

•MATURATIONS DU FONCTIONNEMENT RATIONNEL

•FRACTIONS ET DÉCIMAUX : ACQUISITIONS D'UNE CLASSE, PROJETS DE PROGRAMME 2000 POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Robert Adjage, professeur agrégé (dr.) à l'IUFM d'Alsace

Abstract

This article summarizes the theoretical and experimental basis, together with the main conclusions, of a research program completed in November 1999. This research concerned the introduction of the rational numbers, at elementary school level, according the principles of separation and coordination of three domains of activity: the physical environment, mathematical modelling and expression. An experiment, lasting two academic years, was conducted on a class of twenty six pupils having, at the beginning, an average age of nine years. A collection of twenty software programs, specifically conceived for this purpose, greatly facilitated the experimentation. In comparison with a sample taken nationally, the observed pupils constituted a population whose initiatives, at the outset, stood at a modest level despite an apparent sound understanding of the basic school curriculum. The final assessments show a net progression notably in the diversity of resorted procedures, a general development of innovative risk taking and an entry of certain pupils into a multi-semiotic-register culture.

Beyond the experience in question, we have been able to outline the basis of an assessment methodology for the skills acquisition of a class pursued over a long period. The results of this research have finally allowed us to question certain proposed guidance given for elementary school programs, appearing in 1999.

•Introduction

La capacité à mobiliser les nombres rationnels et à les faire fonctionner pour la résolution de problèmes résulte de la maîtrise de plusieurs ensembles de compétences dont la maturation, pour un individu donné, s'étend sur des durées différentes. Le phénomène n'est évidemment pas spécifique de l'apprentissage des rationnels. Il semble en revanche moins précisé dans ce domaine que dans le cas des entiers. Ainsi, compter, calculer, définissent des compétences à vitesse de maturation variable. Mais dispose-t-on, dans le cas des rationnels, de termes aussi nets, et exprimables en un seul mot du vocabulaire courant, pour désigner un ensemble de compétences, analyser la tâche et se donner des pistes d'enseignement ? Le fait qu'une opération aussi élémentaire que la "réduction au même dénominateur" mobilise quatre mots, dont deux se situent au minimum à la périphérie du langage courant, amène à penser que cette question mérite, à tout le moins, d'être posée.

Il importait donc de préciser des repères pour une analyse didactique de la notion de rationnel, d'énoncer un certain nombre de compétences¹ nécessaires à la maîtrise de ces nombres, de s'interroger sur les vitesses de maturation de ces compétences en liaison avec le type de tâches qu'elles permettent d'accomplir. Afin de réaliser ce programme, nous avons entrepris une expérience d'enseignement longue, point d'appui d'une recherche doctorante sur l'enseignement des nombres rationnels à l'école élémentaire (Adjage, 1999). Le présent article est destiné à une présentation plus distanciée – et donc plus compacte – des principaux résultats, méthodes et applications de cette recherche. Il s'organisera autour d'une investigation en amont, d'une tentative de dégager les fondements d'une méthodologie d'analyse des acquisitions sur une durée longue, d'une investigation en aval enfin, dont la publication des projets de programme 2000 pour l'école élémentaire nous ont fourni l'occasion.

L'investigation en amont peut-être vue comme la recherche d'une clarification des principes organisateurs de l'expérience dont la section 3 précise la méthode d'évaluation. Ces principes ne sont pas nécessairement objectivés avant le début de l'expérience, ni même en cours d'expérience ou dans les temps qui accompagnent et suivent sa conclusion et sa communication. Leur formulation se fait par approximations successives, gagnant en netteté sous la pression des interpellations externes et interrogations internes. Ce travail, en recomposition permanente, donne l'occasion d'accéder à des niveaux toujours supérieurs de l'organisation d'une démarche. C'est pourquoi nous avons choisi d'en faire le socle de cette publication, et d'en débattre dès la section suivante.

L'analyse de certaines données de nos observations et leurs conséquences théoriques – du reste liées aux principes organisateurs dont il vient d'être question –, mais aussi nombre de références aux résultats de la recherche en didactique de ces trente dernières années nous autorisent à porter un regard critique sur le projet de nouveaux programmes pour l'école élémentaire – tout du moins en ce qui concerne la partie relative aux apprentissages numériques au cycle 3. Ce commentaire s'appuiera notamment sur la variabilité du temps de maturation du fonctionnement rationnel. Certains processus à maturation rapide peuvent en effet produire des réussites spectaculaires mais risquent de borner une notion. On sait par exemple que, dans le cas des entiers, un apprentissage de la multiplication comme addition

¹ Nous avons pour notre part repéré et cité sept grandes compétences pour la maîtrise des rationnels : doubler l'information, scinder l'activité de formation d'un rationnel (par exemple numérateur vs dénominateur), discriminer intervalle / extrémités, localiser les désignations, mobiliser un repère entier ($[0 ; 1]$ par exemple) pour former un rationnel, plonger les entiers, produire des écritures équivalentes (Adjage, 1999, pp.205-209).

itérée retarde l'émancipation de cette opération et en limite l'acception. Le document étudié, qui semble mettre en avant des impératifs de productivité, se garde-t-il de ces effets en trompe-l'œil ? C'est ce que nous examinerons en section 4.

• **Un dispositif d'enseignement basé sur des principes de séparation et d'articulation**

Trois types de visées peuvent être à l'origine de l'activité mathématique :

v1. modéliser un problème de physique (ou d'économie ou de biologie...) afin de permettre des prédictions (ou des explications) "plus simples, plus économiques, plus précises que la pratique" (Brousseau, 1986, p. 106) lorsque les instruments de mesure directe sont inadéquats ou inopérants comme ce pantographe (G et N. Brousseau, 1987, p. 333-345) dont l'imprécision, ne permettant pas d'anticipations fiables, motive le développement, par les élèves, de la notion de rationnel-dilatation et du produit de dilatations ;

v2. modéliser une expérience sensible, bien qu'irréalisable, comme le retournement de la sphère ou, à un niveau plus élémentaire, comme l'encerclement de la Terre par un grand ruban qui se relâche de 10 cm assorti d'une prévision sur la taille de l'organisme susceptible de passer alors sous le ruban ainsi distendu (du virus au chat) ;

v3. interroger, généraliser... les mathématiques par et pour les mathématiques, comme dans le cas du grand théorème de Fermat ($x^n + y^n = z^n$) n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$) ou de la recherche, qui s'étale sur des siècles, de solutions, **exprimables par radicaux**, d'une équation de degré n .

Si l'on examine les deux exemples de la visée 3, on constate que c'est une forme d'expression des mathématiques qui est chaque fois à l'origine et à l'horizon du problème posé. L'invariant repérable, entre $x^2 + y^2 = z^2$ qui admet des solutions entières et $x^n + y^n = z^n$ qui n'en admet pas, est bien une certaine forme d'expression. Quant au deuxième exemple, il témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression, les radicaux, dont on pourrait sans doute montrer qu'il s'agit d'un registre au sens de Duval (1995, p. 21) ; il eût pourtant été envisageable – ce qu'a entrepris notamment Newton – de développer des méthodes d'analyse numérique pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équation.

En ce qui concerne les objets mathématiques introduits à l'école élémentaire, notamment les nombres rationnels, on est fortement tenté de motiver leur construction par la modélisation de problèmes physiques (visée 1), tant le matériel mathématique disponible à ce stade est rudimentaire et ne semble pas suffire à provoquer un questionnement interne. C'est

la voie actuellement suivie par la quasi totalité des didacticiens (Pitkethly et Hunting, 1996) et, notamment en France, par Guy et Nadine Brousseau (1987).

Ces derniers proposent, en introduction à la notion de rationnel-mesure, une situation de désignation et de comparaison d'épaisseurs de feuilles de papier (G et N. Brousseau, 1987, pp. 1-18) que les instruments usuels – double-décimètre, pied à coulisse... – sont incapables de prendre en charge faute de précision suffisante. L'ingéniosité didactique des auteurs réside dans le choix d'une épaisseur à mesurer suffisamment petite pour rendre son fractionnement et celui de l'unité de mesure disponible – le millimètre en l'occurrence – difficilement envisageables, orientant la recherche des élèves vers une opération de report ; par ailleurs, l'unité étant notablement supérieure à l'épaisseur à mesurer, le report de cette dernière dans la première est plus attractif que l'opération inverse ; enfin, les simplifications apportées par un résultat de mesure qui soit un nombre entier peuvent favoriser la poursuite de cette opération de report jusqu'à ce que le tas de feuilles constitué ait une épaisseur exprimable au moyen d'un nombre entier de millimètres. Ce choix décisif permet le développement non artificiel d'un modèle rationnel par commensuration (q feuilles du même tas ont une épaisseur de p mm), au lieu du modèle traditionnel par fractionnement de l'unité (l'épaisseur d'une feuille est : p $q^{\text{ièmes}}$ de mm). Le modèle par commensuration débouche sur la désignation des épaisseurs rationnelles au moyen de couples d'entiers ($q ; p$), la prise de conscience de l'existence d'écritures équivalentes, la nécessité d'adopter des référents communs (ibid, p. 21), préludes à la recherche de dénominateurs communs, lors de la comparaison et de la somme de deux épaisseurs. Ainsi, la validation, par les élèves, d'une conjecture comme $\frac{10}{50} + \frac{40}{100} = \frac{50}{150}$ (erronée en l'occurrence) pourra se référer à la situation physique d'introduction et à son traitement par commensuration : 50 feuilles du tas A ont une épaisseur de 10 mm ; 100 feuilles du tas B ont une épaisseur de 40 mm ; en collant une feuille du tas A à une feuille du tas B, on obtient une nouvelle feuille d'épaisseur $\frac{10}{50} + \frac{40}{100}$; on forme un tas C, suffisamment épais pour qu'on puisse en mesurer l'épaisseur, en assemblant plusieurs exemplaires de cette nouvelle feuille ; il est inutile de poursuivre l'expérience jusqu'à son terme pour comprendre qu'il est souhaitable de prendre autant de feuilles du tas A que du tas B – réduction au même dénominateur – afin de calculer une mesure de l'épaisseur du tas C, caractériser ainsi l'épaisseur d'une de ses feuilles et invalider le premier résultat conjecturé, soit $\frac{50}{150}$.

Nous avons pour notre part observé maintes fois ce type de séquences et avons été frappés par le constat contradictoire suivant :

L'habileté rhétorique avec laquelle nombre d'élèves traitent de ces problèmes rationnels ; la difficulté qu'ils éprouvent à décrire, interpréter, résoudre le même type de problèmes dès lors qu'ils sont amenés à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions. Certains même semblaient désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions, pourtant non négligeables – recherche de référents communs, encadrements entiers, comparaison à des proportions simples comme $1/2$ ou $1/3$... – de la phase rhétorique. Une rupture dans le mode d'expression des objets mathématiques peut donc se traduire par une rupture de compétence.

Afin de mieux comprendre la nature de ces difficultés, nous avons été amenés à bien séparer trois champs ou domaines d'activités associés à ce type de situation d'apprentissage et aux procédures de validation des démarches et des résultats :

- d1. l'expérience physique ;
- d2. le modèle mathématique sous-jacent
- d3. les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle.

Le domaine 3 n'est pas indépendant des deux premiers domaines dans la mesure où il est quasiment impensable de gérer ces derniers sans le recours à une forme d'expression minimale qui utilise au moins les mots de la langue naturelle. C'est la raison pour laquelle ce premier principe de séparation – en trois domaines – doit être immédiatement compensé par un second principe d'articulation sur lequel nous reviendrons plus loin.

Une fois cette séparation bien établie, nous avons été amenés à formuler trois types d'hypothèses sur la difficulté des transferts de la phase rhétorique à la phase fractionnaire :

- h1. le symbolisme des fractions n'est pas transparent, même si sa découverte est précédée d'un travail minutieux sur le sens des objets qu'ils désigne ;
- h2. (principe de séparation) une séparation insuffisante des trois domaines : domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique pouvant mobiliser la notion de rationnel accroît la difficulté de son appropriation ;
- h3. (principe d'articulation) une articulation insuffisante entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont des sources d'erreurs stables.

Remarquons tout d'abord qu'il est possible de donner une version positive des deux dernières hypothèses pour les transformer en hypothèses portant sur l'apprentissage :

hypothèse 2bis l'apprentissage des nombres rationnels passe par une identification claire des trois domaines susceptibles de les mobiliser ;

hypothèse 3bis des activités systématiques d'articulation entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont déterminantes pour l'apprentissage des nombres rationnels.

Nous avons avancé un argument général pour expliquer l'hypothèse 1 : les conversions entre le registre de la langue naturelle et celui des fractions sont non congruentes au sens de Duval (1995, pp. 47-59), le discours en langue naturelle étant essentiellement unidimensionnel – partition à une voix – alors que le discours fractionnaire est essentiellement bidimensionnel – partition à deux voix – (Adjage, 1999, pp. 133-135). Cette non congruence a été amplement confirmée par les données empiriques relevées (Adjage, 1999, pp. 364-365). Elle est accentuée par certaines formulations, notamment celles utilisant des propositions relatives, comme dans les phrases : "le nombre *dont* le produit par b vaut a ", "le nombre *qui* multiplié par b vaut a ". On notera que la procédure de validation proposée par G. et N. Brousseau et rappelée p. 3 est de cette nature. Bien qu'elle soit sans doute une activité à ranger dans la catégorie de celles décrites par l'hypothèse 3bis, il semble cependant nécessaire qu'elle soit l'objet d'une étude préalable (reposant par exemple sur les principes de séparation et d'articulation entre l'univers physique des feuilles et celui du modèle rationnel développé) afin qu'elle puisse exercer la fonction de contrôle et de relance attendue.

L'ensemble des considérations qui précèdent nous ont amenés à adopter un paradigme d'enseignement (Adjage, 1999, pp. 97-106 et 151-153) dont nous rappelons ici la trame :

Comme les premiers contresens sérieux, stables, difficilement remédiables, apparaissent en même temps que le recours à un système d'expression fractionnaire du modèle mathématique, nous avons décidé, en accord avec la visée 3 de l'activité mathématique (voir p. 2), de faire porter l'effort d'enseignement sur les différentes formes d'expression disponibles des rationnels et sur les problèmes que les passages d'une forme d'expression à l'autre soulèvent. D'une façon plus précise nous nous sommes fixé, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois objectifs principaux relatifs à l'acquisition des systèmes sémiotiques permettant de développer un modèle des nombres rationnels abouti :

- identifier, dans une notation symbolique, une désignation différente des mêmes objets convoqués au moyen de la langue naturelle ;
- identifier / différencier les spécificités de chaque système symbolique ;
- relier ces spécificités à des aspects différents des objets représentés.

Il restait à déterminer quels systèmes sémiotiques exprimant les nombres étaient les plus adéquats à la réalisation de ces objectifs. Si les systèmes fractionnaires et décimaux paraissent incontournables car ils sont un produit remarquablement adapté – une fois maîtrisé – de l'évolution des mathématiques, il convenait en revanche de s'interroger sur le choix du système servant à l'introduction de ces nouveaux nombres. Le cahier des charges (Adjage et Pluvinage, 2000, § 2.4 et 2.5) se devait de respecter les différentes visées, hypothèses ainsi que les principes évoquées plus haut.

1. Ce système devait permettre à la fois de séparer et d'articuler les trois domaines (domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique) afin d'exercer ses fonctions d'introduction et de validation ; cette exigence oriente vers un système géométrique.

2. Ce système devait avoir le statut de registre, donc être un véritable système d'expression, un concurrent aux systèmes fractionnaire et décimal, et pas un simple appendice illustrant ces derniers. Il ne pouvait en conséquence se réduire à un mode de représentation d'une double quantification (comme les classiques parts de tarte). Il devait exprimer des **nombres**, au moyen d'unités signifiantes ayant leurs équivalents dans les registres fractionnaire et décimal, afin que des articulations avec ces derniers soient envisageables.

3. Ce système devait se prêter à un vaste champ d'expériences, offrant aux utilisateurs l'occasion de formuler des hypothèses et de les valider.

4. Le support de ce système devait être familier aux élèves

5. Nous nous sommes enfin refusé à adopter un système éphémère, pour lui préférer un système dont l'utilité resterait incontestable bien au-delà de la phase d'apprentissage.

Ce cahier des charges en cinq points a orienté notre choix vers un système de droite graduée, muni d'une structure de registre ne mobilisant que des signes spécifiques (intervalles, tirets, nombres entiers...) et des opérations de report, de subdivision et de zoom. L'ensemble n'a été rendu possible, notamment pour vérifier le point 3 du cahier des charges ci-dessus, qu'en recourant à un environnement informatique et à un ensemble de logiciels spécialement développés à cet effet (Adjage et Heideier, 1998).

Notre idée de la conceptualisation, en tous cas dans le champ des rationnels, s'appuie donc sur :

- un primat sémiotique ;

- une mise en œuvre totale de l'activité mathématique (les trois visées) ;
- deux principes de séparation et d'articulation.

Nous remarquerons que ce dernier point, lorsqu'il s'applique aux registres sémiotiques convoqués pour effectuer traitements et conversions autorisant le développement d'un modèle mathématique, renvoie à la théorie des registres de Raymond Duval (1993) et à son modèle du fonctionnement cognitif de la pensée (1996). Dans l'approche que nous proposons ici, le registre des droites graduées occupe une position centrale du fait de sa nature ambivalente, permettant l'articulation d'un mode de fonctionnement sémiotique et d'un mode de fonctionnement physique. Un moment important du travail de conceptualisation sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans ce premier système de représentation par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système purement sémiotique (les écritures fractionnaires). Les interrogations sur les correspondances entre les formes d'expressions suivantes de trois quarts (comment s'inscrit le 3, le 4, la barre de fraction $\frac{3}{4}$ sur l'un ou l'autre des segments gradués ; quelles répercussions aura, sur l'expression au moyen du segment gradué, la variation d'un des constituants de la fraction ?) seront riches de significations.



Figure 1 : trois expressions concurrentes de trois quarts

De même que sera riche de sens la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces expressions interprète un problème comme : 4 feuilles de papier ont une épaisseur de 3 mm, quelle est l'épaisseur d'une feuille de papier ?

Pour terminer ce paragraphe précisons que, comme annoncé en introduction, la réduction à quelques principes unificateurs des fondements de notre démarche est le produit d'une investigation a posteriori. C'est ainsi que, d'une formulation primitive en termes quasi exclusifs de complexité sémiotique, d'appropriation et de coordination de registres, nous sommes remontés à la formulation actuelle plus générale, qui étend l'application du couple séparation / articulation à d'autres catégories que les seuls registres. Nous verrons du reste que

c'est sous l'éclairage de ce double terme que nous avons choisi d'analyser le projet de nouveaux programmes.

•Le dispositif d'enseignement et les modalités de sa validation

Nous abordons dans cette section certains aspects méthodologiques liés à la vérification de la pertinence des options retenues et de la conformité à ces choix des tâches proposées aux élèves. Notre démarche d'enseignement pouvant être circonscrite par quelques principes rappelés en section 2, il était prévisible d'en retrouver l'écho dans les points d'appui essentiels sur lesquels repose cette évaluation : apprécier la capacité des élèves à débrouiller / coordonner : des unités sémiotiques complexes, des registres hétérogènes comme ceux de la langue naturelle et des écritures fractionnaires, la diversité des procédures de résolution envisageables pour un exercice donné... Encore fallait-il donner un référentiel à cette évaluation, donc nous doter de repères d'apprentissage auxquels il serait possible de rapporter les évolutions. Nous verrons que cela nous a amené à mobiliser deux instruments d'évaluation, chacun envisageant les apprentissages à une échelle différente.

Nous penchant avant tout sur l'étude d'un dispositif d'évaluation, nous n'évoquerons que brièvement les modalités d'enseignement retenues ainsi que leurs conséquences sur l'apprentissage – dans la mesure où ces dernières contribuent à mieux comprendre certaines dispositions de la méthode d'évaluation.

•Le dispositif d'enseignement / apprentissage

L'essentiel de l'expérience d'enseignement concerne une classe² de l'école annexe (caractéristique non significative depuis la transformation des écoles normales en sites IUFM) de Sélestat (26 élèves à une ou deux variations près) suivie sur une partie des deux dernières années du cycle 3. Cette expérience ne porte que sur l'enseignement des nombres rationnels. Les tâches d'apprentissage proposées aux élèves sont de deux ordres :

- activités proposées par les logiciels de la série ORATIO (Adjage & Heideier, 1998), occupant approximativement trois quarts du temps d'apprentissage ;
- activités d'accompagnement papier / crayon.

Conformément aux principes de séparation et d'articulation, clairement énoncés par Raymond Duval (1995, pp. 75-80) dans le cas des registres, l'étude au moyen des logiciels sépare les activités de traitement dans chacun des trois registres retenus (droites graduées,

écritures fractionnaires, écritures décimales) avant de proposer des activités systématiques de conversions inter-registres³. La nature des tâches logicielles est essentiellement sémiotique. L'activité se développe suivant un processus de conquête, basé sur l'action des élèves et les rétroactions personnalisées de la machine. Il suppose une analyse, par l'utilisateur, du fonctionnement et des dysfonctionnements perçus du système, suivie de décisions à risque – elles ont un coût, quantifié par un score – pour aboutir, d'essais en erreurs parfois relayés par la mise au point de méthodes.

L'accompagnement papier / crayon est consacré à des commentaires de l'activité logicielle, suivis d'institutionnalisations éventuellement réinvesties dans l'élaboration de modèles requis par la résolution de problèmes physiques. Ce temps n'est que rarement utilisé à une quelconque préparation de l'activité logicielle, à l'exception des seules écritures fractionnaires qui ont nécessité une légère introduction de nature physique (Adjage, 1999, pp. 237-243).

•Le dispositif d'évaluation

•Quels instruments de validation ?

Les évaluations doivent permettre de recueillir deux types de données

- Un premier type, de nature globale, destiné à prendre de la distance par rapport au contexte et aux objectifs d'apprentissage, et donc à évaluer des comportements et des méthodes plutôt que d'apprécier des résultats obtenus au prix d'un entraînement intensif.

- Un deuxième type de données locales, destiné à évaluer plus spécifiquement des contenus d'apprentissage des nombres rationnels et à tester certaines hypothèses de recherche.

Nous avons choisi d'évaluer ces deux types de données dans un environnement papier / crayon. L'essentiel de l'apprentissage s'étant déroulé dans un environnement informatique, ce choix nous permettait d'apprécier la solidité des transferts d'un environnement vers l'autre. Ces transferts sont au moins de deux ordres.

- **Transfert d'*attitude*** : l'ordinateur, réduisant considérablement le coût des tâches répétitives et annulant les erreurs dues aux imprécisions des instruments liés à l'environnement papier / crayon, favorise l'*attitude* expérimentale, la formulation d'hypothèses

² Appelée par la suite classe expérimentale

³ La série ORATIO est elle-même organisée en deux ensembles de logiciels, les uns dits de traitement, les autres dits de conversion.

et leur mise à l'épreuve, ce qui suppose des prises d'initiatives et l'exploration de la diversité des procédures envisageables.

• **Transferts d'un domaine d'activité vers un autre :** une de nos hypothèses de recherche (Adjage, 1999, p. 27 et pp. 101-105) postulait que les problèmes posés par le fonctionnement et l'articulation des trois registres mobilisés pour l'expression des rationnels (domaine d'activité sémiotique dans un environnement informatique) fournissaient un paradigme de résolution de l'ensemble des énoncés rationnels, notamment donc des problèmes physiques (domaine physique dans un environnement papier / crayon éventuellement doublé d'un dispositif matériel de mesures).

• **Quelle dynamique ?**

En ce qui concerne l'évaluation globale, nous souhaitions observer l'évolution d'une comparaison :

- entre une population expérimentale et une population de référence d'une part ;
- entre le début et la fin du cycle 3 d'autre part.

En ce qui concerne l'évaluation locale, nous souhaitions :

• comparer trois instantanés de la classe expérimentale, le premier après une première passation sur l'ensemble de logiciels de traitement en fin de CM1, le deuxième après une reprise de ce même ensemble de logiciels lors du premier trimestre de CM2, le troisième enfin, trois mois après la fin des passations sur la série des logiciels de conversion (fin mai), soit à distance importante de la dernière passation logicielle ;

• établir certains repères concernant les réussites, les difficultés, les préférences des élèves dans un contexte d'apprentissage des rationnels standard, puis apprécier une évolution, par rapport aux repères ainsi établis, de notre classe expérimentale.

• **Les modalités de la prise d'information**

• **Cas des évaluations locales**

Le cahier des charges des évaluations locales conduit à choisir comme instrument de la prise d'information un questionnaire personnalisé, et donc élaboré par nos soins, puisqu'il doit permettre de mettre à l'épreuve : des hypothèses de recherche ; un contenu d'enseignement spécifique que nous précisons ci-dessous.

A l'issue de ces deux années, les élèves devaient avoir acquis les compétences nécessaires à :

1. l'expression d'un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales), la conversion, d'un de ces registres vers un autre, d'une de ses expressions ;
2. l'interprétation de données numériques d'un problème du niveau considéré au moyen d'un rationnel exprimé dans l'un des trois registres ;
3. la comparaison et l'encadrement de rationnels, l'intercalation d'un rationnel entre deux autres rationnels ;
4. l'identification de critères permettant de décider qu'un rationnel est entier ;
5. l'identification ou la conjecture de critères permettant de décider qu'il est décimal.

•Cas des évaluations globales

Le cahier des charges des évaluations globales se réfère à des notions de *comportement*, d'*attitude*, de *distance*, moins universellement définies que la notion d'objectif opérationnel. Un premier travail consiste donc à préciser ces notions et, si possible, à se doter d'un certain nombre de critères permettant d'effectuer des mesures. Se pose ensuite la question de savoir s'il est préférable de construire son propre outil d'évaluation ou d'utiliser un outil déjà existant.

La première option est plus lourde à mettre en œuvre ; elle demande notamment la constitution d'un groupe témoin à opposer au groupe expérimental. De plus, elle présente l'inconvénient d'être conçue par ceux-là mêmes qui en attendent un jugement impartial sur leur travail.

Nous avons donc opté pour la deuxième alternative et avons décidé d'utiliser les évaluations nationales de début de CE2 (Ministère de l'Éducation Nationale, 1995) et à l'entrée en 6^{ème} (Ministère de l'Éducation Nationale, 1997).

Examinons à présent les avantages de ces évaluations :

- situées en début d'année, elles ne visent pas à sanctionner un enseignement mais à pointer des savoirs acquis ou en acquisition et des difficultés par rapport à des apprentissages à conduire ;
- elles sont nationales, et requièrent donc la contribution de personnes de statut et d'origine géographique divers qui concourent à leur réalisation et assurent leur représentativité ;

- elles fonctionnent depuis une dizaine d'années, ce qui permet de suivre des modifications et des invariants, tant dans la nature que dans les résultats des exercices ;
- les résultats sont opposables à ceux d'un échantillon national (Ministère de l'Éducation Nationale ; 1996 et 1998) ;
- les résultats de début de cycle 3 (évaluation de CE2) sont opposables à ceux de la fin de cycle (évaluation à l'entrée en 6^{ème}) ;
- pour certains items, une ventilation des procédures adoptées par l'échantillon national est fournie, ce qui constitue une source d'informations permettant de préciser l'*attitude* des élèves face à ce type de problème.

Nous disposons ainsi d'un outil de mesure fiable, objectif, à *distance* raisonnable du contexte d'apprentissage. D'où le qualificatif de global que nous lui avons attribué, par opposition à l'aspect local des évaluations conçues par nos soins.

Cet outil présente néanmoins quelques défauts et limites par rapport à l'usage que nous souhaitons en faire :

- la DEP (Ministère de l'Éducation Nationale, 1996 et 1998) ne fournit pas ou peu de résultats croisés ou cumulés concernant l'échantillon national ;
- nous n'avons retrouvé dans les archives de l'école que des résultats par item et non par élève et par item, en ce qui concerne l'évaluation de début de CE2, ce qui ne nous a pas permis de procéder à des examens croisés ; cet inconvénient disparaît bien entendu pour l'évaluation à l'entrée en 6^{ème} que nous avons personnellement organisée ;
- le regroupement des exercices suit une logique liée aux contenus mathématiques définis par le programme ; il ne recoupe donc pas forcément les catégories que nous souhaitons observer.

En ce qui concerne les deux premiers points, nous constaterons que leur impact est heureusement limité, dans la mesure où les évolutions observées entre le début et la fin du cycle 3 sont suffisamment franches pour être significatives même en l'absence des détails manquants.

Le dernier point quant à lui demande à être précisé, puisqu'il nous a conduits à quelques réaménagements, non dans le contenu des items mais dans le nombre d'items retenus et leur regroupement. Nous avons décidé d'extraire des deux évaluations nationales concernées quatre séries d'items. Chacune de ces séries se rapporte à un type de compétences. Chaque type de compétences nous servira de critère de mesure de ce que nous avons désigné en

première approximation par le terme d'*attitude*. Il s'agira donc de comparer les résultats des échantillons expérimental et national, et, dans la mesure du possible, les procédures utilisées par l'une ou l'autre des populations lors de la résolution d'items :

1. présentant l'information de manière linéaire (à la manière d'une droite graduée) ;
2. ayant une présentation sémiotique complexe ;
3. offrant la possibilité d'une diversification des procédures de résolution ;
4. demandant un traitement non routinier.

Nous sommes conscients que ces catégories sont composites du point de vue cognitif, notamment la n° 4, mais ce risque de léger brouillage est le prix à payer pour éviter les risques d'une évaluation ad hoc. En tout état de cause, la mise en évidence, en début de CE2, d'une certaine homogénéité entre l'évaluation dans son ensemble et l'évaluation extraite nous a permis, a posteriori, de légitimer partiellement ce choix.

•Analyse de la tâche et de quelques résultats

Cette section aborde la question de l'interprétation des résultats, toujours fortement dépendante d'une analyse précise de la tâche requise par chacun des items. Le type d'analyses que nous proposons ici est conforme à nos principes de séparation / articulation et du primat sémiotique. Elles s'exprimeront donc en termes de sollicitation simultanée ou non de plusieurs registres, de congruence et de non congruence, de séquentialité et ruptures de séquentialité...

•Cas des évaluations globales

Le programme en quatre temps évoqué ci-dessous a été totalement réalisé et décrit par ailleurs dans le détail (Adjage, 1999, pp. 285-348). Nous n'aborderons ici que quelques exemples, notamment choisis afin d'illustrer la section 4.

Premier temps. Nous disposons d'un pointage relatif à l'ensemble des items en début de cycle 3 (CE2). Cette première série de données permet de procéder à un étalonnage initial de la classe expérimentale en regard de l'échantillon national.

Deuxième temps. Nous restreignons notre regard aux quatre séries d'items extraits, relatifs aux quatre types de compétences (voir 3.3.2). Cette analyse concerne les évaluations à l'entrée et la sortie du cycle 3 (CE2 et CM2). Elle permet d'apprécier d'éventuels mouvements importants à grande échelle.

Troisième temps Il consiste à considérer les résultats à l'échelle de la série d'items, donc d'un type donné de compétences.

Quatrième temps. On examine les résultats à l'échelle de l'item, afin de rendre compte d'éventuelles disparités locales. Ce dernier temps est l'occasion privilégiée d'une analyse détaillée de la tâche.

Exemple 1 : examen à grande échelle (CE2 vs CM2)

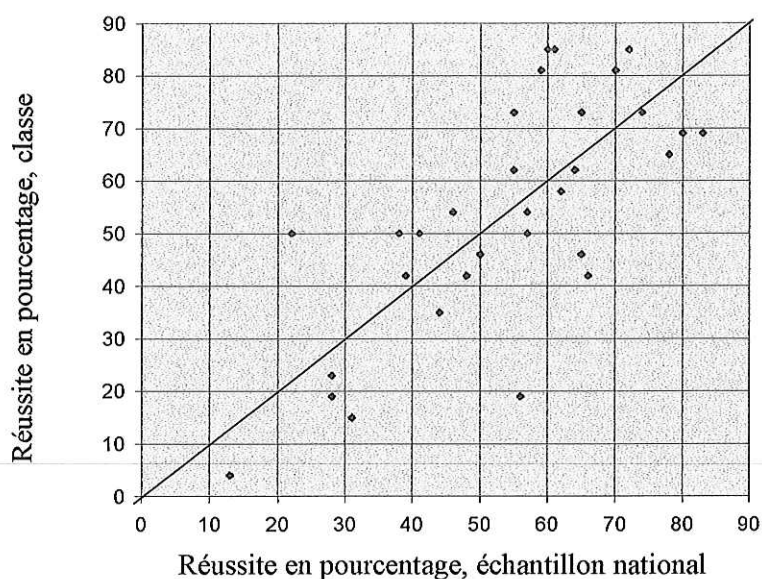
Population Réussite globale	Évaluation nationale CE2 tous items	Évaluation nationale CE2 items extraits (4 catégories)	Évaluation nationale 6 ^{ème} items extraits (4 catégories)
	64 items	32 items	29 items
Classe (%)	70	53	71
Echantillon nat. (%)	66 ($\sigma = 16,5$)	53,5	53

Tableau 1 : Résultats globaux

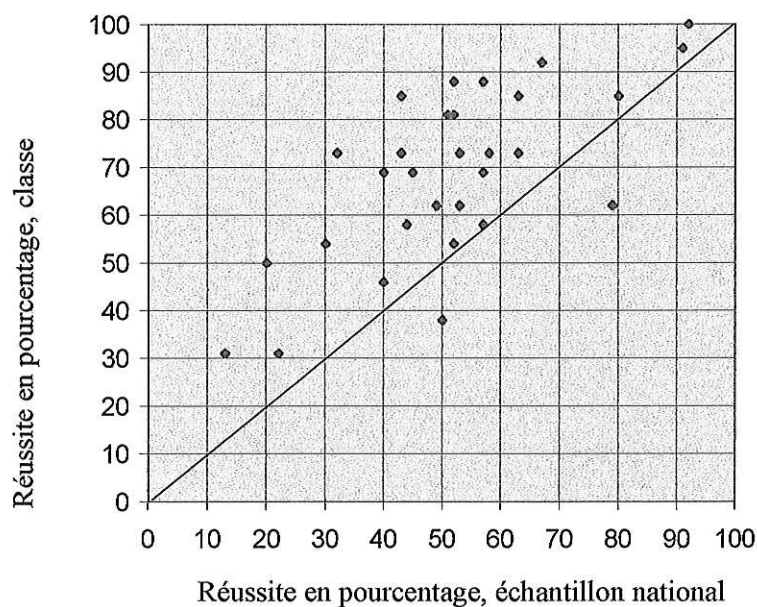
En début de cycle 3, la classe observée et l'échantillon national sont homogènes (écart non significatif au seuil de 5 %), relativement à l'évaluation nationale prise dans son ensemble. Cette homogénéité globale semble même s'améliorer lorsqu'on se restreint aux items extraits, ce qui justifie a posteriori le fait d'avoir conservé le même type d'évaluation réduite en CM2.

En fin de cycle 3, un décalage important apparaît entre la classe observée et l'échantillon national, relativement à l'ensemble des items de l'évaluation réduite.

L'examen des graphiques qui suivent confirme et amplifie les premiers constats puisque, d'une distribution régulière autour de la diagonale en CE2, on passe à une distribution fortement déséquilibrée en faveur de la classe expérimentale.



Graphique 1: chaque point représente chacun des items extraits du questionnaire national (CE2, 1995) évaluant les quatre types de compétences



Graphique 2 : chaque point représente chacun des items extraits du questionnaire national (6^{ème}, 1997) évaluant les quatre types de compétences

Exemple 2 : items de la catégorie "sémiotiquement complexe" (CE2)

N° des Items	2		5	
Tâche	Achever un tracé géométrique		Compléter par symétrie sur quadrillage	
Réussite globale (%)	Classe	Nat.	Classe	Nat.
	19	56	54	57

Tableau 2

N° des Items	10	
Tâche	Positionner sur un plan des objets présentés en perspective	
Erreur des arbres (%)	Classe	Nat.
	27	13

Tableau 3

L'item 2 (voir **annexe 1**) demande une prise en compte des unités signifiantes de la figure, à savoir les points stratégiques. Au-delà de l'écart important et significatif à l'avantage de l'échantillon, un pointage particulier nous apprend que 50 % des élèves de la classe expérimentale contre 31 % seulement à l'échelle nationale ont produit un tracé malhabile, tendant à reproduire des apparences plutôt qu'à prendre en compte les éléments d'information qui constituent le dessin en figure.

Ce constat est confirmé par l'examen de l'item 10, qui révèle que, lors de la transcription d'une vue en perspective (registre d'entrée) d'un quartier de ville en sa représentation sous forme de plan (registre de sortie), 27 % des élèves de la classe expérimentale contre 13 % (écart significatif) seulement pour l'échantillon national se sont laissé piéger par un effet de perspective (rangée d'arbres disposée suivant une oblique calquée sur celle du registre d'entrée alors qu'elle aurait dû être parallèle au bord de la feuille dans le registre de sortie).

En revanche, un exercice comme l'item 5, auquel les élèves ont été fortement entraînés depuis le cycle 1, est réussi de manière comparable à l'échantillon national.

Exemple 3 : item de la catégorie "diversification des procédures" (CE2)

N° des Items	59	
Tâche	« Mettez-vous par équipes de 3". Il y a 7 équipes complètes et 2 élèves restent seuls. Combien y a-t-il d'élèves ?	
Réussite globale (%)	Classe	Nat.
	35	44

Tableau 4 : le seul item (de la catégorie) moins bien réussi par la classe observée

L'item 59 est le seul de sa catégorie à être mieux réussi par l'échantillon national que par la classe expérimentale. C'est aussi le seul à présenter des éléments de non congruence sérieux : deux oppositions catégorisantes équipes / élèves d'une part, équipes / équipes complètes d'autre part qui déterminent le placement entre parenthèses ou pas des nombres associés ainsi que leur mise en relation par + ou – contre.× ; par ailleurs, le choix de + est antinomique au verbe qui le commande ("restent").

Mais tout autant que la réussite à cet item, est significative la manière de le réussir : le Tableau 5. témoigne d'un recours quasi exclusif à la procédure standard par les élèves de la classe expérimentale là où l'échantillon national se répartit de manière bien homogène sur les diverses procédures testées.

Choix des procédures Population	Uniquement additive : 3+3+...+2	(3×7)+2	Dessin	Autre procédure
Classe (%)	6	88	6	0
Nat. (%)	22	29	20	29

Tableau 5 : la manière de réussir l'item 59 pour les élèves ayant proposé une procédure

Examinons à présent quelques exemples extraits de l'évaluation de fin de cycle 3 qui permettront d'apprécier la légitimité de nos conclusions concernant les évolutions constatées. Pour la commodité des interprétations, nous considérerons trois seuils de réussite témoignant d'un niveau d'apprentissage : inférieur à 30 %, niveau "démarrage" ; au voisinage de 50 %, niveau "en cours d'acquisition" ; supérieur à 80 %, niveau "maîtrise".

Exemple 4 : items de la catégorie "organisation linéaire de l'information" (CM2)

10		11	
En utilisant un nombre de la liste suivante : 3,12 ; 3,092 ; 3,1 ; 3,0108 complète : 3 < ... < 3,09		Voici quatre nombres rangés du plus petit au plus grand. Écris 3,01 à la place qui convient. 1 2,01 3,005 3,021	
Classe	Nat.	Classe	Nat.
85	43	81	51

Tableau 6 : réussite comparée à deux items de rangement de décimaux

Ces items testent des compétences décisives relatives aux décimaux. La classe expérimentale, au niveau "maîtrise" dans ce domaine bien exploré lors des passations logicielles, s'écarte significativement (au seuil de 1/1000) de l'échantillon qui atteint

péniblement le niveau "acquisition". On notera la difficulté de l'exercice qui multiplie les trompe-l'œil, depuis la présence de nombres "sans virgule" (3 comme borne inférieure de l'encadrement de l'item 10), jusqu'à la nécessité de récuser 3,1 – bien tentant car sa partie décimale (1) est supérieure à la partie décimale implicitement nulle de la borne inférieure et inférieure à la partie décimale (09) de la borne supérieure – tout en élisant le 3,0108, malgré une partie décimale (0108) fortement supérieure au 1 de 3,1 ! La timidité de la réussite nationale atteste, si besoin en était, de cette complexité.

Examinons à présent un item de la catégorie, présenté au moyen d'un énoncé mélangeant le verbal et le schématique, et dont une transcription sur droite graduée rendrait la résolution immédiate.

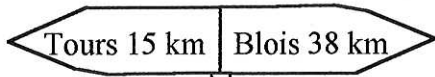
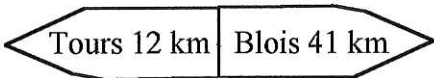
Questions Item 18 : De quelle ville Sébastien se rapproche-t-il ? Item 19 : Quelle distance sépare les deux panneaux ?	Sébastien sur son vélo voit un premier panneau :  Dix minutes plus tard, sur la même route, il voit un second panneau : 			
N° des Items	18		19	
Réussite globale (%)	Classe 100	Nat. 92	Classe 88	Nat. 52

Tableau 7 : conservation du niveau maîtrise aux deux items en ce qui concerne la classe de Sélestat ; passage au niveau inférieur à l'item 19 en ce qui concerne l'échantillon

L'item 18 est congruent à sa résolution, portée par un indicateur efficace de mise en relation, à savoir la répétition du mot Tours, accompagné d'une diminution des données chiffrées de 15 à 12, qu'il est aisé d'associer à un mouvement en direction de la ville et donc à un rapprochement de cette dernière. Il n'est en conséquence pas surprenant d'y trouver les deux populations au niveau "maîtrise". L'item 19, en revanche, présente une redondance de données et une question non standard portant sur la distance séparant deux panneaux (et pas deux villes). Ces éléments de non congruence le rendent plus déroutant et c'est sans étonnement que l'on constate un recul dans la réussite des deux populations. Mais on note que

ce recul laisse la classe expérimentale au niveau "maîtrise", alors que l'échantillon national régresse d'un cran au niveau "acquisition".

Exemple 5 : item de la catégorie "diversification des procédures" (CM2)

N° des Items	43	
Tâche	On donne, dessinés, une règle graduée en cm de 0 à 8 ; une règle graduée en pouces de 0 à 4 ; un segment [AB] dont la longueur, non fournie, vaut environ 15,2 cm. On demande de compléter la phrase suivante : "la longueur en pouces du segment [AB] est environ de..." en choisissant sa réponse dans la liste des cinq nombres : 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 15	
Réussite globale (%)	Classe 73	Nat. 43

Tableau 8 : un item très significatif pour l'ensemble des compétences étudiées

Rangé dans la catégorie "diversification des procédures" en raison d'une analyse détaillée, fournie par la DEP (Ministère de l'Éducation Nationale, 1998), sur la ventilation du choix des procédures, cet item pourrait se ranger dans n'importe laquelle des quatre catégories retenues : sa présentation sémiotique est complexe, il offre de multiples possibilités de résolution indépendantes, il est non standard, il demande des conversions entre trois registres linéaires (règle en pouces, règle en cm, segment [AB]).

Un survol de l'analyse de la tâche permet de comprendre que des procédures numériques ou non numériques sont envisageables :

- mesure en cm de [AB], mesure en cm d'un pouce, suivies d'une conversion en pouces au moyen d'une division, approchée ou exacte, formelle ou sous forme d'une multiplication à trou ou même d'additions répétées ;
- report, au moyen du compas, ou suite à une mesure en cm, de l'unité pouce ;
- report, au moyen du compas, ou suite à une mesure en cm, ou encore mentalement de la règle entière de 4 pouces suivi d'une évaluation du reste ;

ces diverses procédures pouvant éventuellement se combiner. Il est par ailleurs possible de rechercher : soit directement la valeur exacte, soit indirectement en appréciant la plausibilité des 5 valeurs fournies par l'énoncé et en procédant par élimination.

Examinons à présent la manière de réussir cet item ou d'y échouer, car les renseignements ainsi obtenus sont précieux pour notre recherche de marqueurs d'évolution d'attitude.

Choix des procédures	Report direct de la règle de 4 pouces avec procédures type : "4 trop petit, 8 trop grand" ou encore : "[AB] mesure 1 règle et encore une demi-règle, donc 6 pouces"	Report direct (au compas par exemple) de l'unité pouce ou mesure directe au moyen d'une règle graduée en pouces	Report géométrique (compas par exemple) de l'unité pouce vue comme mesurant environ 2,5 cm	Mesure de [AB] en cm suivie d'une conversion en pouces obtenues au moyen d'un calcul exact ou approché (par exemple : 15 : 2,5)
Classe (%)	16	21	31,5	31,5
Nat. (%)	19	22	36	23

Tableau 9 : procédures de résolution de l'item 43 parmi les élèves qui l'ont réussi (à comparer avec le Tableau 5)

Population \ Procédure	Procédures justes	Mesure en cm de [AB] (15 cm)	Autres procédures fausses	Absence de procédure
Classe (%)	73	8	19	0
National (%)	43	28	24	5

Tableau 10 : détails de la répartition de l'échec à l'item 43

Au-delà de l'écart important et significatif (au seuil de 0,2 %) de la réussite entre les deux populations, l'examen des Tableau 9 et Tableau 10 dénote un comportement de la classe expérimentale radicalement opposé à celui constaté en début de cycle (voir Tableau 5) : que l'on réussisse ou que l'on échoue, on ne renonce plus (0 % d'absence de procédure) ; on tente la résolution au moyen de procédures privées, empiriques ou plus systématiques, en tous cas pas nécessairement labellisées sans risque. On appréciera enfin l'homogénéité dans la ventilation des procédures, associée à une forte diversification de ces dernières, alors que l'étude de début de cycle relevait une tendance à l'exclusivité dans ce domaine.

Conclusions de l'analyse des évaluations globales

A partir des quelques exemples ici rapportés, on peut appréhender le type d'analyse qui, appliqué à l'ensemble des items des quatre catégories, nous a permis de préciser la nature de l'évolution d'attitude de la classe observée :

En début de cycle 3, cette dernière est une classe banale, globalement conforme à l'échantillon national, mais qui s'en détache par une réussite supérieure en ce qui concerne les automatismes, et par une réussite inférieure dès qu'il s'agit de traiter des items plus atypiques, pour lesquels une solution toute faite n'existe pas.

Dit rapidement, cette classe ne prend alors pas le risque d'innover, de se diversifier, mais se contente de gérer un patrimoine de connaissances bien réglées, et d'identifier certaines situations qui en relèvent.

Comment cette classe pusillanime, normalisée en début de cycle, allait-elle réagir à un enseignement sollicitant plus des initiatives privées que la restitution de routines ?

De véritables progrès ont été enregistrés dans tous les domaines testés. Nous parlons de progrès, et pas seulement d'évolution, car les deux derniers au moins des quatre types de compétences qui nous ont servi de repères dans cette estimation sont très universellement reliés à la réussite en mathématiques – et sans doute à la réussite tout court. Résumons en quatre points les qualités attachées à l'ensemble des compétences ainsi établies :

1. prendre le risque d'innover, ce qui suppose à la fois une bonne maîtrise des schémas tactiques et stratégiques éprouvés, et à la fois la capacité à s'en dégager lorsque cela est nécessaire ;
2. diversifier ses procédures de résolution, notamment en sachant rompre avec un schéma de preuve progressant linéairement des prémisses à la conclusion, et en lui substituant parfois un autre schéma s'organisant dialectiquement autour de l'émission d'hypothèses et de leur preuve ou de leur réfutation ;
3. débrouiller puis coordonner les unités sémiotiques requises pour appréhender un problème mathématique complexe et mener à son terme une procédure permettant sa résolution ;
4. interpréter, exprimer et résoudre les problèmes numériques qui s'y prêtent – formation des rationnels, encadrements, intercalations... –, mais aussi toute autre situation relevant d'un système muni d'une relation d'ordre total, dans un environnement unidimensionnel.

L'opérationnalité constatée des deux derniers points valide des hypothèses centrales de notre recherche postulant qu'ils sont tout aussi décisifs que les deux premiers : le numéro 3, en qui concerne les mathématiques en général, et le numéro 4 en ce qui concerne plus précisément l'enseignement des rationnels.

•Cas des évaluations locales

Nous nous contenterons d'évoquer ici un résultat important – dans la mesure où il aura permis de faire évoluer une de nos hypothèses de travail et d'ouvrir des perspectives de recherche – des évaluations locales analysées dans le détail par ailleurs (Adjage, 1999, pp. 193-204 et pp. 348-369).

Deux questions essentielles se devaient d'être posées à la fin de notre expérience : où en étaient nos élèves vis à vis du cloisonnement, pointé comme un des moteurs de notre recherche (p. 4), entre la langue naturelle et le registre des écritures fractionnaires ? D'une façon plus générale, comment se situaient-ils vis à vis d'une culture multi-registres ? Ces questions, très spécifiques, ne pouvaient trouver de réponses que par le biais d'une investigation personnalisée. Nous avons donc extrait de nos évaluations locales des items de rangement de fractions, 98-Q07 et 98-Q08, que nous avons successivement croisés avec un exercice de comparaison de grandeurs rationnelles (98-Reg06) traitable par le seul recours à la langue naturelle (voir Tableau 11 et Tableau 12) :

98-Q07 Ranger du p. petit au p. grand $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$ 98-Reg06 ⁴	Réussite	Echec	Total
Réussite	5	4	9
Echec	12	5	17
Total	17	9	26

Tableau 11 : cloisonnement de la langue naturelle et du registre fractionnaire

⁴ On considère deux tas, A et B, de feuilles de papier : 8 feuilles du tas A ont une épaisseur de 3 mm, 19 feuilles du tas B ont une épaisseur de 6 mm.

Entoure la bonne réponse :

1. Les feuilles de A et de B ont la même épaisseur
2. Les feuilles de A sont plus épaisses que celles de B
3. Les feuilles de B sont plus épaisses que celles de A

Le Tableau 11 est surprenant. Loin de manifester une implication entre la réussite au problème et la réussite au rangement des fractions (si je réussis le problème, c'est qu'au moins je suis capable de ranger des fractions !), il illustre presque une situation d'indépendance ($\chi^2 = 0,59 < 3,84$), confirmée par un examen plus détaillé des résultats : pour les marges obtenues, le tableau théorique estimé sous l'hypothèse d'indépendance comporterait la valeur 6 (car $\frac{9}{26} \cdot 17 \approx 5,88$) dans la case de la double réussite où la valeur observée est 5 ; ce qui semble même indiquer une situation légèrement détériorée, comme si le fait de réussir le problème pouvait constituer un léger handicap pour la réussite au rangement des fractions !

98-Q08 Ranger du p. petit au p. grand $\frac{4}{8}, \frac{7}{6}, \frac{4}{5}$ 98-Reg064	Réussite	Echec	Total
Réussite	5	4	9
Echec	4	13	17
Total	9	17	26

Tableau 12 : coordination de la langue naturelle et du registre fractionnaire

Que se passe-t-il lorsqu'on élève le niveau de complexité du rangement des fractions (Tableau 12) ? Il n'est toujours pas possible de rejeter l'hypothèse d'indépendance ($\chi^2 = 2,7 < 3,84$) mais on s'en rapproche.

Examinons donc cette répartition case par case.

Les 5 et 4 élèves de la première ligne du Tableau 12 sont les mêmes que ceux du Tableau 11. Ces derniers sont donc insensibles au surcroît de complexité du rangement des fractions, alors que parmi ceux qui échouent au problème, ce rangement plus complexe renverse la distribution des échecs (12 vs 5 contre 4 vs 17), ce confirme que le rangement du Tableau 12 est effectivement plus complexe que celui du Tableau 11.

Il nous reste l'examen direct des copies d'élèves pour interpréter la stabilité de la première ligne du tableau.

1. Élèves associés à la double réussite

Ces derniers accompagnent la résolution de 98-Reg06 de commentaires mentionnant explicitement deux phases : doublage des données ; application de la règle "plus grand le diviseur, plus petit le résultat". Ces élèves semblent être entrés dans une culture multi-registres, et disposent des moyens d'exercer des contrôles sur un registre à partir d'un autre

registre. Sans doute exercent-ils ce contrôle au moyen de la langue naturelle éventuellement assortie de considérations se référant à une droite graduée (puisqu'ils ne disposent pas de traitement fractionnaire, comme la réduction au même dénominateur, pour mener à bien leur tâche de comparaison).

2. **Élèves ayant réussi le problème mais ayant échoué au rangement**

Parmi les quatre élèves qui réussissent le problème mais échouent au rangement, on constate que :

- leur résolution de 98-Reg06 est moins structurés mais les commentaires, réduits à l'énoncé de la seule règle "plus grand le diviseur, plus petit le résultat", sont néanmoins présents ;
- leur rangement des fractions se fait suivant les dénominateurs croissants dans le cas du numérateur 1. En revanche, certaines réponses au rangement plus difficile ($\frac{4}{5}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{7}{6}$) pourraient témoigner d'une appréhension de proportions simples (quatre huitièmes est égal un demi ou sept sixièmes supérieur à 1, en cohérence avec un traitement en langue naturelle ou en référence à un positionnement sur droite graduée).

Ces élèves témoignent donc de certaines potentialités dans l'accès à une culture multi-registres, mais n'en sont encore qu'aux premiers balbutiements. Ils indiquent peut-être des voies de passage vers cet accès à une culture multi-registres : repérage de proportions privilégiées facilitant les prises de conscience et fournissant des repères (type de tâche abordé par les logiciels ORATIO), contrôle des calculs au moyen de la langue naturelle.

3. **Autres élèves**

Ce tableau ne permet pas de conclure qu'ils sont entrés dans une culture multi-registre. Mais il ne l'exclut pas non plus. D'autres résultats – à l'évaluation nationale ou issus d'observations directes – permettent cependant de conjecturer que tous ces élèves ont identifié l'existence et l'efficacité de plusieurs registres pour exprimer les rationnels.

Dans tous les cas, il importe de constater la difficulté à décroisonner la langue naturelle et les autres registres. Et lorsque l'on connaît la prédominance de la langue naturelle dans l'expression, on peut comprendre la nature des difficultés d'apprentissage d'un registre qui lui est fortement hétérogène, comme celui des fractions. C'est la raison pour laquelle nous avons été amené à reformuler une de nos hypothèse en y introduisant une référence explicite à la langue naturelle :

Hypothèse reformulée

Des activités systématiques de coordination entre les trois registres symboliques d'une part, et entre ces derniers et la langue naturelle d'autre part, permettent d'exercer un contrôle efficace sur l'usage des fractions et des décimaux.

•Vers une méthodologie ?

S'il nous est permis d'esquisser, à partir de cette expérience, une méthode d'évaluation des acquisitions d'une classe suivie sur tout un cycle, nous dirons qu'elle repose sur un examen des compétences situé à grande et à petite distance du contexte d'apprentissage. Le premier s'appuie sur des évaluations nationales, qu'il s'agit d'adapter en réorganisant la répartition des items selon un cahier des charges lié à des objectifs méthodologiques. Le deuxième s'appuie sur des questionnaires originaux, plus spécialement destinés à évaluer un contenu d'enseignement et des hypothèses de recherche. Le recours aux évaluations nationales permet en particulier un étalonnage, par rapport à un échantillon représentatif, de la classe observée et de ses évolutions. Notons enfin que la théorie des registres de Raymond Duval s'est révélée être un outil remarquablement efficace dans l'analyse de la tâche impliquée par les items des évaluations nationales, permettant notamment d'expliquer les écarts de performance entre les deux populations.

•Quelques confusions / désarticulations du projet de nouveaux programmes (cycle 3, partie numérique) Classe, prêche, sous-culture et tradition

Le premier trimestre de l'année scolaire 1999-2000 a vu la publication au BO (1999, pp.1-83)⁵ d'un projet de nouveaux programmes des cycles 2 et 3 de l'école élémentaire. Ce document vise à un recentrage des priorités d'enseignement et se donne en conséquence pour ambition de définir "explicitement les fondamentaux des programmes" (p. 4, §1) : "[ces documents] articulent les savoirs et savoir-faire visés autour de quelques objectifs clés d'où l'ensemble des notions enseignées tire **sens et continuité**" (ibid). Le français et les mathématiques, réaffirmées en tant que "disciplines instrumentales" (p. 4, §2), "nécessitent [...] l'apprentissage **systématique** de **savoir-faire** [...]" (ibid) – *c'est nous qui soulignons*. Il

⁵ Dans toute cette section, les références qui ne renverront qu'à un numéro de page ou de paragraphe se rapportent à ce document.

importait de mettre à l'épreuve de ces intentions de sens, de continuité⁶, de caractère systématique – encore que l'association savoir-faire / systématique puisse paraître contradictoire dans les termes, sauf à entendre répétition d'habitudes dans systématique, ce qui rend alors l'intention lourde de conséquences –, les contenus d'enseignement proposés par ce texte. Nous nous sommes pour notre part penchés sur la partie numérique du cycle 3, pour laquelle nous disposons d'observations, on l'a vu, récentes, détaillées et rapportées à un échantillon national.

• Survol de l'ensemble du texte

Une lecture d'ensemble des pages concernées (pp. 18-22) ne débouche pas sur une identification claire des raisons – scientifiques, de "bon sens" ? – qui fondent les prescriptions, car l'intrication de différents points de vue et niveaux d'analyse rabat les arguments les uns sur les autres. Ainsi, dès le paragraphe introductif, *Objectifs et recommandations* (p. 18), les premiers objectifs sont listés, alors que les suivants (division et proportionnalité), hors liste, sont justifiés avant même que de chercher à les énoncer, et le point de vue passe sans transition de l'apprenant à l'enseignant (*Le maître insiste sur...*). La dernière partie de ce paragraphe reprend la liste interrompue, en complétant certains objectifs cognitifs (*mettre en relation les décimaux, les fractions, les pourcentages*), et en y mêlant des objectifs méthodologiques (*poursuivre l'apprentissage du raisonnement et de son expression...*). Enfin, l'usage de certains termes impropres (*la surface* au lieu de *l'aire du rectangle*), ainsi que des effets d'annonce (*l'acquisition des nombres décimaux* en tête de paragraphe alors que les fractions ne sont citées qu'à la fin), flattent certes les certitudes reçues mais ignorent les travaux de la recherche en didactique qui, concernant l'enseignement de rationnels, convergent vers une introduction par les fractions avant les décimaux (Brousseau, 1981, pp. 38-128 ; Douady et Perrin-Glorian, 1986 ; Adjage, 1999, p.236...). La suite confirme ces premiers manquements à la rigueur sur au moins deux plans.

Sur le plan de la structure

Un même niveau de titre pour annoncer des notions non indépendantes (*Nombres naturels, Nombres décimaux*) et des mouvements de la pensée (*Identification des situations de proportionnalité*).

⁶ Idée qui, appliquée au sens, ne peut qu'être approximative et se doit en conséquence d'être précisée puisque tout enchaînement logique est marqué d'une certaine discontinuité.

Des enchevêtrements de notions plus ou moins apparentées (sans que ce lien de parenté soit le garant de leur cohésion) : fractions (p. 20) dans le paragraphe consacré aux entiers naturels (!) ; pourcentages, décimaux, division, reliés par des analogies de surface dont certaines peuvent être trompeuses (bas de la p.21) ; situations-problèmes et problèmes d'application (p. 20).

Des éclatements sans justification ou dont la seule justification semble être le souci de simplifier : fractions déconnectées du paragraphe sur les décimaux ; pourcentages – et échelles – explicitement exclues (p. 22) de la proportionnalité, abordés p.20 avec les problèmes puis repris p. 21 ; la rubrique *Problèmes*, sous-paragraphe des notions de *Nombres naturels* (p 19) et *Nombres décimaux* (p. 20), mais paragraphe à part entière dans le cas de la proportionnalité (p. 21).

Sur le plan du discours

Des recommandations, des commentaires, des exemples, entremêlés à l'énoncé de notions (division p. 20) ; l'alternance d'un discours de spécialiste (*les situations de proportionnalité sont les seules situations pour lesquelles un seul couple de données [...] détermine toute l'information*, p. 21) et d'un discours de "bon sens" éducatif (passage sur la règle de trois vs la linéarité p. 21).

Nos principes de séparation et d'articulation sont ainsi d'entrée de jeu mis à rude épreuve, tout autant que les intentions annoncées de sens (le "bon" sens ?), de continuité (malgré enchevêtrements et éclatements ?), de clarification de fondamentaux (abusivement identifiés aux certitudes qui fondent "le bon sens" ?).

Après cette première analyse globale, nous allons examiner certains passages de ce projet de programme dans le détail. Nous avons retenu trois thèmes d'étude, non nécessairement séparés et / ou articulés par le texte étudié : fractions et décimaux ; la division ; proportionnalité, pourcentages et échelles. Ces trois thèmes sont à la fois séparables : les fractions sont des écritures de nombres, la division est une opération portant sur deux nombres, la proportionnalité est l'étude d'un lien fonctionnel particulier entre deux séries de nombres ; et articulables soit par le biais des problèmes physiques qu'ils peuvent modéliser, soit – sans exclusivité – par un questionnement interne aux mathématiques : extension de la notion de division dans l'ensemble des entiers ; constat que le quotient d'un entier par un entier n'est pas forcément un entier et donc nécessité de recourir aux rationnels et à leur écriture fractionnaire ou décimale ; application du lien ainsi établi entre deux entiers à d'autres entiers, engendrant deux séries de nombres proportionnelles ; possibilité d'envisager

enfin que ces nouveaux nombres opèrent récursivement sur eux-mêmes, permettant une extension des notions de division et de proportionnalité à des arguments non entiers. Examinons donc la capacité de ce texte à rendre compte de ces différents niveaux de séparations et du réseau d'articulations qui relie les notions abordées.

•Fractions et décimaux

Rappelons en les résumant les choix didactiques que notre étude a mis à l'épreuve : dans la manière d'exprimer un rapport, il importe de valoriser davantage la nature du lien entre les deux termes de ce rapport que les deux termes eux-mêmes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi un questionnement interne aux mathématiques plutôt qu'externe (physique par exemple) comme moteur de l'apprentissage initial, un système géométrique plutôt que numérique pour introduire les rationnels, les droites graduées plutôt que les parts de tarte pour servir de support à ce système géométrique. Dans le même temps, les nouveaux nombres ainsi introduits révèlent leur capacité à modéliser et résoudre une certaine classe de problèmes physiques. Enfin, l'étude des systèmes fractionnaires puis décimaux amène plus de convivialité pour certains traitements (comparaison, somme...) tout en étant légitimés, contrôlés et validés par leur articulation mutuelle et avec le système des droites graduées.

Le projet de nouveau programme aborde la notion de fraction comme décrivant un tout unitaire découpé en parties égales dont on retient un certain nombre (3 parts de tarte sur un total de 4, p. 20). Il prend ainsi le risque, non seulement de ne pas lever les ambiguïtés liées à l'apprentissage des rationnels, mais encore de les pérenniser : un **couple** d'entiers (ce qui doit être la raison du rattachement de la notion au paragraphe concernant les entiers naturels), exprimant une **double** quantification au lieu d'un nombre, exprimant **une** grandeur relative.

Rappelons quelques résultats issus de nos observations (Adjage, 1999, p.198)

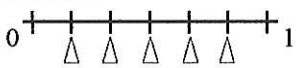
Question \ Classe	CM1 Weyersheim	CM2 Sélestat
Item 1 : Quelle fraction est grisée ?	83%	92%
Item 2 : 	28%	52%

Tableau 13 : réussite comparée à deux items, l'un portant sur les parts de tarte, l'autre sur les droites graduées

Une année d'enseignement sépare les deux classes testées lors de la passation du questionnaire. Si ce différentiel d'enseignement se retrouve bien dans l'écart des réussites à l'item portant sur les droites graduées, il ne semble avoir qu'une influence négligeable sur l'item "parts de tarte" : les élèves atteignent très vite une bonne maîtrise de ce moyen d'expression. C'est sans doute ce qui fait son succès, tant auprès des élèves que des enseignants. Mais cette rentabilité rapide en termes d'apprentissage débouche-t-elle sur une meilleure maîtrise des concepts et problèmes de base ? C'est ce que nous avons testé (Adjage, 1999, p.204) au moyen du tableau suivant, qui croise la réussite globale à un questionnaire en 6 items⁷ avec le choix du système géométrique, spontanément retenu (g pour droite graduée, t

pour parts de tarte) par les élèves, pour représenter $\frac{7}{4}$.

Réussite globale \	≥ 83%	< 83%	Total
g	7	1	8
t	5	13	18
Total	12	14	26

Tableau 14 : lien entre réussite globale et choix du système géométrique de représentation

Nous avons conclu de cette étude que "les parts de tarte", plus machine à fabriquer de l'évidence qu'outil efficace de gestion de la complexité, pouvaient même faire écran à la reconnaissance de cette complexité, confirmant ce que d'autres auteurs avaient déjà pointé : "This approach has proved not to work for a great many children, if not for all" (Streefland, 1993, p. 114). L'appropriation du système des droites graduées est en revanche d'un coût élevé, mais cet investissement est rentable en termes de reconnaissance et de gestion de la complexité.

Limiter l'introduction des fractions à des considérations sur des parts de tarte revient donc à programmer un défaut d'enseignement. C'est pourtant le choix revendiqué par les auteurs du texte étudié, avec d'autant plus de constance que les recommandations qui suivent en amplifient la portée : *Les fractions que l'on compare sont données d'emblée au même dénominateur [...] on se limitera aux fractions inférieures ou égales à 1*, occultant un peu plus

⁷ Quatre de ces items portaient sur des questions de conversion d'un nombre rationnel, entre un système géométrique et le système fractionnaire, deux autres sur des problèmes non triviaux de gestion de proportions (Adjage, 1999, p.223).

⁸ "Fais le dessin que tu veux pour représenter $\frac{7}{4}$ ".

nature relative d'une fraction (un numérateur **par rapport** à un dénominateur, une position par rapport aux entiers, tous les entiers, et pas seulement 1).

Rappelons ce qu'écrivaient Guy et Nadine Brousseau (1987, p. 22) à propos de la stratégie d'évitement des fractions de dénominateurs différents pour l'enseignement initial : "[Les enfants non capables de concevoir d'emblée le cas général] sont détournés des questions pertinentes (pourquoi les dénominateurs ne s'additionnent pas ? [lorsqu'on additionne deux fractions]) et des efforts nécessaires de conception et de vérification par l'apparente facilité de l'action [la seule addition des numérateurs lorsque le dénominateur est le même]". Ces auteurs ajoutent plus loin que certains enfants ne parviendront jamais à remettre en cause les conceptions initiales erronées ainsi installées. Loin de favoriser les plus faibles au nom desquels elle est en général justifiée, cette dérobade devant la rigueur risque donc de les pénaliser.

Nous avons pu, pour notre part, constater la diversité des heuristiques mobilisées par les élèves observés pour comparer des fractions supérieures ou inférieures à 1, et de dénominateurs pas forcément égaux : par exemple en les séparant par un entier, comme dans

le cas de $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{5}$, ou encore en les comparant à une fraction simple comme $\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{5}$ c'est un

demi [$\frac{2,5}{5}$] plus un "demi-cinquième", $\frac{4}{7}$ c'est un demi [$\frac{3,5}{7}$] plus un "demi-septième", et

comme [à numérateur constant] les cinquièmes sont supérieurs aux septièmes : $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$). Ces heuristiques témoignent remarquablement d'une prise en compte non séparée des deux termes d'une fraction, mais bien du rapport de l'un à l'autre.

A l'inverse, 61 % des élèves de la classe de CM1 de Weyersheim (Adjage, 1999, p. 205) ayant eu un enseignement classique [non basé sur les logiciels de la série ORATIO] mais

soigné des fractions, proposent l'un ou l'autre des dessins suivants pour représenter $\frac{7}{4}$ (lors

d'une activité antérieure, un petit carreau avait effectivement représenté $\frac{1}{4}$) :



$\frac{7}{4}$
Figure 2 : une vision non relative de $\frac{7}{4}$

confirmant ce que nombre d'auteurs ont relevé (voir notamment Figueras et alii, 1987) sur la prédominance de la cardinalité du numérateur (ou du dénominateur) sur l'expression d'une proportion de l'un à l'autre. Remarquons cependant que, concernant ces élèves en tous cas, la distance à la réussite est minime : il ne manque que l'indication, soit de l'unité, soit de tout autre référence numérique pour que leur représentation soit correcte. Il serait donc regrettable de ne pas achever cet enseignement, sous prétexte que les programmes n'y invitent pas, alors que le succès est à portée d'une intervention minimale, et que cette dernière aurait des conséquences majeures sur la conception de la notion de fraction.

Ce n'est pas en identifiant une notion à son aspect le plus simpliste (3 parts parmi 4) puis en en donnant à voir une illustration ("tu vois, $\frac{3}{4}$ c'est ça") qu'on privilégie l'identification puis la maîtrise, par les élèves, de fondamentaux. Ce qui nous semble fondamental, c'est de se doter d'un outil d'enseignement qui suscite un questionnement, interne et / ou externe aux mathématiques, destiné à rendre compte des aspects les plus simples comme les plus complexes de la notion étudiée. Explorer le potentiel de cet outil devient alors l'occasion de l'apprentissage. Il convient enfin, pour annoncer les articulations nécessaires, de bien discerner les trois plans (plan sémiotique, plan physique, plan du modèle mathématique) pouvant interagir lors de l'exploration de cet outil. Nous avons, pour notre part, proposé et expérimenté un tel outil, dont un composant essentiel est un registre de droites graduées, développé dans un environnement informatique (Adjage & Heideier, 1998).

Le projet d'instructions officielles sur l'enseignement des fractions amène du brouillage là où un effort de clarification est devenu nécessaire, notamment en ce qui concerne les trois plans évoqués ci-dessus. Rabattre ces plans les uns sur les autres, c'est courir le risque d'une identification des mathématiques plus à un code, destiné à l'enregistrement passif d'une réalité physique sans mystère, qu'à un système capable de poser et de résoudre soit ses propres problèmes, soit des problèmes venus d'ailleurs.

•La division

Les parties concernant la division euclidienne (pp. 19 et 20) puis la division décimale⁹ (sic) de deux entiers (p. 20) prennent acte de *l'existence de calculettes qui obligent* (c'est nous qui surlignons) *à reconsidérer globalement l'apprentissage* [de cette opération] (p. 19). Il nous semble en effet souhaitable de développer une culture du calcul au moyen des calculatrices puisque ces dernières permettent, au-delà de la production rapide de résultats, le traitement d'une classe plus vaste de problèmes, en quantité et en qualité, et centrent l'initiative sur le choix opératoire plutôt que sur une quelconque virtuosité algorithmique. Nous disons bien développer une culture, et pas seulement absorber un nouvel outil, car l'usage des calculatrices demande, notamment en ce qui concerne la division, une remise en cause des pratiques de calculs papier / crayon en favorisant des attitudes d'anticipations et de contrôles : choix a priori et / ou a posteriori d'une précision adéquate au problème ; recherche d'un ordre de grandeur, destiné à valider le résultat mais aussi à sécuriser le choix opératoire, toujours plus simple à effectuer sur des valeurs arrondies que sur les valeurs exactes ; décision sur la pertinence d'un reste et son calcul éventuel ; gestion du nombre de décimales du quotient. Si cette culture d'accompagnement de l'usage d'une calculatrice est plus ou moins bien exposée p. 21, il est regrettable qu'elle ne soit pas explicitement reliée, en tant que contrepartie heureuse, à l'abandon de l'algorithme de la division. D'autant que l'argument principal justifiant cet abandon nous semble contestable : il est en effet inexact de prétendre que l'apprentissage de l'algorithme de la division n'est qu'un *travail formel* qui *n'enrichirait pas le sens* (p. 19) de cette opération contrairement à la soustraction et à la multiplication. Nous savons en effet qu'il est possible – voir par exemple (ERMEL CM1, 1997, pp.229-231) – d'organiser une filiation du sens à l'algorithme abouti de la division, en développant par exemple des techniques intermédiaires serrant au plus près les actions entreprises spontanément par les élèves lors de la gestion de problèmes de division. C'est la raison pour laquelle il nous aurait semblé plus sage de limiter radicalement le degré de virtuosité et d'automaticité exigible à son propos plutôt que de jeter cette technique opératoire aux oubliettes de l'Histoire – pas tout à fait cependant puisque la classique disposition "à la française" est ressuscitée lorsque le dividende est *dans le champ de la table de multiplication liée au diviseur*, soit lorsque cette disposition n'a plus aucune vertu, sauf celle d'être plus claire que l'égalité : $(\text{diviseur} \times \text{quotient}) + \text{reste} = \text{dividende}$ pour qui ne maîtrise pas encore la priorité des opérations et le rôle des parenthèses (p. 20).

Plus critiquable encore est l'absence de lien entre division et fraction ou, en tous cas, le lien expéditif et purement formel qui est proposé et sur lequel nous reviendrons plus loin. Au lieu d'inscrire ces apprentissages dans le cadre général de la relation partie / tout, on isole la division en un chapitre indépendant, comme le veut la tradition. Ce qui conduit à des omissions et à des passages en force. Au titre des premières, on relève que seule est prise en compte la division par soustractions répétées (le d'abord qui introduit cette première approche de la division – p. 19 – n'est suivi d'aucun ensuite) mais pas la division-partage. Doit-on en déduire qu'un problème, comme partager 24 billes entre 6 enfants, pourtant fortement ancré dans la tradition ne doit plus être proposé à ce stade de la scolarité ? Dans le cas contraire, et si la division doit être liée à la question "*combien de fois*" un nombre est-il contenu dans un autre (p. 19), il conviendrait au minimum de rappeler l'existence des problèmes de partage, qui ne tombent pas a priori dans le champ de cette question, mais dont la modélisation par une division – dans l'acception qui vient d'être rappelée – est possible moyennant un traitement numérique – transformant dans notre exemple 4 unités de 6 en 6 unités de 4. Une telle démarche supposerait que l'on sépare / articule problème "physique" et problème numérique. Ce n'est manifestement pas le projet de ce texte dont la préoccupation principale semble avant tout de rechercher – et de consentir – les rabais d'apprentissage qui caressent le sens commun : *l'objectif est d'apprendre* (sic) *à l'élève à jongler* (re-sic) *de toutes les manières possibles avec les éléments de l'égalité. (diviseur $\times$ quotient) + reste = dividende.* Suite à cette jonglerie (physique ? mathématique ?), l'élève devrait identifier une classe de problèmes (y compris la division-partage ?) dont la résolution passe par la question : "*combien de fois*" un nombre est-il contenu dans un autre. Cette expression courante introduit l'idée de diviser (p. 21), déclenchant automatiquement le recours à la touche " $\div$ " de la calculatrice, sans trop se poser de questions de modélisation. Les conditionnements qui préparent aux passages en force ultérieurs sont mis en place.

En découvrant la division décimale de deux entiers, l'élève devra se familiariser avec les écritures synonymes d'un nombre (un quart, c'est aussi $\frac{25}{100}$ ou 0,25). (p. 20, mais c'est nous qui surlignons).

La question que nous avons envie de poser avant tout c'est : "comment ?" Comment découvre-t-on la division décimale des entiers dans un contexte qui ignore le rapprochement des notions de division et de fraction ? Si l'on recherche des solutions exactes à une équation

⁹ Qu'en est-il de la division à quotient rationnel non décimal comme dans $7 \div 3$?

comme $3x = 4$, il serait souhaitable : qu'on puisse envisager des fractions supérieures à 1 ; qu'un lien soit établi¹⁰ entre quatre fois un tiers ($\frac{4}{3}$ dans l'acception parts de tarte préconisée) et un tiers de quatre ou quatre divisé par trois. Si l'on se contente d'une solution décimale approchée, il s'agira au minimum d'expliquer l'origine des décimales fournies par la calculatrice : transformation du reste r en fraction décimale ($r = \frac{10^n \times r}{10^n}$) supérieure à 1(!) ; recherche de la plus grande fraction décimale, pour n fixé, telle que le produit du diviseur 3 – dans notre exemple – par cette fraction (et pas le contraire puisqu'il s'agit de répondre à la question "en r combien de fois 3"), soit inférieur à r . Dans tous les cas, on ne peut éviter les fractions, et dans un cadre qui dépasse nettement celui délimité par ce projet d'instructions officielles... sauf à accepter un enseignement par conditionnements successifs auquel on avait renoncé après 1970.

Quant à *se familiariser avec les écritures synonymes*, nous avons établi à la suite de Duval (1995, pp. 41-42) que : un quart (verbal), $\frac{25}{100}$ (écriture fractionnaire), 0,25 (écriture décimale) ne sont pas des synonymes (*expressions qui ont une signification très voisine* d'après le Robert) mais des unités de registres hétérogènes et que, s'ils réfèrent à un même objet mathématique, ils sont pris dans des réseaux de signification peu congruents (Adjage, 1999, pp. 129-136).

Par ailleurs, un tiers des élèves observés lors de notre expérimentation, malgré un enseignement fortement orienté vers la séparation et l'articulation de ces divers modes d'expression, convertissaient trois dixièmes en $3,10$, soit de la manière la plus phonétique qui soit (Adjage, 1999, p. 320).

Étant donnée l'indigence de la logistique préconisée, on voit mal comment on pourrait éviter des passages en force pour atteindre, vis à vis de questions aussi délicates, le degré de familiarité souhaité !

Faisant fi des résultats les plus concluants de la recherche en didactique, ce texte se contente donc d'assurer la promotion de certaines idées folkloriques, outrancièrement simplistes, réputées apporter les bonnes réponses avant même que ne se posent les bonnes questions.

¹⁰ Par exemple en suscitant le questionnement suggéré par la Figure 1, p. 7

•Proportionnalité, pourcentages et échelles

Nous n'entendons pas débattre de la proportionnalité en général (voir par exemple COPREM, 1987, pp. 9-30) ni, dans le détail, de la manière dont ce texte l'appréhende. Contentons-nous de relever que la "philosophie" générale d'un enseignement au rabais, susceptible de pérenniser certaines conceptions erronées, est maintenue. C'est ce qu'illustrent les trois points suivants.

- La définition première qui est donnée (p. 21) d'une situation de proportionnalité : *répétition additive d'une valeur unitaire (pour chaque baguette achetée, on paie le même prix)*, alors que le modèle proportionnel est avant tout multiplicatif (la limitation à *des exemples utilisant les seuls nombres entiers* (p. 22), qui autorisent une interprétation du produit en termes d'additions répétées, va dans le même sens, c'est à dire vers le bas) ;

- l'abandon de toute référence à un modèle linéaire via la mise hors programme du coefficient de proportionnalité et des tableaux (p. 21) alors que, dès 1981, Dupuis et Pluvineau (1981, p. 198) écrivaient : "[...] l'apprentissage du recours à des tableaux [de proportionnalité] [...] joue un rôle décisif dans les réponses à des questions courantes où intervient la proportionnalité" ;

- *la proportionnalité ne sera pas liée aux échelles et aux pourcentages durant la scolarité élémentaire* (p. 22).

A titre d'exemple, examinons de plus près ce dernier point, car ses conséquences en termes de conception d'enseignement sont édifiantes. (C'est nous qui surlignons).

Le maître introduit l'idée que certains nombres isolés ne donnent pas une information suffisante (savoir qu'il y a 60 femmes députés ne dit pas si c'est beaucoup...). Il amène l'élève à [...] se demander "sur combien ?". Cette expression courante introduit l'idée de diviser. La division [...] mène à un nombre décimal qui se dit en pourcentage (0,18 se dira 18 % de ; 0,182 se dira aussi 18 % en arrondissant).

Soit en résumant : le stimulus "sur combien ?" déclenche la réponse "division", qui déclenche "calculatrice", qui fournit un nombre décimal qui se lit tout à coup, et contrairement aux usages précédents, "dix huit pour cent **de**" ! D'où vient cette génération spontanée du "pour", du "cent", du "de" ? Où est passé le "zéro-virgule" ? Et si la disparition de l'un est responsable de l'apparition des autres, la référence à une situation concrète n'éclaire en rien ce tour de passe-passe.

Une application simple du principe de séparation / articulation permet de repérer au minimum quatre temps nécessaires à cet apprentissage, qu'il est tout à fait envisageable de

répartir entre le cycle 3 des écoles et les premières années de collège (l'ordre d'énumération n'étant pas forcément chronologique) :

1. dans le domaine numérique, la conversion de 0,18 en $\frac{18}{100}$, dont nous avons montré (Adjage, 1999, pp. 129-132) qu'elle est non congruente dans la mesure où elle fait passer d'un registre unidimensionnel (les écritures décimales) à un registre bi-dimensionnel (les écritures fractionnaires) ; ce qui signifie que ce passage mérite d'être l'objet d'une étude approfondie, pouvant par exemple recourir à un registre géométrique intermédiaire (Adjage et Pluvinage, 2000), et qu'il ne suffit pas d'une quelconque jonglerie pour le légitimer ;

2. dans le domaine géométrico-numérique, le fonctionnement d'un nombre (dont une expression fractionnaire est par exemple $\frac{18}{100}$) en tant qu'opérateur agissant sur d'autres nombres par dilatation ; là encore, le recours à un registre unidimensionnel peut fournir à la fois une représentation de ce nombre mais surtout de son mode d'action sur les autres nombres (Adjage, 1999, pp. 143-144) ;

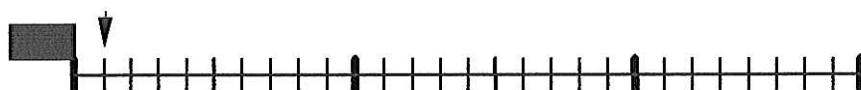


Figure 3 : une représentation de $\frac{18}{100}$ (pointé par la flèche), sur une droite comportant initialement 100 graduations, associée à la dilatation transformant 100 en 18. Il est possible de resubdiviser afin de lire plus commodément, sur l'échelle du bas, l'image d'un nombre quelconque

3. dans le domaine "physique", l'étude d'une situation de données relatives (par exemple une comparaison) ; la mise en place d'un questionnement que l'étape suivante devra prendre en charge ;

4. à l'articulation entre les domaines numériques et "physiques", le choix d'un effectif fictif de comparaison (100 est un choix raisonnable à de multiples titres) ; le modèle linéaire implicite pour ramener les effectifs réels à cet effectif fictif ; le lien avec la représentation exposée en 2. et l'expression fractionnaire, $\frac{18}{100}$, de cet opérateur.

Le point 4. explique pourquoi le découplage des notions de pourcentage et de proportionnalité est une absurdité didactique et épistémologique. En effet, le "pour" de pourcentage implique une transformation de la part retenue (18) à l'effectif fictif (100), et

invite à rechercher les parts retenues correspondant à d'autres effectifs fictifs jusqu'à obtenir, par linéarité par exemple, l'effectif réel recherché. D'où une vision fonctionnelle inscrite dans l'expression même de pourcentage. Exhiber **un** opérateur linéaire $\frac{18}{100}$, exprimant **ce** nouvel objet (**une** fonction), devient alors une exigence épistémologique.

L'introduction aux pourcentages, telle qu'elle est préconisée dans ce texte, est en fait la description d'un algorithme. La maîtrise de cet algorithme est, pour nous, le terme d'un processus de conquête qui permet d'en cerner le champ d'application. Il s'agit donc d'une étape finale et non initiale du processus d'apprentissage. Sauf à accepter de réduire l'enseignement correspondant à un dressage (attitude par ailleurs condamnée en ce qui concerne le retour systématique à l'unité p. 21) qui, au-delà des problèmes éthiques qu'une telle option pose, ne saurait être efficace que dans un nombre limité et non déterminé de cas.

•Conclusion

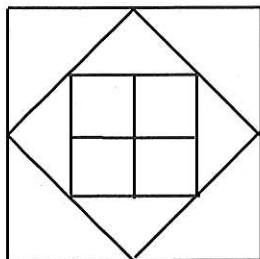
Nous avons rappelé en quoi les principes de séparation et d'articulation se trouvaient à l'origine même du projet de l'activité mathématique. C'est la raison pour laquelle nous les avons conservés comme fil conducteur des différentes sections de cet article. Nous avons résumé une expérience d'enseignement qui a pu être menée et validée sur la base d'une identification claire des trois domaines d'activité qui fondent, justifient et orientent les mathématiques. Il importe de retenir que, dès l'école élémentaire, un questionnement purement interne aux mathématiques peut être le moteur de l'apprentissage. Ce questionnement emprunte nécessairement des formes hétérogènes de représentations pour s'exprimer mais, surtout, peut être engendré par la spécificité et l'hétérogénéité de ces formes d'expression. La prise en compte et le traitement de problèmes physiques n'est donc pas la seule occasion de provoquer l'activité mathématique à ce stade de la scolarité comme à n'importe quel autre stade.

Il importait aussi de ne pas laisser passer l'occasion d'une réforme des programmes sans tenter de mesurer l'impact de la recherche en didactique sur les grandes orientations de ces derniers. Il était d'autre part tentant de mettre à l'épreuve des principes de séparation et d'articulation les intentions affirmées de retour aux fondamentaux. Nous avons vu que la philosophie générale de ce texte ne nous permettait pas de dépasser un niveau trivial de l'analyse didactique. La raison en est que sa motivation n'est pas une quelconque réflexion sur l'activité mathématique et les moyens de s'approprier ses concepts, mais la volonté de prendre acte d'une (soi-disant) réalité sociétale, culturelle...imposée de l'extérieur. Ce texte paraît

avant tout destiné à rassurer des inquiétudes – par ailleurs légitimes – et à améliorer les performances de la pire manière qui soit : enregistrer une baisse de niveau voire l'anticiper en battant en retraite sur un certain nombre de points importants. Trois d'entre eux au minimum nous semblent devoir être revus : la notion de fraction détachée de la notion de nombre ; la limitation aux fractions inférieures à 1 ; la réduction algorithmique de la notion de pourcentage.

Appliquer ce texte en l'état reviendrait à activer une véritable spirale de l'ignorance, pour les élèves comme pour les enseignants, et à encourager l'illusion suivant laquelle une chute de l'exigence débouchera sur une meilleure adéquation enseignants / enseignement / élèves. Nous avons pour notre part émis quelques propositions de réorientation, qui s'appuient sur la recherche disponible mais aussi sur nos observations et expérimentations personnelles. Mais c'est toute la philosophie du texte qui devrait changer pour que ces propositions lui soient intégrables et, en premier lieu, le dogme de l'immédiatement exécutable, comme unique critère de séparation des connaissances utiles des connaissances superflues, qui devrait être abandonné.

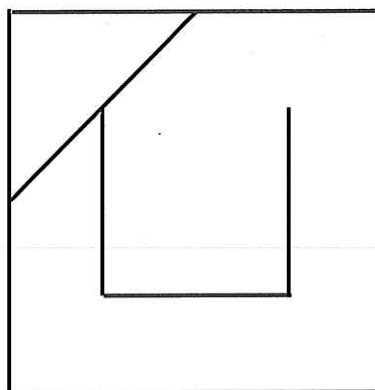
Annexe 1 : item 2, évaluation nationale (CE2, 1995)



Voici un dessin

On a commencé à le recopier.

Continue, en t'aidant d'une règle.

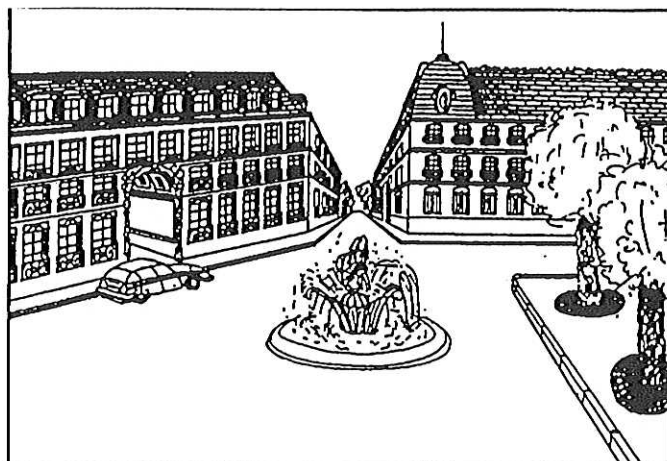


Annexe 2 : item 10, évaluation nationale (CE2, 1995)

Voici ce que Julie voit de sa fenêtre.

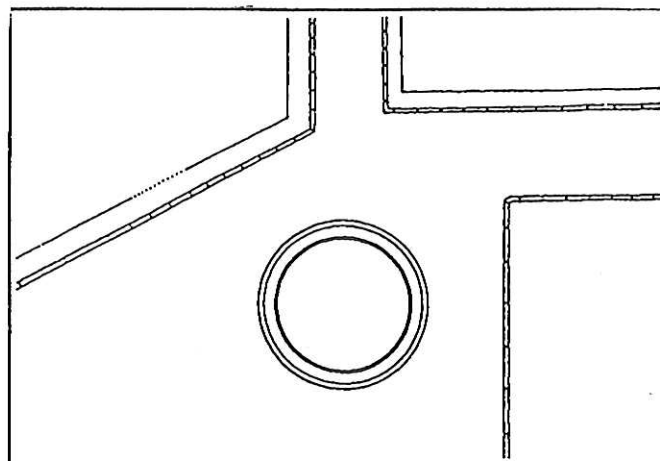
Sur le plan ci-dessous, retrouve :

- la fontaine et écris « FONTAINE » ;
- la maison de droite et écris « MAISON ».



Place la voiture en dessinant :

Place les deux grands arbres en dessinant : et



Bibliographie

- Adjiaje R. & Heideier A.** (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.
- Adjiaje R.** (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.
- Adjiaje R. et Pluinage F.** (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Bulletin officiel de l'Éducation Nationale** (spécial n° 7, 26 août 1999), pp. 1-83
- Brousseau G.** (1981), *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, pp. 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Brousseau G.** (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.
- Brousseau G. et N.** (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
- COPREM**, (1987), *La proportionnalité, le calcul numérique*, CRDP de Strasbourg, pp. 9-30.
- Douady R. et Perrin-Glorian M.J.**, (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.
- Dupuis et Pluinage**, (1981), *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.
- Duval R.** (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, (pp. 37-65), IREM de Strasbourg.
- Duval R.** (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.
- Duval R.** (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Duval R.** (1998-1), *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, (pp. 139-163), IREM de Strasbourg.
- Duval R.** (1998-2), *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, (pp. 165-196), IREM de Strasbourg.
- ERMEL CM1** (1997), INRP, (pp. 229-231), Hâtier Pédagogie, Paris.

Figueras O. ; Filloy E. ; Valdemoros M. (1987), *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol.1, (pp. 366-), Montréal.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1995), *Evaluation à l'entrée en CE2, mathématiques*, cahier de l'élève et consignes de passation et de codage, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1997), *Evaluation à l'entrée en 6^{ème}, mathématiques*, cahier de l'élève et consignes de passation et de codage, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1996), Direction de la Programmation et du Développement, *Evaluations CE2 - sixième, résultats nationaux septembre 1995*, les Dossiers d'éducation et formations n° 65, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1998), Direction de la Programmation et du Développement, *Evaluations CE2 - sixième, résultats nationaux septembre 1997*, les Dossiers d'éducation et formations n° 100, Paris.

Pitkethly A. & Hunting R., (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, (pp. 5-37) , Cambridge.

Pluvinage F., (1998), *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de Didactique et Sciences Cognitives, vol. 7, (pp. 125-138), IREM Strasbourg.

Streefland L. (1993), *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, (pp. 109-135), Dordrecht, Holland.