Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication de travaux du séminaire
de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : François Pluvinage

IREM de Strasbourg Volume 7 2001

TABLE DES MATIERES

© *Annales de didactique et sciences cognitives,* volume 7 (2001), IREM Strasbourg

Editorial

Croire qu'aujourd'hui un savoir très avancé est disponible pour chacun, notamment grâce à l'accès au réseau et à l'univers du multimedia, revient à se figurer que la soif ne risque pas de menacer un navigateur sur l'océan. Or ce n'est qu'à condition de disposer du moyen de désaliniser l'eau de mer que celui-ci pourra profiter de cette ressource. Ainsi, à côté des acquisitions traditionnelles toujours nécessaires pour certains traitements mathématiques, la formation doit en viser de nouvelles, liées aux méthodes de travail et de recherche et à la maîtrise d'outils d'expression et de communication.

Nos connaissances à propos de formes d'activité différentes sont cependant inégales. Souvent un enseignant ne disposera donc pas d'une même acuité du regard pour suivre ses élèves :

- Pour des activités telles que mobiliser des compétences individuelles afin de répondre à une question mathématique courte ou traiter un problème en temps limité, on dispose à la fois d'une solide expérience pédagogique et de références récentes provenant d'observations didactiques. Par exemple, si l'on présente une représentation à main levée d'une figure géométrique, en posant une question sur la valeur que telle longueur a réellement, on sait que des collégiens débutants se distribuent entre ceux qui se rapportent au modèle mathématique et utilisent les données fournies, ceux qui se contentent d'assimilations abusives du genre « un point entre deux autres est au milieu » et ceux qui, voyant dans le dessin la réalité physique, font des mesures à la règle graduée. On connaît, dans des cas types, les proportions de ceux qui adopteront l'une de ces trois lignes de conduite. On dispose aussi d'études didactiques pour avoir, à partir d'un tel constat, des indications sur les pratiques scolaires auxquelles recourir afin de favoriser une évolution générale vers les conceptions mathématiques visées.
- Le terrain est nettement moins bien exploré lorsqu'il s'agit de traitements qui supposent de multiples échanges entre individus, ou bien qui s'étalent dans le temps, ou encore qui conduisent à recourir à des sources d'information diverses. Or bien des activités de notre monde actuel mobilisent des compétences liées à de tels traitements, davantage que des savoir-faire étroitement déterminés. Et d'autre part les acquisitions quelque peu avancées qui sont proprement mathématiques, comme celle de la continuité par exemple, reposent sur une grande variété de rencontres avec des situations qui apparaissent sous diverses présentations.

Dans ces conditions, il est apparu intéressant de présenter, dans ce numéro des Annales, quelques recherches de nature à fournir des indications relatives à de telles formes d'activité, à leur pratique dans l'enseignement et aux résultats que l'on peut en attendre, ainsi qu'aux difficultés particulières qu'elles sont susceptibles d'occasionner. Les objectifs communs à ces recherches ont été tout autant de contribuer à une meilleure connaissance de ce que mobilisent effectivement des formes actuelles de travail proposées à des élèves, que de mieux approcher certaines appropriations de savoirs mathématiques. Leur originalité se situe donc moins dans les sujets mathématiques abordés, des classiques pour certains tels les nombres rationnels, que dans les protocoles mis en place et dans les corpus d'observations recueillis. Au lecteur d'apprécier dans quelle mesure l'approche de l'enseignement des sujets mathématiques envisagés dans ce numéro s'en trouve éclairée d'un jour nouveau.

Parler d'enseignement, c'est ne pas omettre bien sûr les activités qui englobent le fait de *professer*, donc de montrer comment on effectue des traitements mathématiques et comment on fait des mathématiques. Un exemple qu'utilise le dictionnaire Robert est précisément

« *professer les mathématiques* ». Cette préoccupation amène déjà les professeurs à assimiler des nouveautés qui s'introduisent dans les traitements mathématiques, pour pouvoir en faire ensuite profiter leurs élèves. Ce ne sont pas exactement les mêmes connaissances qui sont sollicitées dans une activité papier-crayon et lors d'un travail avec un outil de calcul formel ou un logiciel de tracé géométrique, ou encore des intruments de traitements statistiques. Il y a même pour certains traitements un saut qualitatif de même nature qu'entre une résolution de problème entreprise avec le seul recours à l'oral ou au contraire avec le support de l'écrit. Rappelons au passage le bond des mathématiques après Viette, lorsque l'écriture algébrique s'est imposée comme un outil de traitement s'ajoutant au recours à la langue usuelle.

Intervient aussi, pour les besoins de la formation mathématique des élèves et étudiants, la nécessité d'*encadrer* des activités, qui s'appuie sur d'autres compétences professionnelles et mobilise d'autres références. Pour en prendre nettement conscience, il suffit par exemple de voir comment sont constitués les (bons) guides d'utilisation de logiciels, qui répondent à des besoins d'apprentissage : Ils présentent évidemment le savoir-faire à acquérir, avec des aides telles que des schémas d'organisation ou un lexique de termes spécifiques, mais prévoient en outre une liste de *F.A.Q.* (questions fréquemment posées) qui se construit au fil des demandes d'utilisateurs et indiquent où trouver une assistance. Il n'est pas déconseillé de lire les études présentées ici en ayant à l'esprit des idées sur de tels sujets. Elles ont en effet leur place aussi bien quand il s'agit d'intervenir auprès d'élèves en difficulté : elles sont par exemple à la base des traitements pour la proportionnalité introduits par Pierre Belmas dans des Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté (cf. sa thèse en Sciences de l'Education, soutenue en octobre 2001 à l'Université de Paris 5), que quand on a en vue l'animation pour Maths en Jean de groupes d'élèves rupinants et mordus des maths.

Le travail en binômes méritait de retenir l'attention qui lui a été notamment portée dans ce numéro. Traditionnellement, des binômes sont constitués dans des disciplines expérimentales, lors de séances de travaux pratiques amenant à se distribuer des rôles distincts à des moments donnés (e.g. un manipulateur et un observateur). L'ordinateur a aussi introduit ce type de fonctionnement pour les mathématiques, non sans que certaines questions pratiques méritent d'être examinées. Mais la situation paradigmatique propre à ces micro-collectivités que sont les binômes impose aussi une réflexion fondamentale. Le binôme est en effet la plus petite unité qui à la fois oblige à des échanges entre personnes et génère une production dont l'évaluation se dissocie nettement d'un jugement de valeur individuel direct. Selon les enjeux, ce fait peut d'ailleurs ne pas avoir que des avantages. Notons, hors de l'enseignement, que les tournois par paires se trouvent relégués au second rang dans des compétitions comme le tennis, où les prestations individuelles sont à la base du vedettariat. Par contraste, rappelons que le Rallye Mathématique d'Alsace organisé par l'IREM de Strasbourg doit beaucoup de son succès depuis plus de vingt ans à la possibilité pour les lycéens de participer en binômes, formule en définitive adoptée de préférence à la participation individuelle par la grande majorité des candidats, même les plus brillants. Hors vaudeville, objet de préoccupations qui n'ont évidemment pas ici leur place, il y a de multiples raisons valables pour les didacticiens et les professeurs d'aiguiser leur sensibilité aux échanges dans des binômes.

Ce tome des Annales pourra aider à préciser nature et place de pratiques pédagogiques nouvelles, comme les travaux personnels encadrés ou la réalisation de projets. Puisse-t-il aussi contribuer modestement à permettre d'aplanir des difficultés, rapportées par nombre de professeurs, à intéresser et faire progresser la population étudiante qui leur est confiée.

François PLUVINAGE

•MATURATIONS DU FONCTIONNEMENT RATIONNEL

•FRACTIONS ET DÉCIMAUX : ACQUISITIONS D'UNE CLASSE, PROJETS DE PROGRAMME 2000 POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Robert Adjiage, professeur agrégé (dr.) à l'IUFM d'Alsace

Abstract

This article summarizes the theoretical and experimental basis, together with the main conclusions, of a research program completed in November 1999. This research concerned the introduction of the rational numbers, at elementary school level, according the principles of separation and coordination of three domains of activity: the physical environment, mathematical modelling and expression. An experiment, lasting two academic years, was conducted on a class of twenty six pupils having, at the beginning, an average age of nine years. A collection of twenty software programs, specifically conceived for this purpose, greatly facilitated the experimentation. In comparison with a sample taken nationally, the observed pupils constituted a population whose initiatives, at the outset, stood at a modest level despite an apparent sound understanding of the basic school curriculum. The final assessments show a net progression notably in the diversity of resorted procedures, a general development of innovative risk taking and an entry of certain pupils into a multi-semiotic-register culture.

Beyond the experience in question, we have been able to outline the basis of an assessment methodology for the skills acquisition of a class pursued over a long period. The results of this research have finally allowed us to question certain proposed guidance given for elementary school programs, appearing in 1999.

•Introduction

La capacité à mobiliser les nombres rationnels et à les faire fonctionner pour la résolution de problèmes résulte de la maîtrise de plusieurs ensembles de compétences dont la maturation, pour un individu donné, s'étend sur des durées différentes. Le phénomène n'est évidemment pas spécifique de l'apprentissage des rationnels. Il semble en revanche moins précisé dans ce domaine que dans le cas des entiers. Ainsi, compter, calculer, définissent des compétences à vitesse de maturation variable. Mais dispose-t-on, dans le cas des rationnels, de termes aussi nets, et exprimables en un seul mot du vocabulaire courant, pour désigner un ensemble de compétences, analyser la tâche et se donner des pistes d'enseignement ? Le fait qu'une opération aussi élémentaire que la "réduction au même dénominateur" mobilise quatre mots, dont deux se situent au minimum à la périphérie du langage courant, amène à penser que cette question mérite, à tout le moins, d'être posée.

Il importait donc de préciser des repères pour une analyse didactique de la notion de rationnel, d'énoncer un certain nombre de compétences[1] nécessaires à la maîtrise de ces nombres, de s'interroger sur les vitesses de maturation de ces compétences en liaison avec le type de tâches qu'elles permettent d'accomplir. Afin de réaliser ce programme, nous avons entrepris une expérience d'enseignement longue, point d'appui d'une recherche doctorante sur l'enseignement des nombres rationnels à l'école élémentaire (Adjiage, 1999). Le présent article est destiné à une présentation plus distanciée – et donc plus compacte – des principaux résultats, méthodes et applications de cette recherche. Il s'organisera autour d'une investigation en amont, d'une tentative de dégager les fondements d'une méthodologie d'analyse des acquisitions sur une durée longue, d'une investigation en aval enfin, dont la publication des projets de programme 2000 pour l'école élémentaire nous ont fourni l'occasion.

L'investigation en amont peut-être vue comme la recherche d'une clarification des principes organisateurs de l'expérience dont la section 3 précise la méthode d'évaluation. Ces principes ne sont pas nécessairement objectivés avant le début de l'expérience, ni même en cours d'expérience ou dans les temps qui accompagnent et suivent sa conclusion et sa communication. Leur formulation se fait par approximations successives, gagnant en netteté sous la pression des interpellations externes et interrogations internes. Ce travail, en recomposition permanente, donne l'occasion d'accéder à des niveaux toujours supérieurs de l'organisation d'une démarche. C'est pourquoi nous avons choisi d'en faire le socle de cette publication, et d'en débattre dès la section suivante.

L'analyse de certaines données de nos observations et leurs conséquences théoriques – du reste liées aux principes organisateurs dont il vient d'être question –, mais aussi nombre de références aux résultats de la recherche en didactique de ces trente dernières années nous autorisent à porter un regard critique sur le projet de nouveaux programmes pour l'école élémentaire – tout du moins en ce qui concerne la partie relative aux apprentissages numériques au cycle 3. Ce commentaire s'appuiera notamment sur la variabilité du temps de maturation du fonctionnement rationnel. Certains processus à maturation rapide peuvent en effet produire des réussites spectaculaires mais risquent de borner une notion. On sait par exemple que, dans le cas des entiers, un apprentissage de la multiplication comme addition

[1] Nous avons pour notre part repéré et cité sept grandes compétences pour la maîtrise des rationnels : doubler l'information, scinder l'activité de formation d'un rationnel (par exemple numérateur vs dénominateur), discriminer intervalle / extrémités, localiser les désignations, mobiliser un repère entier ([0 ; 1] par exemple) pour former un rationnel, plonger les entiers, produire des écritures équivalentes (Adjiage, 1999, pp.205-209).

itérée retarde l'émancipation de cette opération et en limite l'acception. Le document étudié, qui semble mettre en avant des impératifs de productivité, se garde-t-il de ces effets en trompe-l'œil ? C'est ce que nous examinerons en section 4.

•Un dispositif d'enseignement basé sur des principes de séparation et d'articulation

Trois types de visées peuvent être à l'origine de l'activité mathématique :

v1. modéliser un problème de physique (ou d'économie ou de biologie...) afin de permettre des prédictions (ou des explications) "plus simples, plus économiques, plus précises que la pratique" (Brousseau, 1986, p. 106) lorsque les instruments de mesure directe sont inadéquats ou inopérants comme ce pantographe (G et N. Brousseau, 1987, p. 333-345) dont l'imprécision, ne permettant pas d'anticipations fiables, motive le développement, par les élèves, de la notion de rationnel-dilatation et du produit de dilatations ;

v2. modéliser une expérience sensible, bien qu'irréalisable, comme le retournement de la sphère ou, à un niveau plus élémentaire, comme l'encerclement de la Terre par un grand ruban qui se relâche de 10 cm assorti d'une prévision sur la taille de l'organisme susceptible de passer alors sous le ruban ainsi distendu (du virus au chat) ;

v3. interroger, généraliser... les mathématiques par et pour les mathématiques, comme dans le cas du grand théorème de Fermat ($x^n + y^n = z^n$) n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$) ou de la recherche, qui s'étale sur des siècles, de solutions, **exprimables par radicaux**, d'une équation de degré n.

Si l'on examine les deux exemples de la visée 3, on constate que c'est une forme d'expression des mathématiques qui est chaque fois à l'origine et à l'horizon du problème posé. L'invariant repérable, entre $x^2 + y^2 = z^2$ qui admet des solutions entières et $x^n + y^n = z^n$ qui n'en admet pas, est bien une certaine forme d'expression. Quant au deuxième exemple, il témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression, les radicaux, dont on pourrait sans doute montrer qu'il s'agit d'un registre au sens de Duval (1995, p. 21) ; il eût pourtant été envisageable – ce qu'a entrepris notamment Newton – de développer des méthodes d'analyse numérique pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équation.

En ce qui concerne les objets mathématiques introduits à l'école élémentaire, notamment les nombres rationnels, on est fortement tenté de motiver leur construction par la modélisation de problèmes physiques (visée 1), tant le matériel mathématique disponible à ce stade est rudimentaire et ne semble pas suffire à provoquer un questionnement interne. C'est la voie actuellement suivie par la quasi totalité des didacticiens (Pitkethly et Hunting, 1996) et, notamment en France, par Guy et Nadine Brousseau (1987).

Ces derniers proposent, en introduction à la notion de rationnel-mesure, une situation de désignation et de comparaison d'épaisseurs de feuilles de papier (G et N. Brousseau, 1987, pp. 1-18) que les instruments usuels – double-décimètre, pied à coulisse... – sont incapables de prendre en charge faute de précision suffisante. L'ingéniosité didactique des auteurs réside dans le choix d'une épaisseur à mesurer suffisamment petite pour rendre son fractionnement et celui de l'unité de mesure disponible – le millimètre en l'occurrence – difficilement envisageables, orientant la recherche des élèves vers une opération de report ; par ailleurs, l'unité étant notablement supérieure à l'épaisseur à mesurer, le report de cette dernière dans la première est plus attractif que l'opération inverse ; enfin, les simplifications apportées par un résultat de mesure qui soit un nombre entier peuvent favoriser la poursuite de cette opération de report jusqu'à ce que le tas de feuilles constitué ait une épaisseur exprimable au moyen d'un nombre entier de millimètres. Ce choix décisif permet le développement non artificiel d'un modèle rationnel par commensuration (q feuilles du même tas ont une épaisseur de p mm), au lieu du modèle traditionnel par fractionnement de l'unité (l'épaisseur d'une feuille est : p $q^{\text{ièmes}}$ de mm). Le modèle par commensuration débouche sur la désignation des épaisseurs rationnelles au moyen de couples d'entiers $(q\,;p)$, la prise de conscience de l'existence d'écritures équivalentes, la nécessité d'adopter des référents communs (ibid, p. 21), préludes à la recherche de dénominateurs communs, lors de la comparaison et de la somme de deux épaisseurs. Ainsi, la validation, par les élèves, d'une conjecture comme $\frac{10}{50}+\frac{40}{100}=\frac{50}{150}$ (erronée en l'occurrence) pourra se référer à la situation physique d'introduction et à son traitement par commensuration : 50 feuilles du tas A ont une épaisseur de 10 mm ; 100 feuilles du tas B ont une épaisseur de 40 mm ; en collant une feuille du tas A à une feuille du tas B, on obtient une nouvelle feuille d'épaisseur $\frac{10}{50}+\frac{40}{100}$; on forme un tas C, suffisamment épais pour qu'on puisse en mesurer l'épaisseur, en assemblant plusieurs exemplaires de cette nouvelle feuille ; il est inutile de poursuivre l'expérience jusqu'à son terme pour comprendre qu'il est souhaitable de prendre autant de feuilles du tas A que du tas B – réduction au même dénominateur – afin de calculer une mesure de l'épaisseur du tas C, caractériser ainsi l'épaisseur d'une de ses feuilles et invalider le premier résultat conjecturé, soit $\frac{50}{150}$.

Nous avons pour notre part observé maintes fois ce type de séquences et avons été frappés par le constat contradictoire suivant :

L'habileté rhétorique avec laquelle nombre d'élèves traitent de ces problèmes rationnels ; la difficulté qu'ils éprouvent à décrire, interpréter, résoudre le même type de problèmes dès lors qu'ils sont amenés à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions. Certains même semblaient désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions, pourtant non négligeables – recherche de référents communs, encadrements entiers, comparaison à des proportions simples comme 1/2 ou 1/3...– de la phase rhétorique. Une rupture dans le mode d'expression des objets mathématiques peut donc se traduire par une rupture de compétence.

Afin de mieux comprendre la nature de ces difficultés, nous avons été amenés à bien séparer trois champs ou domaines d'activités associés à ce type de situation d'apprentissage et aux procédures de validation des démarches et des résultats :

d1. l'expérience physique ;

d2. le modèle mathématique sous-jacent

d3. les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle.

Le domaine 3 n'est pas indépendant des deux premiers domaines dans la mesure où il est quasiment impensable de gérer ces derniers sans le recours à une forme d'expression minimale qui utilise au moins les mots de la langue naturelle. C'est la raison pour laquelle ce premier principe de séparation – en trois domaines – doit être immédiatement compensé par un second principe d'articulation sur lequel nous reviendrons plus loin.

Une fois cette séparation bien établie, nous avons été amenés à formuler trois types d'hypothèses sur la difficulté des transferts de la phase rhétorique à la phase fractionnaire :

h1. le symbolisme des fractions n'est pas transparent, même si sa découverte est précédée d'un travail minutieux sur le sens des objets qu'ils désigne ;

h2. (principe de séparation) une séparation insuffisante des trois domaines : domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique pouvant mobiliser la notion de rationnel accroît la difficulté de son appropriation ;

h3. (principe d'articulation) une articulation insuffisante entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont des sources d'erreurs stables.

Remarquons tout d'abord qu'il est possible de donner une version positive des deux dernières hypothèses pour les transformer en hypothèses portant sur l'apprentissage :

hypothèse 2bis l'apprentissage des nombres rationnels passe par une identification claire des trois domaines susceptibles de les mobiliser ;

hypothèse 3bis des activités systématiques d'articulation entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont déterminantes pour l'apprentissage des nombres rationnels.

Nous avons avancé un argument général pour expliquer l'hypothèse 1 : les conversions entre le registre de la langue naturelle et celui des fractions sont non congruentes au sens de Duval (1995, pp. 47-59), le discours en langue naturelle étant essentiellement unidimensionnel – partition à une voix – alors que le discours fractionnaire est essentiellement bidimensionnel – partition à deux voix – (Adjiage, 1999, pp. 133-135). Cette non congruence a été amplement confirmée par les données empiriques relevées (Adjiage, 1999, pp. 364-365). Elle est accentuée par certaines formulations, notamment celles utilisant des propositions relatives, comme dans les phrases : "le nombre *dont* le produit par *b* vaut *a*", "le nombre *qui* multiplié par *b* vaut *a*". On notera que la procédure de validation proposée par G. et N. Brousseau et rappelée p. 3 est de cette nature. Bien qu'elle soit sans doute une activité à ranger dans la catégorie de celles décrites par l'hypothèse 3bis, il semble cependant nécessaire qu'elle soit l'objet d'une étude préalable (reposant par exemple sur les principes de séparation et d'articulation entre l'univers physique des feuilles et celui du modèle rationnel développé) afin qu'elle puisse exercer la fonction de contrôle et de relance attendue.

L'ensemble des considérations qui précèdent nous ont amenés à adopter un paradigme d'enseignement (Adjiage, 1999, pp. 97-106 et 151-153) dont nous rappelons ici la trame :

Comme les premiers contresens sérieux, stables, difficilement remédiables, apparaissent en même temps que le recours à un système d'expression fractionnaire du modèle mathématique, nous avons décidé, en accord avec la visée 3 de l'activité mathématique (voir p. 2), de faire porter l'effort d'enseignement sur les différentes formes d'expression disponibles des rationnels et sur les problèmes que les passages d'une forme d'expression à l'autre soulèvent. D'une façon plus précise nous nous sommes fixé, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois objectifs principaux relatifs à l'acquisition des systèmes sémiotiques permettant de développer un modèle des nombres rationnels abouti :

- identifier, dans une notation symbolique, une désignation différente des mêmes objets convoqués au moyen de la langue naturelle ;
- identifier / différencier les spécificités de chaque système symbolique ;
- relier ces spécificités à des aspects différents des objets représentés.

Il restait à déterminer quels systèmes sémiotiques exprimant les nombres étaient les plus adéquats à la réalisation de ces objectifs. Si les systèmes fractionnaires et décimaux paraissent incontournables car ils sont un produit remarquablement adapté – une fois maîtrisé – de l'évolution des mathématiques, il convenait en revanche de s'interroger sur le choix du système servant à l'introduction de ces nouveaux nombres. Le cahier des charges (Adjiage et Pluvinage, 2000, § 2.4 et 2.5) se devait de respecter les différentes visées, hypothèses ainsi que les principes évoquées plus haut.

1. Ce système devait permettre à la fois de séparer et d'articuler les trois domaines (domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique) afin d'exercer ses fonctions d'introduction et de validation ; cette exigence oriente vers un système géométrique.

2. Ce système devait avoir le statut de registre, donc être un véritable système d'expression, un concurrent aux systèmes fractionnaire et décimal, et pas un simple appendice illustrant ces derniers. Il ne pouvait en conséquence se réduire à un mode de représentation d'une double quantification (comme les classiques parts de tarte). Il devait exprimer des **nombres**, au moyen d'unités signifiantes ayant leurs équivalents dans les registres fractionnaire et décimal, afin que des articulations avec ces derniers soient envisageables.

3. Ce système devait se prêter à un vaste champ d'expériences, offrant aux utilisateurs l'occasion de formuler des hypothèses et de les valider.

4. Le support de ce système devait être familier aux élèves

5. Nous nous sommes enfin refusé à adopter un système éphémère, pour lui préférer un système dont l'utilité resterait incontestable bien au-delà de la phase d'apprentissage.

Ce cahier des charges en cinq points a orienté notre choix vers un système de droite graduée, muni d'une structure de registre ne mobilisant que des signes spécifiques (intervalles, tirets, nombres entiers...) et des opérations de report, de subdivision et de zoom. L'ensemble n'a été rendu possible, notamment pour vérifier le point 3 du cahier des charges ci-dessus, qu'en recourant à un environnement informatique et à un ensemble de logiciels spécialement développés à cet effet (Adjiage et Heideier, 1998).

Notre idée de la conceptualisation, en tous cas dans le champ des rationnels, s'appuie donc sur :

- un primat sémiotique ;

- une mise en œuvre totale de l'activité mathématique (les trois visées) ;
- deux principes de séparation et d'articulation.

Nous remarquerons que ce dernier point, lorsqu'il s'applique aux registres sémiotiques convoqués pour effectuer traitements et conversions autorisant le développement d'un modèle mathématique, renvoie à la théorie des registres de Raymond Duval (1993) et à son modèle du fonctionnement cognitif de la pensée (1996). Dans l'approche que nous proposons ici, le registre des droites graduées occupe une position centrale du fait de sa nature ambivalente, permettant l'articulation d'un mode de fonctionnement sémiotique et d'un mode de fonctionnement physique. Un moment important du travail de conceptualisation sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans ce premier système de représentation par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système purement sémiotique (les écritures fractionnaires). Les interrogations sur les correspondances entre les formes d'expressions suivantes de trois quarts (comment s'inscrit le 3, le 4, la barre de fraction de $\frac{3}{4}$ sur l'un ou l'autre des segments gradués ; quelles répercussions aura, sur l'expression au moyen du segment gradué, la variation d'un des constituants de la fraction ?) seront riches de significations.

$\frac{3}{4}$

Figure 1 : trois expressions concurrentes de trois quarts

De même que sera riche de sens la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces expressions interprète un problème comme : 4 feuilles de papier ont une épaisseur de 3 mm, quelle est l'épaisseur d'une feuille de papier ?

Pour terminer ce paragraphe précisons que, comme annoncé en introduction, la réduction à quelques principes unificateurs des fondements de notre démarche est le produit d'une investigation a posteriori. C'est ainsi que, d'une formulation primitive en termes quasi exclusifs de complexité sémiotique, d'appropriation et de coordination de registres, nous sommes remontés à la formulation actuelle plus générale, qui étend l'application du couple séparation / articulation à d'autres catégories que les seuls registres. Nous verrons du reste que c'est sous l'éclairage de ce double terme que nous avons choisi d'analyser le projet de nouveaux programmes.

•Le dispositif d'enseignement et les modalités de sa validation

Nous abordons dans cette section certains aspects méthodologiques liés à la vérification de la pertinence des options retenues et de la conformité à ces choix des tâches proposées aux élèves. Notre démarche d'enseignement pouvant être circonscrite par quelques principes rappelés en section 2, il était prévisible d'en retrouver l'écho dans les points d'appui essentiels sur lesquels repose cette évaluation : apprécier la capacité des élèves à débrouiller / coordonner : des unités sémiotiques complexes, des registres hétérogènes comme ceux de la langue naturelle et des écritures fractionnaires, la diversité des procédures de résolution envisageables pour un exercice donné... Encore fallait-il donner un référentiel à cette évaluation, donc nous doter de repères d'apprentissage auxquels il serait possible de rapporter les évolutions. Nous verrons que cela nous a amené à mobiliser deux instruments d'évaluation, chacun envisageant les apprentissages à une échelle différente.

Nous penchant avant tout sur l'étude d'un dispositif d'évaluation, nous n'évoquerons que brièvement les modalités d'enseignement retenues ainsi que leurs conséquences sur l'apprentissage – dans la mesure où ces dernières contribuent à mieux comprendre certaines dispositions de la méthode d'évaluation.

•Le dispositif d'enseignement / apprentissage

L'essentiel de l'expérience d'enseignement concerne une classe[2] de l'école annexe (caractéristique non significative depuis la transformation des écoles normales en sites IUFM) de Sélestat (26 élèves à une ou deux variations près) suivie sur une partie des deux dernières années du cycle 3. Cette expérience ne porte que sur l'enseignement des nombres rationnels. Les tâches d'apprentissage proposées aux élèves sont de deux ordres :

- activités proposées par les logiciels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier, 1998), occupant approximativement trois quarts du temps d'apprentissage ;
- activités d'accompagnement papier / crayon.

Conformément aux principes de séparation et d'articulation, clairement énoncés par Raymond Duval (1995, pp. 75-80) dans le cas des registres, l'étude au moyen des logiciels sépare les activités de traitement dans chacun des trois registres retenus (droites graduées, écritures fractionnaires, écritures décimales) avant de proposer des activités systématiques de conversions inter-registres[3]. La nature des tâches logicielles est essentiellement sémiotique. L'activité se développe suivant un processus de conquête, basé sur l'action des élèves et les rétroactions personnalisées de la machine. Il suppose une analyse, par l'utilisateur, du fonctionnement et des dysfonctionnements perçus du système, suivie de décisions à risque – elles ont un coût, quantifié par un score – pour aboutir, d'essais en erreurs parfois relayés par la mise au point de méthodes.

L'accompagnement papier / crayon est consacré à des commentaires de l'activité logicielle, suivis d'institutionnalisations éventuellement réinvesties dans l'élaboration de modèles requis par la résolution de problèmes physiques. Ce temps n'est que rarement utilisé à une quelconque préparation de l'activité logicielle, à l'exception des seules écritures fractionnaires qui ont nécessité une légère introduction de nature physique (Adjiage, 1999, pp. 237-243).

•Le dispositif d'évaluation

•Quels instruments de validation ?

Les évaluations doivent permettre de recueillir deux types de données

• Un premier type, de nature globale, destiné à prendre de la distance par rapport au contexte et aux objectifs d'apprentissage, et donc à évaluer des comportements et des méthodes plutôt que d'apprécier des résultats obtenus au prix d'un entraînement intensif.

• Un deuxième type de données locales, destiné à évaluer plus spécifiquement des contenus d'apprentissage des nombres rationnels et à tester certaines hypothèses de recherche.

Nous avons choisi d'évaluer ces deux types de données dans un environnement papier / crayon. L'essentiel de l'apprentissage s'étant déroulé dans un environnement informatique, ce choix nous permettait d'apprécier la solidité des transferts d'un environnement vers l'autre. Ces transferts sont au moins de deux ordres.

• **Transfert d'*attitude*** : l'ordinateur, réduisant considérablement le coût des tâches répétitives et annulant les erreurs dues aux imprécisions des instruments liés à l'environnement papier / crayon, favorise l'*attitude* expérimentale, la formulation d'hypothèses

---

2 Appelée par la suite classe expérimentale

3 La série ORATIO est elle-même organisée en deux ensembles de logiciels, les uns dits de traitement, les autres dits de conversion.

et leur mise à l'épreuve, ce qui suppose des prises d'initiatives et l'exploration de la diversité des procédures envisageables.

• **Transferts d'un domaine d'activité vers un autre** : une de nos hypothèses de recherche (Adjiage, 1999, p. 27 et pp. 101-105) postulait que les problèmes posés par le fonctionnement et l'articulation des trois registres mobilisés pour l'expression des rationnels (domaine d'activité sémiotique dans un environnement informatique) fournissaient un paradigme de résolution de l'ensemble des énoncés rationnels, notamment donc des problèmes physiques (domaine physique dans un environnement papier / crayon éventuellement doublé d'un dispositif matériel de mesures).

•Quelle dynamique ?

En ce qui concerne l'évaluation globale, nous souhaitions observer l'évolution d'une comparaison :

• entre une population expérimentale et une population de référence d'une part ;

• entre le début et la fin du cycle 3 d'autre part.

En ce qui concerne l'évaluation locale, nous souhaitions :

• comparer trois instantanés de la classe expérimentale, le premier après une première passation sur l'ensemble de logiciels de traitement en fin de CM1, le deuxième après une reprise de ce même ensemble de logiciels lors du premier trimestre de CM2, le troisième enfin, trois mois après la fin des passations sur la série des logiciels de conversion (fin mai), soit à distance importante de la dernière passation logicielle ;

• établir certains repères concernant les réussites, les difficultés, les préférences des élèves dans un contexte d'apprentissage des rationnels standard, puis apprécier une évolution, par rapport aux repères ainsi établis, de notre classe expérimentale.

•Les modalités de la prise d'information

•Cas des évaluations locales

Le cahier des charges des évaluations locales conduit à choisir comme instrument de la prise d'information un questionnaire personnalisé, et donc élaboré par nos soins, puisqu'il doit permettre de mettre à l'épreuve : des hypothèses de recherche ; un contenu d'enseignement spécifique que nous précisons ci-dessous.

A l'issue de ces deux années, les élèves devaient avoir acquis les compétences nécessaires à :

1. l'expression d'un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales), la conversion, d'un de ces registres vers un autre, d'une de ses expressions ;
2. l'interprétation de données numériques d'un problème du niveau considéré au moyen d'un rationnel exprimé dans l'un des trois registres ;
3. la comparaison et l'encadrement de rationnels, l'intercalation d'un rationnel entre deux autres rationnels ;
4. l'identification de critères permettant de décider qu'un rationnel est entier ;
5. l'identification ou la conjecture de critères permettant de décider qu'il est décimal.

•Cas des évaluations globales

Le cahier des charges des évaluations globales se réfère à des notions de *comportement*, d'*attitude*, de *distance*, moins universellement définies que la notion d'objectif opérationnel. Un premier travail consiste donc à préciser ces notions et, si possible, à se doter d'un certain nombre de critères permettant d'effectuer des mesures. Se pose ensuite la question de savoir s'il est préférable de construire son propre outil d'évaluation ou d'utiliser un outil déjà existant.

La première option est plus lourde à mettre en ?uvre ; elle demande notamment la constitution d'un groupe témoin à opposer au groupe expérimental. De plus, elle présente l'inconvénient d'être conçue par ceux-là mêmes qui en attendent un jugement impartial sur leur travail.

Nous avons donc opté pour la deuxième alternative et avons décidé d'utiliser les évaluations nationales de début de CE2 (Ministère de l'Éducation Nationale, 1995) et à l'entrée en 6ème (Ministère de l'Éducation Nationale, 1997).

Examinons à présent les avantages de ces évaluations :

• situées en début d'année, elles ne visent pas à sanctionner un enseignement mais à pointer des savoirs acquis ou en acquisition et des difficultés par rapport à des apprentissages à conduire ;

• elles sont nationales, et requièrent donc la contribution de personnes de statut et d'origine géographique divers qui concourent à leur réalisation et assurent leur représentativité ;

• elles fonctionnent depuis une dizaine d'années, ce qui permet de suivre des modifications et des invariants, tant dans la nature que dans les résultats des exercices ;

• les résultats sont opposables à ceux d'un échantillon national (Ministère de l'Éducation Nationale ; 1996 et 1998) ;

• les résultats de début de cycle 3 (évaluation de CE2) sont opposables à ceux de la fin de cycle (évaluation à l'entrée en $6^{\text{ème}}$) ;

• pour certains items, une ventilation des procédures adoptées par l'échantillon national est fournie, ce qui constitue une source d'informations permettant de préciser l'*attitude* des élèves face à ce type de problème.

Nous disposons ainsi d'un outil de mesure fiable, objectif, à *distance* raisonnable du contexte d'apprentissage. D'où le qualificatif de global que nous lui avons attribué, par opposition à l'aspect local des évaluations conçues par nos soins.

Cet outil présente néanmoins quelques défauts et limites par rapport à l'usage que nous souhaitions en faire :

• la DEP (Ministère de l'Éducation Nationale, 1996 et 1998) ne fournit pas ou peu de résultats croisés ou cumulés concernant l'échantillon national ;

• nous n'avons retrouvé dans les archives de l'école que des résultats par item et non par élève et par item, en ce qui concerne l'évaluation de début de CE2, ce qui ne nous a pas permis de procéder à des examens croisés ; cet inconvénient disparaît bien entendu pour l'évaluation à l'entrée en 6ème que nous avons personnellement organisée ;

• le regroupement des exercices suit une logique liée aux contenus mathématiques définis par le programme ; il ne recoupe donc pas forcément les catégories que nous souhaitions observer.

En ce qui concerne les deux premiers points, nous constaterons que leur impact est heureusement limité, dans la mesure où les évolutions observées entre le début et la fin du cycle 3 sont suffisamment franches pour être significatives même en l'absence des détails manquants.

Le dernier point quant à lui demande à être précisé, puisqu'il nous a conduits à quelques réaménagements, non dans le contenu des items mais dans le nombre d'items retenus et leur regroupement. Nous avons décidé d'extraire des deux évaluations nationales concernées quatre séries d'items. Chacune de ces séries se rapporte à un type de compétences. Chaque type de compétences nous servira de critère de mesure de ce que nous avons désigné en première approximation par le terme d'*attitude*. Il s'agira donc de comparer les résultats des échantillons expérimental et national, et, dans la mesure du possible, les procédures utilisées par l'une ou l'autre des populations lors de la résolution d'items :

1. présentant l'information de manière linéaire (à la manière d'une droite graduée) ;
2. ayant une présentation sémiotique complexe ;
3. offrant la possibilité d'une diversification des procédures de résolution ;
4. demandant un traitement non routinier.

Nous sommes conscients que ces catégories sont composites du point de vue cognitif, notamment la n° 4, mais ce risque de léger brouillage est le prix à payer pour éviter les risques d'une évaluation ad hoc. En tout état de cause, la mise en évidence, en début de CE2, d'une certaine homogénéité entre l'évaluation dans son ensemble et l'évaluation extraite nous a permis, a posteriori, de légitimer partiellement ce choix.

•Analyse de la tâche et de quelques résultats

Cette section aborde la question de l'interprétation des résultats, toujours fortement dépendante d'une analyse précise de la tâche requise par chacun des items. Le type d'analyses que nous proposons ici est conforme à nos principes de séparation / articulation et du primat sémiotique. Elles s'exprimeront donc en termes de sollicitation simultanée ou non de plusieurs registres, de congruence et de non congruence, de séquentialité et ruptures de séquentialité...

•Cas des évaluations globales

Le programme en quatre temps évoqué ci-dessous a été totalement réalisé et décrit par ailleurs dans le détail (Adjiage, 1999, pp. 285-348). Nous n'aborderons ici que quelques exemples, notamment choisis afin d'illustrer la section 4.

Premier temps. Nous disposons d'un pointage relatif à l'ensemble des items en début de cycle 3 (CE2). Cette première série de données permet de procéder à un étalonnage initial de la classe expérimentale en regard de l'échantillon national.

Deuxième temps. Nous restreignons notre regard aux quatre séries d'items extraits, relatifs aux quatre types de compétences (voir 3.3.2). Cette analyse concerne les évaluations à l'entrée et la sortie du cycle 3 (CE2 et CM2). Elle permet d'apprécier d'éventuels mouvements importants à grande échelle.

Troisième temps Il consiste à considérer les résultats à l'échelle de la série d'items, donc d'un type donné de compétences.

Quatrième temps. On examine les résultats à l'échelle de l'item, afin de rendre compte d'éventuelles disparités locales. Ce dernier temps est l'occasion privilégiée d'une analyse détaillée de la tâche.

Exemple 1 : examen à grande échelle (CE2 vs CM2)

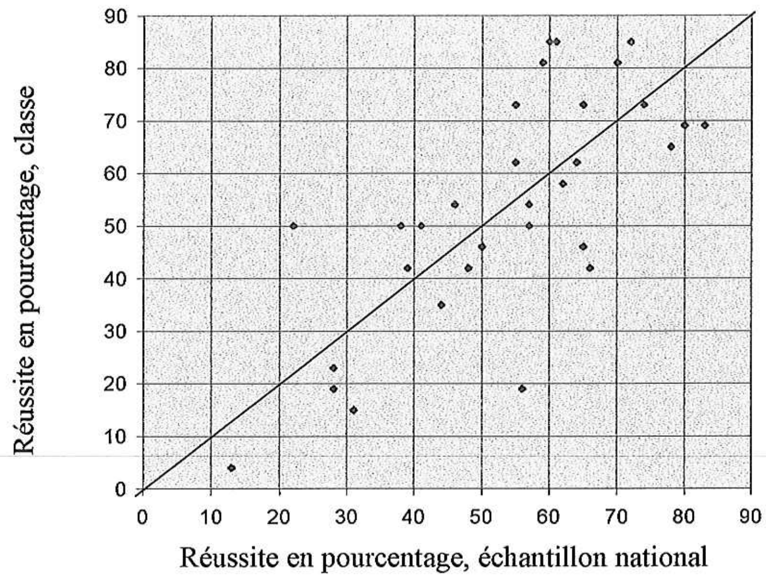
Population / Réussite globale	Évaluation nationale CE2 tous items 64 items	Évaluation nationale CE2 items extraits (4 catégories) 32 items	Évaluation nationale 6ème items extraits (4 catégories) 29 items
Classe (%)	**70**	**53**	**71**
Echantillon nat. (%)	**66** ($\sigma = 16,5$)	**53,5**	**53**

Tableau 1 : Résultats globaux

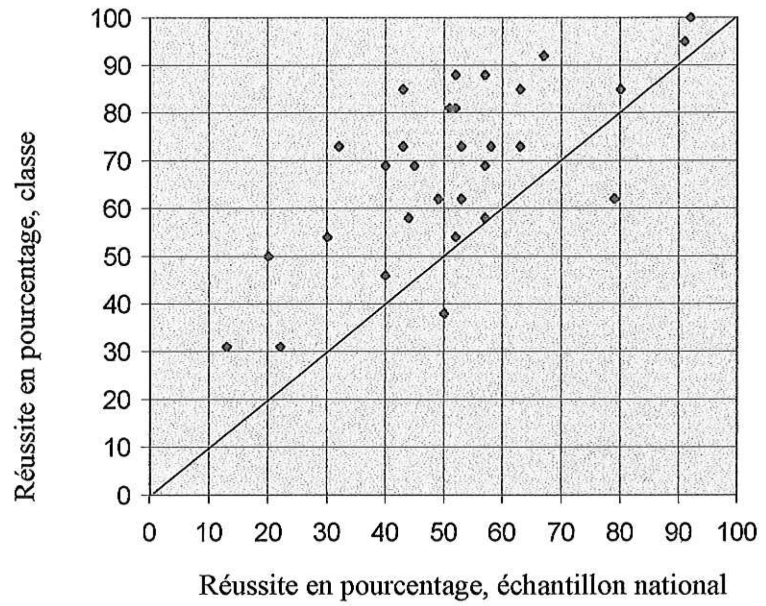
En début de cycle 3, la classe observée et l'échantillon national sont homogènes (écart non significatif au seuil de 5 %), relativement à l'évaluation nationale prise dans son ensemble. Cette homogénéité globale semble même s'améliorer lorsqu'on se restreint aux items extraits, ce qui justifie a posteriori le fait d'avoir conservé le même type d'évaluation réduite en CM2.

En fin de cycle 3, un décalage important apparaît entre la classe observée et l'échantillon national, relativement à l'ensemble des items de l'évaluation réduite.

L'examen des graphiques qui suivent confirme et amplifie les premiers constats puisque, d'une distribution régulière autour de la diagonale en CE2,on passe à une distribution fortement déséquilibrée en faveur de la classe expérimentale.



Graphique 1: chaque point représente chacun des items extraits du questionnaire national (CE2, 1995) évaluant les quatre types de compétences



Graphique 2 : chaque point représente chacun des items extraits du questionnaire national ($6^{ème}$, 1997) évaluant les quatre types de compétences

Exemple 2 : items de la catégorie "sémiotiquement complexe" (CE2)

N° des Items	2		5	
Tâche	Achever un tracé géométrique		Compléter par symétrie sur quadrillage	
Réussite globale (%)	**Classe** 19	**Nat.** 56	**Classe** 54	**Nat.** 57

Tableau 2

N° des Items	10	
Tâche	Positionner sur un plan des objets présentés en perspective	
Erreur des arbres (%)	**Classe** 27	**Nat.** 13

Tableau 3

L'item 2 (voir **annexe 1**) demande une prise en compte des unités signifiantes de la figure, à savoir les points stratégiques. Au-delà de l'écart important et significatif à l'avantage de l'échantillon, un pointage particulier nous apprend que 50 % des élèves de la classe expérimentale contre 31 % seulement à l'échelle nationale ont produit un tracé malhabile, tendant à reproduire des apparences plutôt qu'à prendre en compte les éléments d'information qui constituent le dessin en figure.

Ce constat est confirmé par l'examen de l'item 10, qui révèle que, lors de la transcription d'une vue en perspective (registre d'entrée) d'un quartier de ville en sa représentation sous forme de plan (registre de sortie), 27 % des élèves de la classe expérimentale contre 13 % (écart significatif) seulement pour l'échantillon national se sont laissé piéger par un effet de perspective (rangée d'arbres disposée suivant une oblique calquée sur celle du registre d'entrée alors qu'elle aurait dû être parallèle au bord de la feuille dans le registre de sortie).

En revanche, un exercice comme l'item 5, auquel les élèves ont été fortement entraînés depuis le cycle 1, est réussi de manière comparable à l'échantillon national.

Exemple 3 : item de la catégorie "diversification des procédures" (CE2)

N° des Items	59	
Tâche	« Mettez-vous par équipes de 3". Il y a 7 équipes complètes et 2 élèves restent seuls. Combien y a-t-il d'élèves ?	
Réussite globale (%)	**Classe** 35	**Nat.** 44

Tableau 4 : le seul item (de la catégorie) moins bien réussi par la classe observée

L'item 59 est le seul de sa catégorie à être mieux réussi par l'échantillon national que par la classe expérimentale. C'est aussi le seul à présenter des éléments de non congruence sérieux : deux oppositions catégorisantes équipes / élèves d'une part, équipes / équipes complètes d'autre part qui déterminent le placement entre parenthèses ou pas des nombres associés ainsi que leur mise en relation par + ou – contre.× ; par ailleurs, le choix de + est antinomique au verbe qui le commande ("restent").

Mais tout autant que la réussite à cet item, est significative la manière de le réussir : le Tableau 5. témoigne d'un recours quasi exclusif à la procédure standard par les élèves de la classe expérimentale là où l'échantillon national se répartit de manière bien homogène sur les diverses procédures testées.

Choix des procédures / Population	Uniquement additive : 3+3+..+2	(3x7)+2	Dessin	Autre procédure
Classe (%)	**6**	**88**	**6**	**0**
Nat. (%)	**22**	**29**	**20**	**29**

Tableau 5 : la manière de réussir l'item 59 pour les élèves ayant proposé une procédure

Examinons à présent quelques exemples extraits de l'évaluation de fin de cycle 3 qui permettront d'apprécier la légitimité de nos conclusions concernant les évolutions constatées. Pour la commodité des interprétations, nous considérerons trois seuils de réussite témoignant d'un niveau d'apprentissage : inférieur à 30 %, niveau "démarrage" ; au voisinage de 50 %, niveau "en cours d'acquisition" ; supérieur à 80 %, niveau "maîtrise".

Exemple 4 : items de la catégorie "organisation linéaire de l'information" (CM2)

<table>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">11</td></tr>
<tr><td colspan="2">En utilisant un nombre de la liste suivante :
3,12 ; 3,092 ; 3,1 ; 3,0108
complète :
3 < ... < 3,09</td><td colspan="2">Voici quatre nombres rangés du plus petit au plus grand. Écris 3,01 à la place qui convient.

1 2,01 3,005 3,021</td></tr>
<tr><td>Classe
85</td><td>Nat.
43</td><td>Classe
81</td><td>Nat.
51</td></tr>
</table>

Tableau 6 : réussite comparée à deux items de rangement de décimaux

Ces items testent des compétences décisives relatives aux décimaux. La classe expérimentale, au niveau "maîtrise" dans ce domaine bien exploré lors des passations logicielles, s'écarte significativement (au seuil de 1/1000) de l'échantillon qui atteint péniblement le niveau "acquisition". On notera la difficulté de l'exercice qui multiplie les trompe-l'œil, depuis la présence de nombres "sans virgule" (3 comme borne inférieure de l'encadrement de l'item 10), jusqu'à la nécessité de récuser 3,1 – bien tentant car sa partie décimale (1) est supérieure à la partie décimale implicitement nulle de la borne inférieure et inférieure à la partie décimale (09) de la borne supérieure – tout en élisant le 3,0108, malgré une partie décimale (0108) fortement supérieure au 1 de 3,1 ! La timidité de la réussite nationale atteste, si besoin en était, de cette complexité.

Examinons à présent un item de la catégorie, présenté au moyen d'un énoncé mélangeant le verbal et le schématique, et dont une transcription sur droite graduée rendrait la résolution immédiate.

<table>
<tr><td>Questions

Item 18 :
De quelle ville Sébastien se rapproche-t-il ?

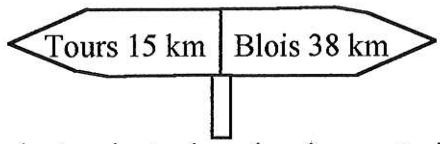
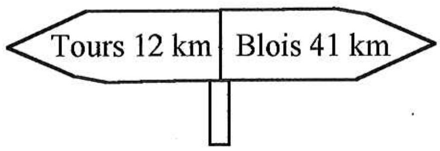
Item 19 :
Quelle distance sépare les deux panneaux ?</td><td colspan="4">Sébastien sur son vélo voit un premier panneau :

Dix minutes plus tard, sur la même route, il voit un second panneau :
</td></tr>
<tr><td>N° des Items</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2">19</td></tr>
<tr><td>Réussite globale (%)</td><td>Classe
100</td><td>Nat.
92</td><td>Classe
88</td><td>Nat.
52</td></tr>
</table>

Tableau 7 : conservation du niveau maîtrise aux deux items en ce qui concerne la classe de Sélestat ; passage au niveau inférieur à l'item 19 en ce qui concerne l'échantillon

L'item 18 est congruent à sa résolution, portée par un indicateur efficace de mise en relation, à savoir la répétition du mot Tours, accompagné d'une diminution des données chiffrées de 15 à 12, qu'il est aisé d'associer à un mouvement en direction de la ville et donc à un rapprochement de cette dernière. Il n'est en conséquence pas surprenant d'y trouver les deux populations au niveau "maîtrise". L'item 19, en revanche, présente une redondance de données et une question non standard portant sur la distance séparant deux panneaux (et pas deux villes). Ces éléments de non congruence le rendent plus déroutant et c'est sans étonnement que l'on constate un recul dans la réussite des deux populations. Mais on note que ce recul laisse la classe expérimentale au niveau "maîtrise", alors que l'échantillon national régresse d'un cran au niveau "acquisition".

Exemple 5 : item de la catégorie "diversification des procédures" (CM2)

N° des Items	43	
Tâche	On donne, **dessinés**, une règle graduée en cm de 0 à 8 ; une règle graduée en pouces de 0 à 4 ; un segment [AB] dont la longueur, **non fournie**, vaut environ 15,2 cm. On demande de compléter la phrase suivante : "la longueur **en pouces** du segment [AB] est environ de..." en choisissant sa réponse dans la liste des cinq nombres : 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 15	
Réussite globale (%)	**Classe** **73**	**Nat.** **43**

Tableau 8 : un item très significatif pour l'ensemble des compétences étudiées

Rangé dans la catégorie "diversification des procédures" en raison d'une analyse détaillée, fournie par la DEP (Ministère de l'Éducation Nationale, 1998), sur la ventilation du choix des procédures, cet item pourrait se ranger dans n'importe laquelle des quatre catégories retenues : sa présentation sémiotique est complexe, il offre de multiples possibilités de résolution indépendantes, il est non standard, il demande des conversions entre trois registres linéaires (règle en pouces, règle en cm, segment [AB].

Un survol de l'analyse de la tâche permet de comprendre que des procédures numériques ou non numériques sont envisageables :

- mesure en cm de [AB], mesure en cm d'un pouce, suivies d'une conversion en pouces au moyen d'une division, approchée ou exacte, formelle ou sous forme d'une multiplication à trou ou même d'additions répétées ;
- report, au moyen du compas, ou suite à une mesure en cm, de l'unité pouce ;
- report, au moyen du compas, ou suite à une mesure en cm, ou encore mentalement de la règle entière de 4 pouces suivi d'une évaluation du reste ;

ces diverses procédures pouvant éventuellement se combiner. Il est par ailleurs possible de rechercher : soit directement la valeur exacte, soit indirectement en appréciant la plausibilité des 5 valeurs fournies par l'énoncé et en procédant par élimination.

Examinons à présent la manière de réussir cet item ou d'y échouer, car les renseignements ainsi obtenus sont précieux pour notre recherche de marqueurs d'évolution d'attitude.

Choix des procédures	Report **direct** de **la règle** de 4 pouces avec procédures type : "4 trop petit, 8 trop grand" ou encore : "[AB] mesure 1 règle et encore une demi-règle, donc 6 pouces"	Report **direct** (au compas par exemple) de l'unité pouce ou mesure directe au moyen d'une règle graduée en pouces	Report **géométrique** (compas par exemple) de l'unité pouce vue comme mesurant environ **2,5 cm**	Mesure de [AB] en cm suivie d'une conversion en pouces obtenues au moyen d'un **calcul** exact ou approché (par exemple : 15 : 2,5)
Classe (%)	**16**	**21**	**31,5**	**31,5**
Nat. (%)	**19**	**22**	**36**	**23**

Tableau 9 : procédures de résolution de l'item 43 parmi les élèves qui l'ont réussi (à comparer avec le Tableau 5)

Procédure / Population	Procédures justes	Mesure en cm de [AB] (15 cm)	Autres procédures fausses	Absence de procédure
Classe (%)	73	**8**	**19**	**0**
National (%)	43	**28**	**24**	**5**

Tableau 10 : détails de la répartition de l'échec à l'item 43

Au-delà de l'écart important et significatif (au seuil de 0,2 %) de la réussite entre les deux populations, l'examen des Tableau 9 et Tableau 10 dénote un comportement de la classe expérimentale radicalement opposé à celui constaté en début de cycle (voir Tableau 5) : que l'on réussisse ou que l'on échoue, on ne renonce plus (0 % d'absence de procédure) ; on tente la résolution au moyen de procédures privées, empiriques ou plus systématiques, en tous cas pas nécessairement labellisées sans risque. On appréciera enfin l'homogénéité dans la ventilation des procédures, associée à une forte diversification de ces dernières, alors que l'étude de début de cycle relevait une tendance à l'exclusivité dans ce domaine.

Conclusions de l'analyse des évaluations globales

A partir des quelques exemples ici rapportés, on peut appréhender le type d'analyse qui, appliqué à l'ensemble des items des quatre catégories, nous a permis de préciser la nature de l'évolution d'attitude de la classe observée :

En début de cycle 3, cette dernière est une classe banale, globalement conforme à l'échantillon national, mais qui s'en détache par une réussite supérieure en ce qui concerne les automatismes, et par une réussite inférieure dès qu'il s'agit de traiter des items plus atypiques, pour lesquels une solution toute faite n'existe pas.

Dit rapidement, cette classe ne prend alors pas le risque d'innover, de se diversifier, mais se contente de gérer un patrimoine de connaissances bien réglées, et d'identifier certaines situations qui en en relèvent.

Comment cette classe pusillanime, normalisée en début de cycle, allait-elle réagir à un enseignement sollicitant plus des initiatives privées que la restitution de routines ?

De véritables progrès ont été enregistrés dans tous les domaines testés. Nous parlons de progrès, et pas seulement d'évolution, car les deux derniers au moins des quatre types de compétences qui nous ont servi de repères dans cette estimation sont très universellement reliés à la réussite en mathématiques – et sans doute à la réussite tout court. Résumons en quatre points les qualités attachées à l'ensemble des compétences ainsi établies :

1. prendre le risque d'innover, ce qui suppose à la fois une bonne maîtrise des schémas tactiques et stratégiques éprouvés, et à la fois la capacité à s'en dégager lorsque cela est nécessaire ;
2. diversifier ses procédures de résolution, notamment en sachant rompre avec un schéma de preuve progressant linéairement des prémisses à la conclusion, et en lui substituant parfois un autre schéma s'organisant dialectiquement autour de l'émission d'hypothèses et de leur preuve ou de leur réfutation ;
3. débrouiller puis coordonner les unités sémiotiques requises pour appréhender un problème mathématique complexe et mener à son terme une procédure permettant sa résolution ;
4. interpréter, exprimer et résoudre les problèmes numériques qui s'y prêtent – formation des rationnels, encadrements, intercalations... –, mais aussi toute autre situation relevant d'un système muni d'une relation d'ordre total, dans un environnement unidimensionnel.

L'opérationnalité constatée des deux derniers points valide des hypothèses centrales de notre recherche postulant qu'ils sont tout aussi décisifs que les deux premiers : le numéro 3, en qui concerne les mathématiques en général, et le numéro 4 en ce qui concerne plus précisément l'enseignement des rationnels.

•Cas des évaluations locales

Nous nous contenterons d'évoquer ici un résultat important – dans la mesure où il aura permis de faire évoluer une de nos hypothèses de travail et d'ouvrir des perspectives de recherche – des évaluations locales analysées dans le détail par ailleurs (Adjiage, 1999, pp. 193-204 et pp. 348-369).

Deux questions essentielles se devaient d'être posées à la fin de notre expérience : où en étaient nos élèves vis à vis du cloisonnement, pointé comme un des moteurs de notre recherche (p. 4), entre la langue naturelle et le registre des écritures fractionnaires ? D'une façon plus générale, comment se situaient-ils vis à vis d'une culture multi-registres ? Ces questions, très spécifiques, ne pouvaient trouver de réponses que par le biais d'une investigation personnalisée. Nous avons donc extrait de nos évaluations locales des items de rangement de fractions, 98-Q07 et 98-Q08, que nous avons successivement croisés avec un exercice de comparaison de grandeurs rationnelles (98-Reg06) traitable par le seul recours à la langue naturelle (voir Tableau 11 et Tableau 12) :

98-Q07 Ranger du p. petit au p. grand $\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{10}$ / **98-Reg06**[4]	Réussite	Echec	Total
Réussite	5	4	**9**
Echec	12	5	**17**
Total	**17**	**9**	**26**

Tableau 11 : cloisonnement de la langue naturelle et du registre fractionnaire

[4] On considère deux tas, A et B, de feuilles de papier : 8 feuilles du tas A ont une épaisseur de 3 mm, 19 feuilles du tas B ont une épaisseur de 6 mm.
Entoure la bonne réponse :

1. Les feuilles de A et de B ont la même épaisseur
2. Les feuilles de A sont plus épaisses que celles de B
3. Les feuilles de B sont plus épaisses que celles de A

Le Tableau 11est surprenant. Loin de manifester une implication entre la réussite au problème et la réussite au rangement des fractions (si je réussis le problème, c'est qu'au moins je suis capable de ranger des fractions !), il illustre presque une situation d'indépendance ($\chi^2 = 0,59 << 3,84$), confirmée par un examen plus détaillé des résultats : pour les marges obtenues, le tableau théorique estimé sous l'hypothèse d'indépendance comporterait la valeur 6 (car $\frac{9}{26}\cdot 17 \approx 5,88$) dans la case de la double réussite où la valeur observée est 5 ; ce qui semble même indiquer une situation légèrement détériorée, comme si le fait de réussir le problème pouvait constituer un léger handicap pour la réussite au rangement des fractions !

98-Q08 / Ranger du p. petit au p. grand $\frac{4}{8};\frac{7}{6};\frac{4}{5}$ / **98-Reg064**	Réussite	Echec	Total
Réussite	5	4	**9**
Echec	4	13	**17**
Total	**9**	**17**	**26**

Tableau 12 : coordination de la langue naturelle et du registre fractionnaire

Que se passe-t-il lorsqu'on élève le niveau de complexité du rangement des fractions (Tableau 12) ? Il n'est toujours pas possible de rejeter l'hypothèse d'indépendance ($\chi^2 = 2,7 < 3,84$)) mais on s'en rapproche.

Examinons donc cette répartition case par case.

Les 5 et 4 élèves de la première ligne du Tableau 12 sont les mêmes que ceux du Tableau 11. Ces derniers sont donc insensibles au surcroît de complexité du rangement des fractions, alors que parmi ceux qui échouent au problème, ce rangement plus complexe renverse la distribution des échecs (12 vs 5 contre 4 vs 17), ce confirme que le rangement du Tableau 12 est effectivement plus complexe que celui du Tableau 11.

Il nous reste l'examen direct des copies d'élèves pour interpréter la stabilité de la première ligne du tableau.

1. **Élèves associés à la double réussite**

Ces derniers accompagnent la résolution de 98-Reg06 de commentaires mentionnant explicitement deux phases : doublage des données ; application de la règle "plus grand le diviseur, plus petit le résultat". Ces élèves semblent être entrés dans une culture multi-registres, et disposent des moyens d'exercer des contrôles sur un registre à partir d'un autre registre. Sans doute exercent-ils ce contrôle au moyen de la langue naturelle éventuellement assortie de considérations se référant à une droite graduée (puisqu'ils ne disposent pas de traitement fractionnaire, comme la réduction au même dénominateur, pour mener à bien leur tâche de comparaison).

2. **Élèves ayant réussi le problème mais ayant échoué au rangement**

Parmi les quatre élèves qui réussissent le problème mais échouent au rangement, on constate que :

- leur résolution de 98-Reg06 est moins structurés mais les commentaires, réduits à l'énoncé de la seule règle "plus grand le diviseur, plus petit le résultat", sont néanmoins présents ;
- leur rangement des fractions se fait suivant les dénominateurs croissants dans le cas du numérateur 1. En revanche, certaines réponses au rangement plus difficile (4/5 ; 4/8 ; 7/6) pourraient témoigner d'une appréhension de proportions simples (quatre huitièmes est égal un demi ou sept sixièmes supérieur à 1, en cohérence avec un traitement en langue naturelle ou en référence à un positionnement sur droite graduée).

Ces élèves témoignent donc de certaines potentialités dans l'accès à une culture multi-registres, mais n'en sont encore qu'aux premiers balbutiements. Ils indiquent peut-être des voies de passage vers cet accès à une culture multi-registes : repérage de proportions privilégiées facilitant les prises de conscience et fournissant des repères (type de tâche abordé par les logiciels ORATIO), contrôle des calculs au moyen de la langue naturelle.

3. **Autres élèves**

Ce tableau ne permet pas de conclure qu'ils sont entrés dans une culture multi-registre. Mais il ne l'exclut pas non plus. D'autres résultats – à l'évaluation nationale ou issus d'observations directes – permettent cependant de conjecturer que tous ces élèves ont identifié l'existence et l'efficacité de plusieurs registres pour exprimer les rationnels.

Dans tous les cas, il importe de constater la difficulté à décloisonner la langue naturelle et les autres registres. Et lorsque l'on connaît la prédominance de la langue naturelle dans l'expression, on peut comprendre la nature des difficultés d'apprentissage d'un registre qui lui est fortement hétérogène, comme celui des fractions. C'est la raison pour laquelle nous avons été amené à reformuler une de nos hypothèse en y introduisant une référence explicite à la langue naturelle :

Hypothèse reformulée

Des activités systématiques de coordination entre les trois registres symboliques d'une part, et entre ces derniers et la langue naturelle d'autre part, permettent d'exercer un contrôle efficace sur l'usage des fractions et des décimaux.

•Vers une méthodologie ?

S'il nous est permis d'esquisser, à partir de cette expérience, une méthode d'évaluation des acquisitions d'une classe suivie sur tout un cycle, nous dirons qu'elle repose sur un examen des compétences situé à grande et à petite distance du contexte d'apprentissage. Le premier s'appuie sur des évaluations nationales, qu'il s'agit d'adapter en réorganisant la répartition des items selon un cahier des charges lié à des objectifs méthodologiques. Le deuxième s'appuie sur des questionnaires originaux, plus spécialement destinés à évaluer un contenu d'enseignement et des hypothèses de recherche. Le recours aux évaluations nationales permet en particulier un étalonnage, par rapport à un échantillon représentatif, de la classe observée et de ses évolutions. Notons enfin que la théorie des registres de Raymond Duval s'est révélée être un outil remarquablement efficace dans l'analyse de la tâche impliquée par les items des évaluations nationales, permettant notamment d'expliquer les écarts de performance entre les deux populations.

•Quelques confusions / désarticulations du projet de nouveaux programmes (cycle 3, partie numérique)

Classe, prêche, sous-culture et tradition

Le premier trimestre de l'année scolaire 1999-2000 a vu la publication au BO (1999, pp.1-83)[5] d'un projet de nouveaux programmes des cycles 2 et 3 de l'école élémentaire. Ce document vise à un recentrage des priorités d'enseignement et se donne en conséquence pour ambition de définir "explicitement les fondamentaux des programmes" (p. 4, §1) : "[ces documents] articulent les savoirs et savoir-faire visés autour de quelques objectifs clés d'où l'ensemble des notions enseignées tire **sens et continuité**" (ibid). Le français et les mathématiques, réaffirmées en tant que "disciplines instrumentales" (p. 4, §2), "nécessitent [...] l'apprentissage **systématique** de **savoir-faire** [...]" (ibid) – *c'est nous qui soulignons.* Il

[5] Dans toute cette section, les références qui ne renverront qu'à un numéro de page ou de paragraphe se rapportent à ce document.

importait de mettre à l'épreuve de ces intentions de sens, de continuité[6], de caractère systématique – encore que l'association savoir-faire / systématique puisse paraître contradictoire dans les termes, sauf à entendre répétition d'habitudes dans systématique, ce qui rend alors l'intention lourde de conséquences –, les contenus d'enseignement proposés par ce texte. Nous nous sommes pour notre part penchés sur la partie numérique du cycle 3, pour laquelle nous disposons d'observations, on l'a vu, récentes, détaillées et rapportées à un échantillon national.

•Survol de l'ensemble du texte

Une lecture d'ensemble des pages concernées (pp. 18-22) ne débouche pas sur une identification claire des raisons – scientifiques, de "bon sens" ? – qui fondent les prescriptions, car l'intrication de différents points de vue et niveaux d'analyse rabat les arguments les uns sur les autres. Ainsi, dès le paragraphe introductif, *Objectifs et recommandations* (p. 18), les premiers objectifs sont listés, alors que les suivants (division et proportionnalité), hors liste, sont justifiés avant même que de chercher à les énoncer, et le point de vue passe sans transition de l'apprenant à l'enseignant (*Le maître insiste sur...*). La dernière partie de ce paragraphe reprend la liste interrompue, en complétant certains objectifs cognitifs (*mettre en relation les décimaux, les fractions, les pourcentages*), et en y mêlant des objectifs méthodologiques (*poursuivre l'apprentissage du raisonnement et de son expression...*). Enfin, l'usage de certains termes impropres (*la surface* au lieu de l'aire *du rectangle*), ainsi que des effets d'annonce (*l'acquisition des nombres décimaux* en tête de paragraphe alors que les fractions ne sont citées qu'à la fin), flattent certes les certitudes reçues mais ignorent les travaux de la recherche en didactique qui, concernant l'enseignement de rationnels, convergent vers une introduction par les fractions avant les décimaux (Brousseau, 1981, pp. 38-128 ; Douady et Perrin-Glorian, 1986 ; Adjiage, 1999, p.236...). La suite confirme ces premiers manquements à la rigueur sur au moins deux plans.

Sur le plan de la structure

Un même niveau de titre pour annoncer des notions non indépendantes (*Nombres naturels, Nombres décimaux*) et des mouvements de la pensée (*Identification des situations de proportionnalité*).

[6] Idée qui, appliquée au sens, ne peut qu'être approximative et se doit en conséquence d'être précisée puisque tout enchaînement logique est marqué d'une certaine discontinuité.

Des enchevêtrements de notions plus ou moins apparentées (sans que ce lien de parenté soit le garant de leur cohésion) : fractions (p. 20) dans le paragraphe consacré aux entiers naturels (!) ; pourcentages, décimaux, division, reliés par des analogies de surface dont certaines peuvent être trompeuses (bas de la p.21) ; situations-problèmes et problèmes d'application (p. 20).

Des éclatements sans justification ou dont la seule justification semble être le souci de simplifier : fractions déconnectées du paragraphe sur les décimaux ; pourcentages – et échelles – explicitement exclues (p. 22) de la proportionnalité, abordés p.20 avec les problèmes puis repris p. 21 ; la rubrique *Problèmes,* sous-paragraphe des notions de *Nombres naturels* (p 19) et *Nombres décimaux* (p. 20), mais paragraphe à part entière dans le cas de la proportionnalité (p. 21).

Sur le plan du discours

Des recommandations, des commentaires, des exemples, entremêlés à l'énoncé de notions (division p. 20) ; l'alternance d'un discours de spécialiste (*les situations de proportionnalité sont les seules situations pour lesquelles un seul couple de données [...] détermine toute l'information,* p. 21)et d'un discours de "bon sens" *éducatif* (passage sur la *règle de trois* vs la linéarité p. 21).

Nos principes de séparation et d'articulation sont ainsi d'entrée de jeu mis à rude épreuve, tout autant que les intentions annoncées de sens (le "bon" sens ?), de continuité (malgré enchevêtrements et éclatements ?), de clarification de fondamentaux (abusivement identifiés aux certitudes qui fondent "le bon sens" ?).

Après cette première analyse globale, nous allons examiner certains passages de ce projet de programme dans le détail. Nous avons retenu trois thèmes d'étude, non nécessairement séparés et / ou articulés par le texte étudié : fractions et décimaux ; la division ; proportionnalité, pourcentages et échelles. Ces trois thèmes sont à la fois séparables : les fractions sont des écritures de nombres, la division est une opération portant sur deux nombres, la proportionnalité est l'étude d'un lien fonctionnel particulier entre deux séries de nombres ; et articulables soit par le biais des problèmes physiques qu'ils peuvent modéliser, soit – sans exclusivité – par un questionnement interne aux mathématiques : extension de la notion de division dans l'ensemble des entiers ; constat que le quotient d'un entier par un entier n'est pas forcément un entier et donc nécessité de recourir aux rationnels et à leur écriture fractionnaire ou décimale ; application du lien ainsi établi entre deux entiers à d'autres entiers, engendrant deux séries de nombres proportionnelles ; possibilité d'envisager enfin que ces nouveaux nombres opèrent récursivement sur eux-mêmes, permettant une extension des notions de division et de proportionnalité à des arguments non entiers. Examinons donc la capacité de ce texte à rendre compte de ces différents niveaux de séparations et du réseau d'articulations qui relie les notions abordées.

•Fractions et décimaux

Rappelons en les résumant les choix didactiques que notre étude a mis à l'épreuve : dans la manière d'exprimer un rapport, il importe de valoriser davantage la nature du lien entre les deux termes de ce rapport que les deux termes eux-mêmes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi un questionnement interne aux mathématiques plutôt qu'externe (physique par exemple) comme moteur de l'apprentissage initial, un système géométrique plutôt que numérique pour introduire les rationnels, les droites graduées plutôt que les parts de tarte pour servir de support à ce système géométrique. Dans le même temps, les nouveaux nombres ainsi introduits révèlent leur capacité à modéliser et résoudre une certaine classe de problèmes physiques. Enfin, l'étude des systèmes fractionnaires puis décimaux amène plus de convivialité pour certains traitements (comparaison, somme...) tout en étant légitimés, contrôlés et validés par leur articulation mutuelle et avec le système des droites graduées.

Le projet de nouveau programme aborde la notion de fraction comme décrivant un tout unitaire découpé en parties égales dont on retient un certain nombre (3 parts de tarte sur un total de 4, p. 20). Il prend ainsi le risque, non seulement de ne pas lever les ambiguïtés liées à l'apprentissage des rationnels, mais encore de les pérenniser : un **couple** d'entiers (ce qui doit être la raison du rattachement de la notion au paragraphe concernant les entiers naturels), exprimant une **double** quantification au lieu d'**un** nombre, exprimant **une** grandeur relative.

Rappelons quelques résultats issus de nos observations (Adjiage,.1999, p.198)

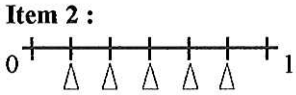
Classe / Question	CM1 Weyersheim	CM2 Sélestat
Item 1 : Quelle fraction est grisée ?	83%	92%
Item 2 : 	28%	52%

Tableau 13 : réussite comparée à deux items, l'un portant sur les parts de tarte, l'autre sur les droites graduées

Une année d'enseignement sépare les deux classes testées lors de la passation du questionnaire. Si ce différentiel d'enseignement se retrouve bien dans l'écart des réussites à l'item portant sur les droites graduées, il ne semble avoir qu'une influence négligeable sur l'item "parts de tarte" : les élèves atteignent très vite une bonne maîtrise de ce moyen d'expression. C'est sans doute ce qui fait son succès, tant auprès des élèves que des enseignants. Mais cette rentabilité rapide en termes d'apprentissage débouche-t-elle sur une meilleure maîtrise des concepts et problèmes de base ? C'est ce que nous avons testé (Adjiage, 1999, p.204) au moyen du tableau suivant, qui croise la réussite globale à un questionnaire en 6 items[7] avec le choix du système géométrique, spontanément retenu (g pour droite graduée, t pour parts de tarte) par les élèves, pour représenter $\frac{7}{4}$.

Réussite globale	≥ 83%	< 83%	Total
g	7	1	**8**
t	5	13	**18**
Total	**12**	**14**	**26**

Tableau 14 : lien entre réussite globale et choix du système géométrique de représentation

Nous avions conclu de cette étude que "les parts de tarte", plus machine à fabriquer de l'évidence qu'outil efficace de gestion de la complexité, pouvaient même faire écran à la reconnaissance de cette complexité, confirmant ce que d'autres auteurs avaient déjà pointé : "This approach has proved not to work for a great many children, if not for all" (Streefland, 1993, p. 114). L'appropriation du système des droites graduées est en revanche d'un coût élevé, mais cet investissement est rentable en termes de reconnaissance et de gestion de la complexité.

Limiter l'introduction des fractions à des considérations sur des parts de tarte revient donc à programmer un défaut d'enseignement. C'est pourtant le choix revendiqué par les auteurs du texte étudié, avec d'autant plus de constance que les recommandations qui suivent en amplifient la portée : *Les fractions que l'on compare sont données d'emblée au même dénominateur* [...] *on se limitera aux fractions inférieures ou égales à 1*, occultant un peu plus

[7] Quatre de ces items portaient sur des questions de conversion d'un nombre rationnel, entre un système géométrique et le système fractionnaire, deux autres sur des problèmes non triviaux de gestion de proportions (Adjiage, 1999, p.223).

[8] "Fais le dessin que tu veux pour représenter $\frac{7}{4}$ ".

nature relative d'une fraction (un numérateur **par rapport** à un dénominateur, une position par rapport aux entiers, tous les entiers, et pas seulement 1).

Rappelons ce qu'écrivaient Guy et Nadine Brousseau (1987, p. 22) à propos de la stratégie d'évitement des fractions de dénominateurs différents pour l'enseignement initial : "[Les enfants non capables de concevoir d'emblée le cas général] sont détournés des questions pertinentes (pourquoi les dénominateurs ne s'additionnent pas ? [lorsqu'on additionne deux fractions]) et des efforts nécessaires de conception et de vérification par l'apparente facilité de l'action [la seule addition des numérateurs lorsque le dénominateur est le même]". Ces auteurs ajoutent plus loin que certains enfants ne parviendront jamais à remettre en cause les conceptions initiales erronées ainsi installées. Loin de favoriser les plus faibles au nom desquels elle est en général justifiée, cette dérobade devant la rigueur risque donc de les pénaliser.

Nous avons pu, pour notre part, constater la diversité des heuristiques mobilisées par les élèves observés pour comparer des fractions supérieures ou inférieures à 1, et de dénominateurs pas forcément égaux : par exemple en les séparant par un entier, comme dans le cas de $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{5}$, ou encore en les comparant à une fraction simple comme $\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{5}$ c'est un demi [$\frac{2,5}{5}$] plus un "demi-cinquième", $\frac{4}{7}$ c'est un demi [$\frac{3,5}{7}$] plus un "demi-septième", et comme [à numérateur constant] les cinquièmes sont supérieurs aux septièmes : $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$). Ces heuristiques témoignent remarquablement d'une prise en compte non séparée des deux termes d'une fraction, mais bien du rapport de l'un à l'autre.

A l'inverse, 61 % des élèves de la classe de CM1 de Weyersheim (Adjiage, 1999, p. 205) ayant eu un enseignement classique [non basé sur les logiciels de la série ORATIO] mais soigné des fractions, proposent l'un ou l'autre des dessins suivants pour représenter $\frac{7}{4}$ (lors d'une activité antérieure, un petit carreau avait effectivement représenté $\frac{1}{4}$) :

Figure 2 : une vision non relative de $\frac{7}{4}$

confirmant ce que nombre d'auteurs ont relevé (voir notamment Figueras et alii, 1987) sur la prédominance de la cardinalité du numérateur (ou du dénominateur) sur l'expression d'une proportion de l'un à l'autre. Remarquons cependant que, concernant ces élèves en tous cas, la distance à la réussite est minime : il ne manque que l'indication, soit de l'unité, soit de tout autre référence numérique pour que leur représentation soit correcte. Il serait donc regrettable de ne pas achever cet enseignement, sous prétexte que les programmes n'y invitent pas, alors que le succès est à portée d'une intervention minimale, et que cette dernière aurait des conséquences majeures sur la conception de la notion de fraction.

Ce n'est pas en identifiant une notion à son aspect le plus simpliste (3 parts parmi 4) puis en en donnant à voir une illustration ("tu vois, $\frac{3}{4}$ c'est ça") qu'on privilégie l'identification puis la maîtrise, par les élèves, de fondamentaux. Ce qui nous semble fondamental, c'est de se doter d'un outil d'enseignement qui suscite un questionnement, interne et / ou externe aux mathématiques, destiné à rendre compte des aspects les plus simples comme les plus complexes de la notion étudiée. Explorer le potentiel de cet outil devient alors l'occasion de l'apprentissage. Il convient enfin, pour annoncer les articulations nécessaires, de bien discerner les trois plans (plan sémiotique, plan physique, plan du modèle mathématique) pouvant interagir lors de l'exploration de cet outil. Nous avons, pour notre part, proposé et expérimenté un tel outil, dont un composant essentiel est un registre de droites graduées, développé dans un environnement informatique (Adjiage & Heideier, 1998).

Le projet d'instructions officielles sur l'enseignement des fractions amène du brouillage là où un effort de clarification est devenu nécessaire, notamment en ce qui concerne les trois plans évoqués ci-dessus. Rabattre ces plans les uns sur les autres, c'est courir le risque d'une identification des mathématiques plus à un code, destiné à l'enregistrement passif d'une réalité physique sans mystère, qu'à un système capable de poser et de résoudre soit ses propres problèmes, soit des problèmes venus d'ailleurs.

•La division

Les parties concernant la division euclidienne (pp. 19 et 20) puis la division décimale[9] (sic) de deux entiers (p. 20) prennent acte de *l'existence de calculettes qui* ***obligent*** (c'est nous qui surlignons) *à reconsidérer globalement l'apprentissage* [de cette opération] (p. 19). Il nous semble en effet souhaitable de développer une culture du calcul au moyen des calculatrices puisque ces dernières permettent, au-delà de la production rapide de résultats, le traitement d'une classe plus vaste de problèmes, en quantité et en qualité, et centrent l'initiative sur le choix opératoire plutôt que sur une quelconque virtuosité algorithmique. Nous disons bien développer une culture, et pas seulement absorber un nouvel outil, car l'usage des calculatrices demande, notamment en ce qui concerne la division, une remise en cause des pratiques de calculs papier / crayon en favorisant des attitudes d'anticipations et de contrôles : choix a priori et / ou a posteriori d'une précision adéquate au problème ; recherche d'un ordre de grandeur, destiné à valider le résultat mais aussi à sécuriser le choix opératoire, toujours plus simple à effectuer sur des valeurs arrondies que sur les valeurs exactes ; décision sur la pertinence d'un reste et son calcul éventuel ; gestion du nombre de décimales du quotient. Si cette culture d'accompagnement de l'usage d'une calculatrice est plus ou moins bien exposée p. 21, il est regrettable qu'elle ne soit pas explicitement reliée, en tant que contrepartie heureuse, à l'abandon de l'algorithme de la division. D'autant que l'argument principal justifiant cet abandon nous semble contestable : il est en effet inexact de prétendre que l'apprentissage de l'algorithme de la division n'est qu'un *travail formel* qui *n'enrichirait pas le sens* (p. 19) de cette opération contrairement à la soustraction et à la multiplication. Nous savons en effet qu'il est possible – voir par exemple (ERMEL CM1, 1997, pp.229-231) – d'organiser une filiation du sens à l'algorithme abouti de la division, en développant par exemple des techniques intermédiaires serrant au plus près les actions entreprises spontanément par les élèves lors de la gestion de problèmes de division. C'est la raison pour laquelle il nous aurait semblé plus sage de limiter radicalement le degré de virtuosité et d'automaticité exigible à son propos plutôt que de jeter cette technique opératoire aux oubliettes de l'Histoire – pas tout à fait cependant puisque la classique disposition "à la française" est ressuscitée lorsque le dividende est *dans le champ de la table de multiplication liée au diviseur,* soit lorsque cette disposition n'a plus aucune vertu, sauf celle d'être plus *claire* que *l'égalité : (diviseur x quotient) + reste = dividende pour qui ne maîtrise pas encore la priorité des opérations et le rôle des parenthèses* (p. 20).

Plus critiquable encore est l'absence de lien entre division et fraction ou, en tous cas, le lien expéditif et purement formel qui est proposé et sur lequel nous reviendrons plus loin. Au lieu d'inscrire ces apprentissages dans le cadre général de la relation partie / tout, on isole la division en un chapitre indépendant, comme le veut la tradition. Ce qui conduit à des omissions et à des passages en force. Au titre des premières, on relève que seule est prise en compte la division par soustractions répétées (le d'abord qui introduit cette première approche de la division – p. 19 – n'est suivi d'aucun ensuite) mais pas la division-partage. Doit-on en déduire qu'un problème, comme partager 24 billes entre 6 enfants, pourtant fortement ancré dans la tradition ne doit plus être proposé à ce stade de la scolarité ? Dans le cas contraire, et si *la division doit être liée à la question "combien de fois" un nombre est-il contenu dans un autre* (p. 19), il conviendrait au minimum de rappeler l'existence des problèmes de partage, qui ne tombent pas a priori dans le champ de cette question, mais dont la modélisation par une division – dans l'acception qui vient d'être rappelée – est possible moyennant un traitement numérique – transformant dans notre exemple 4 unités de 6 en 6 unités de 4. Une telle démarche supposerait que l'on sépare / articule problème "physique" et problème numérique Ce n'est manifestement pas le projet de ce texte dont la préoccupation principale semble avant tout de rechercher – et de consentir – les rabais d'apprentissage qui caressent le sens commun : *l'objectif est d'apprendre* (sic) *à l'élève à jongler* (re-sic) *de toutes les manières possibles avec les éléments de l'égalité. (diviseur x quotient) + reste = dividende.* Suite à cette jonglerie (physique ? mathématique ?), l'élève devrait identifier une classe de problèmes (y compris la division-partage ?) dont la résolution passe par la question : *"combien de fois" un nombre est-il contenu dans un autre. Cette expression courante introduit l'idée de diviser* (p. 21), déclenchant automatiquement le recours à la touche "÷" de la calculatrice, sans trop se poser de questions de modélisation. Les conditionnements qui préparent aux passages en force ultérieurs sont mis en place.

*En **découvrant** la division décimale de deux entiers, l'élève devra se **familiariser** avec les écritures **synonymes** d'un nombre (un quart, c'est aussi $\frac{25}{100}$ ou 0,25).*(p. 20, mais c'est nous qui surlignons).

La question que nous avons envie de poser avant tout c'est : "comment ?" Comment découvre-t-on la division décimale des entiers dans un contexte qui ignore le rapprochement des notions de division et de fraction ? Si l'on recherche des solutions exactes à une équation

[9] Qu'en est-il de la division à quotient rationnel non décimal comme dans 7 ÷ 3 ?

comme *3x = 4,* il serait souhaitable : qu'on puisse envisager des fractions supérieures à 1 ; qu'un lien soit établi[10] entre quatre fois un tiers ($\frac{4}{3}$ dans l'acception parts de tarte préconisée) et un tiers de quatre ou quatre divisé par trois. Si l'on se contente d'une solution décimale approchée, il s'agira au minimum d'expliquer l'origine des décimales fournies par la calculatrice : transformation du reste r en fraction décimale ($r = \frac{10^n \times r}{10^n}$) supérieure à 1(!) ; recherche de la plus grande fraction décimale, pour n fixé, telle que le produit du diviseur 3 – dans notre exemple – par cette fraction (et pas le contraire puisqu'il s'agit de répondre à la question "en r combien de fois 3"), soit inférieur à r. Dans tous les cas, on ne peut éviter les fractions, et dans un cadre qui dépasse nettement celui délimité par ce projet d'instructions officielles... sauf à accepter un enseignement par conditionnements successifs auquel on avait renoncé après 1970.

Quant à *se familiariser avec les écritures synonymes*, nous avons établi à la suite de Duval (1995, pp. 41-42) que : un quart (verbal), $\frac{25}{100}$ (écriture fractionnaire), 0,25 (écriture décimale) ne sont pas des synonymes (*expressions qui ont une signification très voisine* d'après le Robert) mais des unités de registres hétérogènes et que, s'ils réfèrent à un même objet mathématique, ils sont pris dans des réseaux de signification peu congruents (Adjiage, 1999, pp. 129-136).

Par ailleurs, un tiers des élèves observés lors de notre expérimentation, malgré un enseignement fortement orienté vers la séparation et l'articulation de ces divers modes d'expression, convertissaient trois dixièmes en *3,10,* soit de la manière la plus phonétique qui soit (Adjiage, 1999, p. 320).

Étant donnée l'indigence de la logistique préconisée, on voit mal comment on pourrait éviter des passages en force pour atteindre, vis à vis de questions aussi délicates, le degré de familiarité souhaité !

Faisant fi des résultats les plus concluants de la recherche en didactique, ce texte se contente donc d'assurer la promotion de certaines idées folkloriques, outrancièrement simplistes, réputées apporter les bonnes réponses avant même que ne se posent les bonnes questions.

[10] Par exemple en suscitant le questionnement suggéré par la Figure 1, p. 7

•Proportionnalité, pourcentages et échelles

Nous n'entendons pas débattre de la proportionnalité en général (voir par exemple COPREM, 1987, pp. 9-30) ni, dans le détail, de la manière dont ce texte l'appréhende. Contentons-nous de relever que la "philosophie" générale d'un enseignement au rabais, susceptible de pérenniser certaines conceptions erronées, est maintenue. C'est ce qu'illustrent les trois points suivants.

• La définition première qui est donnée (p. 21) d'une situation de proportionnalité : *répétition additive d'une valeur unitaire (pour chaque baguette achetée, on paie le même prix)*, alors que le modèle proportionnel est avant tout multiplicatif (la limitation *à des exemples utilisant les seuls nombres entiers* (p. 22), qui autorisent une interprétation du produit en termes d'additions répétées, va dans le même sens, c'est à dire vers le bas) ;

• l'abandon de toute référence à un modèle linéaire via la mise hors programme du coefficient de proportionnalité et des tableaux (p. 21) alors que, dès 1981, Dupuis et Pluvinage (1981, p. 198) écrivaient : "[...] l'apprentissage du recours à des tableaux [de proportionnalité] [...] joue un rôle décisif dans les réponses à des questions courantes où intervient la proportionnalité" ;

• *la proportionnalité ne sera pas liée aux échelles et aux pourcentages durant la scolarité élémentaire* (p. 22).

A titre d'exemple, examinons de plus près ce dernier point, car ses conséquences en termes de conception d'enseignement sont édifiantes. (C'est nous qui surlignons).

Le maître introduit l'idée que certains nombres isolés ne donnent pas une information suffisante (savoir qu'il y a 60 femmes députés ne dit pas si c'est beaucoup...). Il amène l'élève à [...] se demander "sur combien ?". Cette expression ***courante introduit l'idée de diviser****. La division [...]* ***mène*** *à un nombre décimal qui se* ***dit en*** *pourcentage (0,18 se dira 18 %* ***de*** *; 0,182 se* ***dira aussi*** *18 % en arrondissant).*

Soit en résumant : le stimulus "sur combien ?" déclenche la réponse "division", qui déclenche "calculatrice", qui fournit un nombre décimal qui se lit tout à coup, et contrairement aux usages précédents, "dix huit pour cent **de**" ! D'où vient cette génération spontanée du "pour", du "cent", du "de" ? Où est passé le "zéro-virgule" ? Et si la disparition de l'un est responsable de l'apparition des autres, la référence à une situation concrète n'éclaire en rien ce tour de passe-passe.

Une application simple du principe de séparation / articulation permet de repérer au minimum quatre temps nécessaires à cet apprentissage, qu'il est tout à fait envisageable de répartir entre le cycle 3 des écoles et les premières années de collège (l'ordre d'énumération n'étant pas forcément chronologique) :

1. dans le domaine numérique, la conversion de 0,18 en $\frac{18}{100}$, dont nous avons montré (Adjiage, 1999, pp. 129-132) qu'elle est non congruente dans la mesure où elle fait passer d'un registre unidimensionnel (les écritures décimales) à un registre bi-dimensionnel (les écritures fractionnaires) ; ce qui signifie que ce passage mérite d'être l'objet d'une étude approfondie, pouvant par exemple recourir à un registre géométrique intermédiaire (Adjiage et Pluvinage, 2000), et qu'il ne suffit pas d'une quelconque jonglerie pour le légitimer ;

2. dans le domaine géométrico-numérique, le fonctionnement d'un nombre (dont une expression fractionnaire est par exemple $\frac{18}{100}$) en tant qu'opérateur agissant sur d'autres nombres par dilatation ; là encore, le recours à un registre unidimensionnel peut fournir à la fois une représentation de ce nombre mais surtout de son mode d'action sur les autres nombres (Adjiage, 1999, pp. 143-144) ;

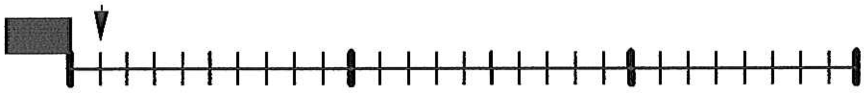


Figure 3 : une représentation de $\frac{18}{100}$ (pointé par la flèche), sur une droite comportant initialement 100 graduations, associée à la dilatation transformant 100 en 18. Il est possible de resubdiviser afin de lire plus commodément, sur l'échelle du bas, l'image d'un nombre quelconque

3. dans le domaine "physique", l'étude d'une situation de données relatives (par exemple une comparaison) ; la mise en place d'un questionnement que l'étape suivante devra prendre en charge ;

4. à l'articulation entre les domaines numériques et "physiques", le choix d'un effectif fictif de comparaison (100 est un choix raisonnable à de multiples titres) ; le modèle linéaire implicite pour ramener les effectifs réels à cet effectif fictif ; le lien avec la représentation exposée en 2. et l'expression fractionnaire, $\frac{18}{100}$, de cet opérateur.

Le point 4. explique pourquoi le découplage des notions de pourcentage et de proportionnalité est une absurdité didactique et épistémologique. En effet, le "pour" de pourcentage implique une transformation de la part retenue (18) à l'effectif fictif (100), et invite à rechercher les parts retenues correspondant à d'autres effectifs fictifs jusqu'à obtenir, par linéarité par exemple, l'effectif réel recherché. D'où une vision fonctionnelle inscrite dans l'expression même de pourcentage. Exhiber **un** opérateur linéaire $(\frac{18}{100})$, exprimant **ce** nouvel objet (**une** fonction), devient alors une exigence épistémologique.

L'introduction aux pourcentages, telle qu'elle est préconisée dans ce texte, est en fait la description d'un algorithme. La maîtrise de cet algorithme est, pour nous, le terme d'un processus de conquête qui permet d'en cerner le champ d'application. Il s'agit donc d'une étape finale et non initiale du processus d'apprentissage. Sauf à accepter de réduire l'enseignement correspondant à un dressage (attitude par ailleurs condamnée en ce qui concerne le retour systématique à l'unité p. 21) qui, au-delà des problèmes éthiques qu'une telle option pose, ne saurait être efficace que dans un nombre limité et non déterminé de cas.

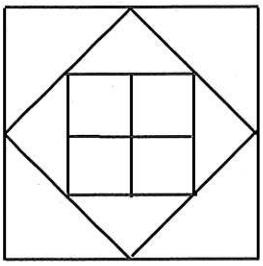
•Conclusion

Nous avons rappelé en quoi les principes de séparation et d'articulation se trouvaient à l'origine même du projet de l'activité mathématique. C'est la raison pour laquelle nous les avons conservés comme fil conducteur des différentes sections de cet article. Nous avons résumé une expérience d'enseignement qui a pu être menée et validée sur la base d'une identification claire des trois domaines d'activité qui fondent, justifient et orientent les mathématique. Il importe de retenir que, dès l'école élémentaire, un questionnement purement interne aux mathématiques peut être le moteur de l'apprentissage. Ce questionnement emprunte nécessairement des formes hétérogènes de représentations pour s'exprimer mais, surtout, peut être engendré par la spécificité et l'hétérogénéité de ces formes d'expression. La prise en compte et le traitement de problèmes physiques n'est donc pas la seule occasion de provoquer l'activité mathématique à ce stade de la scolarité comme à n'importe quel autre stade.

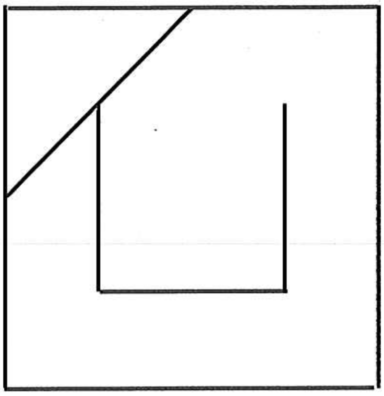
Il importait aussi de ne pas laisser passer l'occasion d'une réforme des programmes sans tenter de mesurer l'impact de la recherche en didactique sur les grandes orientations de ces derniers. Il était d'autre part tentant de mettre à l'épreuve des principes de séparation et d'articulation les intentions affirmées de retour aux fondamentaux. Nous avons vu que la philosophie générale de ce texte ne nous permettait pas de dépasser un niveau trivial de l'analyse didactique. La raison en est que sa motivation n'est pas une quelconque réflexion sur l'activité mathématique et les moyens de s'approprier ses concepts, mais la volonté de prendre acte d'une (soi-disant) réalité sociétale, culturelle...imposée de l'extérieur. Ce texte paraît avant tout destiné à rassurer des inquiétudes – par ailleurs légitimes – et à améliorer les performances de la pire manière qui soit : enregistrer une baisse de niveau voire l'anticiper en battant en retraite sur un certain nombre de points importants. Trois d'entre eux au minimum nous semblent devoir être revus : la notion de fraction détachée de la notion de nombre ; la limitation aux fractions inférieures à 1 ; la réduction algorithmique de la notion de pourcentage.

Appliquer ce texte en l'état reviendrait à activer une véritable spirale de l'ignorance, pour les élèves comme pour les enseignants, et à encourager l'illusion suivant laquelle une chute de l'exigence débouchera sur une meilleure adéquation enseignants / enseignement / élèves. Nous avons pour notre part émis quelques propositions de réorientation, qui s'appuient sur la recherche disponible mais aussi sur nos observations et expérimentations personnelles. Mais c'est toute la philosophie du texte qui devrait changer pour que ces propositions lui soient intégrables et, en premier lieu, le dogme de l'immédiatement exécutable, comme unique critère de séparation des connaissances utiles des connaissances superflues, qui devrait être abandonné.

Annexe 1 : item 2, évaluation nationale (CE2, 1995)



Voici un dessin

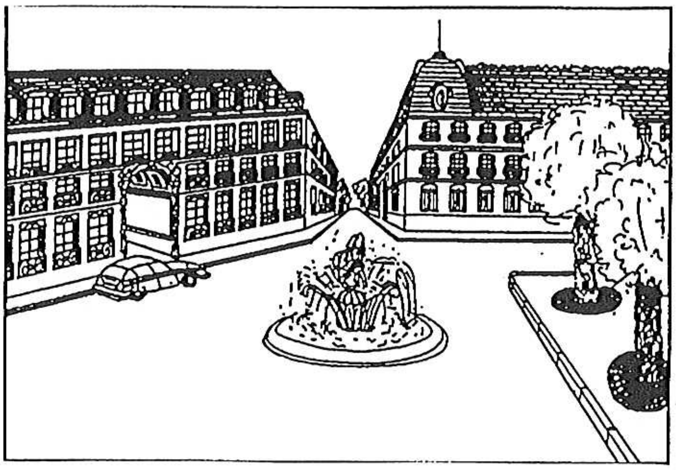


On a commencé à le recopier.

Continue, en t'aidant d'une règle.

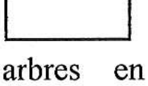
Annexe 2 : item 10, évaluation nationale (CE2, 1995)

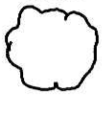
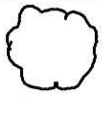
Voici ce que Julie voit de sa fenêtre.

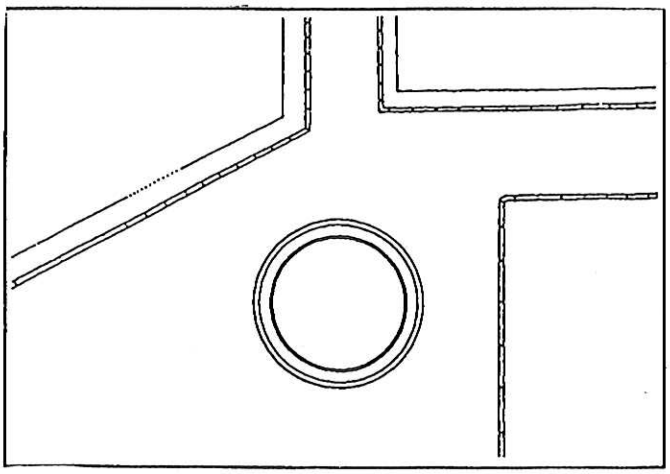


Sur le plan ci-dessous, retrouve :

- la fontaine et écris « FONTAINE » ;
- la maison de droite et écris « MAISON ».

Place la voiture en dessinant : 

Place les deux grands arbres en dessinant :  et  .



Bibliographie

Adjiage R. & Heideier A. (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

Adjiage R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

Adjiage R. et Pluvinage F. (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Bulletin officiel de l'Éducation Nationale (spécial n° 7, 26 août 1999), pp. 1-83

Brousseau G. (1981), *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, pp. 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Brousseau G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

Brousseau G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

COPREM, (1987), *La proportionnalité, le calcul numérique*, CRDP de Strasbourg, pp. 9-30.

Douady R. et Perrin-Glorian M.J., (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.

Dupuis et Pluvinage, (1981), *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.

Duval R. (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, (pp. 37-65), IREM de Strasbourg.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Duval R. (1998-1), *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, (pp. 139-163), IREM de Strasbourg.

Duval R. (1998-2), *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, (pp. 165-196), IREM de Strasbourg.

ERMEL CM1 (1997), INRP, (pp. 229-231), Hâtier Pédagogie, Paris.

Figueras O. ; Filloy E. ; Valdemoros M. (1987), *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol..1, (pp. 366-), Montréal.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1995), *Evaluation à l'entrée en CE2, mathématiques*, cahier de l'élève et consignes de passation et de codage, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1997), *Evaluation à l'entrée en 6ème, mathématiques*, cahier de l'élève et consignes de passation et de codage, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1996), Direction de la Programmation et du Développement, *Evaluations CE2 - sixième, résultats nationaux septembre 1995*, les Dossiers d'éducation et formations n° 65, Paris.

Ministère de l'Education nationale, de la Recherche et de la Technologie, (1998), Direction de la Programmation et du Développement, *Evaluations CE2 - sixième, résultats nationaux septembre 1997*, les Dossiers d'éducation et formations n° 100, Paris.

Pitkethly A. & Hunting R., (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, (pp. 5-37) , Cambridge.

Pluvinage F., (1998), *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de Didactique et Sciences Cognitives, vol. 7, (pp. 125-138), IREM Strasbourg.

Streefland L. (1993), *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, (pp. 109-135), Dordrecht, Holland.

Le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.

Jean- Claude Rauscher (IREM de Strasbourg)[1]

Résumé

La question posée à l'origine de cette recherche porte sur les apprentissages numériques en classe de 6ème : dans quelle mesure la diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres et les différentes tâches qui résultent peuvent-elles favoriser ces apprentissages et les enrichir ? Nous avons ainsi été amenés à analyser les conditions dans lesquelles les différentes écritures et représentations peuvent constituer des ressorts d'apprentissages. En accompagnement des activités mathématiques proposées, on a également sollicité des productions écrites des élèves supposant des retours réflexifs sur les connaissances mises en jeu. L'évolution des productions obtenues atteste d'un développement de la capacité à expliciter les apprentissages en cours ; elle permet aussi aux professeurs d'observer la progressions des conceptions dans le domaine considéré et de réguler leur enseignement.

Dans le cadre d'une recherche menée en collaboration entre l'INRP et l'ADIREM à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", la réflexion confiée à l'IREM de Strasbourg concernait plus spécialement **le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.** Tout particulièrement, nous avons envisagé les apprentissages relatifs aux nombres décimaux en début de collège. Le texte qui suit a pour but de donner une idée de l'ensemble du travail mené et de développer plus précisément quelques aspects qui nous ont paru cruciaux. Pour commencer nous préciserons les trois perspectives à l'origine de notre travail. Nous donnerons ensuite un aperçu des travaux réalisés et des procédures utilisées pour développer ces trois volets. Ensuite nous développerons quelques indications concernant les résultats observés.

Le questionnement à l'origine de la recherche.

Le premier volet : prise en compte des différents écritures et modes de représentation des nombres dans les apprentissages numériques.

En début de collège, les acquisitions dans le domaine des nombres restent en grande partie à faire : si les résultats des évaluations en début de 6ème montrent une bonne maîtrise des nombres entiers, ils montrent en revanche que le travail amorcé à l'école primaire à propos des décimaux ou des fractions n'est de loin pas achevé. L'année précédent le démarrage de la

---

[1] Travail mené dans le cadre d'une recherche nationale menée, en collaboration avec l'INRP et l'ADIREM à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", à l'IREM de Strasbourg avec BARBIER Jean-Luc (Collège Hans Arp, Strasbourg), BLONDEL Edith (Collège Fustel, Strasbourg), BOURDENET Gilles (Collège de Pfulgriesheim), HEYBERGER Gilles (Collège de La Broque), KISTER Jean-Paul (Collège Hochfelden), RAUSCHER Jean-Claude (Coordonnateur du groupe, Collège Martin Schongauer d'Ostwald et nommé depuis lors Maître de Conférences à l'IUFM d'Alsace), TOUCHEBOEUF Agnès (Collège de Vendenheim), ZILLIOX André (Collège Hochfelden). F. PLUVINAGE (ULP Strasbourg) a pu nous donner quelques précieuses appréciations.

© *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 7 (2001) (p. 49 – 76), IREM Strasbourg

recherche, nous avions déjà amorcé un travail à ce sujet. Une analyse des productions de nos élèves dans le domaine des travaux numériques nous avait déjà confirmé que les différents modes d'écriture (utilisation de la virgule, fractions, etc.) et de représentation des nombres (graduations, fractions d'aires, etc.) constituaient une source importante de difficultés. La recherche sur la place de l'écrit nous a alors permis de préciser deux questions auxquelles notre recherche se proposait de donner des éléments de réponse dans le cadre de l'enseignement au collège :

1) La diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres auxquels sont confrontés les élèves peuvent être considérés comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais nous nous demandions au contraire, dans quelle mesure cette diversité et cette complexité et les différents tâches qui résultent de leurs confrontations pouvaient favoriser et enrichir les processus de conceptualisation des nombres. La réflexion sur le repérage et la mise en oeuvre des tâches possibles par rapport aux différents écrits et l'évaluation des effets de cette mise en oeuvre méritaient à nos yeux d'être approfondies.

2) On peut se demander si les travaux que les élèves ont à effectuer en mathématique à propos d'objets proprement mathématiques, nécessitent et permettent le franchissement d'étapes importantes quant à la maîtrise de différents niveaux ou fonctions de l'écrit : par exemple, prise en compte d'une information isolée en opposition à une prise en compte globale d'informations lorsqu'on a à effectuer un calcul. Les travaux mathématiques seraient alors à la base du développement de compétences relatives à la maîtrise de l'écrit qui débordent du champ de la discipline proprement dite. Il s'agirait ici de repérer la diversité et la complexité des tâches que nécessitent l'appropriation par les élèves des objets mathématiques envisagés et si possible d'en apprécier la valeur dans le processus éducatif.

En anticipant déjà sur la suite de notre article, nous pouvons déjà annoncer que l'essentiel de notre travail a porté sur la première question.

Le deuxième volet : la production d'écrits par les élèves en appui aux apprentissages.

Après un an de travail, un deuxième volet de travail est venu s'ajouter au précédent à partir de la nécessité d'évaluer les effets du travail d'enseignement mis en place à la suite du premier volet et aussi à partir de la stimulation engendrée par la confrontation avec d'autres groupes menant cette recherche INRP/ADIREM lors des réunions annuelles à Paris qui nous a incité à développer cet aspect de la prise en compte de l'écrit dans les apprentissages.

La première façon d'évaluer les effets d'une telle action est classique: il s'agissait en certaines occasions d'évaluation de reprendre certaines questions posées en début d'année. En voici un exemple relatif à l'année de recherche 94/95 :

		Septembre	Avril
I 1	2,3 x 10	75,8%	89,2%
I 2	35,2 x 100	59,8%	74,2%

La deuxième façon que nous avons eu d'évaluer les effets de notre enseignement est moins classique et c'est elle qui nous a ouvert de nouvelles perspectives relatives à la recherche sur l'écrit : elle sollicite en effet chez les élèves la production d'écrits inhabituels mais en relation avec les contenus enseignés. Il s'agissait de vérifier s'il y avait traces conscientes et restituables chez les élèves des procédures de médiation rencontrées aux cours de l'année. Par exemple toujours en 94/95 sur le thème précis de la multiplication d'un entier par un décimal, nous avons demandé aux élèves de répondre aux questions suivantes :

7x0,5

1- Comment lis-tu cela ?
2- Quelle réponse proposes-tu ?
3- Peux-tu donner toutes les façons que tu connais pour illustrer ou effectuer ce calcul ?
4- Peux-tu donner l'énoncé d'un problème conduisant à cette opération ?

Et dans une évaluation finale nous avons proposé aux élèves de répondre au questionnaire suivant pour voir dans quelle mesure après cette année scolaire ils étaient capables de formuler les connaissances ou les activités rencontrées.

1) Qu'est-ce que tu as vu de neuf cette année en mathématiques ?
2) Dans tout ce que qu'on a fait qu'est-ce que tu as préféré ?
3) Qu'est-ce que tu as le moins aimé ?
4) Y-a-t-il des choses qui te semblaient difficiles et que tu as maintenant comprises ?
5) Y-a-t-il des choses que tu n'as pas comprises ?
6) Cette année, as-tu appris quelques choses de neuf sur :
    a) Les nombres
    b) L'addition et la soustraction
    c) La multiplication
    d) La division

Relativement à ce dernier questionnaire, l'analyse des productions des élèves nous montrait alors que majoritairement et tout particulièrement les élèves faibles ne formulent pas ou peu les connaissances rencontrées : "rien" ou juste une rubrique "les fractions". Mais l'on perçoit souvent l'importance d'événements personnels au cours de l'année : "le jour où j'ai compris la division par 0,1.." ou "que multiplier par un nombre c'était pas forcément plus grand".

Ces résultats, apparemment un peu maigres nous ont rendu attentifs aux possibilités offertes par ces écrits un peu inhabituels. Plutôt que de demander de telles productions écrites en fin d'année et de façon exceptionnelle, ne serait-il pas utile pour l'intégration des connaissances et le développement de capacités langagières de solliciter plus régulièrement les élèves ainsi ? Ces écrits ne pouvaient-ils pas avoir un rôle dans les processus d'apprentissage des élèves. Nous nous référions là aux travaux de MJ. Perrin ("Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993) qui montrent que les élèves qui réussissent sont ceux qui réinvestissent les expériences acquises dans les activités dans la suite. Il est alors important de donner l'occasion aux élèves de se construire des représentations mentales par un retour réflexif sur l'action. En l'occurrence, c'est au moyen de productions écrites, individuelles, que nous avons voulu favoriser dans la suite de la recherche ce retour réflexif.

Un deuxième volet de type exploratoire s'est donc ouvert dans cette recherche : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que que ces écrits pourraient servir d'appui efficaces pour les apprentissages considérés.

Le troisième volet de notre recherche : observation des incidences sur les pratiques des enseignants de la création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème.

Notre équipe était constitué de huit professeurs de mathématiques de 6ème. Cette équipe était au départ hétérogène tant du point de vue des environnements dans lesquels ses membres exerçaient que du point de vue des ses rapports à la didactique et à ses recherches.

En effet, d'une part les établissements et les classes dans lesquels nous travaillions correspondaient à des environnements sociaux variés. Ainsi certains professeurs exercent dans des établissements de zones résidentielles où les élèves ont aux évaluations nationales en début sixième des résultats bien au dessus de la moyenne nationale. D'autres exercent dans des collèges type ZEP où les résultats de début d'année sont plus inquiétants. D'autres encore exercent dans des établissement où le public est très hétérogène et les résultats proches de ceux de l'échantillon national. Cette hétérogénéité là, loin d'être un obstacle pour entamer notre recherche était un atout car représentative de différentes conditions d'enseignement.

D'autre part, il y avait des différences entre les professeurs de l'équipe quant à leur rapport initial à la recherche. Si certains, dont moi-même, avaient participé à des équipes de travail à l'IREM, pour la plupart des enseignants c'était là la première expérience dans ce domaine. De façon générale, la majorité des participants connaissait très peu les recherches menées en didactique des mathématiques. Certains des professeurs faisaient d'ailleurs partie de l'échantillons de professeurs observés à l'occasion de mon travail de thèse (JC Rauscher, 1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège."). A cette occasion, j'avais mis en évidence sur des contenus d'enseignement en géométrie d'importants écarts relatifs à l'analyse des tâches en jeu. En l'occurrence l'observation montrait des manières très différentes de prendre en compte la variétés des registres et des niveaux de complexité dans les traitements à effectuer par les élèves. Je montrais aussi que la progression des élèves de ces professeurs dépendait en grande partie de cette connaissance que les professeurs ont des différentes tâches en jeu dans les contenus abordés. Après avoir soutenu ma thèse, j'ai proposé aux professeurs de mon échantillon de participer à l'IREM de Strasbourg à ce groupe recherche sur les apprentissages numériques en début de collège et plusieurs ont accepté. Cette hétérogénéité de départ se retrouvait aussi dans les idées et les références inspirant les pratiques. Dans les premières discussions de travail que nous avions eu dans le groupe, certains mettaient avant l'importance de la mémoire et de l'apprentissage des algorithmes et exprimaient leur scepticisme quant aux options de ceux qui préconisaient des "activités" jugées trop complexes pour démarrer des apprentissages. Cette hétérogénéité de départ du groupe de travail pouvait apparaître a priori comme un handicap dans une recherche. Pourtant il s'agissait là de ma part et de la part des professeurs qui connaissaient le contenu de ma thèse un moyen de mettre à l'épreuve une hypothèse : à la suite de mon travail de thèse, j'avais émis l'idée que pour développer les connaissances des tâches en jeu sur les contenus d'enseignement et transformer en conséquence les pratiques d'enseignement, le lieu idéal pour les enseignants était un groupe recherche. Les participant du groupe se retrouvaient d'ailleurs unis par leur soucis d'améliorer l'efficacité de leur travail par une recherche pragmatique et ouverte à tous apports et évolutions. L'observation de ces évolutions faisaient donc partie de notre plan de travail et constituait un volet explicite de notre recherche. A priori on pourrait penser qu'il s'agit là d'un volet de la recherche étranger à son sujet : l'écrit au collège. En fait, il est apparu qu'il était intéressant de savoir en quoi la création d'un groupe de recherche précisément sur l'écrit en début de collège aurait des incidences sur les pratiques des enseignants y participant. C'est là le troisième volet de notre recherche. Dans ce compte rendu nous développerons relativement peu ce volet, nous contentant de donner quelques indications et nous consacrant davantage aux deux premiers volets au centre de notre travail.

Nous allons maintenant donner un aperçu des travaux réalisés et des procédures utilisées pour développer ces différents aspect de notre recherche.

Aperçu des travaux réalisés.

1er volet : prise en compte des différents écritures et modes de représentation des nombres dans les apprentissages numériques.

Analyse des difficultés dans les apprentissages numériques en début de 6ème.

Pour élaborer et mettre à l'épreuve dans nos classes des activités pour développer les apprentissages numériques à faire en début de collège à propos des nombres et tout particulièrement des décimaux (écriture, lecture, calculs), nous avons d'abord analysé les productions des élèves dans le cadre des évaluations nationales de début sixième. Cette analyse montre qu'en l'occurrence l'écriture et la manipulation des nombres décimaux nécessite la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers, même si les éléments de base sont les mêmes (chiffres) et que dans un cas comme dans l'autre la disposition de deux chiffres consécutifs se rapporte à deux nombres dans un rapport 10.

Voici quelques observations étayant cette analyse. Si 80% réussissent à effectuer "168,75 + 42,50" sous forme posées, il n'y a plus qu'un élève sur trois pour réussir "7,24 -4,3" posé en ligne. Les réponses montrent alors que de nombreux élèves considèrent les décimaux comme des entiers ou une juxtaposition de deux entiers et leurs appliquent indépendamment les algorithmes qu'ils connaissent sur les entiers : "7,24 -4,3= 3,21". On retrouve ce phénomène lorsque les élèves répondent par exemple que dans le nombre 32,578 le chiffre 7 est celui des dixièmes. A travers leurs réponses, il apparaît que ces élèves appliquent les algorithmes qu'ils connaissent sur les entiers parce qu'ils traitent la partie décimale comme la partie entière en l'organisant de la droite vers la gauche. Ils semblent ignorer les valeurs de position dans la partie décimale des nombres décimaux. La virgule est considérée comme un séparateur fort alors que le traitement adéquat de tels calculs demande justement de considérer l'ensemble du nombre : il y a la même relation entre le chiffre à gauche et à droite de la virgule que celle qui existe entre deux chiffres consécutifs dans la partie entière ou dans la partie décimale. La virgule comme séparateur fort se retrouve confirmé lorsqu'on constate que dans cette évaluation deux élèves sur trois traduisent "quarante-huit francs cinq centimes" par 48,5 F. Ce phénomène se retrouve lorsqu'on considère les multiplications. Il y a seulement un élève sur deux pour réussir les calculs "1,54 x 1000" et "7,14 x 100". Le traitement ne s'effectue alors que sur l'une des deux parties : "1,54 x 1000= 1,54000 ou 1000,54". Les traitements sont calqués sur ceux qu'on trouve sur les entiers et il n'est pas tenu compte de la modification à apporter à ces traitements lorsqu'on a à effectuer des calculs sur les décimaux.

Cette prise en compte apparaît évidemment plus difficile encore pour les élèves pour qui le système sémiotique décimal n'est pas encore tout à fait maîtrisé sur les entiers : les "zéros" intercalés dans les nombres entiers entre le premier et le dernier chiffre font quelques ravages lorsqu'il s'agit d'écrire ces nombres en toutes lettres ou inversement.

Le passage des entiers aux décimaux constitue donc un obstacle qui est loin d'être levé en début de collège. Il faut donc que les élèves arrivent à réorganiser un système acquis, celui de l'écriture et des traitements des entiers, pour y intégrer les décimaux : voilà la tâche des enseignants en début de collège. Mais comment aider les élèves dans cette réorganisation ? Tel était le problème qui nous est apparu suite à notre analyse, problème dont nous avons pris conscience et qui, à notre avis, est assez méconnu dans les pratiques courantes. Nous rejoignons en cela l'avis d'Alphonse Munyazikwiye (A. Munyazikwiye, 1995, Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres, RDM , Vol 15 n°2, pp31-62, 1995) qui met en évidence de façon plus large (il s'intéresse à l'ensembles des apprentissages numériques) quelques points aveugles mais cruciaux dans l'enseignement des nombres.

Il s'agit donc maintenant d'exposer les principes qui nous ont guidés pour l'élaboration de notre enseignement suite à cette analyse.

Elaboration et mise à l'épreuve d'activités et d'exercices. Utilisation de différents modes de représentation et d'écriture.

Notre analyse met en évidence le fait que l'écriture et la manipulation des nombres décimaux requièrent la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers. Mais on ne pouvait concentrer uniquement nos efforts sur l'acquisition des "règles" qui régissent les traitements en question. Même si ce point a été au départ l'objet de quelques discussions dans notre groupe (voir volet 3 de notre recherche), il a été admis que cela renforcerait les défauts naturels des élèves (et de certains enseignants) de recourir à des traitements algorithmiques indépendamment de tout sens mathématique. Bon nombre d'erreurs chez les élèves à l'entrée en collège viennent en effet du fait que les élèves pour répondre aux questions ont recourt à un schéma de type algorithmique (expression proposée———>traitement algorithmique) qui ne permet aucun contrôle et révèle une conceptualisation défaillante de la notion de nombre.

Notre problème d'enseignants était donc en 6ème de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres chez nos élèves à partir de ce qu'ils ont déjà fait à l'école primaire.

Pour cela nous avons adopté un canevas commun pour élaborer nos propositions d'enseignement. Ce canevas propose de se donner les outils suivants pour élaborer et proposer des situations d'apprentissage qui permettent ou obligent les élèves à briser la relation (expression proposée ———> traitement algorithmique) par une médiation réalisée :

- soit par une situation qui donne sens aux calculs. Donnons un exemple : pour effectuer 0,75 + 0,3, il s'agit pour les élèves de reconnaître que 7 et 3 sont de même rang et non pas 5 et 3, de voir 0,75 globalement confronté à 0,3 et non pas 75 à 3. Pour cela il est possible de demander aux élèves d'illustrer cette opération sur 3 carrés 10x10 où le carré représente 1.
- soit par un changement de registre d'écriture. Par exemple en demandant de ranger les nombres 0,7 - 0,51 - 3/4 - 33/100

Les deux types propositions peuvent évidemment se combiner.

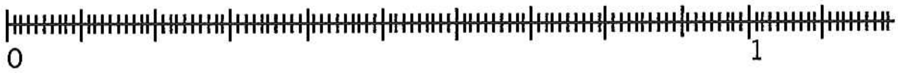
Pour cette élaboration, nous sommes particulièrement attentifs à la diversité et la complexité des systèmes d'écriture (entiers, décimaux, fractions), des cadres (numérique, grandeurs) et des représentations (dimension 1 dans les graduations, dimension 2 avec les fractions d'aire) auxquels sont confrontés les élèves dans le domaine numérique. Cette diversité et cette complexité sont souvent considérées comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais en l'occurrence nous pensons qu'au contraire qu'elle permet aux élèves de dépasser une procédure purement algorithmique ou du moins de l'étayer et de la contrôler par des outils qui permettent de donner du sens aux traitements à effectuer. Nous adhérons en cela à la perspective exprimé par Alphonse Munyazikwiye (A. Munyazikwiye, 1995, Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres, RDM , Vol 15 n°2, pp31-62, 1995), p59 : "La *connaissance* des nombres apparaît comme la *Somme* ou la résultante des savoirs atomiques sur les écritures et les techniques opératoires (traitement/et ou conversion), les représentations géométriques ainsi que leurs liens".

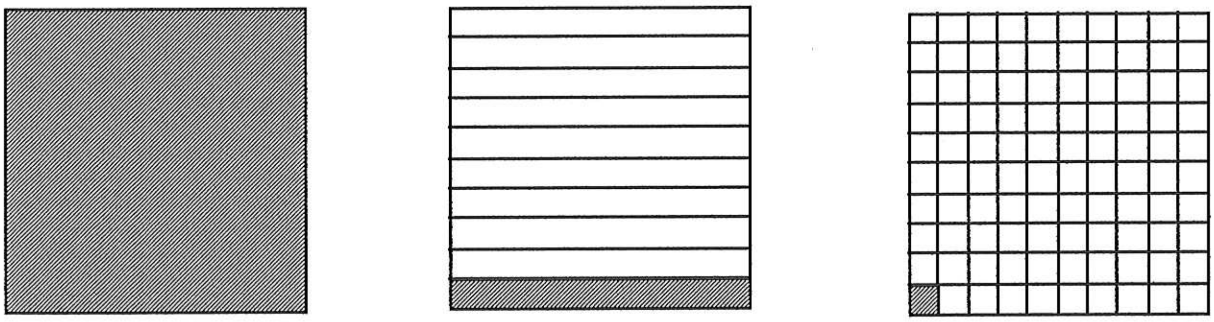
Nous avons donc élaboré et mené en classe de 6ème des activités au sujet des apprentissages dans le domaine numérique et plus précisément des calculs au programme avec les décimaux. Ces activités avaient pour but de faire dépasser aux élèves le simple traitement algorithmique des calculs et de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres décimaux. Pour les activités expérimentées qu'elles évoquent, les recherches effectuées par G. Brousseau, R. Douady et MJ. Perrin dans ce domaine nous ont inspirés.

Ainsi, par exemple, avant de revoir les nombres décimaux, nous avons d'abord introduit les fractions à partir de mesures de longueur (R. Douady et M.J. Perrin, "Liaison école-collège : Nombres décimaux", IREM de Paris VII, 1986). Chaque élève dessine sur sa feuille un segment au stylo à bille. En se servant d'une bande unité les élèves doivent produire un message qui doit permettre à un récepteur de dessiner un segment ayant la même longueur. Dans cette activité, les écrits interviennent comme moyen de formulation et de validation de nouveaux outils, les fractions. La notion de fraction d'une longueur unité est ensuite systématisée par l'usage du partageur (une vingtaine de droites équidistantes et une feuille de papier calque). Les fractions décimales apparaissent alors comme un cas particulier de fractions. Nous avons aussi proposé à nos élèves des activités de recherche où il est nécessaire de recourir aux nombres décimaux et aux opérations sur les nombres décimaux ; citons la recherche de rectangles de périmètres ou d'aires données.

Mais MJ Perrin constatait que, si pour les élèves en difficulté ces activités fonctionnent à peu près de façon satisfaisante, il y a une rupture très nette de cette phase d'action avec la réutilisation des connaissances introduites à ces occasions dans d'autres situations. Par exemple, pour l'introduction de fractions, dès qu'on passe à l'écriture formelle indépendamment de la situation d'action où elles sont apparues, certains élèves passent à des modèles numériques erronés pour les additionner. C'est pour cela que dans les situations de travail (activités ou exercices) que nous avons proposées à nos élèves, nous avons explicitement mis à leur disposition différents systèmes d'écriture des nombres et différents modes de représentations graphiques de grandeurs.

Voyons par exemple ce que nous avons proposé aux élèves dans le cadre des apprentissages de l'addition et de la soustraction de nombres décimaux. Dans un premier temps nous visons la maîtrise de ces opérations jusqu'aux centièmes. Pour cela, l'usage des nombres décimaux est associé à deux systèmes d'écriture (forme décimale, forme fractionnaire) et deux modes de représentation : la droite graduée où l'unité est divisée en 10 et 100 et le carré unité divisé en 10 lignes ou 100 carreaux suivant les modèles suivants :





1   1/10 ou 0,1   1/100 ou 0,01

L'objectif est qu'à travers la possibilité de confronter ces écritures et ces modes de représentation, les élèves aient différents moyens de donner sens aux valeurs de position du système décimal et de contrôler les traitements qu'ils effectuent. Ces représentations et ces modes d'écriture permettent alors de calculer et de contrôler les résultats de différentes façons. Voici un exemple d'exercice où les élèves sont ainsi amenés à calculer, à contrôler et éventuellement à rectifier leurs calculs.

y = x + 0,7	
x	y
0,15	
0,2	
0,27	
0,3	
1,12	
	0,84
	1,1
	2,24
0,8	
1,4	
1,35	
	1,2
	0,15
2,15	
	2,15
1,6	
	1,42
	1,3
	0,25
	1,01

y = x + 0,17	
x	y
0,15	
0,2	
0,27	
0,3	
1,12	
	0,84
	1,1
	2,24
0,8	
1,4	
1,35	
	1,2
	0,15
2,15	
	2,15
1,6	
	1,42
	1,3
	0,25
	1,01

Il s'agit d'une part de remplir chaque case vide de ces tableaux sans calculatrice et sans poser les opérations en respectant les règles données : $y = x + 0,7$ et $y = x + 0,17$

D'autre part, pour chaque case remplie, il faut représenter chaque couple (x,y) dans un repère sur une feuille de papier millimétré. 1 correspond à 10 cm.

Les élèves observent très vite que les points obtenus sur le graphique semblent alignés (alignement que l'on rencontre aussi dans l'activité qui consiste à trouver des rectangles ayant un périmètre donné). En l'occurrence, cette observation est confirmée par le professeur. A partir de là, le non-alignement d'un point avec les autres points du graphique devient un critère pour revenir sur les résultats des opérations. Pour cela les élèves ont à leur disposition des graduations et des carrés comme ceux évoqués précédemment pour visualiser et contrôler les calculs.

Par la suite, d'autres activités concernant les graduations (graduer entre 0,01 et 0,02) ou la multiplication de décimaux (recherche de rectangles et en particulier d'un carré ayant une aire de 12cm2) font apparaître les rangs suivants (millièmes etc..) comme une extension des dixièmes et centièmes.

2ème volet : Les écrits produits par les élèves, en appui aux activités.

Pour amorcer une activité, favoriser un retour réflexif sur les travaux ou renforcer les habitudes de contrôle, nous avons demandé à nos élèves de produire individuellement des écrits qui selon les moments où ils étaient sollicités avaient des modalités et des fonctions différentes. Nous avons exploré trois types de production différentes. Nous distinguons :

- les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement,
- les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués,
- les écrits sollicitant un retour libre sur les apprentissages (il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés).

1) Les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement.

Voici un exemple de questionnaire proposé aux élèves avant qu'on aborde la multiplication de décimaux. Pour chacun des calculs les élèves doivent répondre à trois questions :

1) Comment lis-tu ce calcul ? (si tu vois plusieurs façons de le lire écris-les)

2) Quelle est la réponse que tu proposes ?

3) Trouve une ou des façons pour expliquer ou illustrer ce calcul à quelqu'un qui ne sait pas ce qu'il signifie.

1er calcul	: 6x3	2ème calcul	: 7x0,4
3ème calcul	: 7x0,5	4ème calcul	: 0,2x0,3

2) Les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités.

Les élèves sont invités à revenir sur leurs productions (après une interrogation écrite par exemple) et à expliciter les connaissances mises en oeuvre ou les incertitudes qu'ils ont encore. Pour cela nous leur avons demandé de revenir sur des calculs effectués pour exprimer leurs doutes, leurs certitudes et de les justifier. Voici un questionnaire donné en fin d'année par rapport à une interrogation écrite qui reprenait des calculs de début d'année du type "Calculer 7,24 - 4,3" :

Une autocorrection : Il faudra ranger toutes tes réponses en trois catégories et répondre aux questions suivantes pour chaque catégorie.

1ère catégorie : les réponses dont tu es sûr(e).

Donne chaque fois un argument pour prouver qu'elles sont correctes : une autre forme de calcul, une règle de calcul ou un contrôle par un moyen qu'on a appris cette année, etc.

2ème catégorie : les réponses fausses.

Là aussi donne chaque fois un argument pour prouver qu'il y a erreur : une autre forme de calcul, une règle de calcul ou un contrôle par un moyen qu'on a appris cette année, etc.
Tu corrigeras ensuite ton erreur initiale.

3ème catégorie : les réponses dont tu n'es pas sûr(e)et les raisons de ton hésitation.

3) Retour libre sur les apprentissages.

Il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés comme par exemple par des questions du type suivant :

Dans les apprentissages numériques récents y-a-t-il des faits qui vous ont surpris ? Qu'avez-vous appris de neuf ? Y-a-t-il des erreurs que vous ne faites plus maintenant ?

Nous allons maintenant développer quelques indications concernant les résultats observés relativement aux trois volets de notre travail.

Indications sur les résultats obtenus, côté élèves (1er et 2ème volet de la recherche) :

Constatations globales

1) On sait que les élèves ont en général beaucoup de réticences à écrire autre chose que les calculs, à justifier un résultat, à expliquer une démarche dans le cadre d'un devoir classique. En revanche, nous constatons que, sollicités par nos questionnaires, les élèves s'expriment volontiers. Au début ils semblent un peu surpris d'être interrogés personnellement sur leurs apprentissages. Mais c'est une tâche qui s'intègre vite assez naturellement dans le cours de la classe. Il y a évidemment des questionnaires qui sont plus propices que d'autres pour cela, comme nous allons le voir.

2) La quantité et la qualité de l'expression sont très variables d'un élève à l'autre. En particulier les élèves en grande difficulté ont beaucoup de mal à développer des descriptions plus précises de difficultés ou d'apprentissages : "C'était facile parce que ce n'était pas dur", "J'ai tout juste parce que j'ai bien calculé".

Constatations par rapport aux différents types de questionnaires.

1) Observations sur les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement.

Ces questionnaires permettent au professeur de prendre connaissance des représentations explicites des élèves avant d'aborder une notion. Ils permettent aux élèves de se rendre compte et de repérer des savoirs nouveaux à envisager.

Dans le cas du questionnaire initial sur les multiplications évoqué plus haut par exemple les réponses des élèves permettent au professeur d'avoir une idée de leurs représentations par rapport aux contenus abordés, tant sur la diversité de ces représentations pour chaque élève que sur l'endroit où l'élève n'a plus de références ou des références erronées.

Mickaël par exemple écrit que 6x3 c'est 3+3+3+3+3+3 ou 6+6+6. Pour 7x0,5 il écrit 0,5+0,5+0,5+0,5+0,5+0,5+0,5, 7x0,5=7/2 et représente aussi 7 carrés unités où il hachure chaque fois 5/10. Il y ajoute aussi une explication algorithmique : 7x5=35 et on ajoute la virgule à gauche. Explications similaires pour 7x0,4, mais aussi pour 0,2x0,3 : 0,2+0,2+0,2 ou 0,3+0,3 ou 2x3=6 et on ajoute une virgule à gauche...! Mais beaucoup d'élèves ne savent plus comment expliquer 0,3x0,2.

Pour les élèves, le questionnaire révèle alors la frontière entre ce qu'ils connaissent et qu'ils savent expliciter et ce qu'ils ne savent pas. Et de ce fait, il devient un tremplin pour l'activité qui permettra de travailler sur la nouveauté, en l'occurrence un travail sur les aires de rectangles sur du papier millimétré. Ce genre de questionnaire semble intéressant à intégrer dans nos pratiques.

2) Observations sur les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités.

Lors de l'année 95/96 nous voulions voir si les élèves utilisaient les références rencontrées dans les activités (références à une conversion dans un autre système sémiotique ou référence à une représentation en dimension 1 ou 2 par exemple). Nous voulions voir aussi s'ils rectifiaient certaines erreurs à cette occasion. Dans le cas du questionnaire évoqué plus haut ("Une autocorrection") le document qui suit montre sur le calcul "7,24-4,3" ce qu'il en est dans une classe de 29 élèves en fin d'année.

	9/95	6/96 (1ère)	6/96 (reprise)	Degré de certitude et justification
Isil	1	1		sûre, opération posée
Grégoire	1	1		sûr, opération posée
Gaëlle	1	1		sûre, c'est comme 724-430 et on rajoute la virgule
Christophe	1	1		sûr, sans explication
Constance	1	1		pas sûre, globalement pour toutes les questions
André	1	1		sûr, opération posée
Alexandre	1	1		sûr, sans explication
Audrey	1	1		sûre, opération posée
Frédéric	9	1		sûr, opération posée
Céline	9	1		sûre, opération posée
Emmanuelle	9	1		sûre, opération posée
Nathalie	7	1		sûre car (7-4=3)+(3-2=9)+0,04 =2,94
Mickaël	7	1		sûr, 724/100-43/10=2,94
E Mickaël	9	1		pas sûr, sans explication
Vanessa	7	1		pas sûre, globalement pour toutes les questions
Marc	9	9	1	rectifie,(7/1+2/10+4/100)-(4/1+3/10)=2,94
Thomas	1	7	1	rectifie, sans explication
Matthieu	7	7	1	rectifie, pas d'explication de l'erreur
A Céline	7	9 (2,86)		pas sûre, hésite : 7,24 – 4 = 3,24 et 3,24-0,30 = 2,86 ou 2,94 ?
Sébastien	7	9 (2,56)		pas sûr, pas d'explication
H Alexandre	7	9(719,7)		pas sûre, globalement pour toutes les questions
Richard	5	9 (3,04)		pas sûr, pas d'explication
Nadège	5	9 (68,1)		pas sûre, sans explication
Jérémy	9	5		sûr, j'ai regardé, je n'ai pas vu de faute (globalement)
Cindy	9	9 (3,1)		pas sûre
Adèle	9	5		sûre, pose sans les virgules
Sélim	7	9 (2,96)		sûr, 7,20-4,30=2,90
Bruno	9	0		
Lionel	7	0		

Comparaison des réponses septembre-juin au calcul : "7,24-4,3"

Codes utilisés dans les trois première colonnes du tableau : **Code 1 : réponse correcte (2,94)**

Code 5 : 681 traitement sans tenir compte de la virgule **Code 9 : autre résultat**

Code 7 : 3,21 traitement séparé partie entière/partie décimale **Code 0 : non réponse**

Il apparaît donc :

- Des progrès sur la question elle-même : 8 élèves ont toujours une réponse correcte en fin d'année, 10 élèves faisaient une erreur en début d'année et ont un résultat correct en juin et 11 élèves se trompent toujours. Cette classe est représentative de ce qui s'est passé pour l'ensemble des élèves dont nous avions la charge.

- Les élèves évoquent très rarement les références rencontrées dans les activités au cours de l'année.

- La référence privilégiée reste le calcul "posé".

- Les reprises suites au questionnaire sont rares.

Ce fait est en partie confirmé par ce que nous avons constaté avec d'autres questionnaires de ce type en cours d'année. Même si on demande explicitement aux élèves d'évoquer les références rencontrées dans les activités, ils le font mais ne rectifient pas pour autant leurs erreurs.

Citons à ce propos le cas typique d'une élève, Emmanuelle. Ce cas nous permettra d'ailleurs de montrer que pour nous, l'accès aux écrits produits par nos élèves nous a permis d'évaluer et de réorienter les contenus de notre enseignement. Emmanuelle au milieu de l'année, écrit que 0,3+0,7=0,10 et explique ensuite avec pertinence et détail comment on peut représenter des additions de ce type à l'aide de carrés unités partagés en 10 lignes 10 colonnes, mais qui après cela, écrit à nouveau que 0,3+0,7=0,10. Il semble que pour Emmanuelle, il y ait une cloison entre les traitements numériques et les traitements figuraux. Elle ne fait pas le lien que nous escomptions et qui lui aurait permis de contrôler ses traitements numériques. Il est vrai qu'en l'occurrence en 95/96, plutôt que d'activités jouant sur l'interaction entre cadre numérique et cadre géométrique, ou conversion d'un registre sémiotique à un autre, les activités que nous avions pratiquées étaient plutôt du type "illustration" (on illustre un calcul par un dessin, un peu comme par la suite on illustre une identité remarquable par un carré de dimensions $a + b$). Ces illustrations permettent aux élèves d'argumenter et donc de contrôler leurs résultats à condition qu'ils maîtrisent assez bien les concepts en jeu. Mais les illustrations ne provoquent pas en elles-mêmes les aller-retour qui sont à la base de l'acquisition de concepts dans une dialectique outil-objet. C'est pour cela que durant l'année 96/97 dans l'élaboration des activités que nous avons proposées dans le cadre de la révision de l'addition et de la soustraction de décimaux, nous avons été plus attentifs à ces interactions. Ainsi en est-il dans l'exercice décrit plus haut ($y = x + 0,7$ et $y = x + 0,17$), où c'est le non-alignement des points du graphique qui incite les élèves à contrôler leur résultats par recours aux modes de représentation des opérations additives.

Voici, à ce propos les observations faites en 96/97 au sujet des progressions réalisés dans le domaine du "calcul mental" sur les décimaux par une classe de 6ème ayant effectuée ces activités. Ces observations avaient comme objectifs, de repérer d'une part l'évolution de leurs performances et, d'autre part l'évolution de leurs conceptions. Voici comment nous avons procédé pour réaliser ces repérages.

Le test du début d'année :

Avant toute reprise de la notion de nombre décimal les dix calculs suivants ont été proposés aux élèves dans cet ordre en septembre :

5 additions :	5 soustractions :
a : 15,7+ 23	f : 15,7 - 6
b : 0,7 + 0,3	g : 2,3 - 1,7
c : 0,2 + 0,03	h : 0,48 - 0,3
d : 0,40 + 0,5	i : 5 - 0, 4
e : 1,8 + 0,25	j : 1,7 - 0,05

Nous avons choisi ces calculs parce que représentatifs des difficultés dans le domaine des additions et soustractions des décimaux en fonction de l'analyse présentée précédemment. La virgule risque pour beaucoup d'élèves d'y jouer le rôle d'un séparateur fort.

Ces calculs ont été présentés selon la procédure suivante :

1) Chaque calcul est dicté et écrit au tableau. Les élèves recopient en ligne le calcul proposé et lèvent le stylo pour l'effectuer mentalement. Au signal du professeur, ils écrivent la réponse. Le calcul suivant est alors dicté. 2) Après avoir effectué les dix calculs, les élèves prennent un stylo de couleur différente. Les questions suivantes leur sont posées : 1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi. 2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi. Ils ont aussi le droit de rectifier les réponses avec ce stylo de couleur différente.

Par la suite, le test n'est pas corrigé avec les élèves. Les professeurs ont gardé les copies initiales sans y apposer de remarques ou de corrections. Il est annoncé aux élèves qu'il s'agit d'un test initial destiné par la suite à repérer leur progression et il est rendu compte des nombres d'erreurs. Ces nombres les surprennent car en général, ils trouvaient ce test "facile".

Le test de janvier :

Après révision au premier trimestre des nombres décimaux avec l'addition et la soustraction, nous présentons au mois de janvier les mêmes dix calculs selon la même procédure.

Après avoir effectué les dix calculs, nous redonnons les copies de début d'année aux élèves et leur posons la consigne et la question suivantes :

1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs.

2) Y-a-t-il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger ?

Observation des évolutions :

"Score de réussite en septembre , 1ère réponse" signale le nombre de réussites au premier jet.

"Score de réussite en septembre , réponse finale" signale le nombre de réussites après une éventuelle modifications du résultat initial possible après réponses aux questions demandant de préciser les questions les plus faciles, les plus difficiles et la justification de ces jugements.

Effectif présent aux deux tests : 26 élèves.	Score de réussite en Septembre 1ère réponse	Score de réussite en Septembre réponse finale	Score de réussite en Janvier 1ère réponse	Score de réussite en Janvier réponse finale
a : 15,7+ 23 = 38,7	22	24	24	25
f : 15,7 - 6 = 9,7	18	21	23	23
b : 0,7 + 0,3 =1	17	18	21	21
c : 0,2 + 0,03 = 0,23	14	16	24	24
d : 0,40 + 0,5 = 0,9	8	12	22	25
h : 0,48 - 0,3 = 0,18	9	11	22	23
i : 5 - 0, 4 = 4,6	10	10	19	21
e : 1,8 + 0,25 =2,05	7	10	18	19
g : 2,3 - 1,7 = 0,6	4	7	11	14
j : 1,7 - 0,05 =1,65	6	6	17	19

La situation en septembre :

Les performances :

Les questions sont rangées dans l'ordre décroissant des réussites des réponses finales de septembre. On voit que les questions les mieux réussies a et f sont d'abord celles où le traitement ne concerne que la partie entière. Viennent ensuite les questions b, c, d et h où le traitement ne concerne que la partie décimale (partie entière = 0) mais où il y a de nombreux échecs lorsque la partie décimale est considérée comme un nombre entier et lorsque les valeurs de position dans la partie décimale des nombres décimaux sont ignorés (0,48 - 0,3 = 0,45). Dans cette catégorie on peut aussi ranger le dernier calcul donné, j où seuls 6 élèves réussissent : souvent c'est une addition qui est faite (réponse 1,75), ou alors la réponse donnée est 1,2 ou 1,02. Dans les calculs i, e et g très peu réussis au premier trimestre les traitements corrects affectent la partie entière et la partie décimale.

Le diagnostic fait par les élèves en début d'année :

Les élèves ont eu à signaler les questions qu'ils jugent faciles et les questions qu'ils jugent difficiles en justifiant leurs réponses. Quelles sont les conceptions qui se dégagent alors de leurs réponses ? Voici comment les élèves ont jugé les questions (chaque x correspond à un exercice signalé par un élève) :

	Facile		**Difficile**	
a : 15,7+23 = 38,7	**xxxxxxxxxxxxxxxxxx**	**18**	**xx**	**2**
b : 0,7+ 0,3 =1	**xxxxxxxxxxxxxxxxx**	**17**	**x**	**1**
d : 0,40 + 0,5 = 0,9	**xxxxxxxxxxx**	**11**		**0**
c : 0,2 + 0,03 = 0,23	**xxxxxxxxxx**	**10**	**x**	**1**
e : 1,8 + 0,25 =2,05	**xxxxxxx**	**7**	**x**	**1**
f : 15,7- 6 = 9,7	**xxxxxxx**	**7**	**xxxxxx**	**6**
i : 5 - 0, 4 = 4,6	**xxxxx**	**5**	**xxxxxxxx**	**8**
h : 0,48 - 0,3 = 0,18	**xxxx**	**4**	**xxxxx**	**5**
g : 2,3-1,7 = 0,6	**x**	**1**	**xxxxxxxxxxxx**	**12**
j : 1,7 - 0,05 =1,65	**x**	**1**	**xxxxxxxxxxxxx**	**13**

La distinction principale faite par les élèves oppose les cinq additions jugées faciles aux cinq soustractions jugées plus difficiles. Pratiquement aucune des additions n'est repérée comme difficile par les élèves. Ainsi, pratiquement personne ne signale les questions b, d, c et e comme difficiles. Pourtant de nombreux élèves ont échoués à ces questions. En fait quand on regarde à quoi ils rapportent cette facilité, on constate que très souvent ils explicitent leur conception erronée des nombres décimaux : par exemple pour "0,40 + 0,5" ces élèves expliquent qu'il suffit d'additionner 40 et 5 et que ça se fait facilement ! On constate pourtant que dans leur ensemble, les élèves ne se sont pas trompés sur la question la plus facile, la question a (15,7+23 = 38,7) signalée 18 fois comme la plus facile avec une analyse qui, si elle ne se contente pas de ranger ce calcul dans les additions, est souvent pertinente. Ainsi, plusieurs élèves signalent comme Cédric que 15,7 + 23 et 15,7 -6 sont des calculs faciles parce qu'on n'a pas à se soucier du chiffre qui est après la virgule. Dans leur ensemble, les élèves ont aussi repéré les deux questions qui leur posent le plus de problème : la question g (2,3-1,7 = 0,6) et la question j (1,7 - 0,05 =1,65). Ils rapportent souvent la difficulté de ces questions à des problèmes de retenue en se référant ainsi à la forme "posée" de ces opérations. En fait en ce début d'année, il semble qu'au-delà de la distinction entre addition et soustraction, le critère principal des élèves pour juger de la complexité d'un calcul est la possibilité ou non de faire le calcul directement sans le poser dans sa tête. Ainsi Ludovic écrit que "les calculs faciles sont ceux où il y a de petits nombres comme 0,7 + 0,3 = 1 et 0,40+0,5 =0,45, mais que les calculs comme 2,3-1,7=1,4 et 5-0,4=4,96 sont plus difficiles parce que les nombres sont un peu plus grands". De même Julie écrit : "0,7+0,3=10 5-0,4=0,1 0,2+0,03, ces deux additions et cette soustraction sont faciles parce qu'il y a des zéros devant et un chiffre derrière et parce que les zéros ne comptent pas". Elle ajoute "0,48-0,3=0,51 et 15,7+23=17,6 sont des opérations difficiles parce qu'il n'y a pas beaucoup de 0, avec plus de 0 ça serait un peu moins difficile".

La progression :

On voit que si la hiérarchie des réussites dégagées en début d'année est conservée, les réussites sont bien plus nombreuses. Les progrès sont évidents. Il reste à voir si cette progression dans les performances correspond aussi à un progrès de la part des élèves dans la capacité d'expliciter par écrit ces progrès (question 1 de janvier) et peut-être de situer ce qui leur a permis de progresser (question 2 de janvier). Le tableau des pages 70 et 71 indique pour chaque élève l'évolution des performances et le type de diagnostic qu'il a produit par écrit en septembre puis en janvier. Rappelons les questions.

En septembre :

1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi.
2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi.

En janvier :

1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs.
2) Y-a-t-il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger ?

Observations :

La première observation concerne la nature du calcul mental proposé : ce calcul ne teste pas tant la virtuosité des calculs en jeu que la compréhension des décimaux et des traitements à effectuer. Le fait que lors des reprises tant en septembre qu'en janvier où les élèves ont le temps de rectifier les erreurs repérées les corrections sont peu nombreuses le prouve. Lorsqu'en septembre un élève écrit que 0,40 + 0,5 = 0,45 il revient rarement sur ce résultat ! C'est bien la compréhension de l'écriture des décimaux qui est en jeu et non pas la virtuosité de calculer rapidement.

La deuxième observation qui confirme la précédente est que les quelques élèves qui en septembre rectifient tout de suite quelques erreurs (Anaïs R., Anthony, Julia, Cyril, Léa et même Mickaèl), les progrès dans les réussites sont assez spectaculaires. Ces élèves semblent déjà en début d'année en cours d'apprentissage.

La troisième observation concerne les réponses aux questions (trois dernières colonnes) : les conceptions des décimaux qu'elles révèlent semblent bien en évolution chez de nombreux élèves. Ainsi si l'on ne rencontre pas de code 1 à la question de septembre, en janvier ils sont 12 à situer précisément la nature des erreurs commises. Peu d'élèves se réfèrent encore à l'opération posée. Ce sont surtout, et cela paraît cohérent, les élèves qui n'ont pas beaucoup progressé qui ne sont pas capables de décrire les caractéristiques de l'écriture décimale.

La quatrième observation est que si de nombreux élèves ont progressé et sont capables de préciser les traitements à effectuer, ils sont peu nombreux (6) à évoquer les supports et activités rencontrés au premier trimestre pour étayer cette progression. Comme lors de l'expérience de l'année 95/96 décrite plus haut ces supports et ces activités semblent oubliés : mais est-ce grave ? Peut-être ont-ils servi de moyen transitoire pour évoluer et permettre de décrire la nature de l'écriture décimale ? C'est cela qui est finalement important.

3) Quelques observations à propos des retours libres sur les apprentissages.

Rappelons les expériences et les observations faites en 95/96. Des questions comme les suivantes amenaient les élèves à expliciter librement les apprentissages réalisés.

Dans les apprentissages numériques récents y-a-t-il des faits qui vous ont surpris ? Qu'avez-vous appris de neuf ? Y-a-t-il des erreurs que vous ne faites plus maintenant ?

Ces questions ouvertes qui demandent aux élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés sont plus propices à l'engagement personnel des élèves dans la reprise et l'objectivation de leurs apprentissages. Bien sûr, nous avons observé de nombreuses réponses du type : "Je n'ai rien appris de nouveau, on avait déjà fait l'addition des nombres à virgule à l'école primaire". Mais bien des élèves se sont engagés plus avant et ont fait part de constats qui, au-delà de formulations parfois maladroites, pointent des réarrangements pertinents de leurs connaissances : "Je sais bien faire les opérations posées mais pas les calculs en lignes" (début d'année) "Je ne savais pas que l'on pouvait diviser en multipliant" "J'ai appris que le résultat d'une multiplication pouvait être plus petit" "J'ai appris que multiplier par 0,5 c'est diviser par 2" (en fin d'année). Il semble donc que les élèves peuvent reprendre et approfondir leurs connaissances en les explicitant ainsi librement.

DESCRIPTIONS ABREGEES DES REPONSES PRESENTEES DANS LE TABLEAU.

Descript. pertinente d'erreur : description d'une complexité ou d'une erreur liées aux valeurs des positions ou évocation d'un support (graduation ou fraction d'aires) avec description pertinente d'un traitement.

Evocation calcul posé : allusion à un calcul posé par exemple évocation des retenues.

Evocation d'un support : évocation d'un support (graduation ou fraction d'aires) sans précision de traitement.

Descript. redond. d'erreur : description redondante d'une erreur (ex : au 1er trimestre j'ai fait 0,2 + 0,03 = 0,05 et non 0,23).

Descript. d'une attitude : description d'une attitude (cette fois j'ai plus réfléchi") ou d'un contexte ("on avait vu ça au primaire").

Jugement sans justif. : jugement sans justification (ex : c'était difficile).

Evocation oppos. +/- : évocation d'une opposition entre l'addition et la soustraction comme critère de complexité.

Descript. erronée d'erreur : critères de complexité qui témoignent d'une conception erronée des décimaux(par exemple : évocation d'un traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale avec erreurs associées 0,40 + 0,05 = 0,45).

Nombre de questions : 10	Score réussites Sept. 1ère réponse	Score réussites Sept. réponse finale	Score réussites Janvier. 1ère réponse	Score réussites Janvier. réponse finale	Questions Sept.	Question 1 Janvier	Question 2 Janvier
Aude	9	10	9	10	Evocation oppos. +/-	pas de réponse	pas de réponse
Aurélie	9	10	10	10	Evocation calcul posé	pas de réponse	Descript. pertinente d'erreur
Amandine W	9	10	8	10	Evocation calcul posé	Descript. pertinente d'erreur	Descript. pertinente d'erreur
Amandine	9	9	10	10	Evocation calcul posé	Evocation calcul posé	Evocation calcul posé
Cédric	9	9	10	10	Evocation calcul posé	Descript. redond. d'erreur	pas de réponse
Déborah	8	8	10	10	Evocation oppos. +/-	Evocation calcul posé	pas de réponse
Anaïs R	5	7	9	10	Evocation oppos. +/-	Descript. pertinente d'erreur	Descript. pertinente d'erreur

Anthony	**4**	**7**	**10**	**10**	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Pierric	**5**	**5**	**10**	**10**	**évocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Julia	**3**	**7**	**8**	**10**	**Jugement sans justif.**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. d'une attitude**
Thierry	**3**	**3**	**10**	**10**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Cyril	**4**	**5**	**9**	**9**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Florian	**3**	**3**	**9**	**9**	**évocation calcul posé**	**Descript. d'une attitude**	**pas de réponse**
Maximilien	**3**	**3**	**9**	**9**	**Descript. erronée d'erreur**	**Evocation calcul posé**	**pas de réponse**
Léa	**4**	**7**	**6**	**8**	**évocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Evocation d'un support**
Ludovic	**4**	**4**	**7**	**8**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**
Christelle	**5**	**4**	**8**	**8**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**
Julien	**3**	**3**	**5**	**6**	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. d'une attitude**
Mickaël	**1**	**2**	**5**	**8**	**Descript. d'une attitude**	**Evocation d'un support**	**Evocation d'un support**
Camille	**4**	**4**	**7**	**7**	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Evocation d'un support**
Jérôme	**3**	**3**	**6**	**7**	**Descript. d'une attitude**	**Descript. redond. d'erreur**	**pas de réponse**
Céline	**3**	**4**	**7**	**7**	**Descript. d'une attitude**	**Evocation calcul posé**	**Descript. pertinente d'erreur**
Julie	**0**	**0**	**8**	**5**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**
Elodie	**1**	**3**	**6**	**6**	**évocation oppos. +/-**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**
Anaïs	**3**	**3**	**4**	**4**	**Jugement sans justif.**	**Evocation calcul posé**	**pas de réponse**
Vijitha	**0**	**0**	**1**	**1**	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. d'une attitude**	**pas de réponse**

Indications sur les résultats obtenus, du côté des pratiques des professeurs (3ème volet de la recherche) :

La procédure employée :

Notre groupe est constitué de professeurs de collège qui en majorité au départ n'étaient pas initiés aux recherches et aux résultats de la didactique des mathématiques. Mais soucieux d'améliorer l'efficacité de notre travail avec nos élèves, nous étions prêts à mettre en commun nos expériences et à entreprendre une recherche pragmatique et ouverte aux apports pouvant s'intégrer dans nos pratiques. Outre un aspect recherche, notre action revêt donc indéniablement un aspect formation. Dans notre recherche, il est donc aussi intéressant de faire un bilan sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe.

Quels sont les effets de la considération explicite de la place de l'écrit dans notre enseignement sur nos pratiques ? Pour répondre à cette question nous avons d'abord fait un bilan individuel et par écrit (il n'y a pas de raison que nous échappions à l'objet de notre recherche...!) chacun répondant aux questions suivantes.

1) Est-ce que cette recherche a modifié votre pratique d'enseignement en 6ème. En quoi ?

2) Sur quels points envisagez vous d'accentuer encore cette évolution ?

3) Décrivez ce qui mériterait d'être communiqué de notre recherche à des collègues de math qui enseignent en 6ème ou 5ème.

4) Qu'avez vous appris de neuf dans cette expérience :

a) sur les contenus enseignés ?

b) sur les façons d'enseigner ces contenus ?

c) sur les élèves ?

Les observations :

Après mise en commun et analyse de nos réponses, il apparaît que la recherche est révélatrice d'autres moyens d'enseigner. Nous ne tracerons pas ici les évolutions individuelles mais signalerons plus globalement que le fait de considérer explicitement la place de l'écrit dans les apprentissages numériques a eu des répercussions individuelles innovantes et apparaît comme une clé d'accès à la compréhension de phénomènes et didactiques.

Un premier aspect de modification est dans la prise de conscience de l'importance qu'il y a à donner du sens aux contenus mathématiques : "Je veille à donner plus de sens aux nombres décimaux, fractionnaires" "Mon but n'est plus que les élèves sachent faire par "bachotage" et répétitions d'exercices mais que les élèves sachent faire parce qu'ils ont compris ce qu'ils faisaient" "Avant cela représentait très souvent une technique, une règle de cuisine qui avait son fonctionnement propre sans avoir possibilité de recours à une vérification" "Ce n'est pas la quantité d'exercices qui est importante, mais la qualité : que ceux -ci prennent du sens, autant que possible" "Avec ce travail de recherche, les élèves semblent moins impatients d'avoir une *"recette"* à faire fonctionner. Ainsi, pour calculer 2:0,1 ou 6:0,2, l'interrogation *"où placer la virgule dans le résultat"* est moins fréquente ; elle est remplacée par *"combien de fois 0,1 dans 2"*.

La sensibilisation à l'analyse des tâches fait aussi partie de découvertes explicites pour certains : "une erreur résulte rarement d'un comportement anarchique de l'élève ; l'erreur est en général le résultat d'une mauvaise interprétation qu'il faut découvrir pour y remédier".

Cette prise de conscience a parfois des conséquences sur la gestion de la classe telle qu'elle est vécue par l'enseignant : "Je me permets plus souvent de faire des exercices qui autrefois me semblaient être une perte de temps (vu le temps que cela prenait par rapport au profil tiré). Mais en fait avec le recul, je m'aperçois que ce temps est gagné par la suite. Exemple : lors de la présentation des nombres décimaux, questionnement par écrit toutes les façons possibles et imaginables qu'ils ont pour les représente et les expliquer. Ensuite faire présenter à chacun sa solution aux autre. Cela permet à la longue aux timides de prendre d l'assurance, de formuler clairement leurs idées et de mettre en place un esprit critique".

Même si certains quelques inquiétudes se révèlent par rapport à la perte de temps, (un enseignant affirme sous forme de boutade que ce qui a changé c'est qu'avant la recherche...., il terminait le programme et que maintenant il est un peu mal à l'aise), chez d'autres c'est la gestion du temps qui est vue autrement. Ainsi on trouve plusieurs fois exprimée l'idée de décloisonnement des contenus : "Le travail de recherche a renforcé chez moi l'idée que l'acquisition d'une notion doit être étalée sur toute l'année et qu'il faut décloisonner les chapitres. Ainsi, la notion d'aire a commencé à être vue dans la multiplication et la division par 10, 100, 1000 puis dans la multiplication de 2 décimaux. Lorsque le chapitre "aires" apparaît, certains jalons importants sont déjà posés"

Et surtout très fortement il apparaît que l'appel à diverses formes d'écrits chez nos élèves joue un rôle de régulation dans notre pratique : c'est par les écrits que l'on se rend compte de difficultés, de progrès, que l'on connaît mieux les élèves et les tâches qu'ils ont à remplir.... Un autre précise : "Je suis davantage à l'écoute des enfants. On se prend plus de temps de faire vraiment le tour de la question, en insistant souvent volontairement chez un élève plus faible". "Il est judicieux de faire formuler la question par l'élève avec son propre vocabulaire, afin de se rendre compte comment il a saisi la question".

Ces quelques avis constituent déjà une amorce d'une conclusion possible pour notre travail, cela au moins dans la perspective d'une recherche-action, perspective qui a constitué une des caractéristiques de notre travail. Mais plus rigoureusement, nous allons voir en quoi nous avons répondu aux questions à la base de notre recherche et souligner les apports qui nous apparaissent les plus cruciaux de notre travail.

En conclusion.....

Initialement nous nous demandions, dans quelle mesure la diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres et les différents tâches qui résultent de leurs confrontations pouvaient favoriser et enrichir les apprentissages numériques.

Par la suite, une deuxième question s'est ajoutée : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que ces écrits pourraient servir d'appui efficaces pour les apprentissages considérés.

En ce qui concerne la première question, notre hypothèse était que le fait d'augmenter le nombre de modes représentation et d'écriture pouvait apporter une aide aux apprentissages en jeu. Mais comme chaque mode de représentation (graduations, aires) et d'écriture (fractions, écriture décimale) implique des apprentissages spécifiques, on pouvait se demander si cette diversification et cet enrichissement n'allaient pas au contraire alourdir les difficultés des élèves. Dans le cadre de notre travail dans nos classes, nous nous sommes rendu compte que cela n'était effectivement pas facile et nous ne pensons pas pouvoir apporter de procédure modèle d'enseignement dans ce domaine. Mais en revanche nous pensons avoir dégagé un questionnement et quelques composantes didactiques permettant d'optimiser le rapport entre le nombre de représentations et d'écritures et l'aide qu'elles peuvent apporter. En fait, il nous est apparu que les différentes écritures et représentations pouvaient avoir des fonctions différentes. Elles peuvent servir à ce que nous avons appelé des "illustrations" mais aussi comme des ressorts d'interactions où l'une peut servir d'outil à l'autre ou bien faciliter le traitement dans l'autre. Comme "illustrations" nous avons vu qu'elles ne sont pas forcément source de progrès et que des élèves peuvent parfaitement cloisonner les différents modes de représentations et donner des résultats divergents sans en prendre conscience. Le problème de l'enseignant est alors d'élaborer des situations d'interactions. Mais nous ne rejetons pas la fonction "illustration". En effet dans notre travail, nous avons trouvé une façon de la féconder, par la production d'écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués. Mais, bien sûr dans un cas comme dans l'autre, il s'est confirmé que l'élaboration par l'enseignant de situations d'interactions ou d'illustrations est conditionnée par une analyse préalable des difficultés en jeu. Pour notre compte personnel, cette analyse en ce qui concerne les apprentissages sur les décimaux représente rien qu'en soi une avancée importante.

En ce qui concerne la deuxième question, l'introduction de procédures permettant aux élèves de faire par écrit un retour réflexif sur leur connaissances, nous venons de voir qu'elles trouvent leur place dans le dispositif d'enseignement. En revanche nous demandons comment mesurer l'impact de cette introduction sur les apprentissages en jeu. Nous n'avons pas de réponse rigoureuse à ce sujet. Mais nous ne pouvons que souligner les effets que cette introduction a eu dans nos pratiques comme moyen d'évalauation et de régulation de notre enseignement (voir le paragraphe sur les résultats obtenus, côté pratiques des professeurs). En particulier dans ce travail nous avons montré comment nous avons pu repérer l'évolution des conceptions des élèves dans le cas des opérations sur les nombres décimaux. Nous pensons que pour les élèves, il s'agit là aussi d'une façon pertinente de prendre conscience de leurs progressions et de s'approprier les connaissances.

Il reste des questions ouvertes dans notre travail. En particulier, en ce qui concerne les écrits des élèves permettant un retour réflexif sur leurs connaissances, nous étions dans une phase exploratoire. Une analyse plus rigoureuse, d'une part de la typologie de ces écrits , d'autre part des protocoles par lesquels on sollicite et aussi exploite ces écrits dans les classes resterait à faire pour pouvoir par la suite en observer les effets. En ce qui concerne la typologie, il faudrait par exemple approfondir l'analyse des différents questionnements appelant les écrits : portant soit directement sur des contenus mathématiques précis, soit sur des impressions plus générales etc. En ce qui concerne les procédures de passation, dans la plupart des cas ces écrits ont été sollicités de façon individuelle et parfois exploités de façon collective. Il y a d'autres façons de susciter ces écrits (voir recherche IREM de Paris) et une étude des variables en jeu serait nécessaire pour pouvoir par la suite procéder à des observations.

Bibliographie.

R. Douady et M.J. Perrin,1986, "Liaison école-collège : Nombres décimaux", IREM de Paris VII.

R. Duval,1995, "Sémiosis et pensée humaine, Représentations sémiotiques et apprentissages intelectuels", Berne, Peter Lang.

A. Munyazikwiye,1995, "Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres", RDM , Vol 15 n°2, pp31-62.

MJ. Perrin,1993,"Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993.

F. Pluvinage, 1977, "Difficultés des exercices scolaires", Thèse d'Etat, Strasbourg

JC. Rauscher,1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.", Thèse USHS, IREM de Strasbourg.

BD sur CD

UN DOSSIER SUR LES NOMBRES COMPLEXES

réalisé par Benjamin DESBUQUOIT, élève de 6ème Math-Sciences à l'Institut Notre-Dame de Comines (Belgique), pendant l'année scolaire 1998 – 1999,

présenté et commenté par François PLUVINAGE.

Résumé

Le dossier qu'un élève de classe terminale a élaboré sur les nombres complexes est une production sur laquelle il est intéressant à plus d'un titre de se pencher. En plus des règles habituelles de l'écriture mathématique, il se conforme rigoureusement (que ce soit ou non fait sciemment) à des règles auxquelles il vaut la peine de réfléchir à propos d'hyper-texte et en outre, pour la présentation, il exploite remarquablement les possibilités de navigation sur un écran d'ordinateur. Cela conduit à envisager des recommandations générales pour ce type de documents quand il s'agit de mathématiques. Pour ce qui est du contenu abordé, sa richesse est incontestable : l'auteur pousse avec maestria l'étude à des niveaux qui auraient leur place dans les premières années universitaires. On peut alors d'autant mieux d'observer que, lorsque lui-même a acquis les notions relatives aux nombres réels, il n'a pas bénéficié de toutes les ressources qu'il a exploitées. Une telle remarque concerne les apprentissages et renvoie à d'autres articles de ce numéro (notamment celui de Robert Adjiage).

Historique du document

Le rapport terminal de la recherche sur les *Compétences Terminales en Mathématiques*, entreprise au sein du Service d'Analyse et Méthodologie Mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut (Belgique), a été réalisé en 1999 sur CD ROM sous la forme de fichiers exploitant les possibilités de l'hypertexte et publié ensuite sous forme de monographie[*]. Guy NOEL, professeur à l'Université de Mons-Hainaut, nous a remis le CD, intéressé en particulier par le regard qui pourrait être porté sur un dossier élaboré par un élève de sixième année Math-Sciences, correspondant à une classe de Terminale en France.

Ce dossier qui présente les nombres complexes nous a en effet paru remarquable et nous invitons vivement le lecteur qui en a la possibilité à le consulter sur le CD. Nous ne pouvions pas le reproduire fidèlement sur papier, qui plus est sans recours à la couleur ; ici, nous donnons donc seulement une description de son contenu et de sa présentation, en reproduisant quelques passages qu'il nous a semblé intéressant de montrer et commenter. Et, si le CD ne suppose aucune connaissance sur les nombres complexes, puisque son objet est précisément de les présenter, cet article s'adresse pour sa part à des lecteurs concernés par l'enseignement de ce thème. Par ailleurs, le titre que nous avons choisi désigne Benjamin Desbuquoit par ses

---

[*] J.P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil, 2001, *Structurer l'enseignement des mathématiques par les problèmes*, De Boeck, Bruxelles

© *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 7 (2001) (p. 77 – 86), IREM Strasbourg

initiales : que l'on y voie un signe d'estime, en évocation de la valeur reconnue aux auteurs de bandes dessinées (les fameuses BD) de la grande tradition belge, de l'esprit desquels son document sur les nombres complexes procède en définitive pour nous par plus d'un aspect !

Descriptif du contenu du dossier sur les nombres complexes

Le CD sur les compétences terminales en mathématique comporte le dossier du rapport de recherche, un dossier sur les transformations affines élaboré par Guy NOEL et celui qui nous intéresse ici. Un menu général permet de se reporter à une présentation sommaire du sujet étudié, sous la forme de plusieurs diapositives (réalisées grâce à Power-PoinT), dont l'une pour remercier Philippe Tilleuil, qui a été le promoteur du travail de fin d'études secondaires de Benjamin Desbuquoit bien qu'alors détaché de son statut de professeur à l'Institut Notre-Dame de Comines. Laissons la parole à Benjamin Desbuquoit pour introduire son sujet, .

« Dans ce dossier, nous introduisons les notions de base concernant la ***théorie*** *des nombres complexes.*

Nous posons ensuite quelques problèmes dont les solutions nous permettent de comprendre et d'utiliser les séries de Taylor-Maclaurin.

Enfin, nous dégageons une relation entre les séries de Taylor et les nombres complexes, due à Leonhard Euler. »

Ces propos préliminaires sont agrémentés par une *série de diapos (portraits des mathématiciens cités et figures illustratives).* Et, après un écran d'ouverture où les utilisateurs férus d'histoire reconnaîtront immédiatement le portrait du mathématicien du XVIème siècle Niccolo Tartaglia (les autres le retrouveront parmi les personnages mentionnés dans le paragraphe historique du chapitre 1), voici la table des matières proposée au lecteur.

Nous détaillons ces chapitres après la présentation, en page suivante, de la navigation dans le programme. On y voit la marque de l'utilisation du logiciel Multimedia Toolbook (CBT Edition) pour l'élaboration du dossier. Les liens sur certains mots et les notes ouvrent des cadres qui se superposent à la page en cours ; les autres liens font changer de page.

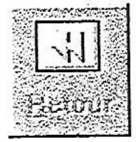
La navigation dans le programme est très simple !

Des boutons ressemblant à ceci 

vous permettront de voyager facilement d'un écran à l'autre.

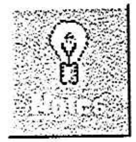
En bas de l'écran, se trouvent les boutons suivants :


vous permet de quitter le programme à tout moment.



vous permet de retourner à l'écran précédent.


vous donne accès à la table des matières. Vous avez ainsi le loisir de voyager aisément à travers l'entièreté du dossier.


vous rappelle certaines notions utiles. Celles-ci se rajouteront au fur et à mesure de votre progression dans ce dossier.

Quant aux mots écrits en rouge : lors d'un clic sur l'un de ces mots, une fenêtre se superposera à l'écran et vous donnera quelques explications supplémentaires, sans effacer l'écran principal sur lequel vous naviguiez. Un simple clic fera disparaître cette fenêtre.

Après ces quelques précisions, nous vous invitons à appuyer sur ECHAP pour découvrir un monde au delà du réel ... entrons dans l'univers des nombres complexes !

Sur le fichier, le contenu de chacun des quatre chapitres est détaillé seulement lorsque le lien vers le chapitre est activé depuis la table des matières. Ainsi le découpage en paragraphes et sous-paragraphes indiqué ci-après n'est pas d'emblée mis sous les yeux du lecteur. Pour l'auteur, il ne s'agit nullement d'entretenir un suspense, puisque l'obtention du détail de chaque chapitre est immédiate depuis la table des matières, mais de limiter le nombre des informations simultanément présentes sur l'écran. Nous y revenons par la suite. A chacun des paragraphes du détail d'un chapitre correspond un lien qui conduit au contenu indiqué.

Chapitre 1 – A) – *Un nombre complexe : qu'est-ce que c'est ? – Conventions (égalités de deux nombres complexes ;...). – Règles de calcul* (+ ; – ; × ; :). – *Origine historique des nombres complexes.*

B) – *Représentation géométrique. – Opérations sur les vecteurs. – Calcul du module et de l'argument. – Élever à la* $m^{\text{ième}}$ *puissance. – La formule de de Moivre. – Les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *d'un nombre complexe.*

Chapitre 2 – *Introduction. – Un premier exemple :* $\frac{1}{1-x}$. – *Un deuxième exemple :* e^x. – *Deux autres exemples :* sin x et cos x. – *A propos d'une formule de Leibniz...*

Chapitre 3 – *Introduction. – La formule de Taylor-Maclaurin. – La formule du reste* $R_n(x)$.

Chapitre 4 – *Une formule extraordinaire :* ¤ *Une première justification.* ¤ *Une seconde justification. – Conséquences intéressantes (formule fondamentale ;* cos 2x *;...). – Démonstration de la formule de de Moivre grâce à la formule d'Euler.*

Bibliographie (constituée d'ouvrages scolaires, dont ceux des collections Dimathème et Terracher, et de références pour les illustrations, voir en fin de cet article).

A la fin du chapitre 4, une borne mentionne *« Chapitre suivant ? ? ? »* Ce lien conduit au portrait d'Euler (le même que chez Terracher), auquel l'auteur a adjoint un phylactère (ou une bulle, BD oblige...) évoquant une hypothétique suite pour l'année prochaine.

Que Benjamin Desbuquoit ait indiqué une bibliographie dans son dossier mérite d'être salué. C'est, parmi d'autres, un signe du grand souci de correction qui a présidé à l'élaboration du dossier. En particulier, celui-ci contient davantage de justifications qu'il ne s'en trouve dans les ouvrages cités et va sensiblement plus loin, avec les développements en séries. Sur ce point, seuls des résultats de convergence (convergence normale ou majorations de restes) qui dépassent sensiblement le niveau visé du dossier sont admis ; encore font ils l'objet d'expérimentations numériques convaincantes.

L'hyper-texte au service de présentations mathématiques.

L'écran du premier paragraphe du chapitre 1 nous paraît représentatif de l'ensemble du dossier, c'est pourquoi nous reproduisons ci-dessous son contenu, évidemment sans le dessin des boutons du bas d'écran (voir leur apparence en page 79) ni le portrait de Tartaglia en fond d'écran discret, tel qu'un filigrane apparaît au travers d'une page. Nous avons souligné les liens qui provoquent des superpositions et encadré ceux qui font quitter la page.

> **[Un nombre complexe : qu'est-ce que c'est ?]**
>
> Ajoutons aux nombres réels un élément noté i (pour imaginaire), défini par la condition surprenante :
>
> $$\sqrt{-1} = i \qquad \textbf{ou encore} \qquad i^2 = -1$$
>
> Plus précisément, est appelée nombre complexe une combinaison $a + bi$, où a et b sont <u>des nombres réels</u>, appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe considéré, et i est l'unité imaginaire.
>
> De tels nombres sont soumis à :
>
> [des conventions] et [des règles de calcul]
>
> Ils sont susceptibles d'une [représentation géométrique] remarquable.
>
> Quelle est [l'origine] des nombres complexes ?
>
> **[Quitter]** <u>**Notes**</u> **[Plan]** **[Retour]**

Les informations données sur l'écran, ici dans sa partie supérieure, sont spécifiques à la page. Elles sont suivies de l'indication des développements qu'elles demandent et des questions qu'elles soulèvent. Les liens correspondants renvoient à d'autres paragraphes du chapitre. Ainsi, outre la <u>possibilité d'une consultation dans l'ordre souhaité par l'utilisateur</u>, une caractéristique du dossier qui le distingue d'un manuel est de <u>séparer l'énonciation de besoins de justification ou d'illustrations (exemples) et leur présentation exhaustive</u>. De ce point de vue qui nous semble d'une grande importance pédagogique, le dossier se rapproche donc d'un cours sur tableau noir.

La consultation dans un ordre dont le lecteur a le choix, évite d'imposer *de facto* un style pédagogique uniformisé. Les différences de pratiques telles qu'elles apparaissent par exemple dans l'étude de Jacqueline Borreani, Patricia Tavignon et Roseline Verdon, faite certes pour un niveau scolaire moins avancé mais extrapolable au niveau qui nous intéresse ici, s'accordent plutôt soit à une présentation directe des notions suivie d'applications, soit à la pratique préalable d'une activité introductive, soit à un accompagnement de justifications heuristiques et méthodologiques. Contrairement au manuel qui doit se conformer à une pagination, le dossier est aussi bien adapté à l'un quelconque de ces choix.

Pour l'introduction des nombres complexes, l'évocation de la résolution de l'équation du troisième degré, avec la formule indiquée par Cardan, figure dans nombre de manuels récents. Avec raison le dossier retient cette option épistémologique, à propos de laquelle on trouvera des indications supplémentaires dans un récent ouvrage historique autour des *imaginaires*, émanant de la commission Inter-IREM d'épistémologie. Mais curieusement, cette formule est l'un des rares résultats pour lesquels Benjamin Desbuquoit ne semble pas avoir éprouvé le besoin de donner une justification. Craignait-il d'aller trop loin ? Cette formule, qui est par exemple présentée et démontrée dans le manuel de 1983 de l'IREM de Strasbourg, ne mobilise que les connaissances relatives à l'équation du second degré. Si l'on peut hésiter, pour un texte imprimé, à pousser trop avant le souci de justification, il n'en est pas de même pour de l'hyper-texte. Celui-ci rend possible une étude à plusieurs niveaux ; dans une situation un peu différente, envisagée pour son doctorat par Vincenzo Bongiovanni, ce sont des aides à la résolution d'exercices sur les coniques qui sont hiérarchisées.

Dans ce dernier exemple, le fichier fait apparaître des boutons qui établissent des liens avec un micro-monde, celui de Cabri-géomètre. Au contraire de la présentation verrouillée de Toolbook (interdisant jusqu'à la copie de parties de textes), ce dossier là est donc conçu pour autoriser des apports aux utilisateurs. Soulignons que le dossier sur les coniques a été prévu pour la formation des enseignants, alors qu'ici nous avons à faire avec un dossier pour utilisation directe par des élèves dans des classes. Chacune des formules (fichiers modifiables ou non) a son intérêt propre, en fonction de la situation d'enseignement.

Sur l'écran dont nous avons reproduit le contenu, les boutons inférieurs sont davantage indépendants des informations présentées sur la page. Les boutons *Quitter* et *Plan* le sont même totalement. Le bouton *Retour* renvoie à la page précédente dans l'ordre fixé par l'auteur et non pas, comme pour une navigation dans un fichier *html*, à l'écran précédemment affiché par l'utilisateur. Il est même inopérant si la page à l'écran est la première d'un chapitre. Le bouton *Notes* renvoie à un formulaire qui s'enrichit progressivement, en général d'un chapitre à l'autre, sauf pour le premier enrichissement qui couvre la partie B du chapitre 1 et le chapitre 2. Nous indiquons ci-après sa forme finale, qui est celle du chapitre 4, en indiquant par des lignes en pointillés ses limites successives.

Voici quelques formules à garder en mémoire : $i^2 = -1$ $N(z) = a^2 + b^2$ $\bar{z} = a - bi$
$z = \|z\|(cos\ \theta + i\ sin\ \theta) = \|z\|\ cis\ \theta = a + bi$ Calcul de l'argument : $\tan \theta = \frac{a}{b}$ Calcul du module : $\|z\|^2 = a^2 + b^2$ Formule de de Moivre : $(\text{cis}\ \alpha)^m = \text{cis}\ (m\alpha)$
Formule de Taylor-Maclaurin $f(x) = f(a) + f'(a)\ (x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(a)$
Formule d'Euler : $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Le lecteur attentif aura été surpris de rencontrer dans ce formulaire la présence d'une notation inhabituelle : *cis*, qui apparaît dans la forme trigonométrique d'un nombre complexe et dans la formule de Moivre (nous ne répétons pas la particule du nom comme le fait BD). Cela tient au souci de correction de l'auteur ; il se démarque ici nettement des auteurs de manuels qui introduisent directement la formule d'Euler comme une définition. C'est en particulier le cas des manuels cités par Benjamin Desbuquoit. Une justification était présentée dans le manuel déjà cité de l'IREM de Strasbourg, par similitude de forme entre la dérivation de $y = e^{\alpha x}$ pour α réel, qui conduit à $y' = \alpha y$, et celle de $y = \cos x + i \sin x$, qui conduit à $y' = iy$.

Cette justification figure parmi celles que Benjamin Desbuquoit donne, mais il est à ce sujet plus exigeant encore que les auteurs du manuel indiqué. Elle n'est pour lui pas la seule. Dans le droit fil d'Euler, il tient à ce que l'exponentielle complexe n'ait droit de cité qu'après une étude attentive de développements en séries. C'est pourquoi, en attendant d'avoir mené à bien l'examen des développements de Taylor des fonctions trigonométriques et exponentielle, il ne se sent pas fondé à présenter une exponentielle complexe et introduit alors une désignation particulière, disons provisoire, cis θ pour $\cos \theta + i \sin \theta$. On peut discuter un tel choix, mais cette ligne de conduite est intéressante, notamment dans les perspectives signalées par Raymond Duval dans son article « *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques* », tout particulièrement (cf. p. 371 de la revue RDM) en référence à Vygotski à propos du signe et du mot dans le processus de formation des concepts.

Pour ma part, j'ai envie de dire à cet endroit que Benjamin Desbuquoit attire l'attention sur une insuffisance de la réflexion didactique des auteurs de manuels concernant l'extension de l'exponentielle à des exposants imaginaires. Pour autant, j'ai une réticence vis à vis de l'introduction de notations qui ont un caractère provisoire et ne jouissent pas de propriétés les distinguant des notations définitives (ici encore, des propos de l'article de Raymond Duval viennent à l'esprit). La technique de l'hyper-texte a la même possibilité de s'appliquer sur ce point que pour l'introduction des complexes. Le lecteur pouvait se plonger dans l'origine historique des nombres complexes, il pourrait ici voir présenter la notation exponentielle d'Euler comme nécessitant des développements, auxquels un lien donnerait libre accès.

Des usages à envisager pour l'hyper-typographie mathématique.

L'écriture mathématique est soumise à des règles typographiques. Rappelons les principales : Un texte ne doit pas mélanger la langue usuelle et des symboles mathématiques, hormis des nombres et les signes d'égalité ou d'inégalités (on ajoute parfois l'appartenance et l'inclusion) ; une phrase ne doit jamais commencer par un symbole, nombre ou lettre désignant un objet (exemple d'un point en géométrie) ; une formule mathématique donne lieu à un saut de ligne et est centrée.

Pour un ouvrage mathématique tel un manuel, sans qu'il y ait des règles explicitées aussi précisément, des usages ont cours. Ainsi la typographie facilite la distinction de parties remplissant des fonctions différentes : textes de présentation et listes d'énoncés d'exercices par exemple, problèmes de synthèse, éventuelles activités, notices. En accompagnement du texte, un certain nombre d'utilitaires sont présents : table des matières bien sûr, mais aussi formulaires, tables numériques éventuelles, index des termes introduits et des notations. Une bibliographie est souvent absente (malheureusement) des manuels pour l'enseignement du second degré, mais est de règle dans ceux destinés à l'enseignement supérieur.

Il peut de même apparaître intéressant que l'on réfléchisse à des règles comparables à propos d'hyper-textes. Leur objectif doit évidemment être d'en faciliter l'usage. Il serait prétentieux d'être injonctif dans cet article, il ne peut s'agir ici que de soulever des questions à ce sujet, de susciter des réflexions.

La présentation de la navigation semble être un usuel à préconiser au même titre qu'une table des matières. Le principe d'économie : une quinzaine de lignes de texte au plus par écran, qui a été systématiquement appliqué dans le dossier examiné, mérite discussion ; jusqu'à quel niveau la fragmentation qui en résulte est-elle recommandable, acceptable, quand est-elle excessive ? Un index sera évidemment intéressant pour des documents d'une certaine ampleur (le dossier sur les complexes, lui, n'en comporte pas). Enfin, l'attention mérite d'être portée aux problèmes liés aux sorties momentanées d'un document et aux retours (de même qu'il est recommandé de lire des maths imprimées muni d'une feuille de papier et d'un crayon, une étude d'hyper-texte doit pouvoir être accompagnée de calculs, manipulations, etc).

De l'insuffisance des apprentissages numériques...

Dans le dossier de Benjamin Desbuquoit, l'écran que nous avons reproduit affiche un lien sur l'expression « des nombres réels ». Le contenu de la note sur ces nombres, dont nous n'avons pas parlé jusqu'à présent, car elle se situe en périphérie du sujet traité, est néanmoins très instructif pour des enseignants de mathématiques. Il montre qu'un élève d'un niveau pourtant exceptionnel, à la fois mûr et inventif, a reçu une formation qui reste lacunaire sur ce matériau de base des mathématiques que constituent les nombres.

La note signalée commence par parler des nombres rationnels et signale que certains nombres ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux nombres entiers relatifs. Deux exemples sont donnés : $\sqrt{7} = 2{,}645751311064\ldots$ et $\pi = 3{,}141592653589\ldots$ Puis il est dit que l'ensemble des nombres réels est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels ; les propriétés de cet ensemble, muni des opérations d'addition et de multiplication usuelles, sont alors résumées par l'expression $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, ordonné, archimédien et complet.

Cette présentation témoigne d'un décalage entre une vision générale avancée des nombres réels et une limitation de leur désignation individuelle, obligeant à recourir à la négation (les nombres qui ne sont pas rationnels, mais alors que sont-ils ?) illustrée par des exemples. Ces exemples se trouvent correspondre, en conformité avec ce que nous signalions à propos des acquisitions conceptuelles, à des situations où plusieurs registres d'expression interviennent (registre algébrique pour des radicaux et géométrique pour π, outre l'expression décimale – seulement approchée donc impropre). Certes, Benjamin Desbuquoit aurait sans doute été capable d'imaginer d'autres exemples, tel 0,1001000100001..., mais en ressentant alors probablement une gêne vis à vis de leur statut. Des expériences personnelles sur des objets numériques présentés dans plusieurs registres, comme les fractions reliées aux points d'une droite graduée (voir l'article de Robert Adjiage dans ce numéro), ou des fractions continues périodiques (exemple : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$), que d'ailleurs Euler connaissait, nous semblent faire cruellement défaut dans l'enseignement de base des mathématiques.

Bibliographie.

Le CD sur lequel est enregistré le dossier de Benjamin Desbuquoit :

J-P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil, 1999, *Compétences terminales en mathématiques*, Université de Mons-Hainaut. Ce CD ROM peut être obtenu en s'adressant à Guy Noël, 86 rue de la Culée, B – 6927 RESTEIGNE.

Bibliographie indiquée dans le dossier

N.J. Schons, 1963 (3e édition), *Compléments d'arithmétique et d'algèbre*, La Procure, Namur – Bruxelles.

N. Nakatani, J-C. Perrinaud, D. Porté, 1992, *Géométrie, Algèbre, Terminales C et E,* collection Dimathème, Didier, Paris

P.H. Terracher, R. Ferrachoglou, 1994, *Mathématiques Terminale S (enseignement obligatoire),* Hachette, Paris

P.H. Terracher, R. Ferrachoglou, 1994, *Mathématiques Terminale S (enseignement de spécialité),* Hachette, Paris

et références des illustrations du dossier

Pour la Science, 1994, Dossier hors série, *Les mathématiciens*, Belin, Paris

Microsoft Encarta, 1999, *Encyclopédie*, édition de luxe.

R. Abraham, J.E. Marden, 1967, *Foundations of mechanics*, W.A. Benjamin Inc., New York – Amsterdam

B. Belhoste, 1985, *Cauchy, un mathématicien légitimiste au 19e siècle*, Belin, Paris

D. Bergamini, 1969, *Les mathématiques*, collections Time-Life

R. Caratini, 1972, *Les nombres et l'espace*, encyclopédie Bordas, Paris

L. Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale*

C.F. Gauss, 1981, *Werke (Band X)*, G. Olms Verlag, Hildesheim – New York

E. Hairer, G. Wanner, 1996, *Analysis by its history*, Springer Verlag, New York – Berlin

T. Needham, 1997, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford

Newton, MDCCXL, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Debure, Paris.

Bibliographie complémentaire (références citées dans cet article).

IREM de Strasbourg, 1983, *Géométrie, Algèbre, Terminales C et E*, Istra, Strasbourg – Paris

IREM (travaux de la commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques), 1998, *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris

J. Borreani, P. Tavignot, R. Verdon, 2000, *Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de sixième*, CRDP - IUFM, Rouen

R. Duval, 1996, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques », *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16/3, La Pensée Sauvage, Grenoble

V. Bongiovanni, 2001, *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue des enseignants*, Thèse de l'Université Joseph Fourier accompagnée d'un CD de formation sur les coniques, Grenoble

Observation de binômes travaillant avec un logiciel de calcul formel

Mohammed MOURADI*

Abstract**

The objective of this work is to study the effects of the utilisation of the software DERIVE, its impact on the common mathematical practices and their eventual changes in the students steps when solving problems. This research is based on the initiation to the software and observation of eight binomial first year university students. These binomials were observed separately, treating a problem of analysis, which leads to produce a script that contains the sequence of DERIVE's expressions completed by elements coming from observer's notes. Such observation was done for quite a long period of time so as to allow the manifestation of changes of approach of the questions treated resulting not only from the interaction with the machine but also with the individual interaction.

Résumé

L'objet de ce travail est une étude des effets de l'utilisation du logiciel DERIVE, de son impact sur les pratiques mathématiques usuelles et des éventuels changements dans les démarches des étudiants en situation de résolution de problèmes. La recherche s'appuie sur l'initiation au logiciel et l'observation de huit binômes d'étudiants de la première année universitaire. Les binômes ont été observés séparément, traitant un problème d'analyse, ce qui conduit à un "script" constitué de la séquence des expressions de DERIVE complétée d'après les notes de l'observateur. L'observation s'est faite sur une durée assez longue, qui permet la manifestation de changements d'approche des questions traitées, dus non seulement à l'interaction avec la machine mais aussi aux échanges interindividuels.

---

* Professeur-Assistant au Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, B.P. 1796, Fès-Atlas, Maroc.

** Cet article a bénéficié pour sa préparation, de la participation du Professeur François Pluvinage de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, dans le cadre du programme COPEP 97 S 20/1.

1. Introduction

L'évolution des technologies informatiques permet l'accès au calcul formel à un large public et favorise sa pénétration dans les établissements d'enseignement supérieur et ceux d'enseignement secondaire. L'utilisation de ces systèmes soulève de nombreuses questions générales, dont nous rappelons les suivantes : cerner ce que peuvent réellement apporter ces logiciels à l'enseignement des mathématiques, préciser les conditions d'une gestion efficace de ces nouveaux outils et déterminer des formations appropriées pour les enseignants (Michèle Artigue & al. 1995). Notre travail se situe dans cette problématique. Plus précisément, nous voulons étudier l'impact de l'utilisation d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence DERIVE), sur les pratiques et démarches des étudiants de la première année universitaire, en situation de résolution de problèmes. Pour ce faire, nous avons observé, lors d'une durée suffisamment longue, huit binômes d'étudiants résolvant un problème mathématique en utilisant le logiciel à leur guise, après avoir été initiés à son usage. A l'arrivée, il est apparu qu'outre l'impact de l'utilisation du logiciel, des caractéristiques individuelles de travail ont pu être mise en évidence (cf. au tableau qui donne une typologie des comportements des binômes, fin du paragraphe 4). Une telle retombée élargit les perspectives d'intervention didactique.

Signalons au passage que le Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de Fès a privilégié ce mode d'investigation pour un certain nombre de travaux. Les recherches entreprises au sein de ce groupe (cf. par exemple Ahmed Behaj, 1998 et Moncef Zaki, 1991) permettent de s'appuyer sur une pratique éprouvée, pour mettre en place des situations favorables à l'observation et recueillir les données qui en résultent. Une telle méthodologie permet de ne pas se focaliser seulement sur les compétences mises en œuvre par les étudiants et les situations d'enseignement. La présente étude met en évidence que c'est le repérage d'attitudes, au travers de l'observation de stratégies de résolution, qui se trouve ainsi favorisée.

Pour l'apprentissage de disciplines telles que les mathématiques, l'évolution de l'enseignement conduit à ne pas se satisfaire de la seule situation paradigmatique usuelle, qui est celle d'un groupe dirigé par un enseignant. En ce qui concerne des pratiques comme les travaux personnels encadrés, l'élaboration de projets, la rédaction de mémoires supposant le recueil individuel d'une certaine documentation, les recherches comme celle qui est présentée ici sont à même de fournir des points d'appui aux enseignants qui s'y engagent déjà, ou s'y engageront à l'avenir.

2. L'expérimentation retenue et ses spécificités

2.1 Le cadre contractuel de l'expérimentation

L'expérimentation concerne des étudiants de la première année universitaire (section MP : mathématique et physique) qui, au cours de leurs études, n'ont jamais utilisé l'ordinateur. Une annonce faite en amphi avait sollicité les candidatures de binômes volontaires pour une expérimentation, dont les tenants et aboutissants avaient été succinctement décrits. Une limite pour l'observation avait été fixée à 10 binômes. Les volontaires pour l'expérimentation ont dépassé ce nombre, peut-être à cause de la présence de l'ordinateur, et il a donc fallu se restreindre aux dix premiers arrivés.

Aux étudiants retenus s'offrait ainsi la possibilité d'une découverte : celle de l'utilisation de l'outil informatique dans la résolution de problèmes en mathématique. De plus, l'expérimentateur avait décidé de retenir des problèmes portant sur des notions de leur programme, afin que l'expérimentation s'inscrive dans le cursus des étudiants comme des séances de révisions.

Pour les besoins de l'expérimentation, il y avait à analyser les démarches des étudiants, en situation de résolution de problèmes, utilisant librement le logiciel DERIVE et à s'appuyer sur l'observation des comportements, pour dégager les caractéristiques essentielles de ces démarches. Il fallait pour cela que les binômes acceptent que leur activité (échanges verbaux, utilisation du logiciel, travail "papier – crayon") soit suivie par l'expérimentateur et s'engagent à élaborer des productions écrites remises à chaque fin de séance.

L'expérimentation s'est déroulée en deux étapes :

1- Nous avons organisé d'abord deux séances d'initiation au logiciel DERIVE, d'une durée de trois heures chacune. La première séance est essentiellement consacrée à la familiarisation avec la syntaxe imposée par le logiciel et à la manipulation des principales commandes du logiciel. Les étudiants travaillent à deux sur une machine, ils ont à leur disposition une fiche technique qui décrit brièvement DERIVE (une quinzaine de pages). L'enseignant dirige le travail, il note au tableau les instructions à exécuter et suit les activités de chaque binôme. La deuxième séance est organisée pour permettre aux étudiants de mobiliser les connaissances acquises lors de la première séance dans la résolution d'exercices simples.

2 - Ensuite, nous avons invité les étudiants à résoudre un problème d'analyse concernant plusieurs aspects de l'activité mathématique, avec accès libre au logiciel DERIVE, sans

contraintes, ni temporelles, ni d'évaluation. Les observations sont faites séparément, leur durée moyenne est de deux heures et trente minutes. L'observateur prend des notes pendant le déroulement de la séquence. Il n'intervient que lors de blocage prolongé dû à la méconnaissance de DERIVE ou pour demander des explications sur certains comportements incompréhensibles. Nous espérons ainsi atteindre une représentation aussi fidèle que possible des connaissances mises en œuvre, à travers des comportements authentiques. L'appréciation des résultats fournis par le logiciel est laissée à la charge de l'étudiant, qui devrait déterminer tout seul ce qui peut être accepté sans justification. A la fin de la séance l'observateur récupère le travail des étudiants sur DERIVE, la rédaction de leurs solutions et leurs brouillons.

2.2 Problème proposé aux étudiants

On considère la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\text{atan}(x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

1°/ f est-elle dérivable en 0 ?

2°/ Montrer que atan(x) + atan(1/x) = $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x<0 \end{cases}$

3°/ Montrer que l'on peut écrire f(x) sous la forme :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}h(x)$ avec $\lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$, au voisinage de $+\infty$

$f(x) = px + q + \frac{r}{x} + \frac{1}{x}g(x)$ avec $\lim\limits_{-\infty} g(x) = 0$, au voisinage de $-\infty$

Déterminer les constantes a, b, c, p, q et r.

4°/ Préciser les asymptotes de f et leur position par rapport à la courbe représentative de f. Tracer cette courbe et les asymptotes obtenues.

L'énoncé ci-dessus a été retenu pour les caractéristiques suivantes :

- Il concerne des notions qui figurent au programme d'analyse de la première année universitaire et qui ont été déjà abordées dans l'enseignement du second degré.
- Il fait intervenir des questions qui ont fait l'objet d'un enseignement universitaire habituel sous forme de cours magistraux et de travaux dirigés.
- Il est présenté sous la forme classique d'une suite de questions fermées, plus ou moins

dépendantes les unes des autres, afin que l'impact de l'utilisation du logiciel sur l'activité des étudiants soit repéré sur différents types de situations mathématiques (calcul algébrique, obtention de limites, démonstration, études graphiques).

- Le problème comporte des questions sollicitant des savoir-faire, qui se prêtent bien à l'utilisation du logiciel, sans toutefois que l'activité ne soit réduite à une simple exécution de commandes du logiciel. Si, pour l'initiation à DERIVE, les questions proposées pouvaient être résolues directement grâce à des commandes du logiciel, en revanche, les questions du problème, sauf le tracé de graphe, exigent un travail mathématique consistant. Elles nécessitent également la mobilisation de connaissances plus élaborées, qui se situent au niveau de la logique d'utilisation et de la logique du fonctionnement du logiciel. Ces connaissances sont nécessaires pour interpréter correctement les résultats fournis par le logiciel. Parmi ces questions il y en a qui ne se traitent normalement, en papier/crayon, que dans le registre algébrique[1], à l'aide du logiciel elles peuvent être abordées et résolues rapidement, aussi bien dans le registre algébrique que graphique. Ainsi, en facilitant l'accès à plusieurs registres, DERIVE pourrait suggérer de nouvelles approches qui émergent de l'articulation des différents registres disponibles et qui s'adaptent mieux aux environnements informatiques.

2.3 Rappel de quelques caractéristiques du logiciel DERIVE.

DERIVE est un logiciel de calcul symbolique qui n'est pas conçu spécialement pour l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques, mais plutôt comme un assistant mathématique. Il évalue, comme tous les systèmes de calcul formel, avec une précision infinie[2], des expressions algébriques. Ces expressions peuvent combiner des constantes numériques, nombres naturels, rationnels, irrationnels et nombres transcendants comme π ou e, des lettres, des polynômes à une ou plusieurs indéterminées, des fractions rationnelles, des fonctions usuelles (fonctions polynomiales ou rationnelles, fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, etc.), des vecteurs, des matrices, etc. Comme le fait remarquer J. Zizi (1993) : "Une même expression algébrique peut avoir un grand nombre d'écritures et il n'existe pas d'algorithme général permettant de reconnaître deux écritures différentes d'une même expression".

---

[1] Ici, le coût de traitement dans le registre graphique est excessif ; le problème du signe de la dérivée est infaisable en papier/crayon.

[2] dans les limites de la capacité de l'ordinateur.

Nous présentons dans ce qui suit quelques spécificités[3] du logiciel DERIVE, en les comparant parfois avec MAPLE. Nous mettrons plus particulièrement en avant les six caractéristiques suivantes.

i – DERIVE est réputé être très accessible.

ii – Le logiciel peut fonctionner sur des PC très modestes et même sur certaines calculatrices programmables.

iii – Il demande que chaque entrée soit introduite sous forme d'une ligne d'écriture. Ainsi l'expression

$$a^{x-1}+\frac{x^2+2x+1}{3-\frac{1}{(x+8)^5}}$$

doit être entrée sous la forme a^(x-1)+(x^2+2x+1)/(3-1/(x+8)^5). Elle s'affiche alors à l'écran sous sa forme mathématique habituelle.

iv – Les possibilités de programmation avec DERIVE se réduisent à l'utilisation d'instructions conditionnelle et de répétitions.

v – Au contraire de MAPLE, DERIVE affiche des expressions sans distinguer celles qui ont été entrées et celles qui résultent d'un traitement. Il ne facilite pas non plus l'introduction de commentaires ce qui complique quelquefois la compréhension d'une session de travail sur ce logiciel.

vi - Il ne donne pas accès à son utilisateur aux possibilités de "debug", ni à la fonction "trace" qui permettent de voir l'évolution du système ou de comprendre ce qu'il fait au cours d'une évaluation. Il devient difficile d'expliquer certaines aberrations du logiciel, que nous pouvons illustrer par les trois exemples qui suivent.

- DERIVE ne peut ni factoriser ni calculer les racines du polynôme

$$4x^8+48x^7+256x^6+792x^5+1590x^4+2196x^3+2104x^2+1290x+459$$

(cf. C. Gomez 1995, pour cet exemple), alors que MAPLE donne les racines :

$$-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{-1\pm 2\sqrt{-18\pm\sqrt{13}}}}{2}.$$

- DERIVE trouve $\int_0^3 (x^2-3\left[\frac{x^2}{3}\right])dx$ = -18 en "mode exact", alors qu'en "mode approché", il fournit un résultat correct comme 3.54438 ; MAPLE opère différemment mais ne fait pas mieux, puisqu'il donne aussi une valeur négative (–9) comme résultat pour le calcul "exact".

---

[3] Pour une étude comparative des trois logiciels Derive, Maple et Mathematica consulter Zizi (1993).

- DERIVE donne la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$, mais n'évalue pas $\cos(\frac{\pi}{16})$ bien que cette dernière valeur puisse être déterminée à partir de la précédente par un calcul très simple. Cet exemple est mentionné par Trouche (1997), qui explique cette défaillance du logiciel par des raisons de limitation de la mémoire.

Zizi (1993) qualifie DERIVE de "système logiciellement fermé [...], où on obtient ce que l'on veut par une succession d'appuis sur des touches et un minimum de saisies et de syntaxe". Elle précise par ailleurs que "cette politique de fermeture délibérée est exprimée dans la documentation", puisque Rich & Stoutemeyer (1993) indiquent : "Les fiches contiennent certaines fonctions auxiliaires qui ne sont pas décrites ici. Elles ne sont pas construites pour que vous les utilisiez directement. Par conséquent, vous n'avez pas besoin de savoir comment les utiliser". Ainsi, lorsqu'on utilise DERIVE il est difficile pour certaines études de dépasser l'approche "boîte noire". En fait les échecs du logiciel doivent être pris en charge par l'utilisateur lui-même. C'est lui qui doit trouver les explications plausibles, à travers un questionnement qui pourrait l'engager dans une phase essentielle pour l'apprentissage, tant que les réponses recevables restent à sa portée.

Par ailleurs, il est très important d'avoir présent à l'esprit que DERIVE travaille sur des expressions qui ne sont pas des phrases[4]. Cela risque notamment de compliquer la compréhension et l'interprétation des retours du logiciel. En particulier, lorsqu'on utilise "Ctrl + Entrée" lors de la saisie d'une expression, le logiciel exécute la commande et fournit le résultat sans même faire apparaître la commande qu'il a exécutée. Une difficulté relevée par Michèle Artigue (1997) concerne la simplification automatique faite par le logiciel lors de la saisie d'expressions. "[...]DERIVE ne réintroduisant pas les parenthèses tapées par les élèves. Il s'ensuit un quiproquo, l'enseignant voulant leur faire dire qu'elles ont oublié les parenthèses, les élèves de leur côté disant que non, que c'est la faute à DERIVE".

3. Analyse a priori

Le problème proposé concerne deux types d'activités : une activité de démonstration qui fait l'objet de la deuxième question et, une activité technique consistant à tracer des graphes et à calculer des limites ou des développements limités (notés DL par la suite). Ces calculs

[4] Le discours y compris mathématique traite de phrases comme unités signifiantes.

concernent des expressions composées de plusieurs termes. Ainsi, l'outil utilisé pour accomplir cette tâche influence énormément sa réalisation effective.

3.1 Dérivabilité à l'origine et développement asymptotique

La première question est relative à l'étude de la dérivabilité de la fonction à l'origine, elle conduit au calcul de limite de l'expression g(x)[5]. Quant à la troisième question, elle concerne le développement asymptotique, elle donne lieu au calcul de DL de l'expression f(t).

Où : $g(x)=\dfrac{e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{atan}(x)}{x}$; $f(t)=e^{-t}\sqrt{1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}}\,\mathrm{atan}(\dfrac{1}{t})$.

3.1.1 Approche ascendante

Dans l'environnement papier/crayon on dispose de quelques résultats sur les limites, on connaît les DL des principales fonctions usuelles et on connaît également quelques théorèmes concernant par exemple la somme, le produit ou la composition de fonctions. Ainsi, pour calculer la limite ou le DL d'une expression assez compliquée (du type f(t) ou g(x)) on procède en trois étapes : décomposer d'abord en sous expressions simples puis, traiter chacune des sous expressions et utiliser enfin un ou plusieurs théorèmes pour établir la solution finale. Cette approche sera qualifiée d'**ascendante,** elle se développe à partir de résultats locaux accessibles pour atteindre la réponse globale. Une synthèse est donnée à travers les **schémas 1 et 2**.

Le schéma1 met en évidence une approche de résolution ascendante, dont la réalisation nécessite, d'une part, des connaissances mathématiques, en particulier dans le domaine des limites - calcul de limites de fonctions usuelles, théorème sur le produit de limites, fonctions équivalentes - et d'autre part, elle fait intervenir un savoir-faire pour choisir le découpage adéquat et faire les aller-retour nécessaires pour la résolution de la question. Ce savoir-faire s'acquiert par l'expérience et la pratique quotidienne des mathématiques, il fait rarement l'objet d'un enseignement explicite.

Le plus délicat dans cette résolution revient à lever l'indétermination. En général, ce problème est difficile, car une application immédiate de résultats du cours ne suffit pas pour le résoudre. Les DL habituellement utilisés pour débloquer ce type de situation ne peuvent pas être utilisés, les fonctions qui interviennent dans l'expression traitée n'admettent pas toutes un DL au voisinage de l'origine.

[5] Cette fonction sera désignée par G dans l'environnement DERIVE, pour respecter la syntaxe du logiciel.

$$\text{Soit } g(x) = \frac{e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\operatorname{atan}(x)}{x}$$

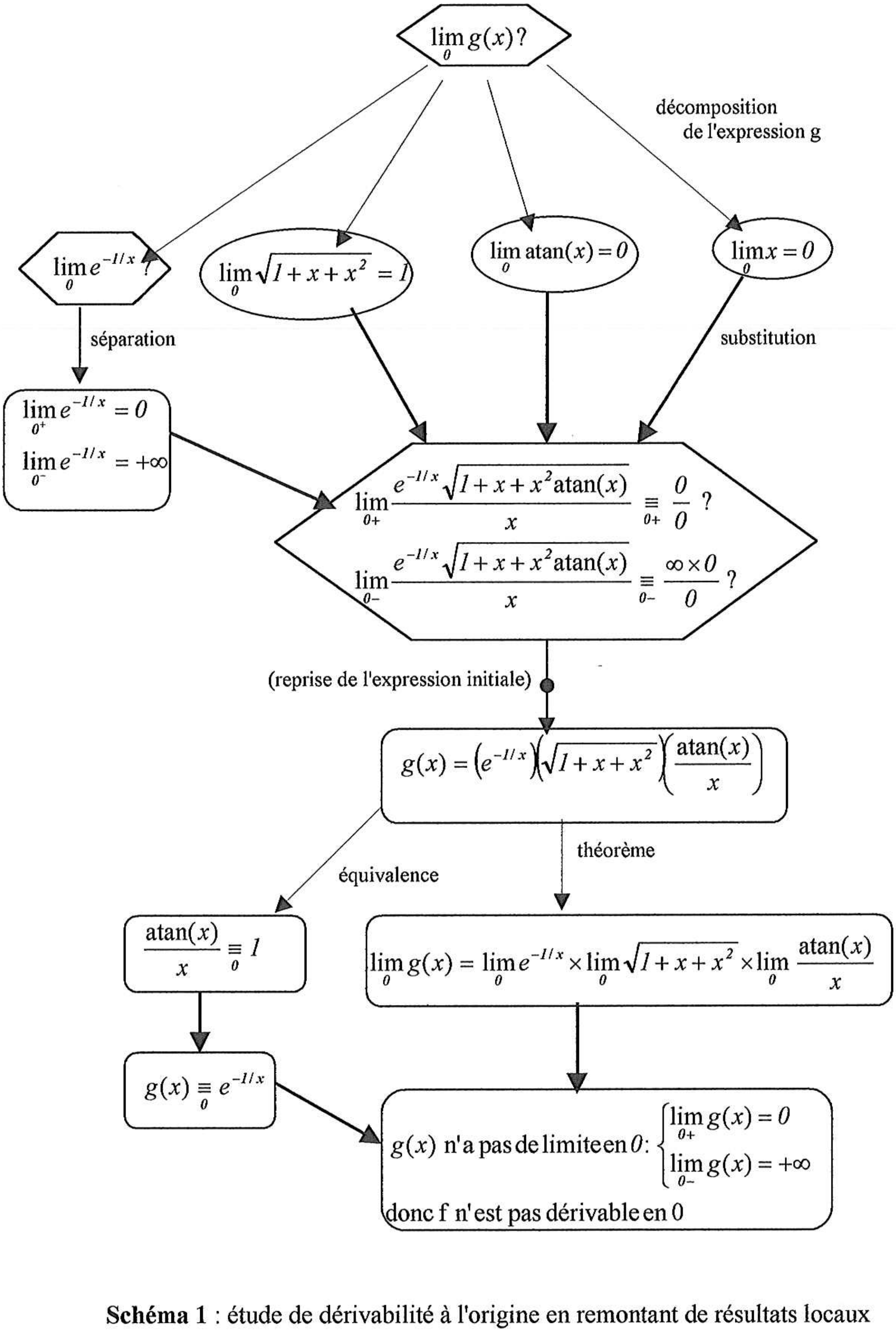


Schéma 1 : étude de dérivabilité à l'origine en remontant de résultats locaux

$$f(x)=e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{atan}(x)$$

$$f(t)=e^{-t}\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{t}$$
pour $t>0$

$$\mathrm{atan}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}(t)$$
pour $t>0$

$$e^{-t}=1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\sqrt{1+t+t^2}=1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{8}+o(t^2)$$

$$\mathrm{atan}(t)=t+o(t^2)$$

$$f(t)=\left(1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\left(\frac{\left(1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{8}+o(t^2)\right)}{t}\right)\left(\frac{\pi}{2}-t+o(t^2)\right)$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}-1+\frac{3\pi+8}{16x}+\frac{1}{x}h(x)$$
avec $\lim\limits_{+\infty} h(x)=0$

Schéma 2 : développement asymptotique de la fonction en remontant de résultats locaux

Le schéma 2 fait apparaître une procédure de calcul très technique, mais qui ne se réduit pas à une exécution automatique d'algorithmes. Cette procédure est constituée de plusieurs étapes de natures différentes :

- Chercher d'abord une formulation convenable qui permet d'appliquer les formules des DL, ce qui revient à réécrire quelques termes de l'expression considérée à l'aide de fonctions usuelles dont on connaît les DL.
- Calculer ensuite les DL de chacun des termes.
- Rassembler les résultats partiels obtenus pour établir la formule cherchée.

La conduite de ces différentes étapes et leur articulation demande une bonne maîtrise du calcul algébrique et une flexibilité cognitive satisfaisante qui permet de passer d'un traitement à l'autre, puisque chacun des DL s'obtient par un traitement différent.

3.1.2 Approche descendante

En revanche, dans l'environnement DERIVE, outre les outils disponibles dans l'environnement usuel, le logiciel offre des possibilités supplémentaires importantes. Il permet de calculer les limites et les DL d'expressions assez complexes et peut tracer rapidement les graphes des fonctions de l'utilisateur. Il met ainsi à la disposition de l'individu des outils qui lui permettent d'aborder les questions de limites et de DL d'une manière globale, sans être obligé de passer par une atomisation de la tâche. La décomposition de la tâche ne sera entreprise que si l'étude globale échoue. Nous qualifions cette approche de **descendante.**

C'est cette démarche que présentent les **schémas 3 et 4** (voir pages suivantes).

Dans l'environnement DERIVE la décomposition décrite dans le schéma 1 complique inutilement la tâche. Le plus naturel, une fois l'expression g(x) saisie, est de la traiter comme une seule entité. Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants vont faire calculer au logiciel la limite de cette expression, en adoptant de manière spontanée l'approche descendante. Alors que d'habitude dans l'environnement usuel, ils procèdent plutôt par l'approche ascendante. L'analyse de la tâche fait apparaître trois points importants.

a – Tracé de graphe : Le logiciel DERIVE trace très rapidement le graphe de la fonction considérée et permet ainsi de pouvoir résoudre la première question du problème dans le registre graphique de façon quasi immédiate. L'économie que procure l'utilisation d'un logiciel pour la résolution graphique dépend de la familiarité avec le logiciel et de l'expérience acquise qui permet d'apprécier les productions du logiciel à leur juste valeur. Les environnements informatisés favorisent l'émergence de nouvelles pratiques : tracer le graphe d'une fonction, devient le geste premier des étudiants qui utilisent très fréquemment les logiciels graphiques.

$$\text{Soit} \quad G(x) = \frac{EXP\left[-\frac{1}{x}\right] RAC\ (1 + x + x^2)\ ATAN\ (x)}{x}$$

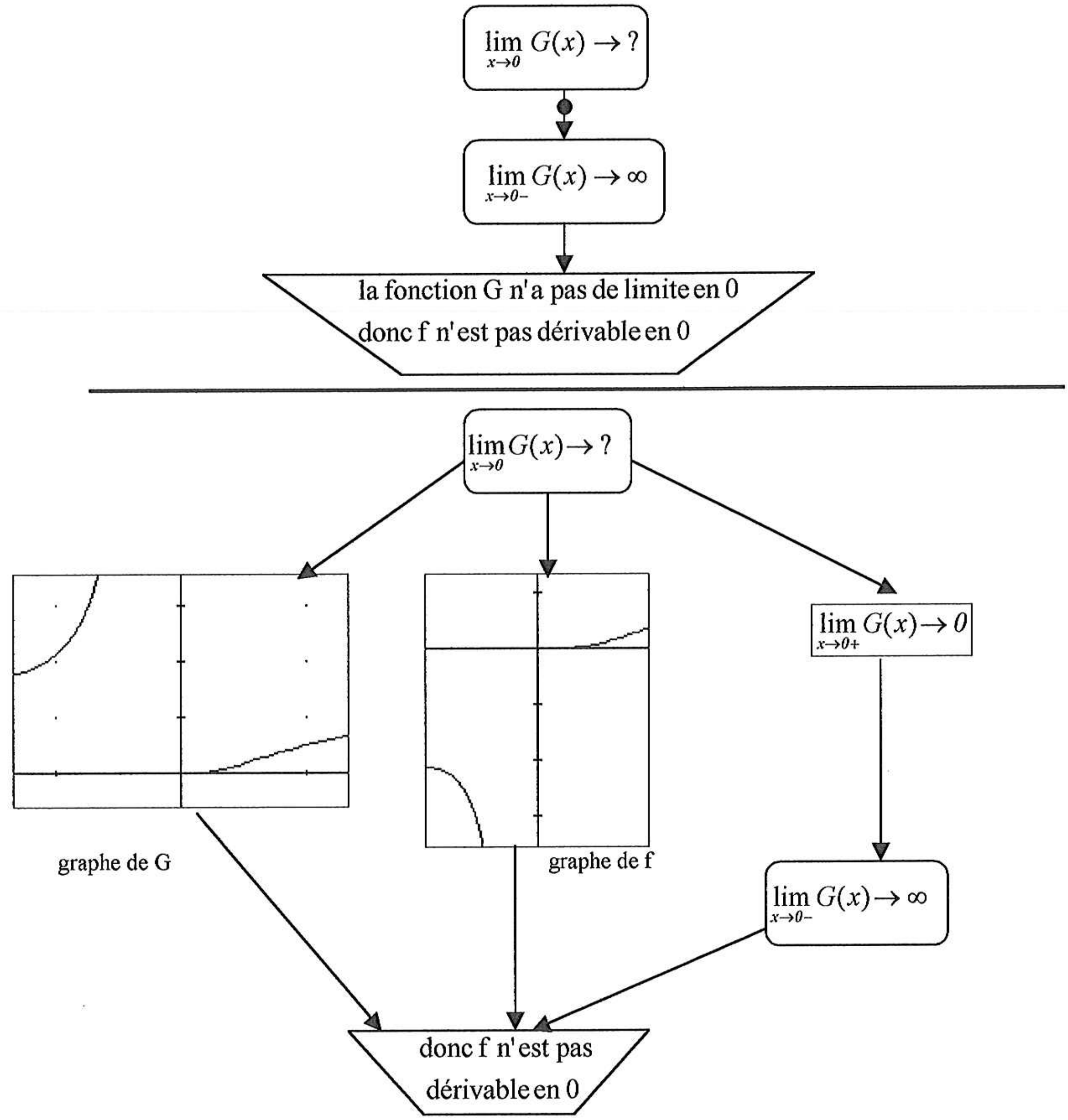
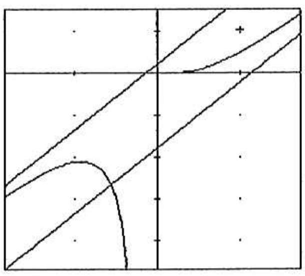


Schéma 3 dérivabilité à l'origine dans l'environnement DERIVE



$$f(x) = e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{atan}(x)$$

$$\downarrow$$

$$f(t) = e^{-t}\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{atan}(\frac{1}{t})$$

$$\downarrow$$

$$f(t) = \frac{e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}\,(\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}(t))}{t}$$

pour $t > 0$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{Taylor}(e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}\,(\frac{\pi}{2}-\mathbf{atan}(t)),t,0,2) = \frac{\pi(3t^2-4t+8)+8t^2-16t}{16}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{16x} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2x} - 1$$

Schéma 4 : développem ent asymptotiq ue de la fonction dans l'environnem ent DERIVE

Luc Trouche (1997) parle de "preuve par l'image" et constate par ailleurs : "une évolution sociale qui prête à l'image des pouvoirs explicatifs suprêmes". La solution graphique nécessite l'articulation entre le registre algébrique et le registre graphique. Elle ne peut s'acquérir simplement à travers une utilisation fréquente du logiciel mais, exige un enseignement spécifique qui doit consolider les connaissances du sujet dans chacun des registres et développer sa flexibilité cognitive pour lui assurer une meilleure mobilité entre les différents registres.

La pénétration de l'outil informatique dans les établissements marocains est encore très timide[6]. D'ailleurs, comme nous l'avons déjà signalé, les étudiants observés n'avaient aucune expérience de l'ordinateur. Nous supposons qu'aucun étudiant ne sera tenté par une approche graphique pour résoudre cette question.

b – Polysémie du point d'interrogation : DERIVE permet d'aborder la première question du problème par les deux approches citées plus haut et il renvoie un point d'interrogation, dans les deux cas, lorsque les questions sont adressées au logiciel sous leur forme brutale. Or plusieurs situations peuvent conduire DERIVE à renvoyer un point d'interrogation, ce qui complique considérablement la signification à donner à cette réponse. De plus :

- Un point d'interrogation constitue pour les étudiants une nouvelle forme de réponse, inattendue, surprenante et provocante. Il marque une rupture du contrat didactique. Dans l'enseignement usuel on reçoit rarement comme réponse un point d'interrogation. Les questions ont généralement une réponse unique. Les problèmes ouverts et les problèmes que les étudiants ne peuvent résoudre que partiellement, parce que la solution complète leur est inaccessible (cf. Lagrange 1995), sont très rares, voir totalement absents de l'enseignement classique.

Le point d'interrogation de DERIVE, de même que le renvoi à l'identique d'une expression entrée (nous parlons de "silence du logiciel" dans ce dernier cas), laisse une question ouverte, suscitant des explications et des justifications.

- L'interprétation du point d'interrogation envoyé par DERIVE est étroitement liée à la représentation que l'on se fait de l'ordinateur et la manière dont on a appris à l'utiliser. Les élèves d'une classe expérimentale de Luc Trouche[7] ont exprimé ainsi leur avis : "Au début de l'année, nous avions tendance à nous servir de la calculatrice à outrance et donc à lui accorder

[6] Les établissements du secondaire ne sont pas tous équipés de matériel informatique ; pour ceux qui en disposent, il est largement insuffisant. Au supérieur, outre le manque alarmant de matériel, beaucoup d'enseignants n'expriment pas un grand enthousiasme envers cet outil.

[7] pour les détails cf. Luc Trouche (1998)

trop vite notre confiance. Mais les séances de travaux pratiques nous ont montré à nos dépens que nous avions tort [...] Il faut surtout accorder une place importante à la réflexion, sinon nous ne pouvons arriver à rien [...] C'est ainsi que d'échec en échec, de surprise en surprise, nous avons agréablement appris le véritable usage de cette calculatrice."

Notons la difficulté à se prononcer sur la faisabilité d'une tâche, lorsqu'un logiciel n'arrive pas à l'accomplir pour différentes causes, dont voici quelques-unes unes :

i - La formulation adoptée n'est pas adéquate, elle ne respecte pas les exigences de la logique d'utilisation du logiciel.

ii - Le mode retenu pour traiter la question est mal choisi. Un logiciel de calcul symbolique peut bloquer sur le calcul exact d'une racine d'un polynôme, mais peut, en contrepartie, déterminer très rapidement une solution approchée et tracer immédiatement une représentation graphique qui visualise la racine.

iii - Le logiciel utilisé n'est pas suffisamment performant.

iv - L'outil n'est pas approprié au traitement de la tâche proposée. Actuellement l'ordinateur n'est pas en mesure de résoudre certains problèmes mathématiques d'un niveau élémentaire (notamment, ceux faisant appel à des raisonnements par l'absurde).

Nous avons voulu, en proposant un énoncé qui puisse conduire l'utilisateur du logiciel à rencontrer comme réponse un point d'interrogation, provoquer chez les étudiants un comportement très recherché dans les approches constructivistes d'apprentissage, à savoir réfléchir sur les connaissances mathématiques et informatiques disponibles dans le milieu. Une telle réflexion est un objectif majeur de notre expérimentation.

c - Gestion et économie de travail dans l'environnement DERIVE : Le logiciel DERIVE peut fournir tous les développements souhaités, mais demande au préalable un travail d'adaptation aux conditions d'application de la commande Taylor[8]. Cependant rien n'est gratuit, l'utilisation du logiciel est assujettie à plusieurs contraintes. Il faut connaître d'abord quelques commandes de base et avoir une certaine expertise pour piloter et gérer efficacement de pareils calculs. En fait, l'approche ascendante s'effectue en plusieurs étapes et génère de nombreuses expressions algébriques dont la manipulation ne va pas de soi. Elle peut entraîner des difficultés insoupçonnées, en particulier lorsque :

- on doit combiner plusieurs expressions qui ne figurent pas sur le même écran parce qu'elles sont trop éloignées les unes des autres ;
- un résultat est trop long et n'apparaît pas entièrement à l'écran ;

- on doit bâtir une expression à partir de plusieurs sous-expressions très éparpillées.

A ce propos (Rogalski, 1994) écrit : "Il ne paraît pas souhaitable d'inciter, dans ce domaine, à abandonner le papier/crayon. Seul celui-ci permet pour l'instant une vision agissante instantanée qui semble, en particulier, spécifique du calcul : la vitesse de réaction, l'écriture immédiate, rapprocher des termes, corriger des morceaux, la vision globale des formules, l'anticipation visuelle des modifications possibles... utilisent une interaction entre la main, l'œil et le cerveau qui est, semble-t-il bien plus rapide et efficace que l'utilisation d'un clavier, la manipulation d'une sourie, le choix dans un menu... actions qui sont lentes, réductrices et séquentielles."

Les comportements des étudiants allaient-ils confirmer et appuyer ces propos ? L'approche ascendante est couramment utilisée dans l'environnement usuel. Nous supposons que plusieurs binômes vont l'adapter à l'environnement DERIVE. Ils seront ainsi conduits à développer une longue procédure de calcul. Quelle serait alors la nature des difficultés qui pourraient en résulter, et quel genre d'imbrication auraient-elles avec les connaissances mathématiques ?

Cependant lorsqu'on remplace x par 1/t dans l'expression de la fonction f et qu'on demande sa simplification on obtient :

$$(G_1) : \frac{\pi e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}}{2t} - \frac{e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}\,\operatorname{atan}(t)}{|t|}$$

ou

$$(G_2) : \frac{e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}\,(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}(t))}{t} \quad \text{pour } t > 0$$

Cette simplification est assez élaborée : elle remplace l'expression $\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}$ par $\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{|t|}$ et utilise implicitement la proposition annoncée à la deuxième question. Après le travail se réduit à l'exécution d'une série de commandes très simples. Cette façon de procéder est beaucoup plus économique que l'approche descendante précédemment décrite. Elle nécessite moins d'opérations, donc moins de manipulations sur ordinateur et par conséquent on a moins d'occasions de se tromper. La deuxième question devient superflue, DERIVE utilise automatiquement la proposition annoncée.

[8] DERIVE ne donne pas les développements limités, mais peut calculer les développements en série

3.2 Démonstration

La deuxième question concerne la démonstration, c'est une activité essentielle du travail mathématique. DERIVE permet de calculer différentes valeurs de l'expression $\operatorname{atan}(x)+\operatorname{atan}(\frac{1}{x})$ pour plusieurs valeurs non nulles de la variable x. Il retourne $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x)$, lorsqu'on applique la commande simplifie à cette expression, il peut également tracer rapidement son graphe. Ainsi DERIVE offre plusieurs possibilités pour entrer dans la résolution de cette question et élargit le champ d'investigations, en permettant d'aborder cette question aussi dans le registre graphique, chose à la quelle on ne pense pas du tout en situation papier/crayon. Les multiples essais autorisés par le logiciel, auront-ils un effet sensible sur les attitudes et démarches des étudiants, dans cette phase de démonstration ? Quel sera le statut du logiciel dans cette phase importante de l'activité mathématique ? L'accessibilité et la rapidité de réponse de DERIVE vont-elles favoriser le tâtonnement ? Michèle Artigue (1990 b) a constaté que les élèves de lycée accordent plus d'importance au tâtonnement lorsqu'il est effectué sur machine, qu'en est-il pour nos étudiants du supérieur ?

3.3 Tracé de graphe

La quatrième question du problème concerne les deux asymptotes obliques et leurs positions par rapport à la courbe représentative de la fonction. Ces asymptotes se déduisent directement des deux formules du développement asymptotique de la fonction. DERIVE trace instantanément sur le même graphe la courbe de la fonction et les deux asymptotes, pour cela, il suffit de sélectionner les bonnes expressions et de leur appliquer la commande graPh du logiciel. Le tracé des graphes ne demande aucune étude préalable indispensable telle que c'est le cas dans l'environnement papier/crayon. Toutefois, si on voulait la faire on se heurterait à la complexité de l'étude de la dérivée, qui a pour expression :

$$f'(x) = e^{-1/x}\sqrt{1 + x + x^2}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2x+1}{2(1+x+x^2)}\mathrm{ATAN}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

On est vraiment désarmé pour trouver les zéros de cette dérivée. Cela constitue un excellent exemple pour montrer aux étudiants les possibilités que possède DERIVE dans le registre graphique.

4. Analyse des démarches observées

4.1 Traitement des différentes questions

---

de Taylor d'une expression.

Rappelons que l'expérimentation s'est déroulée en deux étapes : la première est consacrée à l'initiation au logiciel DERIVE. Le suivi des étudiants pendant le déroulement de l'observation et l'analyse des données recueillies nous suggèrent une structuration des connaissances nécessaires pour apprendre à utiliser le logiciel de façon judicieuse en mathématique, en trois niveaux :

- le niveau 1 qualifié d'introductif, est relatif aux connaissances concernants les différentes commandes du logiciel, la syntaxe imposée et la manipulation de fenêtres et fichiers ;
- le niveau 2 relatif à la logique d'utilisation du logiciel, concerne la connaissance de l'explicitation exigée par le logiciel et l'implicite qu'il autorise ;
- le niveau 3 relatif à la logique de fonctionnement du logiciel, concerne les connaissances des procédures et algorithmes utilisés par le logiciel pour produire ses résultats.

La deuxième étape est destinée à l'observation des binômes. L'enseignant qui suit les étudiants avait pour ligne de conduite de n'intervenir que dans le cas où la méconnaissance de DERIVE conduirait à un blocage qui dure trop longtemps, ou pour demander des éclaircissements à propos d'un comportement qui lui reste obscur. Ainsi, une grande autonomie dans le travail des étudiants a pu être observée ; durant les huit séances d'observation, l'enseignant a été rarement sollicité (cas de blocage : pas de réponse de la machine et à propos du message : "memory full").

4.1.1 Etude de la dérivabilité de la fonction à l'origine et développement asymptotique

• Les stratégies de résolution des étudiants ont été conçues exclusivement dans le registre algébrique, et sont centrées sur le logiciel. D'ailleurs, conformément à ce que nous avions prévu dans l'analyse a priori, aucun binôme n'a tracé le graphe de la fonction pour voir ce qu'il peut en tirer. Le coût excessif du tracé de graphes en papier/crayon et l'expérience très limitée des étudiants de l'emploi d'outils informatiques pour la représentation graphique, contribuent à renforcer le cloisonnement des étudiants dans le registre algébrique.

• Tous les étudiants ont entamé la résolution des deux questions par une approche descendante, DERIVE leur a envoyé un point d'interrogation. Ensuite, plusieurs démarches ont été observées (voir l'étude détaillée ci-après).

• La fiche technique mise à la disposition des étudiants a été très peu utilisée ; il n'y a que deux binômes qui l'ont consultée (une seule fois) pour vérifier la syntaxe de la commande "Taylor", suite au "?" renvoyé par DERIVE.

En ce qui concerne la première question :

1 – L'interprétation abusive du retour d'un point d'interrogation a pu autoriser à conclure. Le binôme 5 en a déduit que la fonction n'est pas dérivable en 0. Un étudiant de ce binôme prétend que si DERIVE n'a pas pu calculer la limite, c'est qu'elle n'existe pas.

2 – Les discussions entre les étudiants et les tentatives de résolution en papier/crayon ont permis d'obtenir la solution en traitant la question globalement grâce au logiciel. L'approche descendante peut s'avérer très économique, d'où son succès auprès des étudiants. D'ailleurs aucun étudiant n'a pu résoudre le problème des formes indéterminées entraîné par le calcul des différentes limites de l'expression f(x)/x. Ce qui nous a le plus surpris est que personne n'a demandé comment le logiciel a procédé pour résoudre le problème. Il semble que l'essentiel est de fournir une réponse, peu importe le moyen pour y arriver. Le logiciel est devenu rapidement un outil sûr et très sollicité pour les processus de contrôle et de validation. Ce changement est trop rapide à notre avis, comme le fait remarquer Michèle Artigue (1997) : " Il y a pour nous un cadre dominant : celui de l'environnement usuel. C'est par rapport à lui que fondamentalement, même lorsque nous travaillons dans l'environnement DERIVE, nous continuons à penser les tâches mathématiques, évaluer leur pertinence, comme la validité de telle ou telle réponse. Il n'y a pas de raison que ce soit automatiquement le cas pour les élèves."
En revanche, pour la troisième question, signalons d'abord que deux binômes n'ont pas réussi à poursuivre les calculs jusqu'au bout. L'un a procédé par tâtonnement, il a multiplié les essais à l'aveuglette sans tenir compte des rétroactions du logiciel. Il effectue quelquefois un calcul et quelques lignes plus loin il refait la même chose (cf. binôme 7, Annexe). Ces étudiants multiplient les tentatives sur DERIVE espérant en tirer quelque chose de positif. Nous assistons, vraiment à un phénomène qualifié de "pêche de la solution" par Michèle Artigue. Mais la tâche ici est trop compliquée pour être résolue par une stratégie de type essai/échec : d'abord le milieu est opaque, DERIVE ne donne aucun renseignement sur les résultats qu'il fournit, ni comment il les produit. En outre, comme nous l'avons vu, les points d'interrogation peuvent avoir un rapport avec les concepts mathématiques ou avec la logique d'utilisation du logiciel, et les deux causes sont quelquefois imbriquées. Le binôme 8 (constitué d'un seul étudiant) a fait développer les trois fonctions à l'ordre 7. Il a obtenu un polynôme gigantesque dont l'expression n'apparaît pas entièrement sur l'écran. Ce polynôme qui est de degré 21 complique inutilement la tâche, l'ordre 2 suffit pour résoudre la question. Le logiciel perturbe beaucoup plus cet étudiant qu'il ne l'aide.

Les six autres binômes n'ont pas réussi au premier essai, leurs tentatives ont d'abord échoué. Ils se sont contentés, dans un premier temps, d'envoyer brutalement la question à DERIVE, sans tenir compte de la logique d'utilisation de la commande Taylor. Quelques-uns uns ont appliqué cette commande à l'expression de la fonction donnée sous sa forme initiale ou après avoir substitué 1/t à la variable x. Les autres ont essayé de calculer un développement asymptotique de la fonction donnée en utilisant la commande Taylor. Le logiciel leur a envoyé des points d'interrogation. Deux binômes seulement ont alors consulté leur fiche technique sur le logiciel à propos de la commande Taylor puis, ils ont repris un exercice de la séquence d'apprentissage relatif aux DL. Les autres binômes ont effectué les calculs de DL à la main, puis après un retour au logiciel et quelques échecs, ils sont parvenus à achever les calculs des DL. Cette démarche les a beaucoup rapproché des pratiques habituelles des DL, acquises dans l'environnement papier/crayon. A part le binôme 5, tous les autres ont procédé par une approche ascendante, confirmant l'hypothèse avancée dans notre analyse a priori. Mais leur méthode de résolution n'est pas choisie librement, elle s'est imposée suite à l'avortement de plusieurs tentatives pour aborder la question de façon globale.

Par ailleurs, les expériences des binômes 1 et 4 méritent d'être signalées. Le premier montre une organisation du travail très intéressante : pour le développement en série de Taylor de l'expression de f(x), il décide de faire séparément le développement des trois fonctions qui interviennent. Il n'y arrive pas dès le premier essai, plusieurs tentatives ont été entreprises pour établir le résultat final. Ce binôme utilise dans les DL tantôt le symbole x et tantôt u pour désigner la même variable ; malgré ce mélange il parvient à homogénéiser les formules fournies par le logiciel et il réussit à repérer et à corriger une erreur de signe. Ceci grâce à la coopération efficiente des deux partenaires : l'une manipule le logiciel, l'autre reste très vigilante et participe activement. Elle n'hésite pas à vérifier en papier/crayon quelques étapes du calcul, d'ailleurs, c'est elle qui a repéré l'erreur de signe.

L'expérience du second binôme mérite une analyse particulièrement détaillée, nous la présentons ainsi :

- Tout d'abord, pour avoir le développement en série de Taylor de l'expression :

$$e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{atan}(x)$$

au voisinage de∞, elles font le changement de variable x = 1/t et obtiennent l'expression :

$$\frac{\pi\, e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}}{2t} - \frac{e^{-t}\sqrt{1+t+t^2}\,\mathrm{atan}(t)}{|t|}.$$

Cette expression très intéressante pour le développement cherché a été totalement négligée, elle ne cadrait pas avec leurs attentes. Ce binôme ne prête aucune attention aux réponses du logiciel qui ne sont pas conformes à ses attentes, son comportement ressemble à celui du binôme 7 (cf. Annexe). L'activité des étudiantes se réduit à un jeu d'essai/échec.

- Ensuite, DERIVE donne un "?" pour Taylor($\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}$, t, 0, 1). Au lieu d'essayer de comprendre et d'interpréter cette réponse, elles remplacent mentalement $\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$ par a et font calculer à DERIVE Taylor($(1+a)^{1/2}$, a, 0, 1), remplacent ensuite a dans l'expression par sa valeur. Ce binôme donne l'impression qu'il n'est plus centré sur la question mathématique à résoudre, mais plutôt sur le jeu d'exécution de commandes.

Le pilotage à l'écran d'une longue procédure de calcul et l'élaboration d'une synthèse à partir de résultats partiels nécessite des compétences spécifiques. En papier/crayon on peut avoir sous les yeux toutes les expressions qui peuvent nous intéresser, on peut les manipuler facilement, ce n'est pas le cas dans l'environnement DERIVE.

L'analyse des différentes productions recueillies, relatives au deuxième volet de la troisième question, révèle deux démarches distinctes :

1 - Deux binômes font un travail soigné en papier/crayon, ils transforment correctement l'expression initiale de f(x), pour l'adapter à l'application de la commande Taylor, et trouvent ainsi la bonne réponse à cette question. Ces deux binômes parviennent à déterminer les bonnes équations des deux asymptotes obliques. L'un les déduit directement des expressions de f(x) en $+\infty$ et $-\infty$ obtenues précédemment, l'autre utilise le procédé classique de recherche d'asymptotes. Le tracé obtenu très rapidement par DERIVE du graphe de f et des deux asymptotes est satisfaisant.

2 - Trois binômes, après le refus du logiciel d'exécuter la commande Taylor appliquée brutalement à l'expression initiale de f(x), travaillent en papier/crayon et trouvent la forme adéquate pour appliquer la commande Taylor, mais ils se sont trompés, en omettant la valeur absolue ou en utilisant mal la question 2. Ces étudiants très gênés par le tracé de la deuxième asymptote, reviennent sur leurs calculs pour essayer de repérer l'erreur commise. Le binôme 1 y parvient grâce à la bonne coopération entre les deux partenaires de ce binôme, comme nous l'avons déjà signalé. Le binôme 5 refait les calculs et utilise cette fois le procédé classique pour déterminer les asymptotes, l'utilisation de DERIVE a permis de faire rapidement ces calculs, qui ne sont pas immédiats. Il trouve alors les bonnes équations mais n'arrive pas à repérer ce qui ne marche pas dans le calcul précédent. Le binôme 3 quant à lui n'arrive pas à s'en sortir, après avoir constaté que lim f(x) - $y_2 = -\infty$ (où y_2 désigne l'équation de l'asymptote obtenue), il refait ses calculs depuis le début mais sans succès. L'organisation des résultats fournis par DERIVE l'a beaucoup gêné dans ses vérifications. La solution de la troisième question s'étale sur trois écrans, toutes les étapes du calcul ne sont pas disponibles sur un même écran, cela a compliqué la tâche (la comparaison de deux expressions est difficile, quand elles ne sont pas toutes les deux sous les yeux). C'est une activité qui demande une compétence spécifique et une bonne familiarité avec le logiciel.

4.1.2 La démonstration

Soient g(x) = atan(x) + atan(1/x), $I_1=]-\infty,0[$ et $I_2=]0,+\infty[$.

- La moitié des étudiants ont travaillé alternativement en papier/crayon et sous DERIVE. Ils ont proposé la simplification de g(x) ou la résolution des équations $g(x)=\frac{\pi}{2}$ et $g(x)=-\frac{\pi}{2}$, et constatent que la fonction reste constante sur les deux intervalles. Ils valident alors ce résultat par le calcul de la dérivée et déterminent les valeurs que prend la fonction en calculant g(x) pour des valeurs particulières de la variable x (presque tous ont choisi -1 et +1).
- L'autre moitié des étudiants se sont contentés de vérifier la validité de la proposition. Ils ont calculé des valeurs particulières de la fonction g (binôme 4), ou ont examiné des cas limites (le binôme 8 fait calculer au logiciel les limites de la fonction g en +∞ et en -∞), et quand ils ont simplifié l'expression de g(x) ils ont obtenu une formulation légèrement différente de celle proposée par l'énoncé[9] : ils ont alors considéré le problème comme résolu. La démarche de ces étudiants consiste à utiliser le logiciel pour vérifier la proposition, mettant ainsi en œuvre, un processus de vérification, sans produire de preuve. Ces étudiants semblent raisonner ainsi : si j'obtiens un angle droit en utilisant l'équerre, pourquoi dois-je démontrer que cet angle mesure 90 degrés ? L'utilisation du logiciel, constitue pour eux un obstacle à la démonstration.

Les étudiants du binôme 7 cherchent par tous les moyens, à faire produire à DERIVE la preuve de la proposition ou ce qui leur semble être une preuve. Ils sollicitent d'abord le logiciel pour résoudre plusieurs variantes de l'équation g(x) = a (cf. Annexe) espérant obtenir une réponse de l'ordinateur ayant une syntaxe identique à l'énoncé de la proposition. Lorsque DERIVE renvoie : $\mathrm{sign}(x) = \frac{2a}{\pi}$ comme solution de l'équation g(x) = a, ces étudiants ne lui prêtent aucune attention car cette formulation n'est pas familière. Ils négligent également $+\infty$ et $\frac{5\pi}{2}$ qui résultent de la simplification de $\int_0^\infty g(x)dx$ et de $\int_0^5 g(x)\,dx$. En revanche, l'expression $\frac{\pi\,|x|}{2}$

[9] $g(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(x)$ au lieu de $g(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} \; si\, x>0\\ -\frac{\pi}{2}\; si\, x<0\end{cases}$ proposé dans l'énoncé

donnée comme primitive de la fonction g, semble mieux cadrer avec leur attente. Ces étudiants semblent avoir une idée précise de la réponse, ils ne prêtent aucune attention à tout ce qui n'est pas syntaxiquement identique à ce qu'ils ont prévu. Ils ne fournissent aucun effort pour essayer de comprendre ou d'interpréter les rétroactions du logiciel, mais plutôt s'arrangent pour faire 'accoucher' au logiciel ce qu'ils souhaitent, sous une forme prévue à l'avance.

Nous avons constaté le rôle important que joue la rédaction. Les étudiants changent souvent de comportement lorsqu'ils se mettent à rédiger au propre. Ils deviennent plus exigeant, plus précis, et engagent davantage leur responsabilité. Nous avons observé deux binômes reprendre leurs calculs et corriger leurs erreurs au moment de la rédaction. A ce propos, signalons que DERIVE est beaucoup plus apte au traitement qu'à la communication. La compréhension de la transcription d'une session de travail sur ce logiciel est nettement plus compliquée à l'égard de ce que fournit d'autres logiciels de calcul formel. Par exemple, un travail sur MAPLE est plus aisé à comprendre dans la mesure où il marque un contraste entre ce qui est reçu et ce qui est renvoyé et facilite l'insertion de commentaires au sein des instructions.

L'organisation du travail et la nature des interactions entre les étudiants au sein des binômes observés ont également joué un rôle déterminant, aussi bien lors de l'élaboration d'une stratégie que pendant sa réalisation effective. Les chercheurs en psychologie sociale considèrent que : « La dynamique du développement cognitif résulte principalement d'un conflit de communication sociale » (Doise et Mugny, 1981). La nature des interactions au sein du binôme 7 appuie cette thèse. Nous constatons un grand déséquilibre au sein de ce binôme : un étudiant dirige tout seul les opérations, c'est lui qui manipule le logiciel, prend les initiatives et décide de ce qu'il faut faire ou ne pas faire. L'autre acquiesce très passivement, son engagement dans la résolution est très faible. En cas de blocage, il se contente de faire des remarques anodines et très ordinaires comme par exemple : "nous devons réfléchir avant d'essayer autre chose", mais ne propose rien de probant et ne donne aucune alternative, ses interventions n'ont aucun effet sur le déroulement de la séquence. Au contraire, le binôme1 se caractérise par une coopération efficace entre les deux partenaires. Par exemple, concernant cette question, l'étudiante qui manipulait le logiciel voulait conclure après une simple vérification de la proposition, l'autre lui a fait remarquer que sa démarche ne constitue pas une preuve en disant : "il faut montrer que...". Suite à cette remarque une discussion intéressante, sur la base d'arguments objectifs et scientifiques, a permis d'aboutir à la solution.

4.1.3 Tracé du graphe de la fonction et des deux asymptotes

Les différents binômes ont tracé sans problème le graphe de la fonction et les deux droites proposées comme asymptotes. Ceux qui ont établi correctement les deux formules demandées à la question 3 (donnant les développements asymptotiques de la fonction) ont pu voir leur résultat validé sur le graphe. En revanche, les binômes 1 et 3 se sont rendus compte d'une contradiction au vu du tracé de la deuxième droite. Ils sont revenus à la troisième question pour vérifier les asymptotes obtenues. Le binôme 1 a pu repérer tout seul d'où venait l'erreur, il a corrigé et validé le nouveau résultat par le graphe. De son côté, le binôme 3 n'a pas pu déterminer lui-même l'origine de l'erreur ; sans aide, il serait resté en échec.

4.2 Comportements des différents binômes

Une synthèse des analyses précédentes apparaît sous la forme du tableau qui suit, présentant les comportements des binômes confrontés à la résolution du problème avec l'aide de DERIVE. Une typologie de profils d'élèves, utilisateurs de DERIVE sur des calculatrices programmables, a été proposée par L. Trouche (1996). Nous exploitons une idée analogue en dressant une typologie d'attitudes, établie sur la considération : de la place du papier/crayon dans le déroulement du travail des binômes, des connaissances mises en œuvre, des interactions étudiants – étudiants, étudiants - enseignant et étudiants - ordinateur.

Insérer ici Tableau

La variété des attitudes observées est importante. A-t-on obtenu une palette complète ? L'effectif réduit de l'expérimentation ne permet certainement pas de l'affirmer. Cependant nous avons quelques raisons de penser que l'observation de huit binômes seulement nous a déjà permis un large balayage de cas, qui s'est trouvé facilité par la durée de l'observation, la diversité des types de questions proposées par l'énoncé et la forme de travail en autonomie (relative). En effet, il s'est trouvé que les binômes retenus combinent des niveaux de compétence différents dans l'utilisation de l'outil informatique, une variété dans les attentes vis à vis de la machine et une réceptivité diversifiée aux sorties écran obtenues.

5. Synthèse

La synthèse des démarches observées révèle une variété de comportement des étudiants, nettement supérieure à celle à la quelle conduit la résolution usuelle d'exercices. La palette de leurs attitudes répertoriée au tableau 1, est suffisamment étendue pour permettre de rendre compte, d'une façon détaillée, de la diversité de fonctionnement dans un environnement doté d'un logiciel de calcul formel comme DERIVE. Ainsi, la recherche présentée ici fournit des renseignements précieux pour l'élaboration de nouveaux modules d'enseignement qui prennent en charge les apprentissages de techniques de travail, conduite de projets, travail à distance, élaboration de mémoires et TIPE[10].

Annexe

B/ binôme 7 : deux étudiants que l'on désigne par Ahmed et Hicham.

a - <u>Dérivabilité de F en zéro</u>

Ils entrent les expressions :

$$\#1 : \mathrm{SI}\left[\ x=0,\ 0,\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right]\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{ATAN}(x)\right]$$

$\#2:\ F(x):=\ \mathrm{SI}\left[\ x=0,\ 0,\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right]\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{ATAN}(x)\right]$ demandent de calculer :

$$\#3:\ \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$$

DERIVE renvoie

$$\#4:\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{SI}\left[\ x=0,\ 0,\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right]\sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{ATAN}(x)\right]}{x}$$

Ils passent en p/c essaient d'effectuer les calculs à la main mais se heurtent à une forme indéterminée, ils n'arrivent pas à lever cette indétermination mais les calculs attirent leur attention sur la différence entre les limites à droite et à gauche du point 0 pour la fonction $e^{1/x}$ obtiennent :

$$\#5:\ \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}$$

#6: 0

$$\#7:\ \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{x}$$

#8: ∞

Ils concluent que F n'est pas dérivable en 0.

b- <u>Démonstration</u>

Ils commencent par demander la résolution de l'équation

[10] Travaux d'Initiation Personnelle Encadrés

#9: $\text{RESOUS}\left[\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]=\alpha,\ x,\ x<0\right]$; On remarque qu'ils ont rajouté la condition $x < 0$, mais elle n'a pas eu d'effet sur l'exécution de la commande. DERIVE renvoie

#10: $\text{SIGN}(x)\ =\ \frac{2\ \alpha}{\pi}$ sans essayer de comprendre cette réponse, ils se lancent dans la série de calcul :

#11: $\text{RESOUS}\left[\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right],\ x,\ -\text{inf},\ 0\right]$

#12: [ ] (ensemble vide : pas de solution)

#13: $\text{RESOUS}\left[\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]=\alpha,\ x,\ -\text{inf},\ 0\right]$

#14: $\text{SIGN}(x)\ =\ \frac{2\ \alpha}{\pi}$

#15: $\text{RESOUS}\left[\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{\pi}{2}=\alpha,\ x,\ -\text{inf},\ 0\right]$

#16: $\text{SIGN}(x)\ =\ \frac{\pi\ +2\alpha}{\pi}$

#17: $\int_0^{+\infty}\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]\ dx$

#18: ∞

#19: $\int_0^5\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]\ dx$

#20: $\frac{5\ \pi}{2}$

#21: $\int\text{ATAN}(x)+\text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right]\ dx$

#22: $\frac{\pi\ |x|}{2}$

#23: $\frac{\pi x}{2}$

et

#24: $-\frac{\pi x}{2}$

Ils reprennent le calcul de la primitive (#21) en déclarant $x > 0$ et $x < 0$, et obtiennent respectivement :

Ils sont satisfaits de ces réponses. (Presque une heure pour cette question, l'un voulait réfléchir avant de réutiliser l'ordinateur, l'autre réplique : “on n'a rien à perdre on ne paye pas les essais”).

c - développement asymptotique de F

D'abord en p/c, ils décident d'utiliser les DL, remplacent x par 1/x et passent ensuite sous DERIVE

#26: $\mathrm{TAYLOR}\left[\mathrm{EXP}(-x)\ \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ \mathrm{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right], x,\ 0,\ 1\right]$

#27: ?

#26: $\mathrm{TAYLOR}\left[\mathrm{EXP}(-x)\ \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ \mathrm{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right], x,\ +\mathrm{inf},\ 1\right]$

#29: ?

#30: $\mathrm{TAYLOR}\left[\mathrm{EXP}\left[\frac{1}{x}\right], x,\ \mathrm{inf},\ 1\right]$

#31: ?

#32: $\mathrm{TAYLOR}[\mathrm{EXP}(-x)\ , x,\ 0,\ 1]$

#33: 1 - x

#34: $\mathrm{TAYLOR}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ , x,\ 0,\ 1\right]$

#35: ?

#36: $\mathrm{TAYLOR}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ , x,\ +\mathrm{inf},\ 1\right]$

#37: ?

Après ces multiples "?" Ils repassent en p/c, posent $X = 1/x + 1/x^2$ et proposent :

#38: $\mathrm{TAYLOR}\left[(1+x)^{1/2}\ , x,\ 0,\ 1\right]$

#39: $\frac{x}{2} + 1$

Ils remplacent dans cette expression à la main x par $1/x + 1/x^2$, et demandent :

#40 TAYLOR (ATAN(x), x, 0, 1)

#41: x

Pour effectuer le produit des trois développements obtenus, ils entrent l'expression :

#42: $(1-x)\left[\frac{2x^2+x+1}{2}\ x^2\right]\ \frac{1}{x}$ (il y a deux erreurs dans cette expression) qui se simplifie en :

#43: $\frac{x(1-x)(2x^2+x+1)}{2}$

#44: $-x^4 + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$ (obtenue par la commande dévEloppe)

Constatant que cette formule est très loin de celle souhaitée, Ahmed reprend les DL Hicham n'est pas d'accord, mais ne propose rien d'intéressant. Sans trop tenir compte de ce qu'ils ont déjà fait, Ahmed se lance dans une nouvelle série de développements :

#45: $\mathrm{TAYLOR}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ ,\ x\ ,\ +\mathrm{inf},\ 1\right]$

#46: ?

#47: $\mathrm{TAYLOR}[\mathrm{EXP}(-x)\ , x,\ 0,\ 1]$, (commande déjà exécutée)

#48: 1-x

#49: $\mathrm{TAYLOR}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}},\ x,\ 0,\ 1\right]$, (commande déjà exécutée)

#50: ?

#51: $\mathrm{TAYLOR}\left[\mathrm{EXP}(-x)\ \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\ \ \mathrm{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right],x,\ 0,\ 1\right]$

#52: ?

#53: ATAN(x)

#54 : TAYLOR(ATAN(x), x, +inf, 2)

#55: ?

Plusieurs commandes sont exécutées deux fois. Ils semblent complètement perdus. Ils ont essayé d'exécuter la commande Taylor, systématique en 0 puis en + ∞, mais ils n'ont rien obtenu de probant, leurs tentatives sont réduites au tâtonnement. L'observateur s'est abstenu d'intervenir, il voulait voir comment pouvaient-ils s'en sortir tout seul. Le dernier "?" les déroutent, ils décident d'abandonner cette question.

d- Le tracé de graphe

#56: $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

Pour trouver les asymptotes, ils procèdent par la méthode classique qu'ils semblent bien maîtriser

#57: $+\infty$

#58: $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

#59: $\frac{\pi}{2}$

#60: $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{F(x)}{x} - \frac{\pi}{2}x\right]$

#61: $-\frac{\pi+4}{4}$

#62: $y := \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi+4}{4}$ (représente l'équation de la première asymptote)

#63: $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

#64: ∞ (erreur, ils voulaient maintenant faire les calculs en -∞)

#65: $\lim_{x\to-\infty} F(x)$

#66: - ∞

Embarrassés par cette réponse, ils calculent :

#67: $\lim_{x\to 0^+} F(x)$

#68: 0

#69: $\lim_{x\to 0^-} F(x)$

#70: - ∞

Ils abandonnent ces calculs et reviennent à l'asymptote en +∞ obtenu précédemment et entrent :

$$\#71:\ F(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi + 4}{4} = 0$$

$$\#72:\ \frac{4 - \pi}{4} = 0$$

Ils analysent l'expression entrée, repèrent l'erreur et rectifient :

$$\#73:\ F(x) - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi + 4}{4} = 0$$

$$\#74:\ \frac{4 + \pi}{4} = 0$$

Ils fixent l'écran perplexes, Ahmed propose de remplacer F(x) par sa valeur :

$$\#75:\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right]\sqrt{1 + x + x^2}\,\mathrm{ATAN}(x)$$

#76: ?

Ils se sont aperçus de l'oubli : " = 0" corrigent :

$$\#78:\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right]\sqrt{1 + x + x^2}\,\mathrm{ATAN}(x) - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi + 4}{4} = 0$$

#79: ? = 0

Ils sont déconcertés par cette réponse ; à ce moment l'observateur leur suggère de tracer les graphes et leur explique.

(L'expérience a duré 3 h 30).

Bibliographie

Alves-Dias M. (1998), *Les problèmes d'articulation entre point de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse de Doctorat, Paris 7.

Artigue M. (1990 a), *Epistémologie et didactique.* Recherches en didactique des mathématiques. 10(2/3), 242-283.

Artigue M. (1990 b), *Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique.* Université d'été Informatique et Enseignement de la Géométrie. IREM de Toulouse.

Artigue M., Abboud M., Drouhard J.P., Lagrange J.B. (1995), *Une recherche sur le logiciel DERIVE.* Rapport de recherche n°3, Equipe DIDIREM. Université Paris 7.

Artigue M. (1997), *Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage.* Educationnal Studies in Mathematics. 33, 133-169. (ed) Kluwer Academic Publishers.

Behaj A., Arsac G. (1998), *La conception d'un cours d'algèbre linéaire.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/3, Doise W. & Mugny G. (1981), *Le développement social de l'intelligence.* (ed) Paris, Interéditions.

Gomez, Cl., Salvy, B., Zimmermann, P. (1995) *Calcul formel : mode d'emploi. Exemples en MAPLE.* Ed. Masson

Kuntz G. (1993), *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a.* Repères IREM, n°11, Avril 1993, 5-31.

Lagrange J.B. (1995), *Système de mathématiques symboliques et activité de modélisation.* VIII° Ecole d'Eté de didactique des mathématiques. 308-316, (ed) Noirfalaise : IREM Clermont-Fd, Perrin-Glorian : IUFEM Arras et l'Equipe DIDIREM de Paris 7.

Rabardel P. (1995a), *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains,* (ed) Armand Colin, Paris.

Rabardel P. (1995b), *Outils pour le calcul et le traçage de courbes.* Centre National de Documentation Pédagogique n°19 Mars 1995, 61-86.

Rich A., Rich J., Stoutemyer D. (1993), *DERIVE A mathematical Assistant.* Soft Warehouse.

Rogalski M. (1994), *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse.* Recherches en didactique des mathématiques. 14(1/2) ,43-66.

Trouche Luc (1996) *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.* Thèse Université de Montpellier II

Trouche Luc (1997) *Calculatrice symbolique. Un défi mathématique*, CRDP du Languedoc-Roussillon.

Trouche Luc et les élèves d'une classe de TS (1998) *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, 38 variations sur un thème imposé.* Ed. Irem de Montpellier II.

Zizi J. (1993), Derive, Maple et Mathematica. *Mathématique, Informatique et Enseignement. Livre 1,* Edition du Choix, (ed) Archimède.

RECONNAISSANCE DE CONTRE-EXEMPLES EN ANALYSE : APPROCHE PAR QUESTIONNAIRE EN 1ère ANNEE UNIVERSITAIRE

Amina BENBACHIR, Moncef ZAKI

RESUME

La rencontre et la recherche de contre-exemples ont joué un rôle moteur dans la construction des concepts en analyse. Dans certaines expériences d'enseignement, la réflexion sur des contre-exemples a été mobilisée. Sur ce sujet, une observation a été entreprise auprès d'étudiants en début d'études universitaires scientifiques à la Faculté des Sciences de Fès (Maroc). La recherche a comporté une étude sur questionnaire qui est rapportée ici. Une interrogation était de savoir quelle place la logique et le maniement de la négation peuvent tenir, dans l'identification d'un contre-exemple, en comparaison des acquisitions propres à l'analyse. Les résultats montrent notamment qu'au moment de se prononcer sur une implication proposée, le traitement de la négation joue moins dans la reconnaissance de contre-exemples que la connaissance d'énoncés semblables, permettant une comparaison de l'ordre des éléments présentés. Pour la place de la logique, le questionnaire ne permettrait pas à lui seul de trancher ; une étude plus détaillée, dont seule la conclusion est rapportée ici, a été conduite auprès de binômes.

MOTS CLES : première année d'université - analyse - contre-exemple – logique

---

I. INTRODUCTION

Le plus souvent, un questionnaire se situe au cœur même d'une étude plutôt qu'à sa périphérie. Le questionnaire dont l'analyse est présentée ici a joué dans une recherche sur le contre-exemple en analyse un rôle annexe, ce qui ne veut pas dire sans importance. La recherche visait principalement la construction de contre-exemples lors d'un travail, en binômes, d'étudiants du premier cycle universitaire.

A l'issue d'une expérimentation, F. Hitt (cf. Hitt, 1998) conclut que les constructions de contre-exemples représentent les exercices les plus difficiles. Cette difficulté est, selon lui, due entre autre à l'enseignement des mathématiques qui se limite à enseigner des algorithmes et à un niveau moindre à faire des démonstrations. On peut donc attendre que les essais de construction de contre-exemples par les binômes n'aboutissent pas tous à une réussite.

Des difficultés mathématiques, liées aux traitements à effectuer en analyse, peuvent ressortir des échanges entre les binômes ou des productions mêmes. En revanche d'autres peuvent ne pas être apparentes, comme certaines difficultés de nature logique. De plus, la production d'un contre-exemple présuppose la capacité de le reconnaître en tant que tel. Il

---

Moncef ZAKI, professeur, et Amina BENBACHIR, Professeur assistante, Faculté des Sciences de Fès.

© *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 7 (2001) (p. 117 – 145), IREM Strasbourg

était donc intéressant de disposer en préalable d'informations sur la reconnaissance de contre-exemples. Ce sont ces orientations qui ont déterminé le questionnaire que nous présentons ici.

II. JALONS HISTORIQUES

Le recours systématique au contre-exemple pour réfuter des conjectures n'a débuté que vers la fin du 19ème siècle. Néanmoins, depuis la période antique, les mathématiciens ont construit des contre-exemples. Ainsi, parce qu'elle réfute que « toute aire limitée par des lignes courbes s'exprime par une formule où intervient le nombre π », la construction des « lunules d'Hippocrate » peut être considérée comme un contre-exemple à cette idée préconçue (cf. Glaeser, 1971).

Le contre-exemple considéré comme exception à une règle générale :
Au 18ème siècle, le recours au contre-exemple était occasionnel et son statut même de démonstration de la fausseté d'une conjecture n'était pas reconnu par les mathématiciens. Il convient toutefois de distinguer les conjectures selon qu'elles renvoient à des objets mathématiques parfaitement fixés ou à ces concepts plus flous, par exemple issus de la physique, qui avaient alors pleinement droit de cité en mathématiques.

C'est ainsi qu'Euler a réussi l'exploit de trouver la décomposition en facteurs premiers du nombre $2^\wedge(2^5) + 1 = 2^{32} + 1$, réfutant ainsi une conjecture de Fermat (cf. Glaeser, 1971). Dans un tel cas, il y avait bien réfutation. Mais le même Euler connaissait des exemples qui n'étaient pas conformes à sa conception dans d'autres domaines mathématiques et les considéraient comme des exceptions de peu d'importance à la règle générale (cf. Youschkevitch, 1981).

En 1826, Abel écrit dans son célèbre article sur les séries binomiales : *« Il me semble que ce théorème (de Cauchy) admet des exceptions »*, et il donne l'exemple de la série :

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + 1/3 \sin 3x - \ldots\ldots \text{ etc.} \qquad \text{(cf. Lakatos, 1984)}$$

Dans ce cas la notion de convergence était à affiner. Les deux notions de convergence simple et convergence uniforme n'étaient pas dissociées (Voir plus loin) pour qu'il soit possible d'énoncer un théorème.

Le fait de considérer les contre-exemples comme étant des exceptions à la règle générale n'est il pas encore présent chez Jordan en 1882 ? C'est à cette date en effet qu'il écrivit à propos de son cours d'analyse: *« Nous avons apporté un soin particulier à* *l'établissement des théorèmes fondamentaux. Il n'en est aucun dont la démonstration ne soit subordonnée à certaines restrictions* » (cf. Gispert, 1982).

Le contre-exemple rejeté : quel objet accepter comme fonction ?

Certains mathématiciens du 19ème siècle rejetaient même les contre-exemples qu'on leur fournissait pour mettre en défaut leurs écrits. Darboux a mis plusieurs années pour convaincre Hoüel des erreurs qui se trouvaient dans son cours. Hoüel récusait ces fonctions sous prétexte qu'il n'avait pas ces fonctions en vue, mais il exprimait son inquiétude devant les contre-exemples que lui fournissait Darboux :

> « *Vous me donnez des inquiétudes mortelles sur les points que je croyais les mieux établis* » *(lettre du 31 janvier 1875)* (cf. Gispert, 1982).

On peut situer Houël à la fin d'une période où *les processus de pensée étaient envisagés comme des processus purement mentaux. La première caractéristique de cette approche mentaliste des démarches de pensée est un lien étroit entre les représentations, qui sont des représentations du sujet, et les objets* (cf.Duval,1998).

Houël n'était pas le seul à éprouver des réticences vis à vis de certains contre-exemples. Ainsi Poincaré (1854-1912) écrivit :

> « *Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères et on n'en tirera jamais que cela* » (cf.Glaeser, 1995).

Darboux racontait que le mémoire de Riemann (celui de 1875) avait été froidement accueilli par plusieurs de ceux qui habituellement s'intéressaient à ses travaux. Ils l'avaient dissuadé de labourer plus longtemps le champ stérile des fonctions qui n'ont pas de dérivées (cf.Gispert, 1982). Lebesgue écrivit en 1922 :

> « *Les travaux qu'on publiait sur les fonctions de variables réelles avaient le plus souvent pour but de montrer, par des exemples, l'impossibilité d'énoncer sans restriction telle ou telle proposition. On constituait ainsi une sorte de musée de monstruosités plus propre à détourner le mathématicien de ce genre d'étude qu'à l'y intéresser* » (Ibid).

Auparavant, en 1895, Meray exclue les fonctions continues sans dérivée car elles ne correspondent pas à un phénomène naturel. Il écrit :

> « *Les fonctions continues, sans dérivée, non intégrables, etc.., ne se rencontrent que dans les dissertations métaphysiques ; il est donc bien inutile de s'inquiéter d'elles* » (cf. Pont, 1995).

Jordan, en 1882, tout en affirmant l'existence « *de fonctions continues dont la drivée est toujours indéterminée* » n'en donne aucun exemple et les qualifie de « *fonctions anormales*» et qui « *ne seront pas abordées dans ce cours* ». Il affirme alors :

> « *Nous nous bornerons à étudier les fonctions continues qui satisfont au postulatum ci-dessus. Elles offrent déjà un champ fort vaste, car, parmi les fonctions en nombre infini qu'elles embrassent, se trouvent, ainsi que nous allons le voir, toutes celles qui sont connues par les éléments des mathématiques* » (cf.Gispert, 1982).

Un retour sur l'objet fonction :

Hermann Hankel, l'un des animateurs de la crise des années 1870, critique ces points de vue et parle de fonctions ne satisfaisant aucune loi simple ou composée qu'il qualifie de purement nominales et sans contenu réel. Il rajoute :

> « *la légitimité d'une fonction n'étant pas dictée par une mystérieuse nécessité de fer, qui se trouverait dans la nature des choses, comme on le croit souvent, mais qu'elle est une limitation conventionnelle et adéquate que nous imposons et dont les limites ne nous sont pas claires* » (cf. Pont, 1995).

Les erreurs mises à jour par les contre-exemples :

Notons à cette occasion que l'usage du contre-exemple n'était pas encore entré dans les mœurs. Plusieurs auteurs de traités font des développements au sujet des fonctions discontinues, mais sans donner aucun contre-exemple pour attirer l'attention des étudiants sur la délicatesse de certaines propriétés considérées comme évidentes [1].

Péano ainsi que Darboux, furent les principaux promoteurs du recours au contre-exemple. Avant eux, on semble ignorer l'usage systématique du contre-exemple et son avènement est révélateur d'un changement de paradigme. Ils relevèrent plusieurs erreurs commises dans les ouvrages de leur époque [2]. Ainsi, Péano releva l'erreur commise par Serret et Jordan, de la monotonie locale de toute fonction continue en exhibant un contre-exemple [3]. Mais Serret ne corrige pas son erreur dans la troisième édition de son cours (1886). Mittag

[1] Notons par exemple la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires.

[2] Péano utilisa le contre-exemple $x^2\sin 1/x$ pour montrer qu'une fonction dérivable n'a pas nécessairement une dérivée continue. Le même contre-exemple a été utilisé auparavant par Darboux dans les lettres adressées à Houël du 24 et 31 Janvier 1875.

[3] Il s'agit de la fonction $x \sin 1/x$.

Leffler, dans une lettre du 14 octobre 1881, adressée à Charles Hermite dénonce cet état de fait :

> *« C'est vrai que les erreurs ont profité à la Science mais alors on a été naïf et on croyait à l'erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c'est une erreur. Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée quand vous savez que c'est fautif ? Monsieur Serret dans la nouvelle édition de son calcul intégral a tout un système de démonstrations qui sont toutes fautives. Et il n'en dit pas un mot. Mais ce n'est pas plus difficile de donner des démonstrations correctes. Je ne crois pas non plus qu'il soit juste de regarder le système de Weierstrass comme compliqué. C'est au contraire simple et naturel en même temps que rigoureux, mais c'est vrai qu'il faut beaucoup de temps pour le développer »* (cf.Gispert, 1982).

La contribution du contre-exemple à la naissance de nouveaux concepts :

Mais le rôle du contre-exemple ne se limite pas à des réfutations. Il peut être à l'origine de la naissance d'un concept. On citera comme exemple le concept de convergence uniforme. Seidel l'a mis en évidence à partir de l'examen de la « démonstration » de Cauchy du « théorème » qui affirme la continuité de la limite d'une série convergente de fonctions continues. Cet examen a été fait suite à l'interprétation de la série produite par Fourier comme étant un contre-exemple au « théorème » de Cauchy (cf. Lakatos,1976).

Les contre-exemples monstres se retrouvent dans la nature :

Le développement du statut du contre-exemple à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle est fortement lié au développement du concept de fonction. Le point de vue de certains mathématiciens du 19$^{\text{ème}}$ siècle et même du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, tels Poincaré et Lebesgue qui voyaient les contre-exemples comme étant des « monstres » s'avère aujourd'hui dépassé. *Les mathématiciens qui créèrent ces monstres les considéraient comme importants parce qu'ils démontraient que le monde des mathématiques pures inclut une richesse de possibilités allant bien au delà des structures simples qu'ils voyaient dans la nature. Les mathématiques du 20$^{\text{ème}}$ siècle fleurirent dans la croyance qu'elles étaient allées complètement au-delà des limitations que leur avait imposées leur origine dans les sciences de la nature* (cf, Mandelbrot, 1982). On est près du mot de Pascal : *« L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir »*. En considérant la courbe de Péano qui remplit le carré, certaines de ses approximantes fournissent un modèle géométrique de réseau fluvial. Les monstres de

Lebesgue-Osgood sont la substance même de notre chair, comme le dit encore Mandelbrot. Les travaux de Poincaré sur la géométrie non euclidienne se sont révélés *les outils rêvés pour la théorie de la relativité* (ibid). Des contre-exemples qui n'avaient pas droit de cité à une certaine époque se sont révélés à la base même de certaines théories mathématiques. Ainsi les fonctions étagées s'introduisent naturellement dans la théorie de l'intégration et la fonction de Dirichlet se voit à la base de la théorie des distributions.

Le contre-exemple dans l'enseignement :

Dans une classe de mathématique le contre-exemple n'a pas le même statut que dans la communauté des mathématiciens. Il est généralement utilisé par l'enseignant pour invalider une réponse fausse de l'étudiant. Il représente ainsi une fin en soi, et conduit l'étudiant à abandonner toute sa recherche et à changer de voie. On remarque alors une priorité de l'action sur la réflexion. En outre, le contre-exemple en tant qu'outil utilisé par l'étudiant pour invalider un énoncé qu'il produit semble être assez rare. D'autre part, dans la situation classique d'enseignement, *la vérité en classe est institutionnelle, ce sont le maître et le livre qui l'incarnent* (cf. Legrand, 1988a). De ce fait, la gestion complète du vrai et du faux n'est pas à la charge de l'élève. La phase de conclusion est alors une *phase d'évaluation où la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel... Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève au sujet de la validité de sa procédure ; il sait tout de suite si elle a abouti ou non. Il n'a plus rien à faire concernant la validité* (cf. Margolinas, 1993).

En se référant aux pratiques de la communauté des mathématiciens, Lakatos (cf. Lakatos, 1984) remarque qu'un contre-exemple peut avoir plusieurs conséquences, selon qu'il rejaillit sur la conjecture, sur la preuve ou sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il peut aussi avoir comme conséquence la critique et le rejet du contre-exemple lui-même. Prenant pour base, dans une expérimentation, l'analyse proposée par Lakatos, Balacheff a identifié différents types de comportements d'élèves face à un contre-exemple. Ce sont l'abandon de la conjecture, la modification de la conjecture, la modification ad hoc de la conjecture, l'introduction d'une condition, la notification d'une exception, la reprise de la définition et le rejet du contre-exemple (cf. Balacheff,1988).

Dans cette étude nous nous intéressons, non pas aux conséquences du contre-exemple, mais aux éléments qui entrent en jeu dans la reconnaissance ou la production de contre-exemples.

III. APPROCHE ADOPTEE

III.1. Présentation du questionnaire

En classe, il convient de distinguer les deux cas où l'étudiant est confronté à des contre-exemples: la reconnaissance et la construction de contre-exemples. Le but du questionnaire est bien de relever des compétences individuelles qui sont nécessaires pour les deux types de tâches.

Lorsqu'un étudiant doit reconnaître un contre-exemple, il faut tout d'abord qu'il puisse comprendre l'assertion qui est rejetée. Et plusieurs formulations équivalentes d'une même assertion n'ont pas la même signification pour les étudiants. Un énoncé mathématique commençant par « Soit f **une** fonction ... » ou « Etant donné **une** fonction .... » sera souvent équivalent à l'énoncé « **Pour toute** fonction... ». Le quantificateur universel, présent dans une formulation d'un énoncé mathématique, peut rester implicite dans d'autres formulations **(Voir Questionnaire, Partie C).**

La négation de la proposition considérée est nécessaire, sinon à la compréhension de l'énoncé, du moins à la reconnaissance du contre-exemple. C'est pourquoi, une partie du questionnaire est consacrée à la formulation de négations **(Voir A2 ; A4 ; A5).** Notons qu'il y a plusieurs formes de négation : la négation lexicale (..ne ...pas...), l'antinomie (noir - blanc), l'opposition (pair - impair, croissant - décroissant) et l'exclusion. Ces différentes formes de négation peuvent certaines fois, avoir le même statut pour les étudiants, ce qui les amène à faire des erreurs.

Pour la reconnaissance d'un éventuel contre-exemple, il faut aussi une prise de conscience de la contradiction **(Voir D1 et D2).** La contradiction n'est pas obligatoirement reconnue par l'étudiant. En effet, la contradiction n'existe pas en soi, mais par rapport à un système cognitif ; une contradiction peut être reconnue par l'enseignant et ne pas être reconnue par l'étudiant, tandis qu'une contradiction peut être relevée par l'étudiant alors qu'elle n'apparaît pas pour l'enseignant (Balacheff, 1988).

Des erreurs dans la reconnaissance de la contradiction peuvent avoir deux origines :

- soit une origine liée à des difficultés en logique, telles que le traitement d'énoncés implicatifs (Voir B1 à B6). La formulation de la négation (Voir A2, A4, A5) et la compréhension des quantificateurs universels et existentiels surtout lorsqu'ils coexistent ensemble (Voir B7 à B10).

- soit une origine liée aux connaissances mobilisées par l'étudiant ; entre autres le type de définition (Voir A1 et A3). En effet, s'il s'agit de reconnaître que la proposition « si f' est positive alors f est croissante » est fausse et si la caractérisation mobilisée par l'étudiant d'une fonction croissante est « f est croissante si et seulement si f' est positive » alors la contradiction ne peut être reconnue par l'étudiant.

Le deuxième type de situations, celles où l'étudiant doit produire un contre-exemple, outre la compréhension de l'énoncé et la formulation de la négation, demande une construction (Voir D3) qui nécessite un certain degré de maîtrise du domaine mathématique mis en jeu.

III.2. Déroulement de l'expérimentation

L'échantillon choisi est formé de 115 étudiants en MP1 qui vont se spécialiser en Mathématiques. Ils seront donc plus tard amenés à manipuler les contre-exemples dans toute situation de problème ouvert.

La passation du questionnaire qui a duré environ une heure, s'est déroulée au 2ème semestre d'un enseignement de 1ère année de DEUG. Ce choix de date a été fait pour que les étudiants concernés puissent être en mesure de traiter toutes les questions. Commençons donner un bref aperçu sur l'enseignement de l'analyse dispensé au 1er semestre de la 1ère année universitaire de Mathématique et Physique.

Cet enseignement commence par la construction du corps des réels, avec en parallèle quelques notions de topologie. Le 2ème chapitre concerne l'étude des fonctions : Continuité-Dérivabilité- Théorème de Rolle et des accroissements finis - Formules de Taylor-Développements limités.

Nous avons choisi le début de l'analyse en première année de Mathématique et Physique, parce que d'une part l'étude épistémologique qui précède a montré le lien étroit entre l'évolution du statut du contre-exemple et le développement du concept de fonction. D'autre part, dans cette partie la plupart des propositions sont des implications et ne sont pas des équivalences. Ce sont les contre-exemples qui montrent que les réciproques sont fausses. Nous citons dans cette classe à titre d'exemple, le théorème des valeurs intermédiaires. En outre, certaines propositions vues dans le cours comportent plusieurs hypothèses et c'est le contre-exemple qui montre que toutes les hypothèses sont nécessaires. Le théorème de Rolle est un exemple qui fait partie de cette classe. La confusion entre une implication et sa réciproque (cf.Durrand-Guerrier,1995) et l'oubli de certaines hypothèses d'une proposition donnée, sont la source de plusieurs erreurs d'étudiants.

QUESTIONNAIRE, CODAGE ET RELEVE DES REPONSES

A1) On dit qu'une fonction f réelle d'une variable réelle x est dérivable en 0 si ....

Cette question a été codée en réussite- échec car les trois types d'échecs relevés n'étaient pas significatifs. En effet, il y avait en tout 8 réponses fausses dont une non-réponse, 3 réponses consistaient à donner la définition de la continuité, 3 autres considèrent que la valeur de la dérivée est nulle et la dernière donne la définition de la continuité de la dérivée au lieu de la définition de la dérivabilité.

A2) Une fonction réelle f définie sur une partie D de R n'est pas croissante si et seulement si ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	29	29
2.Réponse donnant la bonne inégalité mais elle est large	15	44
3.Utilisation de la dérivée	27	71
4.Réponse donnant la bonne inégalité mais utilise le quantificateur universel	7	78
9.Autres échecs	22	100

*la réponse correcte étant: Il existe x dans D, y dans D tels que $x < y$ et $f(x) > f(y)$

A3) On dit qu'une fonction réelle f définie sur une partie D de R est décroissante sur D si ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	36	36
2.Réponse donnant la bonne inégalité mais elle est stricte	21	57
3.Utilisation de la dérivée	30	87
9.Autres échecs	13	100

*La réponse correcte étant: Pour tout x dans D, tout y dans D $x < y$ entraîne $f(x) \geq f(y)$

A4) Soit D une partie de R. Voici une affirmation A:

" Si une fonction numérique définie sur D est continue alors elle est bornée"

Enoncer la négation de l'affirmation A: ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	6	6
2.Utilisation de f continue et non bornée sans quantificateur existentiel	9	15
3.Utilisation de la contraposée	30	45
4.f non continue $\Rightarrow$ f non bornée	21	66
9.Autres échecs	34	100

*La réponse correcte étant: Il existe une fonction numérique continue et non bornée.

A5) Voici une affirmation B:

" Toute fonction bornée admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$"

Enoncer la négation de l'affirmation B: ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	20	20
2.Utilisation du quantificateur existentiel avec erreur dans la négation	25	45
3.Utilisation de la contraposée	12	57
5.f non bornée$\Rightarrow$f n'admet pas de limite.(ou admet une limite infinie)	18	75
9.Autres échecs	25	100

*La réponse correcte étant: il existe une fonction bornée qui n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers l'infini.

Dans la partie B, il y a 3 réponses possibles : soit la réponse est juste ; soit elle est fausse ; soit il y a non-réponse. Le nombre d'étudiants ayant fait des non-réponses étant très faible (3 sur 115) nous n'avons pas tenu compte de cette 3[éme] possibilité. Dans la partie C, le codage est relatif à chaque proposition d'énoncé équivalent. Pour chacune d'elles, il n'y a que 2 réponses possibles : soit la réponse est juste ; soit elle est fausse. Ainsi le codage des ces parties se réduit à la double modalités réussite-échec.

B) Vrai ou faux?

Cocher la case convenable

		Vrai	Faux	Réponse et Réuss %
B1	$\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>15$			Vrai................92
B2	$\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$			Faux...............90
B3	$\forall x \in N \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$			Vrai................90
B4	$\forall x \in R \quad x^2>15 \Rightarrow x>5$			Faux...............94
B5	$\forall x \in R \quad x^2>35 \Rightarrow x>5$			Faux...............73
B6	$\forall x \in N \quad x^2>35 \Rightarrow x>5$			Vrai................92

B7	$\forall x \in R \ \exists y \in R \ / \ x+y=0$			Vrai.............97
B8	$\forall x \in R \ \exists y \in R \ / \ x \,.\, y=0$			Vrai.............86
B9	$\exists x \in R \quad \forall y \in R \quad x+y=0$			Faux........... 88
B10	$\exists x \in R \quad \forall y \in R \quad x \,.\, y=0$			Vrai.............65

C) Cocher ...

Voici un énoncé E:

"Soit f une fonction croissante, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable"

Parmi les énoncés suivants, cochez la case de ceux qui sont équivalents à l'énoncé E.

Réussite %

□ C1) Si f est une fonction croissante alors l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable..55

□ C2) Soit f la fonction définie par: $f(x) = e^x$.
f est croissante et l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable..72

□ C3) Pour toute fonction f croissante, l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable..................................58

□ C4) Pour toute fonction f, si f est croissante alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.............................62

□ C5) Soit F l'ensemble des fonctions.
$\forall f \in F$ f est croissante $\Rightarrow$ l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable...72

□ C6) $\exists f \in F$ / f est croissante et l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable...80

□ C7) Etant donné une fonction croissante l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable...................................72

□ C8) Toute fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable est croissante......................................90

□ C9) L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable......................................71

D) Répondre:

Soit la proposition P:

"Si f est dérivable sur un voisinage de 0 et si $f'(0) = l$ alors $\lim_{x\to 0} f'(x) = l$".

Cette proposition est fausse.

Pour rejeter cette proposition, les étudiants Omar, Ali, Rachid, Driss et Anass ont répondu comme suit :

Omar: On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = x^{1/x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

Ali: On considère la fonction g définie par:

$$g(x) = \log(1+x^{3/2}).\cos 1/x \quad \text{si } x \neq 0$$

$$g(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} g'(x)$ n'existe pas.

Rachid: On considère la fonction h définie par:

$$h(x) = x^2 \sin 1/x \quad \text{si } x \neq 0$$

$$h(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} h'(x)$ n'existe pas.

Driss: On considère la fonction k définie par:

$$k(x) = \frac{\operatorname{Log}(1+x^{3/2})}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$k(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} k'(x) = +\infty$.

Anass: **f' n'est pas obligatoirement continue en 0.**

D1) Parmi ces réponses y-en-a-t-elles qui rejettent P la proposition? Si oui, lesquelles ?...

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte.(Ali, Rachid et Anass).......................................	24	24
2.Si la seule réponse donnée est celle d'Anass......................................	20	44
3.Si parmi les réponses citées figurent la réponse de Driss ou d'Omar.......	41	85
9.Autres échecs..	15	100

D2) Parmi celles qui rejettent la proposition, quelle est la plus convaincante à votre avis ? Donner les raisons de votre choix ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte.(Ali ou Rachid)..	25	25
2.Si la seule réponse donnée est celle d'Anass......................................	38	63
3.Si parmi les réponses citées figurent la réponse de Driss ou d'Omar......	16	79
9.Autres échecs..	21	100

D3) Donner d'autres réponses qui rejettent la proposition P.

- Codage de QD3 :

  Cette variable a été codée selon deux modalités réussite-échec. Dans la question relative à cette variable, il est demandé de produire un contre-exemple. La production est donc soit juste, soit fausse.

IV. ANALYSE DES RESULTATS :

IV.1. PREMIERE ANALYSE D'APRES LE RELEVE DES REPONSES

En comparant les réponses fournies par les étudiants interrogés aux deux questionsA2 et A3 qui relèvent toutes les deux de la même notion à traiter (croissance - décroissance d'une fonction) on remarque que le taux de réussite à la question A2 est plus faible que celui de la question A3. Ceci vient essentiellement du fait que dans A2, on demande à produire une négation, ce qui n'est pas le cas de A3. On remarque aussi que le taux de la deuxième modalité d'échec est en revanche plus faible concernant la question A2. On peut expliquer ceci par le fait qu'une négation demande plus de précision et que dans ce cas l'attention est portée à préciser si l'inégalité est large ou stricte.

Dans la partie A, on peut comparer aussi les résultats des questions A2, A4 et A5 où il s'agit de produire des négations. On remarque que A2 représente le meilleur taux de réussite. On peut expliquer ceci par le fait que dans A2, il est demandé la négation d'une fonction croissante. La définition d'une fonction croissante est généralement écrite sous forme symbolique ($\forall x \in E\ \forall y \in E \quad x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) . La négation est alors un automatisme : le $\forall$ devient $\exists$, le $\geq$ devient $<$ ...etc. Concernant la question A4, elle est entièrement en langage naturel avec un implicite important : le quantificateur universel. Notons que la question A5 a été mieux réussi que la question A4, quoique ayant la même forme, parce que le quantificateur universel dans A5 est explicite (50 ont fait apparaître le quantificateur existentiel dans la formulation de la négation de A5, alors que seulement 17 l'ont fait apparaître dans la formulation de la négation de A4).

Quant à la partie B, elle est globalement mieux réussie que la partie A. Ceci pouvait être prévu parce que le traitement des questions de la partie B sont assez faciles et le type de réponses demandés dans la partie B est plus facile que celui demandé dans la partie A. En effet, dans la partie A, on demande de produire des réponses, alors que la partie B est du type Vrai-Faux. On peut néanmoins remarquer que le taux d'échec de la question B10 représente le plus grand taux d'échec de la partie B. Cette question présente une forme difficile puisqu'elle est liée à la coexistence des quantificateurs existentiels et universels. Une autre difficulté peut être due à une comparaison avec les autres énoncés proposés, notamment B8 et B9. Elle est liée soit à un glissement du traitement de la question B9 à celui de B10 (Les deux questions ont des formes similaires, mais la question B9 représente une proposition vraie et B10 représente une proposition fausse) ; soit à un point de vue selon lequel si on change l'ordre des quantificateurs existentiels et universels, la proposition change de statut (et puisque la proposition correspondante à B8 est vraie, alors celle correspondante à B10 sera fausse). On peut remarquer par ailleurs que le taux d'échec relatif à la question B9 est supérieur à celui de B7. De même le taux d'échec relatif à la question B10 est supérieur à celui de B8. Rappelons que la différence entre les questions B9 et B7 (resp.B10 et B8) est la position du quantificateur universel par rapport à celle du quantificateur existentiel. Dans les questions B9 et B10 c'est le quantificateur existentiel qui est en premier. En revanche, dans les questions B7 et B8, c'est le quantificateur universel qui est en premier. On peut affirmer que lorsqu'il y a une coexistence des quantificateurs existentiels et universels, le traitement dans le cas où le quantificateur universel est en premier est plus facile que dans le cas inverse. Dans ce dernier cas, il y a d'ailleurs plus de conditions à vérifier.

La partie C est, elle aussi, globalement mieux réussie que la partie A. Ceci peut être dû, entre autres, aux types de réponses demandées. On a déjà signalé que dans la partie A, on demande de produire des réponses alors que la partie C est du type Vrai - Faux.

En revanche la partie D est moins bien réussie que les parties B et C et la taux d'échec de la question D3 où il s'agit de construire un contre-exemple est plus élevé que le taux d'échec aux questions D1 et D2 où il s'agit de reconnaître un contre-exemple. Cette construction nécessite d'autres compétences que ne nécessitent la reconnaissance. Par ailleurs, la justification de la fausseté de la proposition paraît plus convaincante que le contre-exemple.

IV.2. ANALYSE FACTORIELLE DE CORRESPONDANCES MULTIPLES EN REUSSITE-ECHEC.

Pour analyser les copies des étudiants représentant les réponses au questionnaire, on a choisi une méthode factorielle, en raison de deux qualités que rassemblent ces méthodes. La première est de *dégager des grandes tendances, des lignes de force d'un ensemble de données a priori foisonnant et d'une organisation peu apparente.* La deuxième est de *fournir une localisation précise d'individus ou de variables, qui permet de pointer des particularités, des singularités* (cf. Pluvinage,1993). Notre but est d'avoir une vue d'ensemble ainsi que des précisions locales, choses que permettent d'atteindre les techniques d'analyse factorielle.

Par ailleurs, nous avons choisi une analyse en bimodalité réussite - échec et nous avons considéré les différentes modalités d'échec des parties A et D comme variables supplémentaires.

Notons que dans notre analyse, on n'a pas tenu compte de la question B7, car le taux d'échec a été très faible (égal à 3), et on sait qu'une analyse factorielle est justifiée si les effectifs de chaque modalité sont supérieurs à 5.

IV.2.1. Analyse du 1er axe : Axe de réussite-échec

L'analyse conduit à un premier axe associé à une valeur propre qui correspond à 29.41 % de la trace. Ce pourcentage est nettement plus grand que celui du 2^{éme} axe. Ce premier axe est l'axe réussite-échec puisque toutes les modalités de réussite ont une coordonnée positive sur cet axe, par opposition aux modalités d'échec, qui ont toutes une coordonnée négative. Ceci montre une bonne formulation du questionnaire, ainsi qu'une cohérence globale dans la conception des énoncés proposés. Cette cohérence existe malgré la présence d'exercices de natures différentes: Les parties A et D nécessitent une production de réponses, par contre les parties B et C ne nécessitent aucune production. La réponse à chaque exercice de ces deux parties est du type Vrai-Faux.

Par ailleurs, la contribution de la modalité d'échec est plus grande que la contribution de la modalité de réussite dans les parties B et C. Par contre, dans les parties A et D ce sont les modalités de réussite qui ont une plus grande contribution.

Le premier axe montre aussi que les parties B et C sont généralement faciles et c'est l'échec qui va être significatif ; et que les parties A et D sont généralement plus difficiles et c'est la réussite qui va être significative. Si l'on se réfère aux composantes des modalités selon l'axe 1, on constate en effet que les composantes des modalités d'échec des parties B et C sont en valeur absolue plus grandes que les composantes des modalités de réussite correspondantes. En revanche, ce sont les composantes des modalités de réussite des parties A et D qui sont en valeur absolue plus grande que les composantes des modalités d'échec correspondantes. On pourrait s'attendre a priori à la facilité des parties B et C et la difficulté des parties A et D puisque dans les parties B et C, l'étudiant a seulement un choix à faire, alors que dans les parties A et D, il a à produire une réponse.

En se référant au poids des modalités d'échec de la partie B, on constate qu'il est généralement faible (moins de 16 échecs sur 115 individus) sauf pour les questions B5 et B10 où l'échec est relativement plus élevé (resp. 31 et 40). La modalité QB5E (qui représente l'échec à la question B5) n'a pas une forte contribution au 1er axe, par opposition à la modalité B10E (qui représente l'échec à la question B10). On a déjà relevé auparavant les difficultés liées au traitement de la question B10 qui sont soit dues à la coexistence des quantificateurs existentiels et universels, soit à un glissement du traitement de la question B9 à celui de B10.

Quant à la partie C, elle présente une facilité du point de vue de la forme des réponses demandées (Vrai-Faux) ; mais la difficulté réside dans la compréhension des différentes formulations susceptibles d'être équivalentes à un même énoncé. Les modalités d'échec de la partie C qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QC3E, QC4E et QC5E. Ces modalités sont relatives aux énoncés C3, C4 et C5. Ce sont les seuls énoncés ou le quantificateur universel est explicite. Remarquons que toutes les modalités d'échec relatives à la partie C –hormis QC8E- ont assez fortement contribué à la formation du 1er axe. L'énoncé C8 est le seul qui représente la réciproque de l'énoncé et de ce point de vue il constitue une rupture par rapport aux autres énoncés. En outre, l'effectif des échecs à cette question est le plus faible dans cette partie.

En résumé, les modalités d'échec qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QC3E, QC4E, QC5E et B10E. Ces modalités sont toutes relatives à des questions liées aux quantificateurs. Ces derniers représentent la première source d'échec à ces questions.

Les modalités de réussite de la partie A qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QA2R et QA4R. Ces modalités ont des composantes en valeur absolue beaucoup plus grande que les composantes des modalités d'échec relatives aux mêmes questions. De ce fait la réussite est significative. Les modalités QA2R et QA4R représentent la réussite aux questions où il est demandé de formuler la négation d'une proposition. Les deux questions A2 et A4, quoiqu'elles demandent toutes les deux une négation ne sont pas de la même nature, comme on l'a signalé auparavant.

En outre, parmi les modalités de la partie D qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe on trouve QD1R et QD3R qui représentent la réussite à la reconnaissance et à la production de contre-exemples. Notons que dans la partie D, l'énoncé proposé est écrit en langage naturel avec le quantificateur universel implicite, mais les réponses qui suivent l'énoncé représentent presque toutes des fonctions susceptibles d'être des contre-exemples à l'énoncé proposé. Ainsi, la difficulté de relever la négation du quantificateur universel n'apparaît pas ici.

Nous nous sommes posés la question de savoir si un bon traitement de la négation est associé à une bonne réussite dans la reconnaissance et la production de contre-exemples et inversement. Par conséquent nous avons croisé les variables correspondants au traitement de la négation (QA2 et QA4), et les variables correspondants au traitement du contre-exemple (QD1 et QD3). Le résultat est représenté par les tableaux qui suivent :

	QD1R	QD1E
QA2R	12	22
QA2E	16	65

	QD1R	QD1E
QA2R	8	26
QA2E	20	61

Tableau 1 : Croisement des variables QA2 et QD1 (Tableau observé)

Tableau théorique estimé (même marges que le tableau observé)

$\chi^2 = 3.67$

	QD3R	QD3E
QA2R	6	28
QA2E	8	73

Tableau 2 : Croisement des variables QA2 et QD3

F = 0.195

	QD1R	QD1E
QA4R	3	4
QA4E	25	83

Tableau 3 : Croisement des variables QA4 et QD1

F =0.184

	QD3R	QD3E
QA4R	3	4
QA4E	11	97

Tableau 4 : Croisement des variables QA4 et QD3

F = 0.038

Sous l'hypothèse H_0 d'indépendance des variables QA2 et QD1 (Tableau 1), nous avons utilisé le test d'indépendance du χ^2. La condition nécessaire de la validité du test est réalisée, puisque les effectifs théoriques estimés sont tous supérieurs ou égaux à 5. On obtient un χ^2 égal à 3.67, alors que la valeur critique au seuil habituel de 5% est égale à 3.84. Ce test, ne nous mène donc pas à rejeter l'hypothèse d'indépendance.

Par ailleurs, sous l'hypothèse H_0 que la réussite dans la négation favorise la réussite dans la reconnaissance ou la construction de contre-exemples le calcul des effectifs théoriques des Tableaux 2, 3 et 4, a donné lieu dans chacun de ces tableaux à un effectif inférieur à 5, ce qui nous a conduit à utiliser le test exact de Fisher. Pour le tableau 2, nous avons obtenu F = 0.195. Pour le tableau 3, nous avons obtenu F = 0.184 et pour le tableau 4, nous avons obtenu F = 0.038. Au vu de ce questionnaire le traitement de contre-exemple n'apparaît en définitive que peu conditionné par celui de la négation. Ce n'est qu'au niveau du dernier tableau que la probabilité est très faible. On peut donc affirmer au seuil habituel de 5% que la réussite dans la construction du contre-exemple n'est pas favorisée par une réussite dans la négation.

L'interprétation du 1er axe en axe de réussite-échec, conduit à un échec lié aux quantificateurs et une réussite liée à la négation et aux contre-exemples.

IV.2.2. Analyse du 2ème axe : Différentes formes d'exploitation du discours

Le pourcentage de l'axe 2 par rapport à la trace est de 12.10 % ; la projection des réponses sur le plan principal permet de distinguer l'opposition entre deux groupes de modalités d'échecs : d'une part QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E, QC8E et QD2R et d'autre part QC4E et QA5R. Dans le tableau suivant on représente les contributions à l'axe, la qualité et le poids de ces modalités.

	CTR2	QLT3	POND
QB1E	10.62	52.64	9
QB2E	13.02	56.39	11
QB4E	7.12	39.15	7
QB6E	7.02	43.78	9
QB9E	7.13	42.46	14
QC8E	5.75	47.26	11
QD2R	5.13	70.31	29
QC4E	4.67	77.85	44
QA4R	3.03	42.76	7
QA5R	5.07	37.61	23

A priori on peut dire que cet axe traduit les différentes formes d'exploitation du discours liées au repérage des éléments présents dans le discours.

En effet, d'un côté il y a des éléments du discours qui ne sont pas repérés (QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E et QC8E). Ces éléments sont liés à l'organisation du discours et plus précisément à l'ordre de présentation. L'inversion de l'ordre peut être vue sous plusieurs angles :

- L'inversion de l'ordre peut être relative à une implication, comme c'est le cas des questions B1, B2, B4 et B6. La proposition B1 représente la réciproque de la proposition B4 et la proposition B2 représente une « pseudo-réciproque » de la proposition B6 si on ne tient pas compte de l'ensemble de référence. Pour toutes ces questions l'ensemble de référence ne joue pas un rôle dans la réponse finale, bien qu'il entre en compte dans leur bon traitement (et c'est la réponse finale qui est demandée, le traitement n'est pas demandé ici). Ainsi, on peut croire que ces questions ont pu être traitées de la manière suivante :

$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25 \Rightarrow x^2 > 15$. D'où la proposition B1 est vraie.

$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$ ce qui n'entraîne pas que $x^2 > 35$. D'où la proposition B2 est fausse.

$x^2 > 15 \Rightarrow x > \sqrt{15}$ ce qui n'entraîne pas que $x > 5$. D'où la proposition B4 est fausse.
(ici l'ensemble de référence est R, et donc même en ne tenant pas compte de cet ensemble- x est soit positif, soit négatif- la réponse peut être bonne)

$x^2 > 35 \Rightarrow x > \sqrt{35} \Rightarrow x > 5$. D'où la proposition B6 est vraie.
(ici l'ensemble de référence est N, et donc même en ne tenant pas compte de cet ensemble- x est toujours positif, la réponse peut être bonne)

L'erreur est donc due à une inversion dans le traitement de l'implication. Ainsi, en cas d'échec, nous croyons que le traitement des questions B1, B2, B4 et B6 a pu être comme suit :
" On propose $x > 5 \Rightarrow x^2 > 15$. Mais $x^2 > 15$ n'entraîne pas $x^2 > 25$, qui est le carré de 5. Je coche donc Faux."
" On propose $x > 5 \Rightarrow x^2 > 35$. Si $x^2 > 35$, alors $x^2 > 25$. Je coche donc Vrai."

" On propose $x^2 > 15 \Rightarrow x > 5$. Si $x > 5$ alors $x > \sqrt{15}$. Je coche donc Vrai."

" On propose $x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$. Mais $x > 5$ n'entraîne pas $x > \sqrt{35}$. Je coche donc Faux."

- L'inversion de l'ordre peut être relative à une inversion des quantificateurs existentiels et universels. C'est le cas de la proposition B9 qui est fausse, contrairement à la proposition B7 qui est vraie. Rappelons que la différence entre les propositions B7 et B9 est l'inversion de l'ordre des quantificateurs existentiels et universels.

- L'inversion de l'ordre peut être relative à la structure de l'énoncé où il y a une confusion entre une hypothèse et sa conclusion (QC8E).C'est le cas de l'énoncé C8 qui représente la réciproque de l'énoncé proposé. Notons que c'est le seul énoncé qui a ce statut.

Notons que la réussite dans la reconnaissance d'un contre-exemple peut avoir lieu même sans avoir repérer tous les éléments, puisque là il y a un choix à faire et on n'a pas la possibilité de voir si tous les éléments ont été repérés. En revanche les modalités de réussite où il s'agit de produire et qui nécessitent un repérage de tous les éléments présents du discours sont toutes de l'autre côté de l'axe (tels que QA4R, QA5R, QD3R, QA3R et QA2R). Ceci explique la présence de la modalité de réussite QD2R du même côté que les modalités d'échec QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E et QC8E.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 2 nous montre la présence des modalités QA42, QA59, QD19 et QA22 du même côté que les modalités QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E, QC8E et QD2R. Cette présence de ces modalités renforce notre interprétation de l'axe puisque QA42 représente l'écriture de la négation mais sans quantificateur existentiel. Il n'y a donc pas eu un repérage du quantificateur universel. C'est ce repérage qui aurait permis, en passant à la négation, l'écriture quantificateur existentiel. Par ailleurs, concernant les modalités QA59 et QD19, elles représentent généralement soit des non- réponses, soit des réponses hors- sujet; ce qui montre là aussi un non repérage des éléments présents dans le discours. Concernant la modalité QA22, elle représente l'écriture de la négation, mais en donnant une inégalité large alors qu'elle doit être stricte. Là aussi cet élément n'a pas été repéré.

De l'autre côté la priorité est principalement donnée à repérer les éléments présents dans le discours. C'est le cas de la question C4 où l'échec a une forte contribution à l'axe 2. Rappelons que la question C4 représente un énoncé qui a la même forme que celui donné au début mais avec une explicitation du quantificateur universel. L'attention portée sur l'organisation du discours peut être excessive si elle conduit à affirmer d'emblée la différence d'énoncés organisés différemment.

D'autre part, une grande attention portée à repérer les éléments présents dans le discours peut être un élément favorable à une réussite. Ainsi, formuler la négation d'un énoncé quelque peu complexe, une implication par exemple, exige d'être vigilant par rapport à l'organisation. C'est la tâche que demandent A4 et A5, et il n'est donc pas étonnant que les réussites QA4R et QA5R aient des coordonnées importantes sur l'axe 2 et une contribution assez grande dans la formation de cet axe.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 2 nous montre la présence des modalités QD22, QD12 et QD23 du même côté que les modalités QC4E, QA4R et QA5R. Les modalités QD22 et QD12 représentent la réponse par la justification de la fausseté de la proposition et non par un contre-exemple. La modalité QD23 représente un choix d'un faux contre-exemple. Pour ces trois modalités les éléments présents dans le discours sont repérés, mais l'erreur provient d'autres considérations.

L'axe 2 traduit donc, une opposition entre deux formes d'exploitation du discours : Dans la première certains éléments du discours ne sont pas pris en compte, ce qui conduit à des échecs. Dans la seconde il y a au contraire une grande attention portée à repérer les éléments présents dans le discours, ce qui peut conduire à des réussites comme à des échecs.

IV.2.3. Analyse du 3ème axe : Différentes réactions par rapport à la forme

Le pourcentage de l'axe 3 par rapport à la trace est de 9.34 %. Cet axe fait apparaître une opposition entre deux groupes de modalités. Le premier groupe est constitué de QB3E; QB5E et le 2ème groupe est constitué de QC5E, QC8E, QD1R et QD2R. Dans le tableau suivant on représente les contributions à cet axe; la qualité et le poids de ces modalités.

	CTR3	QLT3	POND
QB3E	12.28	48.67	12
QB5E	7.27	41.65	31
QC5E	6.93	78.09	32
QC8E	6.05	47.26	11
QD1R	7.50	63.14	28
QD2R	7.71	70.31	29

Remarquons d'abord que C5 représente le seul énoncé équivalent à l'énoncé E, dont la forme s'éloigne de celle de E. Dans C5, il y a l'introduction du quantificateur universel et de l'implication sous forme symbolique, alors que l'énoncé E est écrit en langage naturel. Au contraire, C8 représente le seul énoncé qui n'est pas équivalent à l'énoncé E, dont la forme est proche de celle de E. L'échec à ces deux questions peut être traduit par une réaction excessive par rapport aux sensibilités de forme. Cette attitude a pu contribuer dans la réussite à la reconnaissance des contre-exemples. En effet, les réponses proposées dans la partie D comportent quatre réponses ayant la même forme (Ce sont les réponses d'Omar, Ali, Rachid et Driss), et une ayant une forme différente (C'est la réponse d'Anass). La comparaison de formes a pu amener à rejeter cette dernière qui ne représentait pas un contre-exemple.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 3 nous montre la présence de la modalité QA53, du même côté que les modalités QC5E, QC8E, QD1R et QD2R. La modalité QA53 représente l'écriture de la contraposée de la proposition énoncée au lieu de la négation de la proposition. Dans la contraposée il y a des négations, mais elle garde la même forme que la proposition donnée (la proposition est de la forme $P \Rightarrow Q$ et la contraposée représente $\text{nonQ} \Rightarrow \text{nonP}$). Donc, là aussi il y a une réaction excessive par rapport aux sensibilités de forme.

Par ailleurs, les échecs à B3 et B5 pouvaient être évités grâce à une comparaison avec une implication ayant une forme assez proche (Ce sont les implications relatives à B2 et B6). En effet B3 représente la proposition : $\forall x \in N \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$ et B2 représente la proposition : $\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$. La différence entre ces deux propositions est l'ensemble de référence, et nous pensons que l'erreur dans le traitement de B3 vient du fait de ne pas tenir compte de l'ensemble de référence ($x \in N$ et $x > 5$ entraîne $x \geq 6$. D'où $x^2 \geq 36$ et par conséquent $x^2 > 35$) De même, B5 représente la proposition : $\forall x \in R \; x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$ et B6 représente la proposition : $\forall x \in N \; x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$. Là aussi la différence entre ces deux propositions est l'ensemble de référence, et nous pensons que l'erreur dans le traitement de B5 vient du fait de ne pas tenir compte de l'ensemble de référence ($x \in R$, x est donc soit positif soit négatif donc on n'a pas $x > 5$).

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 3 nous montre la présence des modalités QD29, QA24 et QD12 du même côté que les modalités QB3E et QB5E. La modalité QD29 représente soit une non- réponse, soit une réponse hors sujet. La comparaison des réponses fournies n'a pas eu lieu. On a donc là une réaction insuffisante par rapport aux sensibilités de forme. Quant à la modalité QA24, elle représente l'écriture de la négation mais avec le quantificateur universel au lieu du quantificateur existentiel. Une comparaison avec les questions A4 et A5, qui demandent elles aussi l'écriture d'une négation aurait pu faire éviter cette erreur. Enfin la modalité QD12 représente le choix de la justification de la fausseté de la proposition et cette réponse est la seule qui n'a pas la même forme que les autres réponses. On a déjà signalé qu'une grande sensibilité à la forme aurait conduit à ne pas considérer cette réponse. En revanche une réaction insuffisante par rapport à la forme conduirait à envisager cette réponse.

Ainsi, on peut dire que de ce côté on a une réaction insuffisante par rapport aux sensibilités de forme.

L'axe 3 donne donc, des informations sur les différentes réactions par rapport à la forme.

CONCLUSION DE L'ANALYSE FACM

L'analyse factorielle des correspondances multiples montre le caractère facile des parties B et C et de ce fait ce sont les échecs qui vont être significatifs des difficultés des étudiants. Par contre l'analyse montre le caractère plus difficile des parties A et D et de ce fait ce sont les réussites qui vont être significatives.

Le 1er axe met en avant la compréhension de différentes formes d'un énoncé mathématique; surtout les énoncés où le quantificateur universel est écrit d'une manière explicite (voir C3, C4, C5). Il met aussi en avant les questions liées à la négation et au contre-exemples.

Les principales causes d'échec, qui apparaissent aux 2ème et 3ème axes, sont liées d'une part à l'ordre, d'autre part à la forme.

L'ordre ici est vu sous plusieurs angles :

- l'ordre dans l'implication qui nécessite une non confusion entre une implication et sa réciproque.
- L'ordre dans la position du quantificateur universel par rapport au quantificateur existentiel.
- L'ordre dans la structure d'un énoncé que nécessite la distinction entre ce qui est hypothèse et ce qui est conclusion.

La forme est vue dans la comparaison des divers énoncés. Ainsi apparaissent différentes sensibilités à la forme.

Dans un environnement mettant en avant le contre-exemple, deux éléments apparaissent ayant une importance dans le traitement de l'implication et la compréhension d'un énoncé mathématique : ce sont l'ordre des éléments présents dans une implication ou l'énoncé et la comparaison avec d'autres énoncés ayant des formes similaires. Cette comparaison peut être favorable à la reconnaissance d'un contre-exemple.

D'autre part, il apparaît que le traitement de la négation (Voir les questions A2 et A4) n'est pas très lié à la reconnaissance de contre-exemples (Voir la question D1). On peut expliquer ceci par le fait qu'un contre-exemple à une proposition de la forme $P \Rightarrow Q$ est vu comme un objet vérifiant P et ne vérifiant pas Q sans avoir un recours explicite à la négation.

Si le traitement de la négation paraît peu lié à la reconnaissance de contre-exemple, la place de la logique dans la construction de contre-exemple est-elle de même limitée ? Les résultats au questionnaire ne permettent pas d'aborder de tels problèmes. Pour y répondre, nous avons choisi de faire travailler des étudiants en binômes. Il est apparu que les questions proprement logiques ne conditionnent les difficultés que dans la mesure où elles s'ajoutent aux difficultés propres à l'analyse (cf. Benbachir, 2000).

Références bibliographiques :

Balacheff, N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, p. 84, 155, 156.

Benbachir, A. et Zaki, M., 2000, *Etude de cas en première année d'université, le contre-exemple en analyse* (article proposé à la revue Educational Studies in Mathematics).

Durrand-Guerrier, V.,1995, Différents types de savoirs et leur articulation, *Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en œuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*, 205-233. Ed. la pensée Sauvage, Grenoble.

Duval, R., 1998, *Signe et objet, Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et Objet*, Annales de didactique et de sciences cognitives 6, 139-163. IREM de Strasbourg.

Gispert, H., 1982, *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse. Publications mathématiques d'Orsay, Orsay, p. 82.

Glaeser, G., 1971, *Mathématiques pour l'élève-professeur,* formation des enseignants, Paris, Hermann, p.108.

Glaeser, G., 1995, Encyclopédie Universalis, *Péano,G.*, Vol. 17, pp. 703-705.

Hitt , H., 1998, *Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction,* Annales de didactique et de sciences cognitives 6, 7-26. IREM de Strasbourg.

Lakatos, I. (traduction française) 1984, Preuves et réfutations. Ed. Herman, p. 167, 171.

Legrand, M., 1988a, Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique, le débat scientifique en situation d'enseignement, , 53-66.Grenoble, La Pensée Sauvage.

Mandelbrot, B., 1982, Penser les mathématiques, 226-251. Ed. du Seuil.

Margolinas, C., 1993, De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique. Ed. La Pensée Sauvage, p. 30,31.

Pluvinage, F., 1993, 'Grilles et taxinomies', Annales de didactique et de sciences cognitives 5, 5-17. IREM de Strasbourg.

Pont, J.C., 1995, Aux sources du conventionnalisme, Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXème siècle, 109-144. Ed. Albert Blanchard, Paris.

Youschkevitch, A.P., 1981 (Traduction française), Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques, brochure APMEP n° 41.