une arborescence,

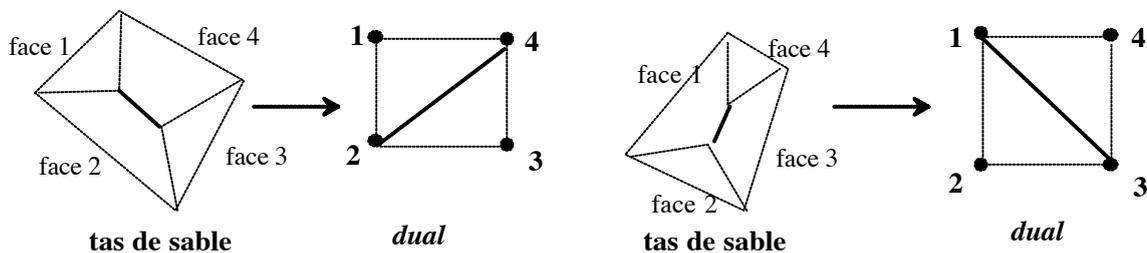
Il nous semble, alors, approprié d'utiliser une structure de graphe. Mais nos connaissances dans ce domaine étant nulles nous abandonnerons cette voie élégante et prometteuse. Plus tard Yves reprendra cette idée en considérant l'arête faîtière. En effet les tas de sable se différencient par la forme de leur arête faîtière.

Dans le cas de l'hexagone, elle est constituée de 3 segments. Aux symétries près il n'y a que 3 façons de les disposer : ou ou (Y).

En effet, on démontre que le cas d'une arête faîtière triangulaire est impossible. Physiquement, signifierait que le tas de sable possède un sommet en forme de plateau. On peut continuer sur cette voie quand le nombre de côtés augmente. Mais le groupe était trop faible en programmation pour exploiter cette voie.

Séance 9 : LE DUAL ARRIVE

D'une de ses lectures, David nous amène l'idée du dual d'un polyèdre. Cette représentation permet de visualiser et de manipuler facilement les arêtes faîtières qui diffèrent d'un tas de sable à l'autre.

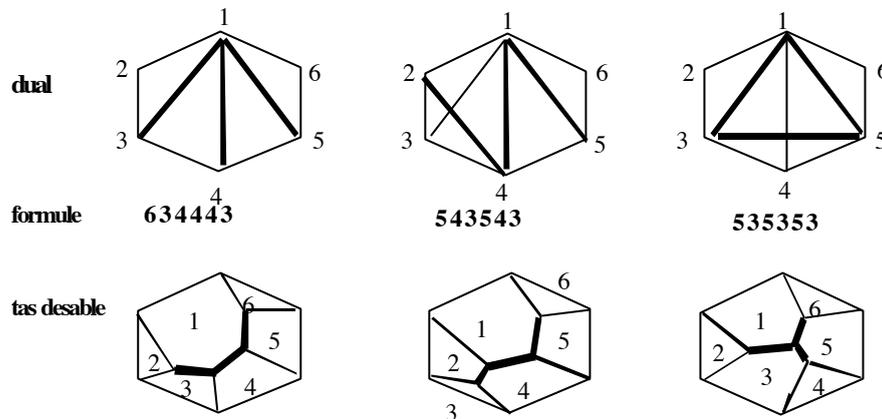


Séance 10 : L'ALGORITHME À LA MAIN

Reste maintenant, en travaillant sur cette représentation, à trouver un algorithme qui fournisse toutes les configurations.

Nous constatons que, quel que soit le nombre n de côtés de la plaque, on retrouve toujours un tas de sable ayant pour formule $n 3 4 \cdots 4 3$. Or le dual de ce cas est remarquable. Toutes les diagonales partent du même sommet (au sens du dual). En

déplaçant ces diagonales, dans un ordre lexicographique, on trouve un algorithme qui permet, à la main, d'obtenir directement toutes les configurations possibles.



Séances 11 et 12 : DE LA MAIN À LA MACHINE

Nous allons améliorer l'algorithme, en évitant, grâce à des symétries évidentes, les répétitions inutiles. Par contre nous n'arriverons pas à obtenir les formules des tas de sable dans l'ordre; c'est à dire du plus grand nombre au plus petit.

Bien entendu, il faut informatiser cet algorithme. Nous n'y arriverons pas directement et nous «bidouillerons» un algorithme parallèle dans lequel les diagonales du dual seront implantées sous forme d'une pile. Le programme sera écrit en Turbo Pascal V4 (c'est dire !)

La DAO mieux que le sable

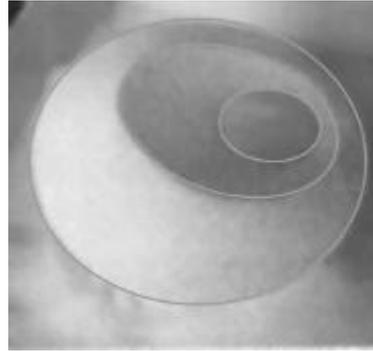
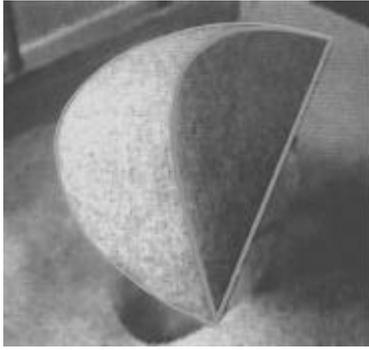
Dès que la plaque atteint sept côtés, il devient difficile de voir quelque chose sur le tas de sable. Nous intégrons alors dans l'équipe deux élèves de Première S, option SI, qui dans le cadre de leur TPE vont nous dessiner, en 3D, des tas de sable virtuels plus beaux et plus lisibles que les vrais. Pour ce faire ils utiliseront les moyens du bord, à savoir Solidworks, qui est un logiciel de DAO pour des pièces mécaniques. Ces dessins seront obtenus par troncatures successives. Ils représentent des vrais tas de sable, c'est à dire que leurs arêtes sont les bissectrices des angles de la plaque.

Il nous semble avoir bien avancé dans le cas des plaques polygonales convexes. Pour ne pas saturer nous faisons, après Noël, une petite pause de 2 séances durant lesquelles nous parlerons d'algorithmes de tri.

Les coniques ou les ronds dans le sable

Nous nous attaquons à des plaques ayant des formes arrondies. Nous obtenons alors une superbe visualisation des coniques. Cela nécessitera de ma part un bref exposé sur ce que sont les coniques.

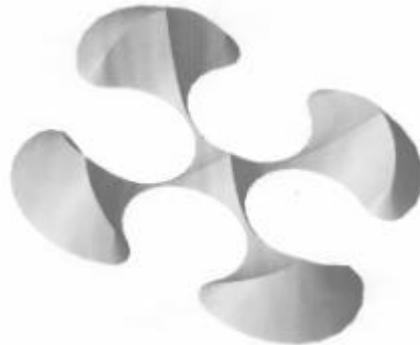
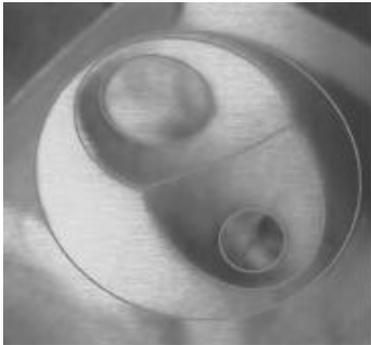
La **parabole** est obtenue avec une plaque en forme de demi-cercle. La pente de sable étant constante, l'arête apparaît comme l'intersection d'un cône et d'un plan, tous les deux faisant le même angle avec la plaque. On est donc dans le cas de l'intersection d'un cône avec un plan parallèle à la génératrice



L'**ellipse** est obtenue avec une plaque circulaire percée d'un disque excentré. Elle apparaît comme l'intersection d'un cône plein (de sable) et d'un cône creux (engendré par le trou). Les deux cônes ont même angle au sommet à cause des règles d'écoulement du sable.

Se pose alors la question : « L'intersection de deux cônes, c'est quoi ? » Nous allons d'abord devoir démontrer que l'intersection de deux cônes, de même angle au sommet, est coplanaire. Ce que confirme l'observation des tas de sable. La démonstration se fera en résolvant le système formé par les équations des deux cônes. Nous sommes donc ramenés au domaine connu, de l'intersection d'un cône et d'un plan.

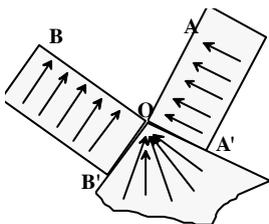
L'**hyperbole** est l'arête séparant deux trous circulaires.



Une fois cela compris, on peut alors faire joujou à l'infini pour obtenir les tas de sable les plus jolis.

Les coins rentrants

En dernier nous attaquons le cas des plaques polygonales concaves. Un retour à l'observation physique et à nos axiomes nous permet de comprendre que le coin rentrant engendre un cône de déversement pour le sable.

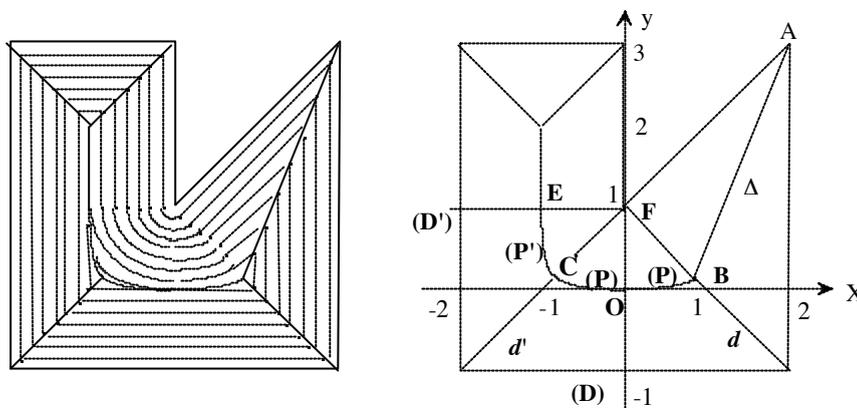


Tout grain de sable dans la zone AOA' ou BOB' tombe perpendiculairement à [OA] ou [OB].

Tout grain de sable dans la zone A'OB' tombe radialement sur O.

Nous étudierons en détail deux cas : une plaque carrée avec un angle rentrant et une plaque rectangulaire avec un trou carré excentré. Étudier

en détail cela veut dire : écrire les équations des projetés des arêtes et voir comment se font les raccordements, étudier les paraboles obtenues à partir de la définition par foyers et directrices, étudier les courbes de niveau.



Exposition et concours en vue

En septembre, j'avais été contacté par la Boutique des Sciences de Strasbourg pour participer au concours Exposcience 2001. Cette manifestation réunit des jeunes, d'Alsace et du Bade Württemberg, ayant réalisé une activité de recherche scientifique dans le cadre d'une classe ou d'un club. A la fin du premier trimestre, après avoir vu que notre activité donnait des résultats, j'y ai inscrit le Club Scientifique. Du coup les deux élèves de Première ont été plus particulièrement chargés de la réalisation des dessins et photos nécessaires aux panneaux d'exposition. Nous avons également réalisé un CD Rom. On a filmé, avec explications, la construction des différents tas de sable étudiés durant l'année. On y a joint deux animations avec des images de synthèse. L'une montre les différents cas obtenus avec des plaques à 6 et 7 côtés ; l'autre montre l'évolution de l'orientation de l'arête faîtière.

Le groupe

Le groupe était constitué de cinq élèves de Terminale S, trois du lycée Lavoisier et deux du lycée Jeanne d'Arc, plus deux élèves de Première S à partir de janvier. Nous fonctionnions à raison d'une heure hebdomadaire. A l'approche d'Exposcience le rythme s'est accru pour être prêts à temps.

Au départ les élèves n'avaient aucune idée de ce dans quoi ils s'embarquaient, moi non plus d'ailleurs. Leurs réactions méritent d'être citées :

« Au début on se demandait vraiment ce qu'il pouvait y avoir à chercher. On croyait que, comme en classe, vous nous faisiez mariner sur un problème dont vous aviez la réponse. Mais quand on a compris que vous n'en saviez guère plus que nous, alors c'est devenu vraiment intéressant, et on a foncé. »

« Au départ je me disais — oui c'est bien joli; mais où est le problème ? —, je ne voyais pour ainsi dire pas ce que l'on allait bien pouvoir chercher. Par la suite j'ai particulièrement aimé ces jours où des idées nouvelles jaillissaient (ça m'a montré que quelquefois, il faut savoir attendre ces fameux jours) ! Le plus intéressant a été le fait qu'il y avait tout, ou presque, à découvrir et surtout que l'on était libre des questions que l'on se posait et des moyens employés pour y répondre »

Aux sources du tas de sable

Il y a 15 ans, sous la plume de Monsieur Roger ISS, l'Ouvert a publié 4 articles qui forment une étude remarquable des tas de sable. Avant de me lancer dans cette aventure; j'avais lu ces articles pour m'assurer que le sujet était intéressant et son étude réalisable par des lycéens; mais en diagonale seulement; pour ne pas être trop influencé. Bien entendu, pour l'essentiel, nous avons redécouvert des résultats qui se trouvaient déjà dans ces articles.

Ils s'en écartent sur deux points.

Les élèves ont voulu étudier le cas des tas pyramidaux que Monsieur Iss écarte, car il les considère, à juste titre, comme des cas particuliers. Mais pour nous la (re)découverte du théorème de la pyramide a été un moment fort.

Monsieur Iss utilise le dual d'un tas de sable pour montrer le lien avec la triangulation des polygones. Ma surprise a été grande de voir un élève apporter la même notion, que nous avons alors utilisée pour trouver l'algorithme permettant d'avoir directement tous les cas possibles avec une plaque polygonale convexe.

Le public

Comme souvent dans ces situations, les élèves ont présenté leur travail avec enthousiasme et compétence. De 7 à 77 ans les tas de sable font vibrer la fibre de l'enfance. Les visiteurs commençaient à regarder les élèves faire leur présentation. Puis ils se prenaient au jeu, attendant de voir ce que donneraient les plaques aux formes bizarres; et ils restaient jusqu'à la fin, étonnés de voir qu'avec un matériau aussi simple on arrivait à des mathématiques complexes et à des formes surprenantes et belles.

Nous avons eu droit à toutes sortes de réactions :

« À quoi ça sert ? »

« Est ce que la forme du tas de sable change si l'on met la plaque à l'envers ? »

« Impossible que des élèves aient trouvé tout ça ! » (dixit un collègue)

« Je saurai comment occuper mes gosses sur la plage. »

Et des questions intéressantes voir pointues : volume du tas, position du centre de gravité, classification des polygones convexes en fonction du tas obtenu. Si l'on mélange le sable avec des aiguilles de pin peut-on obtenir une pente plus raide ? Que se passe-t-il si l'on penche la plaque ou si l'on réalise l'expérience dans un champ électrique (nous l'avons expérimenté, résultat surprenant) etc.

Dialogue sur les deux tas de sables

Voici un exemple de dialogue entre un visiteur et notre groupe.

Le visiteur : *« Avec une plaque circulaire on obtient un cône dont le sommet est à l'aplomb du centre du disque. Mais avec une plaque formée de deux disques sécants, les grains de sable vont s'appuyer sur la crête reliant les sommets des deux cônes, et ces deux sommets vont se rapprocher. D'ailleurs regardez, on voit bien que le sommet du cône n'est pas au centre du disque ! »*

Le groupe : *« Bof, ce n'est pas probant. D'ailleurs si l'on mesure la distance du sommet du cône aux bords, on voit qu'elle est constante ».*

Le visiteur : *« Votre mesure n'est pas précise et ne permet pas de trancher la question ».*

Le groupe : *« Si vous aviez raison cela contredirait la règle qui veut que le tas de sable fasse toujours le même angle avec la plaque ».*

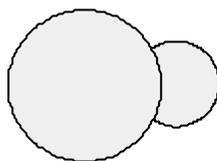
Le visiteur : « Avec votre modèle mathématique de tas de sable vous avez raison. Votre règle vaut peut-être pour les plaques polygonales convexes. Mais le modèle reste-t-il encore valable avec d'autres plaques ? »

Un deuxième visiteur (physicien sachant expérimenter) : « Essayez donc avec deux plaques carrées sécantes. On visualisera mieux le sommet et le centre de la plaque ».

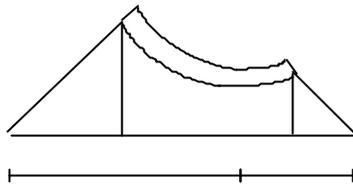
Aussitôt dit aussitôt fait.

Le visiteur : « Ah oui, là, on voit bien que le sommet de la pyramide est au-dessus du centre de la plaque ».

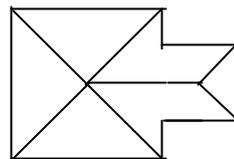
Large sourire des membres du Club Scientifique.



La plaque



Le tas de sable vu de profil



Le 2° tas de sable vu d'en haut

Effets inattendus

- Participation à Exposcience Alsace 2001 (Premier prix).
- Présentation à l'APMEP et à l'IREM à Colmar et à Strasbourg.
- Participation à Exposcience Internationale 2001 à Grenoble avec 1500 jeunes de 62 pays.
- Présentation à la Fête de la Science à Paris .
- Devoir présenter les tas de sable en allemand ou en anglais.
- Création d'un site Internet sur le sujet (cette année dans le cadre des TPE).
- Avoir le plaisir, réciproque, de rencontrer Monsieur Roger ISS dont les articles nous ont donné envie de jouer aux tas de sable.

Ma conclusion sera simple ; participer à cette aventure, fut pour moi, un vrai bonheur.

BIBLIOGRAPHIE

- P. CLAUDIN : *Les tas de sable*, La Recherche n° 324, oct. 1999.
- R. CUILIERIER : *Effets de sable*, Science&Vie n°1007, août 2001.
- É. GUYON & J. P. TROADEC : *Du sac de billes au tas de sable*, Éd. Odile Jacob Sciences, 1994.
- R. ISS : *Sable et mathématiques*, L'Ouvert n° 41, déc. 1985 & N° 42, mars 1986.
- R. ISS: *Considérations sur une famille de polygones*, L'Ouvert n° 51, juin 1988.
- R. ISS: *Des tas de sable aux graphes*, L'Ouvert n° 56, sep. 1989.
- R. ISS: *Les tectoèdres*, Bulletin de l'APMEP n° 402, fév. 1996.
- R. ISS: *Sable et géométrie*, Pour la Science n° 234, avril 1997.
- Sur las squelettes* Première épreuve (Algèbre et géométrie) du CAPES 1996

« Je n'ai appris l'exploit des lycéens emmenés dans les tas de sable par notre collègue Francis JAMM qu'en juin dernier, lorsqu'ils ont présenté leur réalisation à Strasbourg et à Grenoble. Ma surprise a été grande (et mon plaisir aussi) de constater qu'ils avaient pu se passionner comme moi sur ce sujet insolite... Je n'ai

pas pensé que la « découverte » des tas de sable allait révolutionner la géométrie mais que l'aspect physique, voire ludique des problèmes qu'ils posaient pouvaient intéresser nos élèves et, à ce titre, constituer un outil, ayant non seulement une certaine valeur pédagogique mais qui pouvait aussi déboucher très naturellement sur des considérations hors programmes. Le club scientifique du Lycée Lavoisier et Francis JAMM ont fourni la preuve que je ne me trompais pas. Je leur en suis reconnaissant.

Dans cette étude leur démarche a été très voisine de la mienne sans pour autant cesser d'être originale. Peut-être même a-t-elle été plus courageuse... En effet, j'ai rapidement abandonné les tas de sable pour m'intéresser à ce que j'ai appelé les « tectoèdres » (des tas de sable où l'égalité des pentes des faces ne serait plus vérifiée). Nos lycéens les ont aussi envisagés en les appelant « faux tas de sable ». Leur étude est en effet plus simple que celle des tas de sable grâce à une numérisation facile et l'élimination des cas particuliers ou « cas limites ». L'étude des tas de sable proprement dits pose beaucoup de problèmes difficiles bien que n'utilisant que des connaissances de géométrie élémentaire. Ainsi nos lycéens ont résolu le problème suivant : quand la base du tas de sable est un quadrilatère quels sont les côtés de celui-ci qui engendrent les faces triangulaires ? (on peut alors déduire la position de l'arête faîtière puisque celle-ci joint les sommets de ces faces triangulaires)... Ils ont trouvé une condition qui est, à mon avis, une petite merveille d'élégance et de simplicité : les côtés qui répondent à la question sont les côtés opposés du quadrilatère dont la somme des longueurs est la plus petite... Ils ont essayé (et moi aussi), mais en vain, de trouver une condition analogue pour le pentagone : comment déterminer les côtés d'un pentagone qui sont les bases des deux faces triangulaires du tas de sable construit sur lui, (bien entendu, sans avoir à faire le dessin de celui-ci) ? Peut-être un lecteur de l'Ouvert pourra-t-il donner une réponse à cette question ? »

Roger ISS



Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Première

Exercice 1

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AC]$. Soit M un point quelconque de $[IC]$.
Où placer le point P sur $[AB]$ pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

Exercice 2

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Ils attendent le lendemain matin pour se partager le butin.

Durant la nuit, l'un des pirates se lève sans bruit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Lucile, Sainte Patronne des Pirates, et peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche la sienne et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario.

Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales.

Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Exercice 3

On décompose un entier naturel non nul N en somme d'entiers naturels. On effectue le produit des termes intervenant dans la somme.

Par exemple, pour $N = 10$, les décompositions $10 = 5 + 4 + 1$ et $10 = 4 + 3 + 2 + 1$ donnent respectivement les produits : $5 \times 4 \times 1 = 20$ et $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Proposer pour N quelconque une décomposition donnant le produit le plus grand possible.

Rallye mathématique d'Alsace 2002

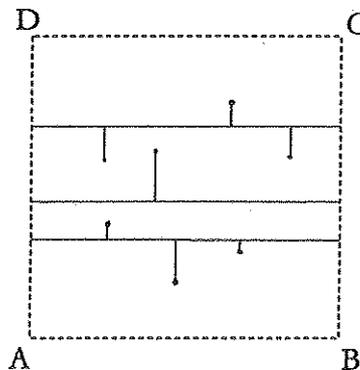
Classe de Terminale

Exercice 1

Dans un parc carré ABCD d'un kilomètre de côté sont placées 288 statues. On construit dans ce parc un réseau de la manière suivante :

1. On construit un certain nombre de chemins parallèles à (AB) allant de [CD] à [BC].
2. On construit d'autre part des chemins secondaires perpendiculaires aux précédents, partant de chacune des 288 statues et aboutissant aux chemins principaux (voir la figure).

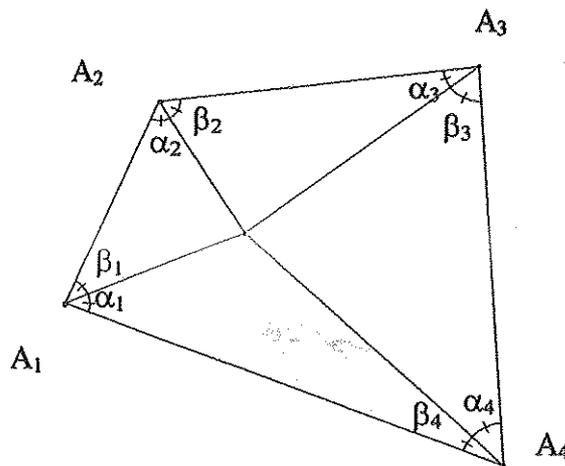
Montrer qu'on peut ainsi construire un réseau de telle sorte que sa longueur totale soit inférieure à 24 kilomètres (la largeur des chemins est négligeable).



Exercice 2

On se donne un quadrilatère convexe $\{A_1A_2A_3A_4\}$ et M un point quelconque intérieur à ce quadrilatère.

On définit les angles géométriques $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, comme indiqué sur la figure.



Montrer l'existence de i entre 1 et 4 tel que : $\alpha_i \leq \beta_i$.

Exercice 3

Quels entiers sont somme d'au moins 2 entiers strictement positifs, tous consécutifs ?