Approximations géométriques

Catherine HOUDEMENT et Alain KUZNIAK [1]
IUFM de Haute-Normandie et IUFM d'Alsace

Résumé. *Une construction géométrique est meilleure qu'une autre si elle approche mieux le (ou les) point(s) à construire. Mais comment définir et mesurer cette approximation ? Nous présentons deux tentatives, élaborées au début du XX*e *siècle, pour donner un sens à la comparaison des constructions géométriques à la règle et au compas : la Géométrographie de* LEMOINE *et l'approche probabiliste de* NITZ.

L'exemple classique de la construction du pentagone régulier donnée par DÜRER dans *L'instruction sur la manière de mesurer* soulève un premier aspect du problème de l'approximation en géométrie : la construction proposée par le peintre est fausse mais efficace surtout lorsqu'on dessine un pentagone dont la longueur du côté est donnée a priori. Mais que signifie cette fausseté, de quelle efficacité parle-t-on ?

Deux univers géométriques avec leur pensée propre se confrontent ici. Le premier, celui des constructions effectives utiles aux dessinateurs et aux ingénieurs, renvoie à ce que nous désignerons dans ce texte sous le terme de Géométrie Naturelle ou Géométrie I où le vu et l'expérience instrumentée sont essentiels. Le second se déploie au milieu d'objets idéaux et la preuve des résultats est assurée par des raisonnements basés sur des axiomes inspirés de la réalité. Cette Géométrie II, à la fois axiomatique et naturelle, envisage le problème précédent comme celui de la constructibilité des figures, il s'agit de valider une suite d'opérations élémentaires et de prouver que l'ensemble obtenu à la fin de ce processus remplit les conditions imposées : le pentagone est-il vraiment régulier ?

Mais un deuxième aspect de la question de la fiabilité des constructions doit être pris en compte. Une construction, mathématiquement légitime, donne-t-elle un résultat satisfaisant lorsqu'on essaie de construire l'objet réel ? Autrement dit, la technique donnée par la Géométrie II est-elle un bon outil pour obtenir des objets de la Géométrie I ?

Ce problème va dépendre du support matériel utilisé et des instruments de construction mis en œuvre. Il se pose aujourd'hui avec beaucoup d'acuité en informatique (en DAO ou dans les divers usages de logiciels de constructions géométriques professionnels ou pédagogiques comme CABRI ou GEOPLAN). Il s'est posé autrefois dans le cadre des constructions à la règle et au compas dans le monde en pleine effervescence des dessinateurs industriels de la fin du XIXe siècle.

Vers une théorie rationnelle de l'approximation géométrique

Felix KLEIN dans son ouvrage *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus* envisage l'approximation des constructions géométriques comme un problème

1. © L'OUVERT 105 (2002)

qui doit pouvoir être résolu avec le même degré de mathématisation que les problèmes de géodésie alors si prégnants. S'inspirant du théorème de Pascal sur les coniques, il fournit une forme approximative de ce dernier :

Habe ich sechs Punkte, die ungefähr auf einem Kegelschnitt liegen, ziehe deren ungefähre Verbindungsgeraden und bringe diese in a,b,c zum Schnitt, dann liegen diese Punkte ungefähr auf einer geraden Linie.[2]

Le problème est bien entendu de préciser le sens de l'*à peu près* pour que cet énoncé en langue vernaculaire se transforme en énoncé mathématique. Dans cet article, nous allons présenter deux façons relativement élémentaires et radicalement différentes de répondre à la demande de Klein d'élaborer une théorie rationnelle de l'erreur dans les constructions géométriques : celle de Lemoine et celle de Nitz.

1 La géométrographie

1.1 Émile Michel Hyacinthe Lemoine

Dans son ouvrage *Géométrographie ou Art des Constructions géométriques* paru en 1903, Lemoine expose une synthèse de ses différents travaux sur un domaine qu'il a introduit et développé en grande partie seul. Voici comment il définit dans l'introduction de son traité, les buts qu'il assigne à la Géométrographie

La Géométrographie a un quadruple objet :

- *a. Au moyen de certaines conventions, elle donne, pour une construction quelconque exécutée, un symbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude.*
- *b. Elle conduit aux procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la Géométrie.*
- *c. Elle discute, quand il y a lieu, une construction dont le principe est donné, pour y substituer une construction plus simple qui peut arriver à différer tout à fait de la première construction.*
- *d. Elle permet de comparer entre elles toutes les constructions que l'on connaît d'un même problème et de choisir parmi celles-là la plus simple que l'on appelle la construction géométrographique du problème, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé une plus simple, s'il y en a, qui devient alors la construction géométrographique de ce problème.*

1.2 Le codage des constructions.

Ainsi, Lemoine conçoit le tracé géométrique comme l'exécution d'un algorithme de tracés successifs à la règle et au compas, il faut alors coder chacun des pas élémentaires de la construction pour en évaluer le coût total.

Nous présentons les codages des différentes opérations qui s'appuient sur ceux proposés initialement par Lemoine mais simplifiés par Reusch, un chercheur allemand, en 1904.

2. Soient six points, à peu près situés sur une conique : si l'on trace les droites qui joignent à peu près deux points et qu'elles se coupent en a, b et c, alors ces points sont à peu près alignés.

Opérations élémentaires

1. Faire passer le bord d'une règle par un point placé :	R_1
2. Faire passer le bord d'une règle par deux points :	$2R_1$
3. Tracer une ligne en suivant le bord d'une règle :	R_2
4. Mettre une pointe de compas en un point placé :	C_1
5. Prendre dans le compas la distance de deux points :	$2C_1$
6. Tracer un cercle :	C_2

Dans son ouvrage, LEMOINE ajoute une opération qui prend en compte le fait de poser la pointe du compas sur une droite, mais cette opération intervient peu dans les constructions usuelles à la règle et au compas.

Ces différentes opérations servent ensuite à coder des opérations un peu plus complexes dont nous donnons les plus basiques.

Opérations plus complexes :

1. Tracer une droite qui passe par un point placé : $R_1 + R_2$
2. Tracer une droite qui passe par deux points placés : $2R_1 + R_2$
3. Tracer un cercle (de rayon non fixé) dont le centre est placé : $C_1 + C_2$
4. Tracer un cercle dont le centre est placé et qui passe par un point fixé : $2C_1 + C_2$
5. Tracer un cercle dont le centre est placé et dont le rayon a une longueur déjà donnée par l'écartement du compas : $C_1 + C_2$
6. Tracer un cercle dont le centre est placé et le rayon a une longueur à prendre sur un segment : $3C_1 + C_2$

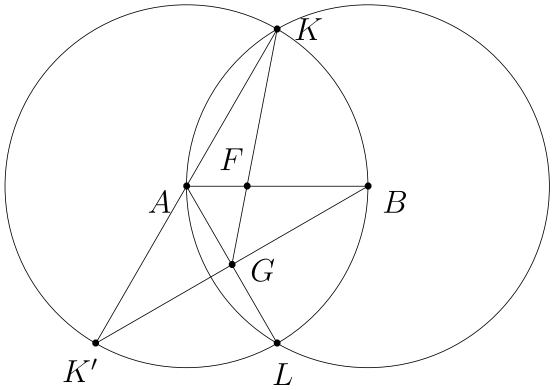
À toute construction complète est attaché le symbole $l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2$, le nombre $l_1 + l_2 + m_1 + m_2$ est appelé *coefficient de simplicité* et le nombre $l_1 + m_1$ *coefficient d'exactitude*. Ce nombre est fonction du nombre de points utilisés pour les divers tracés. On remarque que l_2 est le nombre de droites tracées, m_2 celui des cercles tracés.

Le coefficient de simplicité de chaque construction permet de dégager le tracé *géométrographique* de la construction, celui dont la simplicité est maximale pour un coefficient minimum.

1.3 Un exemple : les trisections d'un segment

Pour illustrer la démarche de LEMOINE, nous allons classer différentes constructions à la règle et au compas de la trisection d'un segment. Des indications sur la validation des constructions sont données à la fin de l'article.

Trisection 1



Pour obtenir le point F situé au $\frac{1}{3}$ de AB, on effectue les constructions suivantes :

1- tracer les cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB, ils se coupent en K et L ; $2(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

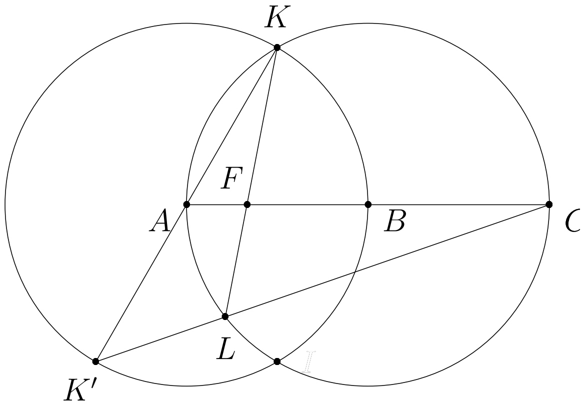
2- tracer la droite (KA), K' est le point diamétralement opposé à K ; $2R_1 + R_2$

3- tracer la droite (AL) et la droite (BK') qui coupe(AL) en G ; $2(2R_1 + R_2)$

4- tracer la droite (KG), elle coupe $[AB]$ en F ; $2R_1 + R_2$

Le coût total de la construction est $3C_1 + 2C_2 + 8R_1 + 4R_2$ et les coefficients de simplicité et d'exactitude sont respectivement 17 et 11

Trisection 2



On peut décomposer la construction en cinq étapes :

1- tracer les cercles de centres respectifs A et B de rayon AB , K un des points d'intersection ; $(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

2- tracer la droite (KA) pour obtenir K' ; $2R_1 + R_2$

3- tracer la droite (AB) pour obtenir C ; $2R_1 + R_2$

4- tracer la droite $(K'C)$ qui coupe le cercle de centre B en L ; $2R_1 + R_2$

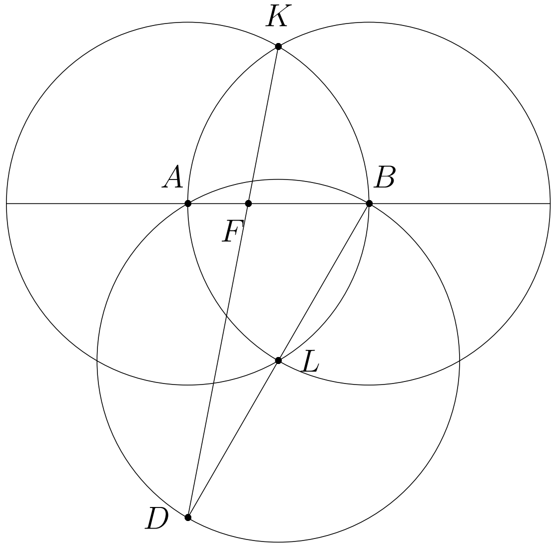
5- enfin tracer la droite (KL); $2R_1 + R_2$

Total : $3C_1 + 2C_2 + 8R_1 + 4R_2$

Les coefficients associés à cette construction sont donc (17 ; 11). Si la droite (AB) est tracée au départ, la construction de cette droite (3) est inutile et on obtient :

$3C_1 + 2C_2 + 6R_1 + 3R_2$ et les nouveaux coefficients sont $(14\,;\,9)$.

Trisection 3



Cette fois, le programme de construction est le suivant :

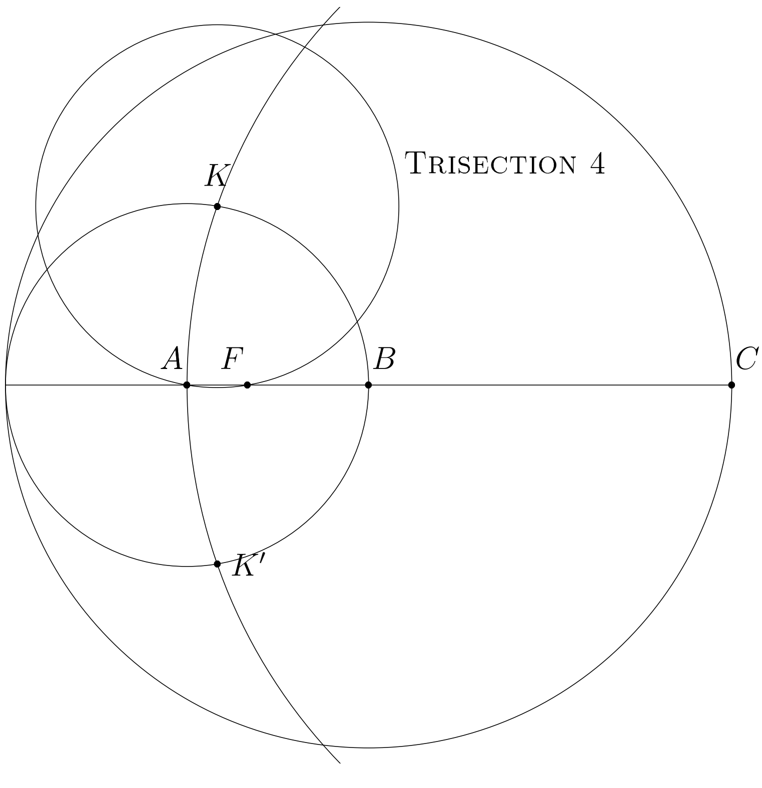
1- tracer les cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB, ils se coupent en K et L ; $(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)$

2- tracer le cercle de centre L et qui passe par A : $C_1 + C_2$

3- tracer la droite (BL) qui donne le point D sur le cercle de centre L ; $2R_1 + R_2$

4- tracer la droite (KL) ; $2R_1 + R_2$

Le total est $4C_1 + 3C_2 + 4R_1 + 2R_2$ et les coefficients $(13\,;\,8)$.



Trisection 4

En suivant les étapes de la construction, on obtient $2R_1+R_2$ pour la droite (AB) et $4(2C_1+C_2)$ pour les quatre cercles : celui de centre A passant par B, celui de centre B et de rayon $2AB$, celui de centre C passant par A et enfin celui de centre K passant par A.

Le total est donc $8C_1+4C_2+2R_1+R_2$ et les coefficients (15 ; 10).

Cette fois encore si la droite (AB) est tracée au départ, on obtient $8C_1+4C_2$ et (12 ; 8).

La construction géométrographique est donc la construction 3 si la droite (AB) n'est pas construite. Si on la suppose construite, c'est la construction 4 qui est la construction géométrographique.

On remarque que la construction 3 donne une construction du tiers d'un segment simple si on ne trace pas les cercles en entier.

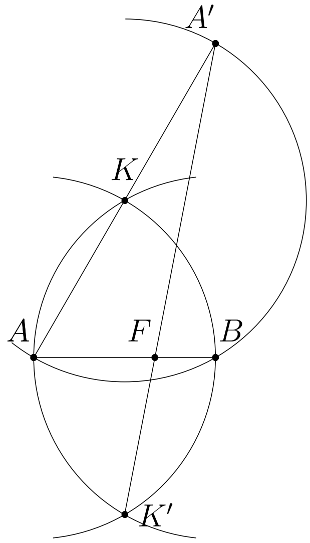


FIGURE 5

2 Une approche physique et métrique

2.1 Konrad NITZ

L'approche de LEMOINE néglige les mesures de longueur et les approximations liées aux instruments de dessin et à leur usage par les dessinateurs. Il pose un certain nombre d'hypothèses «non réalistes».

La Géométrographie suppose que la feuille de dessin est aussi grande qu'il est nécessaire à l'exécution intégrale de la construction ; elle suppose que les instruments dont on se sert : compas, règle (et équerre, lorsque son usage est admis) sont aussi petits ou aussi grands que le demande le tracé ; elle suppose qu'un point est également bien déterminé quel que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent.

Au contraire, Konrad NITZ (1906), dans une étude technique du problème des constructions, se place dans le cadre «réaliste». Il s'intéresse au coût réel, en terme de précision métrique des tracés, des algorithmes de constructions. Il travaille sur des *geometrischen Realgebilden* qu'on pourra qualifier de *figures réelles*. Ainsi, les droites ont une épaisseur qui est celle du trait du crayon ; une *droite réelle* est une petite bande droite déterminée par deux droites parallèles. De même un *point réel* est une petite surface de forme approximativement circulaire (*Punktkreise*). Mais ce point peut aussi être un parallélogramme lorsqu'il est déterminé par l'intersection de deux *droites réelles.* Le *cercle réel* est défini de la même façon que la *droite réelle.*

2.2 Erreur moyenne de type probabiliste.

Nitz distingue deux types d'erreurs : les *erreurs techniques* liées au matériel et les *erreurs subjectives* dues au dessinateur (poser la pointe du compas sur un point, poser la règle. . .) Il s'intéresse plus particulièrement à ces dernières.

Trois erreurs fondamentales sont alors envisagées par Nitz :

I. Erreur obtenue en plaçant la pointe du compas sur le point d'intersection, de deux droites, d'une droite et un cercle ou enfin de deux cercles ;

II. Erreur obtenue en plaçant la règle sur deux points donnés ;

III. Erreur obtenue en construisant un cercle qui est donné par son rayon et son centre.

Pour les évaluer, et c'est l'originalité de son approche, il utilise une méthode probabiliste basée sur la loi normale des erreurs de Gauss. Par exemple, pour étudier les erreurs de type I, où le point est l'intersection de deux droites faisant un angle ω, il établit un parallèle avec la théorie de la précision des déterminations d'un point développée en Géodésie. On peut aussi comparer sa méthode avec celle utilisée pour résoudre le célèbre problème du tireur à la cible. La pointe du compas est assimilée à la balle sur la cible. Ce modèle permet d'introduire des ellipses qui sont, dans un langage moderne totalement anachronique, les lignes de niveaux associées au vecteur gaussien déterminé par les coordonnées de la pointe de compas. Une de ces ellipses est l'ellipse moyenne dont les demi-axes déterminent l'erreur moyenne. Tous les points d'une même ellipse ont la même probabilité d'être touchés.

Pour chacune de ces erreurs, le travail consiste à déterminer l'écart-type des distances entre le point réel et le point géométrique. C'est cet écart qui est appelé l'erreur moyenne. Ensuite, il faut composer toutes les erreurs en suivant l'algorithme de construction.

2.3 Trois formules de base

Dans les applications de sa méthode, Nitz utilise de manière systématique trois formules pour estimer l'erreur moyenne d'une construction à la règle et au compas.

Dans le cas des erreurs de type I, il a besoin d'évaluer l'erreur quadratique moyenne K_φ suivant une direction faisant un angle φ avec une des deux droites qui déterminent le point A. L'angle entre les deux droites est ω.

$$K_\varphi = \frac{\sigma_1^2 \cos^2(\varphi - \omega) + \sigma_2^2 \cos^2(\varphi)}{\sin^2(\omega)} \tag{1}$$

Les σ_i désignent les écarts-types des distances de la pointe du compas à chacune des droites qui déterminent le point A.

Pour les erreurs de type II, deux formules sont essentielles, celle qui donne l'inclinaison de la *droite réelle* avec la droite idéale passant par deux points donnés dont la distance est d :

$$\sin^2(\Theta) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{d^2}, \tag{2}$$

et celle qui donne cette fois l'erreur moyenne pour obtenir un point P situé entre deux points A et B et à une distance p de A :

$$M_p^2 = \sigma_1^2\Big(1 - \frac{p}{d}\Big)^2 + \sigma_2^2\Big(\frac{p}{d}\Big)^2. \tag{3}$$

Cette fois les σ_i désignent les écarts-types des distances de la règle aux différents points.

Pour pouvoir appliquer son étude, K. NITZ a besoin de « mesurer » les différents écarts-types σ_i qu'il a introduits. Il a ainsi étudié, avec l'aide d'un microscope, les productions de dessinateurs professionnels et évalué la distance de la pointe de compas aux deux droites qui se coupent en un point donné.

2.4 La construction de la médiatrice d'un segment

Nous allons illustrer la démarche préconisée par NITZ sur l'exemple de la construction de la médiatrice et du milieu d'un segment $[AB]$ donné. La construction utilisée, dont nous devons évaluer chacun des pas, est la suivante :

- Cercle de rayon r et de centre A; $C_1 + C_2$
- Cercle de rayon r et de centre B; $C_1 + C_2$
- Droite passant par les points d'intersection C et D de ces deux cercles; $2R_1+R_2$

La longueur de AB est a. Localement au point C, les deux arcs de cercles centrés en A et B peuvent être identifiés aux droites tangentes à ces cercles en C. L'angle ω de ces deux droites est égal à l'angle $\widehat{ACB}$ formé par les rayons des deux cercles

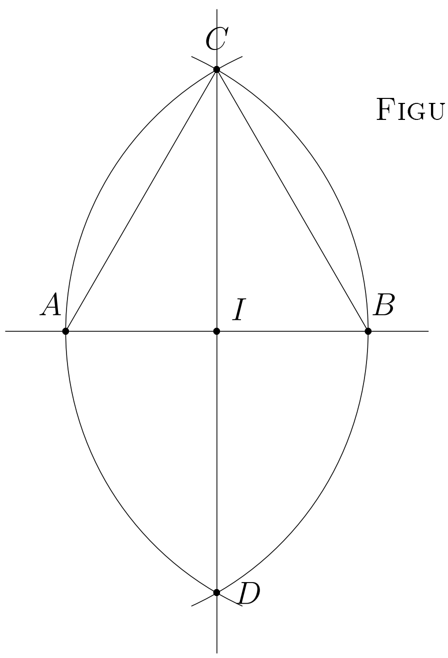


FIGURE 6

sécants en C.

1) Le placement de la pointe de compas en A (ou en B) donne une erreur moyenne δ.

2) L'erreur moyenne sur C (ou D) utile pour construire la droite (CD) est la composante de cette erreur sur une direction parallèle à (AB). Elle correspond ici à la valeur $K_{\frac{\omega}{2}}$:

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{\sigma_1^2 \cos^2(\frac{\omega}{2}) + \sigma_2^2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}{\sin^2(\omega)}.$$

Mais ici on a $\sigma_1 = \sigma_2$ et de plus $\sigma_1 = \delta$. On obtient alors:

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{\delta^2}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}.$$

Or $\sin(\frac{\omega}{2}) = \dfrac{a}{2r}$. Ce qui permet finalement d'obtenir l'erreur moyenne pour C (ou D) :

$$K_{\frac{\omega}{2}} = \frac{4r^2\delta^2}{a^2}.$$

Une autre valeur importante pour continuer les calculs est la dimension de CD qui est $d = \sqrt{4r^2 - a^2}$.

Nous pouvons enfin grâce aux équations (2) et (3) déterminer l'erreur moyenne faite sur I dans la direction AB. On prend $p = \dfrac{d}{2}$ et l'on obtient :

$$M_I = \pm\delta\frac{r}{a}\sqrt{2}$$

et l'erreur de direction pour CD est donnée par :

$$\sin(\Theta) = \pm\delta\frac{r}{a}\sqrt{\frac{8}{4r^2 - a^2}}.$$

Ces formules montrent que l'erreur sur I est minimale pour un rayon du cercle auxiliaire proche de la moitié du segment alors que l'erreur faite sur l'inclinaison de la droite est minimale lorsque r est très grand. Il n'est donc pas possible d'optimiser simultanément les deux constructions.

On constate sur cet exemple que la méthode de Nitz est complémentaire de celle de Lemoine : elle permet de discuter pour une même construction les valeurs des paramètres utilisés comme ici la dimension du rayon du cercle auxiliaire.

Conclusion

Dans le cadre numérique, Guilbaud distingue pour les nombres réels l'existence de plusieurs niveaux d'approximation qu'il considère comme les trois étapes de la pensée *approximative* dans le cadre des nombres réels. On peut donner :

1) une valeur approchée;
2) un encadrement;
3) une suite indéfinie d'encadrements.

En géométrie, que retenir comme idée de l'approximation ? Existe-t-il une approche géométrique spécifique de l'approximation des constructions géométriques ou bien celle-ci se résume-t-elle à l'approche numérique ? Pour dépasser le niveau du sens commun et définir l'approximation cherchée, il faut pouvoir ordonner des constructions géométriques selon un critère fiable qui traduit une distance à un idéal bien défini comme il peut l'être dans le cadre numérique.

Il nous semble que, chacun à leur manière, LEMOINE et NITZ répondent à cette exigence et permettent de quitter le premier niveau d'approximation vague pour un niveau où les comparaisons les plus précises sont possibles. Dans un cas l'approche est plus qualitative et suppose des calculs simples, dans le second cas l'approximation passe par une série de calculs qui essaient de rendre compte des contingences du travail du dessinateur. Les théories proposées enrichissent la Géométrie I et permettent de discuter de manière argumentée les constructions usuelles. En organisant et en codant de manière précise les détails d'une construction géométrique, ces approches, notamment celle de LEMOINE, peuvent aussi constituer une aide pour l'apprentissage de la géométrie à l'école et au collège.

Indications sur les trisections

Trisection 1 : Considérer F comme le point de concours des médianes dans le triangle AKL

Trisection 2 : Montrer, par exemple, que les triangles KAF et $K'IC$, où I est le symétrique de B par rapport à A, sont de même forme.

Trisection 3 : Remarquer que AK est parallèle à BD.

Trisection 4 : Vérifier que les triangles AKF et KCA sont semblables ou utiliser l'inversion $\mathcal{I}(A,AB^2)$ qui transforme le cercle $\mathcal{C}(C,AC)$ en la droite KK' médiatrice de AF.

Bibliographie

GUILBAUD G.Th. : (1985) *Leçons d'à peu près* Christian Bourgois, Paris.

HAMBLY M. : (1991) *Les instruments de dessin.* Ars Mundi, Paris.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. : (2001) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

LEMOINE E.M.H. : (2003) *Géométrographie ou Art des Constructions géométriques*, Scientia.

NITZ K. : (1906): Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik 53.*

KLEIN F. : (1903) *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus,* 3e édition Springer, 1928.

REUSCH J. : (1904) *Planimetrische Konstruktionen in Geometrographischer Ausführung*, Teubner.