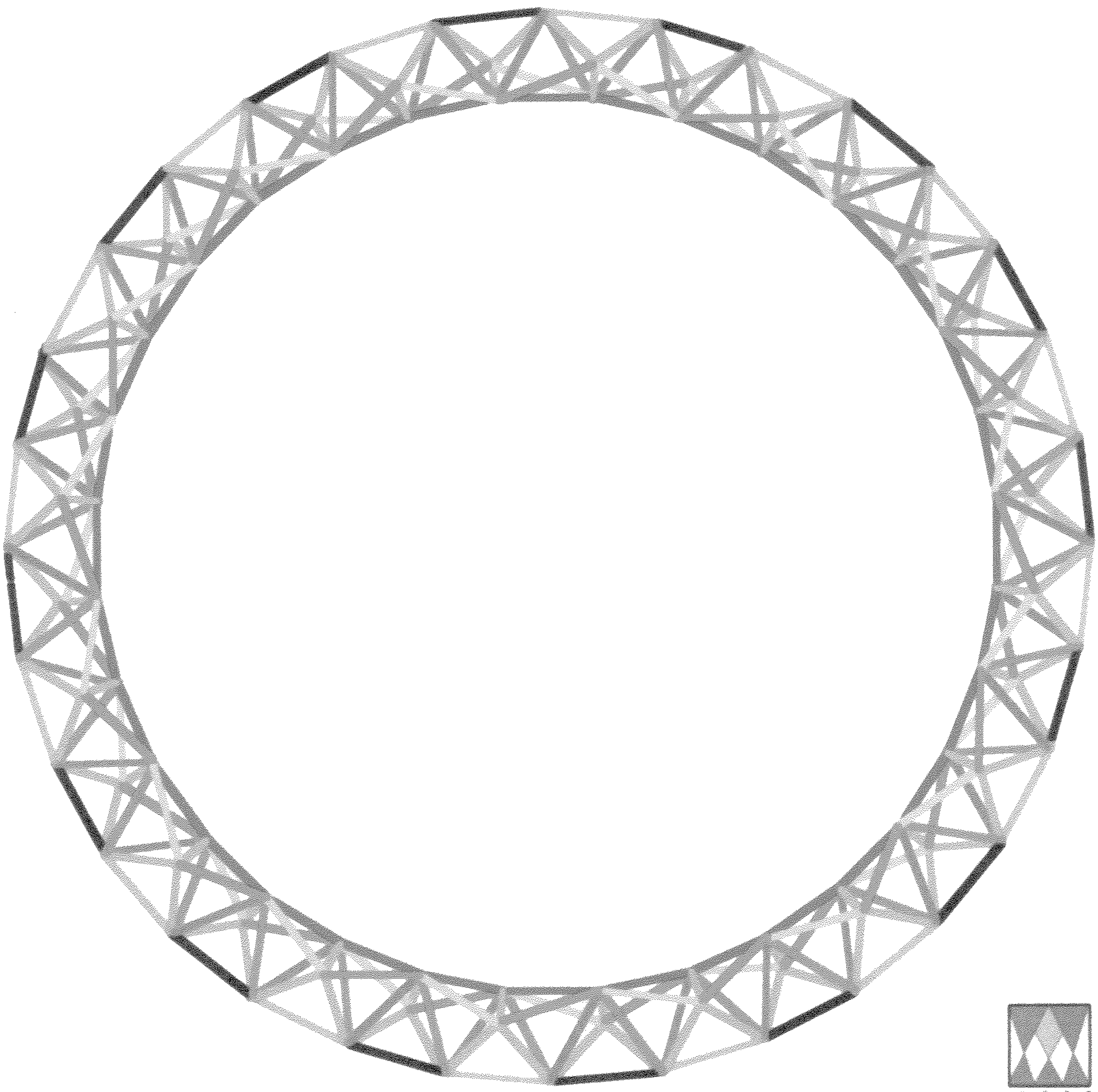
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 103 AVRIL 2001 I.S.S.N. 0290 - 0068



Couverture de l'Ouvert n° 103

La couverture du n° 102 était réalisée par Antoine WALTER et représentait un hypercube quadridimensionnel dans l'espace à trois dimensions.

Cet artiste vous propose une nouvelle couverture pour le n° 103 : le polytope K^3 sur 12 points.

Pour approfondir avec l'artiste, nous vous renvoyons à son article dans le numéro actuel **J'aime Alice, donc Alice même.**

Et nous signalons l'exposition de ses réalisations en trois dimensions, en infographie, en aquarelles, en livres qui aura lieu du 10 au 27 mai 2001, de 13h à 19h , 25 rue des Veaux à Strasbourg.

ÉDITORIAL

À VOS STYLOS

Mathématiques et Arts, deux objets reliés l'un à l'autre comme en témoigne l'article de Richard DENNER qui présente une sélection de sites Internet illustrant cette articulation. Mathématiques source d'inspiration pour un artiste graphique, voilà qui est plus rare et cette rencontre est celle d'Antoine WALTER qui nous offre deux couvertures pour L'OUVERT. Le discours de l'artiste est différent de celui du mathématicien et renvoie, il faut bien le dire, à d'autres manières de voir assez surprenantes.

Et pour le philosophe, en l'occurrence KANT, quelle est la figure du mathématicien ? Raymond BÉNÉVENT décrit une sorte de volonté démiurgique autrefois incarnée par le géomètre et aujourd'hui, si l'on suit sa démonstration, assumée seule par le physicien.

Mathématiques et Littérature, enfin, avec les jeux littéraires d'inspiration mathématiques inventés par le groupe OULIPO, Richard CABASSUT nous livre quelques clés pour entrer dans cet univers. Ces jeux ne sont pas toujours gratuits et ils peuvent aboutir à de purs chefs-d'œuvre comme *La Vie mode d'emploi* de Georges PEREC dont Michèle AUDIN présente rapidement la base architecturale.

L'OUVERT reste ainsi fidèle à sa raison d'être, affirmée par son titre, et souhaite servir de pont entre les mathématiques et les autres domaines de connaissance. Il y reste à un rythme de publication qui va sans doute se ralentir avec à terme trois numéros par an. Pour au moins deux raisons, autrefois richement dotés par la manne ministérielle, les IREM ne survivent plus que grâce à l'activité de plus en plus bénévole de certains enseignants. L'autre raison, sans doute dépendante de la précédente, est que nous recevons bien peu de propositions d'articles sur l'enseignement ou sur les problèmes de cet enseignement dans les classes de Lycée. Ainsi, pour la richesse de notre revue et comme l'affirme une de nos rubriques « À vos stylos ! ».

Alain KUZNIAK

SOMMAIRE

N° 103 – AVRIL 2001

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Richard Cabassut
◇ *Rédacteur en chef* : Alain Kuzniak
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur — Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes — F - 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03 90 24 01 61 — Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr — http://irem.u-strasbg.fr
◇ *Prix de l'abonnement :*
110 F/1 an —180 F/2 ans pour les membres A.P.M. d'Alsace (*),
140 F/1 an — 240 F/2 ans dans les autres cas.
◇ N° spécial Georges Reeb (66 F port compris).
◇ Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
◇ Merci de bien vouloir indiquer votre e-mail éventuel.
◇ (*) Comme la Régionale d'Alsace subventionne l'impression de '*L'Ouvert*',
les adhérents du Bas-Rhin et du Haut-Rhin ont droit à une réduction.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F.

LE GÉOMETRE CHEZ KANT : FIGURE OU SYMBOLE ?

Introduction

Au début de cet exposé[1], il convient d'en fixer avec précision les limites, afin de ne pas donner lieu à malentendu ; ce qui revient à dire ce que ce travail n'est pas.

1– Ce n'est pas un exposé de mathématicien, et il est important que cela soit dit face à un public comportant de nombreux représentants d'une telle espèce.

2– Il ne s'agit pas non plus d'un exposé sur les thèses mathématiques de KANT, pour les confronter par exemple aux sciences mathématiques contemporaines. Ce pourrait être un point de vue légitime, d'autant plus qu'il sera inévitable de se demander ce que KANT, étant donné la place de l'intuition spatiale dans son concept de la géométrie, aurait pensé des perspectives non euclidiennes, et s'il les a d'ailleurs soupçonnées[2]. Après tout, il lit les mathématiciens, il connaît entre autres l'œuvre d'EULER et en particulier ses conceptions géométriques[3]; la deuxième partie de sa vie intellectuelle est contemporaine de la première partie de celle de GAUSS, et LOBATCHEVSKI naît avant que KANT ne meure[4]. On ajoutera que KANT, même si on peut sourire aujourd'hui de certaines de ses positions « scientifiques », avait un " sens " physique, ou plus exactement mécanique, parfois extrêmement perspicace. On ne peut pas oublier l'élaboration qu'il fait, dès 1755, de l'hypothèse cosmologique de la nébuleuse primitive, tellement cohérente du point de vue de la reconstitution d'une histoire du système du monde que la conception qu'on a d'abord appelée système de Laplace est souvent renommée aujourd'hui *hypothèse de Laplace-Kant*[5]. Ce qui est hors de doute, c'est que KANT était passionné par les sciences de son temps, et que l'examen d'une éventuelle lucidité prédictive de sa part ne serait pas sans intérêt[6].

---

[1] Conférence donnée le 20 mars 1999 à l'Institut de Mathématiques de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, dans le cadre d'une journée organisée par le groupe Philosophie-Mathématiques de l'IREM de Strasbourg sur *Espace et géométrie* par Raymond BÉNÉVENT, docteur en philosophie, professeur à l'IUFM d'Alsace.

Merci aux amis mathématiciens impliqués à un titre ou à un autre dans cet aboutissement, et particulièrement à Michel DE COINTET, Émile URLACHER, Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Richard CABASSUT.

[2] Ce qui est le cas, d'une certaine façon, cf. plus loin.

[3] Il est remarquable que les thèses d'EULER (*Réflexions sur l'espace et le temps*, Histoire de l'Académie royale des sciences de Berlin, 1748), jouent un rôle dans l'opuscule capital de 1768 qui marque la grande mutation de la pensée de KANT sur l'espace (*Du premier fondement de la différence des régions dans l'espace*, Ak. II 375-383), après avoir déjà été citées en 1763 (*Essai sur le concept de grandeurs négatives*, Ak II 165-204, Pl. I 261-302). (édition allemande de l'Académie de Berlin, tome 2, pp. 165-204 ; édition française de la Bibliothèque de la Pléiade (Gallimard), tome 1, pp. 261-302 ; l'absence de référence à l'édition de la Pléiade signifie que l'ouvrage n'y a pas été retenu).

[4] KANT 1724-1804, EULER 1707-1783, GAUSS 1777-1855, LOBATCHEVSKI 1792-1856.

[5] KANT : *Histoire universelle de la nature et théorie du ciel* (1755) (Ak I. 215-367). La 1re édition sera très peu diffusée, le stock ayant " péri " dans la cave de l'éditeur par inondation ou incendie… D'où la reconnaissance tardive du travail de pensée kantien dans l'histoire des idées.

[6] Sur le rapport de KANT aux sciences (physiques, et dans une moindre mesure, mathématiques), les deux ouvrages fondamentaux restent, à notre sens : Jules VUILLEMIN : *Physique et métaphysique kantiennes*, Paris PUF 1955 ; Gottfried Martin : *Science moderne et ontologie traditionnelle chez KANT*, traduction française Paris PUF 1963.

Notre perspective est autre : il s'agit d'un travail sur la figure du mathématicien pour le philosophe :

- figure évidemment corrélée à la nature du savoir spécifique, mais à condition de glisser vers ce que nous appellerions aujourd'hui l'identité professionnelle ;
- figure, surtout, prise dans une dimension quasi mythique, ou en tout cas, paradigmatique d'un type de rapport à la réalité, au savoir, ou au monde, qui fait signe ou même repère pour le philosophe.

Bref, notre exposé vise à approcher d'une réponse à la question suivante : *à travers le cas de KANT, que représente un mathématicien, et spécialement un géomètre, dans l'imaginaire philosophique ?* On n'oubliera pas en effet que Platon était censé avoir fait écrire au fronton de l'Académie : « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre » ; que Spinoza prescrivait de mener le travail de pensée « *more geometrico* » ; que HUSSERL (ancien assistant il est vrai d'un authentique mathématicien, Karl WEIERSTRASS)[7] consacre un livre à l'origine de la géométrie[8]. Certes, il faut se méfier des évolutions sémantiques, et dans les deux premiers cas le géomètre désigne plus ou moins tout mathématicien, et non pas seulement le spécialiste de l'espace. Mais précisément, il n'en est plus tout à fait de même avec KANT : le géomètre est un expert, et sa spécificité est réellement, on va le voir, exclusive et exemplaire. De quoi la géométrie est-elle donc le modèle pour le philosophe ? Tel est le fil rouge de cette intervention, qui peut éventuellement nous conduire jusqu'à la question essentielle d'un modèle largement impensé mais extrêmement actif dans le monde culturel occidental de ce qu'est la connaissance, si nous sommes en tout cas physicien ou philosophe. Il restera à savoir si, par un curieux paradoxe, les mathématiciens, qui en auraient transmis le paradigme à leurs voisins, à défaut de l'avoir créé de toutes pièces[9], n'occuperaient pas désormais un autre lieu, et lequel.

Avant d'en arriver à cette question, on va tenter de cerner, dans les termes les plus accessibles possibles, la nature de la connaissance en général pour KANT, celle de la connaissance mathématique, enfin la place tout à fait privilégiée qu'y occupe la géométrie[10].

---

[7] Mathématicien allemand, 1815-1897, auteur entre autres d'une **condition** et d'un **théorème d'approximation**.

[8] HUSSERL : *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie*. En français : *L'origine de la géométrie*, traduction Jacques DERRIDA, PUF 1962.

[9] Ce paradigme a dans doute, comme on le verra en fin de travail, une origine ou en tout cas des dimensions théologiques. Sur ce point, voir Raymond BÉNÉVENT : *Le commencement kantien*, in *Le Débat* (Gallimard), n° 66, septembre octobre 1991, pp. 172 et 173 entre autres.

[10] On pourra s'étonner – voire se scandaliser si l'on connaît bien la pensée kantienne — de l'absence totale dans cet exposé de la notion de *jugement synthétique a priori*, absence impensable apparemment étant donné le sujet. Cette absence est volontaire, délibérée, voire scrupuleuse, face à un auditoire composé pour partie de mathématiciens. L'expérience montre en effet, soit que cette notion est difficilement comprise, soit que les cas mis en exergue par KANT de jugements synthétiques a priori en mathématiques sont immédiatement contestés, avec pour effet de bloquer d'emblée un possible cheminement commun entre mathématiciens et philosophes à propos de Kant, par une sorte de « fétichisation » commune mais antagoniste de l'expression. Nous avons donc fait le pari de nous passer de cette notion dans le discours explicite. Pari certes risqué, mais motivé, dont il appartiendra au lecteur de juger du résultat.

I - L'*a priori* et le pur dans la connaissance

A – Intuition et concept

« Notre connaissance vient de deux sources fondamentales de l'esprit, dont la première consiste à recevoir les représentations (la réceptivité des impressions), et dont la seconde est le pouvoir de connaître un objet au moyen de ces représentations (la spontanéité des concepts) ; par la première un objet nous est donné ; par la seconde il est pensé en rapport avec cette représentation (à titre de simple détermination de l'esprit). Intuition et concepts constituent donc les éléments de toute notre connaissance, de sorte que ni des concepts sans intuition qui leur corresponde de quelque manière, ni une intuition sans concepts ne peuvent donner une connaissance »[11]. Et KANT ajoute, dans une expression restée célèbre : « De ces deux propriétés, aucune n'est préférable à l'autre. Sans la sensibilité, nul objet ne nous serait donné ; sans l'entendement, nul ne serait pensé. Des pensées sans contenu sont vides : des intuitions sans concepts sont aveugles. Aussi est-il tout autant nécessaire de rendre sensibles ses concepts (c'est-à-dire de leur joindre l'objet dans l'intuition) que de rendre intelligibles ses intuitions (c'est-à-dire de les soumettre à des concepts) »[12] .

Si l'on fait abstraction de la dernière phrase, sur laquelle il faudra revenir, où se situe l'originalité kantienne ? Certes, il ne fait plus de l'intuition une forme dégradée de la pensée (*cogitatio caeca*), comme LEIBNIZ, mais une réalité originale témoignant de l'ouverture originelle du sujet au monde. Ce faisant, il dualise fortement composantes et origines des éléments de connaissance, semblant ainsi renvoyer dos à dos deux styles de la pensée présentés couramment comme unilatéraux : le rationalisme et l'empirisme. Mais cette présentation, on le sait, est approximative : l'empirisme strict, sous sa forme lockéenne, n'a jamais nié l'intervention de l'intellect dans la connaissance, mais en faisait dériver la formation de l'expérience elle-même, c'est à dire de l'exercice de la sensibilité. « Il n'y a rien dans l'esprit qui n'ait été d'abord dans la sensation », disait LOCKE reprenant un adage médiéval. Ce à quoi LEIBNIZ opposait la réplique célèbre : « *nisi intellectus ipse* », « si ce n'est l'esprit lui-même ». Est-ce à dire que le " grand rationalisme "[13] ici représenté par LEIBNIZ ne faisait aucune place à l'expérience ? Nous dirions plus volontiers que la prévalence de la raison se fondait sur l'idée qu'elle-même était capable de l'expérience la plus élevée, l'expérience comme production d'idées[14].

Si aucune des conceptions de la connaissance ici impliquées n'a été totalement moniste, l'originalité kantienne pourrait ne pas être décisive. Seulement, KANT ajoute, après avoir indiqué qu'intuitions et concepts sont les éléments de toute connaissance : « Tous deux sont ou purs ou empiriques : empiriques, lorsqu'une sensation (qui suppose la présence réelle de l'objet) y est contenue ; purs, lorsque aucune sensation ne se mêle à la représentation. On peut appeler la sensation matière de la connaissance sensible. Par suite, l'intuition pure contient uniquement la forme sous laquelle quelque chose est intuitionné, et le concept pur uniquement la forme de la pensée d'un objet en général. Seuls les

[11] KANT : *Critique de la Raison pure*, Logique transcendantale, Introduction I, Ak. III 074, Pl.I 811-812.

[12] *Ibidem*, Ak. III 075, Pl. I 812.

[13] Selon la formule de Maurice MERLEAU-PONTY pour différencier DESCARTES, LEIBNIZ, SPINOZA et MALEBRANCHE d'une part, des " petits " rationalistes, par exemple scientistes, du XIX^{e} d'autre part. Cf. MERLEAU-PONTY, *Signes*, Paris Gallimard 1960, chapitre V : Partout et nulle part.

[14] Les idées seraient le *phénomène* propre à la raison, son expérience. On peut ainsi entendre les élaborations cartésiennes à propos de la réalité de l'idée (formelle, objective) et la totalité de l'argument ontologique.

intuitions ou les concepts purs sont possibles *a priori* ; les empiriques ne le sont qu'*a posteriori* »[15]. Là aussi, la distinction de l'*a priori* et de l'*a posteriori* n'est pas originale. Mais son articulation avec celle du pur et de l'empirique dénivelle toute une conception de la connaissance.

B – L'*a priori* et le pur

1– Concepts purs et principes a priori

Lorsque KANT pénètre sur la scène philosophique avec des œuvres consistantes, dans les années 1760, l'apriorité des facteurs intellectuels de la connaissance, fondement du rationalisme, est battue en brèche non seulement par l'empirisme, mais chez lui-même : la critique de l'argument ontologique, moment capital de sa réflexion, date de 1763[16] : à un pur objet de pensée je peux attribuer tous les prédicats possibles, l'existence n'y sera pas contenue, et ne pourra donc en être déduite, comme c'est le cas chez Anselme DE CANTERBURY d'abord, chez DESCARTES ensuite pour l'existence de Dieu. Et la validité de l'objection jette la suspicion sur la totalité des productions de la raison, objets et principes, jusqu'à déterminer chez KANT un moment proprement sceptique : un rationalisme strict, par les délires logiques qu'il favorise, se disqualifie et justifie le scepticisme[17]. En cet espace abandonné l'empirisme fait sa niche, promettant une connaissance assurée à condition de ne tenir pour légitimes que les données issues strictement de l'expérience. Or, il va appartenir à un empiriste d'établir qu'un empirisme rigoureux détruit jusqu'à la possibilité d'une science et reconduit, par un chemin opposé, à un scepticisme équivalent à celui issu des excès rationalistes : telle est, selon KANT, l'intervention philosophique décisive de HUME[18].

Que montre en effet HUME, aux yeux de KANT en tout cas ? – Premièrement, que le discours à prétention scientifique use de manière centrale de la notion de causalité ; – or, deuxièmement, jamais une expérience strictement entendue ne témoigne de la causalité. Elle ne nous propose entre les phénomènes que des consécutions, antécédences ou simultanéités temporelles : la causalité n'est jamais donnée, toujours projetée ou extrapolée par l'intellect. Conclusion : un opérateur majeur de la science de la nature se trouve frappé d'une illégitimité irrelevable, si les empiristes sont conséquents avec leurs partages et préceptes : il n'y a pas de science possible.

Le génie de KANT sera de reprendre et d'entériner intégralement la démonstration *humienne*, mais comme démonstration par l'absurde :

1. Si la notion de causalité, *a priori* intellectuel sans attestation empirique, est illégitime, alors la science, dans sa prétention à dire l'universel et le nécessaire, est impossible ;

---

[15] *Critique de la raison pure*, ibidem.

[16] KANT : *L'unique fondement possible d'une preuve de l'existence de Dieu* (1763), Ak. II 065-163, Pl. I 317-435.

[17] KANT : *Les rêves d'un visionnaire expliqués par des rêves métaphysiques* (1766), Ak. II 317-373, Pl. I 527-592.

[18] HUME est mentionné plusieurs fois, surtout dans la préface des *Prolégomènes* (1783), Ak IV. 255-383, Pl. II 015-172. Pour HUME, voir : *Traité de la nature humaine* (1739-1740), traduction LEROY, Paris Aubier 1946 ; *Abrégé du Traité* (1740), traduction DELEULE, Paris Aubier 1971 ; *Enquête sur l'entendement humain* (1748 et 1758), traduction LEROY, Paris Aubier 1947. On notera toutefois – et c'est important pour ce qui suit immédiatement – que Kant convoque dans son œuvre un HUME à la mesure des nécessités de son interprétation.

2. Or, la science de la nature est non seulement réelle, mais elle dit avec succès l'universel et le nécessaire ;

3.Donc l'usage de la notion de causalité, qui est *a priori*, est condition de possibilité de la connaissance, la démonstration en ayant été faite non par pétition de principe à partir de présupposés rationalistes, mais au contraire de l'intérieur même d'un empirisme conséquent.

Il suffira (si l'on peut dire...) à KANT de généraliser l'objection humienne et son paradoxal résultat à d'autres concepts que la causalité pour former la table des catégories de la *Critique de la Raison pure* : ce sera l'œuvre des " déductions ", à entendre au sens juridique de la détermination d'un droit, dont l'examen, complexe, n'entre pas dans ce propos. Simplement, la structure intime du rapport de connaissance est bouleversée : *c'est l'a priori de nature intellectuelle, et, on va le voir, de nature intuitive, qui se trouve légitimé* ; et il l'est non pas en rivalité avec l'expérience, mais parce qu'il la permet et la structure : l'extraordinaire texte qui célèbre l'avènement de ce nouveau rapport à la nature vaut d'être intégralement cité : « Lorsque Galilée fit descendre sur un plan incliné des boules avec une pesanteur choisie par lui-même, ou que Torricelli fit porter à l'air un poids qu'il avait d'avance pensé égal à celui d'une colonne d'eau à lui connue, ou que, plus tard, Stahl transforma des métaux en chaux et celle-ci à son tour en métal, en y retranchant ou en y restituant certains éléments, alors ce fut une illumination pour tous les physiciens. Ils comprirent que la raison n'aperçoit que ce qu'elle produit elle-même d'après son projet , qu'elle doit prendre les devants avec les principes qui déterminent ses jugements selon des lois constantes, et forcer la nature à répondre à ses questions, au lieu de se laisser conduire par elle comme à la laisse ; car autrement, des observations faites au hasard et sans aucun plan tracé d'avance ne se rassemblent pas en une loi nécessaire, ce que cherche pourtant la raison et dont elle a besoin. Cette raison doit se présenter à la nature tenant d'une main ses principes, d'après lesquels seulement des phénomènes concordants peuvent valoir comme lois, et de l'autre les expériences qu'elle a conçues d'après ces mêmes principes. Elle lui demande de l'instruire, non pas comme un écolier qui se laisse dire tout ce qui plaît au maître, mais comme un juge en charge, qui force les témoins à répondre aux questions qu'il leur pose. La physique est donc relevable de la révolution, si avantageuse dans sa manière de penser, à cette simple idée qu'elle doit, conformément à ce que la raison elle-même met dans la nature, chercher en celle-ci ce qu'elle doit en apprendre, et dont elle ne pourrait rien savoir par elle-même »[19]. On notera cette fin : le savoir que la raison ne peut attendre que de la nature est sous la dépendance de ce que le raison a mis dans la nature. C'est un cercle, mais il n'est pas vicieux : il est constitutif de la connaissance.

Autrement dit, avant que me soit donné un objet empirique, sa forme conceptuelle en tant qu'objet de connaissance est prédéterminée. Cette formule « avant que l'objet ne soit donné » est un véritable leitmotiv dans la *1re Critique*. Et parmi les *a priori* intellectuels, à côté des concepts purs, figurent trois principes dont deux au moins affirment cette préconstitution par l'activité pensante de l'objet de connaissance : *axiomes* de l'intuition, *anticipations* de la perception, analogies de l'expérience.

Pour comprendre totalement ce point, il faut retourner à l'autre élément pur de la connaissance, laissé en route : l'intuition pure, ou intuition *a priori*. C'est cet examen qui nous fera déboucher sur la découverte de la nature des mathématiques.

---

[19] KANT: *Critique de la Raison pure*, Préface à la 2e édition, Ak. III 010, Pl. I 737-738.

2– Intuitions pures ou formes a priori de l'intuition

Une intuition est empirique « lorsqu'une sensation (qui suppose la présence réelle de l'objet) y est contenue », et pure « lorsque aucune sensation ne se mêle à la représentation ». Et Kant précise : « On peut appeler la sensation matière de la connaissance sensible. Par suite, l'intuition pure contient uniquement la forme sous laquelle quelque chose est intuitionné » [20]. Mais que signifie l'a priorité d'une intuition, ou d'une sensation, sans objet senti ? Qu'y a-t-il donc qui soit tellement *a priori* dans une sensation qu'il puisse subsister non pas seulement en elle, mais sans elle ?

À cette question de savoir qu'est-ce qui est sensible sans être, selon l'exact mot latin de la *Dissertation* de 1770[21], *« sensualis »*, sensuel, et qui est donc pur ; qu'est-ce qui non seulement s'affirme dans toute sensation, mais encore la précède, et est donc, dans le lexique kantien, *a priori* ? Qu'est-ce qui non seulement la précède, mais en conditionne la possibilité, et est donc transcendantal ? La réponse de KANT est double : l'espace et le temps.

Pourquoi faire de la saisie de l'espace et du temps un processus d'ordre sensible ? Parce qu'il n'est pas d'ordre intellectuel ou conceptuel, alors que nous n'avons le choix que dans cette alternative. Quels que soient les élaborations secondaires, raffinements ou subdivisions des exposés dans la *1re Critique*, un argument est toujours convoqué, en 1768, 1770, 1781, 1783, 1787[22]: celui des corps dits " non congruents ". Le voici dans l'exposé des *Prolégomènes*, qui nous entraîne explicitement vers la géométrie : « Si deux choses sont parfaitement identiques en tous les points qui, en chacune, ne peuvent jamais être connus qu'en soi (dans toutes les déterminations qui se rapportent à la grandeur ou à la qualité) alors il doit s'ensuivre que dans tous les cas et sous tous les rapports, l'une peut être mise à la place de l'autre, sans que cette substitution cause la moindre différence repérable. De fait, c'est ainsi que les choses se passent avec les figures planes en géométrie ; mais diverses figures sphériques montrent, nonobstant cette parfaite concordance intérieure, une différence dans leur relation extérieure, telle que l'une ne se laisse pas du tout substituer à l'autre : par exemple, deux triangles sphériques situés dans deux hémisphères, ayant pour base commune un arc de l'équateur, peuvent être parfaitement égaux en ce qui concerne leurs côtés et leurs angles, en sorte qu'aucun d'eux, si on le décrit seul et complètement, ne présente rien qui ne soit du même coup dans la description de l'autre, et pourtant, on ne peut mettre l'un à la place de l'autre (c'est-à-dire dans l'hémisphère opposé) ; et il y a donc ici une différence interne des deux triangles qu'aucun entendement ne peut indiquer comme intrinsèque, et qui ne se manifeste que par la relation extérieure dans l'espace »[23]. Mêmes valeurs d'angles, mêmes dimensions, en bref même identification conceptuelle, mais *tournure* inverse. Or cette tournure, que l'entendement strict ne sait dire, ne se détermine que par rapport à un espace absolu de référence. Sur un exemple semblable, celui des mains droite et gauche, KANT disait plus lapidairement, en 1768, qu'elles avaient même *Begriff* (concept) et *Gestalt* (figure) différente[24].

---

[20] cf. notes 12 et 13 pour les références.

[21] KANT :*De la forme et des principes du monde sensible et intelligible*, thèse de doctorat de KANT dite : *Dissertation de 1770*, Ak. II 387-419, Pl. I 629-678.

[22] Respectivement : *Du premier fondement de la différence des régions dans l'espace* (1768) Ak II 282-283, Paris Vrin 1970, p. 98 ; *Dissertation* (1770), *op.cit.* § 15 C, Ak II 403, Pl. I 652-653 ; *Critique de la raison pure* 1re éd., op. cit., Ak III 052, Pl. I, 785, *Prolégomènes* …, op.cit. § 13, Ak. IV 285-286, Pl. II 054 ; *Critique de la raison pure* 2e édition.

[23] *Prolégomènes*, référence à la note précédente. Ce qui est souligné en toute fin de citation l'est par nous.

[24] *Du premier fondement* … op.cit. note 21, ibidem.

La description complète d'un objet empirique exige donc la référence à un espace, et par analogie, à un temps absolus qui existent sans lui et en conditionnent la présentation, ou même la présence : espace et temps sont formes *a priori* de notre intuition dans la connaissance sensible empirique. Ils sont du sensible pur, des intuitions pures. Une science les prend comme objets propres : les mathématiques.

Nous y voici enfin ? Pas tout à fait : il faut encore comprendre ce que signifie la notion kantienne d'idéalité de l'espace et du temps.

C – Idéalité, finitude et vérité du phénomène

L'idéalité est primitivement[25] un caractère négatif : est idéal ce qui est non réel absolument ; très exactement ce qui, réel à l'égard d'une structure générique des sujets que nous sommes, ne l'est, ni pour d'autres êtres pensants, ni dans le monde " en soi ". L'*idéalisme transcendantal*, qui m'interdit de faire des caractères ou conditions sous lesquelles les choses me sont données des caractères ou conditions des choses-mêmes, est corrélé à l'idéalité du temps et de l'espace en tant que formes *a priori* d'une intuition dont l'universalité n'est pas acquise : « Quant à la nature des objets considérés en eux-mêmes et en faisant abstraction de toute réceptivité de notre sensibilité, elle nous demeure entièrement inconnue. Nous ne connaissons rien de ces objets que la manière dont nous les percevons, manière qui nous est propre, et peut fort bien n'être pas nécessaire pour tous les êtres, bien qu'elle le soit pour tout homme. Nous n'avons affaire qu'à elle (...) Quand même nous pourrions porter notre intuition à son plus haut degré de distinction, nous n'en ferions point un pas de plus vers la nature des choses en soi. Car en tout cas, nous ne connaîtrions parfaitement que notre mode d'intuition, c'est-à-dire notre sensibilité, toujours soumise aux conditions d'espace et de temps originairement inhérentes au sujet ; ce que peuvent être les objets en soi, la connaissance la plus clarifiée de leurs phénomènes, la seule qui nous soit donnée, ne nous le ferait jamais connaître »[26].

Ce texte essentiel affirme :

1. que la connaissance humaine est marquée par une finitude non pas accessoire, mais radicale, puisque c'est la nature des objets qui nous est inaccessible ;

2. mais que cette finitude est, non pas individuelle, mais générique, ce qui en fait, par un curieux renversement, une propriété assignable, identifiable, régulière dans ses effets ;

3. *que cette finitude, consistant à ne connaître les objets qu'à travers une « manière de la perception », n'est pas échangeable, si l'on imagine d'autres êtres, contre l'absence de finitude, mais seulement contre un autre « manière de la perception », c'est à dire contre une autre finitude.*

Or il suffit de rapprocher ce texte d'un autre de *l'Analytique des principes* pour voir que KANT, si l'on excepte le cas de Dieu, n'envisage jamais d'autres êtres concernés par la connaissance que des êtres pensants finis, lesquels pourraient posséder une réceptivité non sensible, éventuellement non soumise à l'espace et au temps, mais qui resterait

---

[25] Cette conception de l'idéal est le trait qui sépare l' « Esthétique » de la *Dissertation* de celle de la *Critique de la Raison pure* : la révolution copernicienne – le changement de conception de l'objectivité – n'est pas faite ; et la condition spatio-temporelle de la connaissance ne peut s'empêcher de virer irrémédiablement à l'obstacle.

[26] *Critique de la Raison pure*, *Remarque générale sur l'Esthétique transcendantale*, Ak. III 065-066, Pl. I, 801-802. Les hypothèses kantiennes quant à d'autres « êtres pensants finis » et à leur forme possible d'intuition ont fait, pour partie, l'objet de notre étude : Raymond BÉNÉVENT, *Kant : intuition humaine, intuition divine*, in Les Cahiers philosophiques de Strasbourg, tome 5, mars 1997, pp. 183-210.

encore, “ un mode particulier d’intuition ”[27]. Bref, si la notion de connaissance a un sens, ce n’est, même à l’extrémité du pensable, que comme réceptivité, peut-être autrement conditionnée, mais conditionnée tout de même, jamais en coïncidence avec l’être des choses. Sur la limite du pensable, il y aurait certes Dieu, mais c’est justement en son idée que la notion de connaissance s’évanouit devant celle de création. En termes kantiens, face à un intellect *archétype*, il n’y a que des intellects *ectypes*, à la pensée desquels un objet doit être donné, et donné à chaque fois d’une façon.

Autrement dit, *notre connaissance est certes conditionnée, mais si cette condition était enlevée, ce ne serait jamais au profit d’une connaissance plus juste, mais au profit de rien.* La mesure de la vérité du connu ne peut être référée qu’aux conditions d’une connaissance possible : elle n’a pas de dette, de dépendance ou d’infériorité à l’égard du non-être cognitif qu’est la chose en soi. Celle-ci, inconnaissable, ne peut obérer la connaissance du phénomène, c’est-à-dire de l’objet – pour – nous, au nom d’une autre qui serait sienne. Il y a, aussi paradoxal que cela puisse paraître, une vérité absolue du phénomène dans la finitude[28].

Si donc nous articulons le résultat de nos deux recherches sur l’*a priori* intellectuel et l’*a priori* intuitif, c’est pour constater que le sujet dit transcendantal impose à l’objet empirique et sa mise en forme intuitive, par les formes de la sensibilité (espace et temps), et sa mise en forme intellectuelle, par les concepts de l’entendement, ou catégories. Cette constitution par le sujet de son objet dans la connaissance, c’est l’autre sens, non plus exactement de l’idéalité, mais de l’idéalisme critique, celui qui donne à tel point prééminence au sujet, même si c’est sur le seul phénomène, qu’il détermine ce que KANT appelle la révolution copernicienne.

Du même coup, le *phénomène-du-monde*, pour parler par anticipation comme HUSSERL, est en quelque sorte harmonique par construction avec le sujet de la connaissance : il est, d’une certaine façon, son œuvre, et une science de la nature devient possible. Espace et temps du sujet et du monde phénoménal sont l’avers et le revers l’un de l’autre, même s’il a fallu, pour l’assurer, donner congé à la chose en soi.

Espace et temps sont précisément l’objet propre des mathématiques.

II - La géométrie: de l’exemplarité à l’exception

A – L’originalité mathématique

1– La construction des concepts

« Le premier qui démontra le triangle isocèle (qu’il s’appelle Thalès ou d’un tout autre nom) eut une illumination ; car il prouva qu’il ne devait pas s’attacher à ce qu’il voyait dans la figure, ou même au simple concept qu’il en avait, pour en apprendre en quelque sorte les propriétés, mais qu’il devait produire cette figure par ce qu’il y pensait et présentait (par construction) a priori d’après les concepts eux-mêmes, et que, pour connaître sûrement quelque chose a priori, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui résultait nécessairement de ce qu’il y avait mis lui-même, conformément à son concept »[29]. Ce texte de la *préface* de la 2ᵉ édition de la

---

[27] *Critique de la raison pure*, *Analytique transcendantale*, *Du principe de tous les objets en général en phénomènes et en noumènes*, Ak. III 210-211, Pl. I 982.

[28] Cf. Raymond BÉNÉVENT, *Le commencement kantien*, art. cité, p. 167.

[29] *Critique de la raison pure*, Préface de la 2ᵉ édition, Ak. III 09, Pl. I 736-737.

première Critique est le " jumeau " de celui mettant en scène GALILÉE, TORRICELLI et STAHL dans l'accession de la physique au statut de science grâce à son fondement *a priori*. À ceci près que cette révolution est bien plus ancienne : « La mathématique, dès les temps les plus reculés où puisse remonter l'histoire de la raison humaine, a suivi, chez l'admirable peuple grec, la route sûre d'une science »[30].

Seulement, la référence à THALÈS et à la " construction " pourrait engendrer un grave malentendu : étant *a priori*, les concepts mathématiques sont-ils conventionnels au sens de nos modernes axiomes, réglés certes par des principes de cohérence, mais autonomes à l'égard du monde physique ou de la structure perceptive ? La pertinence de la notion d'axiome en mathématiques selon KANT[31] pourrait aggraver l'équivoque, d'autant que l'exposé du geste de THALÈS ne comporte aucun renvoi à l'intuition, même si la référence est implicite dans l'idée de figure et le fait que l'illumination soit advenue en géométrie. En fait, KANT anticipe la possibilité de notre méprise, en disant de la mathématique grecque qu' « il ne faut pas penser qu'il lui ait été aussi facile qu'à la logique, où la raison n'a affaire qu'à elle-même, de trouver cette route royale, ou plutôt de se la frayer »[32]. La mathématique, à l'opposé de la logique, n'a pas purement affaire à un *a priori* conceptuel, et l'expression est encore bien faible.

C'est en la différenciant de la connaissance philosophique que KANT dégage sa face intuitive : « La connaissance philosophique est la connaissance rationnelle par concepts, et la connaissance mathématique la connaissance rationnelle par la construction des concepts. Or, construire un concept, c'est présenter *a priori* l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition non empirique, qui par conséquent comme intuition est un objet singulier, mais qui n'en doit pas moins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) exprimer dans la représentation une validité universelle, pour toutes les intuitions possibles qui appartiennent au même concept. Ainsi je construis un triangle en présentant l'objet correspondant à ce concept soit par la simple imagination dans l'intuition pure, soit même, d'après celle-ci, sur le papier dans l'intuition empirique, mais dans les deux cas tout à fait *a priori*, sans en avoir tiré le modèle de quelque expérience que ce soit »[33]. Construire n'est donc pas penser, c'est présenter (*darstellen*) ou à tout le moins pouvoir présenter le répondant figuratif d'une élaboration intellectuelle. Est-ce valable en Arithmétique ? Tous les textes exposant la construction des concepts, ou l'approche par la praticiens de la discipline de l'idée que les mathématiques pourraient bien être ainsi structurées – comme dans la référence à THALÈS – mettent au premier plan la géométrie, et dans celle-ci, les figures, avec une prégnance impressionnante du triangle. C'est sur cet exemple que KANT se fonde pour faire entendre qu'en mathématiques le concept doit pouvoir être accompagné de son répondant intuitif dans l'espace au moins interne de la pensée ou de l'imagination. Une phrase déjà rencontrée peut maintenant s'éclairer : « Des concepts sans intuition sont vides ; des intuitions sans concepts sont aveugles. Aussi est-il tout autant nécessaire de rendre sensibles ses concepts (c'est-à-dire de leur joindre l'objet dans l'intuition) que de rendre intelligibles ses intuitions »[34]. Rendre sensibles ses concepts, leur joindre l'objet dans l'intuition, et ceci, sans dépendre d'une

---

[30] *Ibidem*.

[31] Par exemple : *Prolégomènes*, § 2, c, Ak. IV 269, Pl. II 034.

[32] *Critique de la raison pure*, Préface à la 2e édition, Ak III 009, Pl. I 736 (souligné par nous).

[33] *Critique de la raison pure*, *Théorie transcendantale de la méthode*, I, Ak. III 469, Pl. I 1298.

[34] *Ibidem*, *Logique transcendantale*, Introduction, Ak III 075, Pl. I 812.

perception empirique antécédente, mais au contraire dans la spontanéité d'une production, tel est le sens kantien de la construction *a priori* du concept dans l'intuition. Une expression latine tirée de la *Dissertation de 1770* dit cela d'une manière remarquable : la *« commutatio in intuitus »* des concepts[35], à entendre ici comme transmutation.

Mais notre compréhension de la notion de construction n'est pas achevée : qu'est-ce qui garantit que le concept élaboré par le mathématicien rencontrera, en quelque sorte après coup, son équivalent intuitif, c'est-à-dire en fait le possèdera *a priori* ? La réponse de KANT semble connue : si espace et temps sont forme de notre intuition, pouvons-nous nous en représenter une autre ? Curieusement, la réponse n'est pas négative, on le sait déjà : je peux toujours envisager l'existence d'autres êtres pensants finis, dotés d'un autre mode d'intuition dont je tenterai d'imaginer la forme. Mais si cet autre être faisait des mathématiques, voire de la géométrie, pourrait-il construire dans l'intuition un concept non constructible par nous ? KANT n'a pas posé explicitement cette question, mais il a bel et bien répondu à ceux qui comme nous, la posent après coup : Comment savoir si un objet de pensée fait partie des objets possibles pour nous, dans notre perception et dans notre monde : « Que dans un tel concept, il ne doive se trouver aucune contradiction, c'est assurément une condition logique nécessaire ; mais il s'en faut que cela suffise à la réalité objective du concept, c'est-à-dire à la possibilité d'un objet tel qu'il est pensé par le concept. Ainsi, dans le concept d'une figure renfermée entre deux lignes droites, il n'y a point de contradiction, car les concepts de deux lignes droites et de leur rencontre ne contiennent la négation d'aucune figure ; l'impossibilité ne repose pas sur le concept lui-même, mais bien sur la construction de ce concept dans l'espace, c'est-à-dire sur les conditions de l'espace et de sa détermination, conditions qui à leur tour, ont leur réalité objective, c'est-à-dire se rapportent à des choses possibles, parce qu'elles contiennent *a priori* la forme de l'expérience en général »[36]. Dans ce texte relatif au « bi-angle », la construction s'illustre une nouvelle fois géométriquement ; et GAUSS, RIEMANN ou LOBATCHEVSKI auraient leur cabinet de travail, dans la perspective kantienne, dans l'un de ces univers-îles issus par accrétion de l'éclatement de la nébuleuse primitive et s'y livreraient à la présentation de leurs bizarres figures, éléments d'une exotique géométrie, à propos de laquelle la seule question resterait : Mais enfin, est-ce bien encore là de la géométrie, ou ne serait-ce pas plutôt de la poésie[37]?

Pour redevenir sérieux, la thèse de la construction implique que les intuitions pures *a priori*, l'espace et le temps, sont l'objet même de la mathématique pure, le mathématicien prélevant sur eux les propriétés qu'il leur restituera en élaborations conceptuelles, puis intuitives, déterminées : c'est en les prenant en compte, en les regardant, que le mathématicien pense. La *Dissertation de 1770* disait explicitement : « la

[35] *Dissertation* de 1770, Section I, § 1, Ak. II 389, Pl. I, 632.

[36] *Critique de la raison pure*, *Analytique des Principes*, chapitre II, Ak. III 187, Pl. I 950.

[37] « Les propositions de la géométrie ne sont point des déterminations d'une simple création de notre fantaisie poétique, qui ne pourraient donc être rapportées avec certitude à des objets effectifs, mais (...) elles sont valables de manière nécessaire pour l'espace, et par suite aussi pour tout ce qui peut se rencontrer dans l'espace, puisque l'espace n'est rien d'autre que la forme de tous les phénomènes extérieurs, sous laquelle seule des objets des sens peuvent nous être donnés » (ce qui est souligné l'est par nous). *Prolégomènes*, § 13 Remarque I, Ak. IV 287, Pl. II 056.

MATHÉMATIQUE PURE considère (*considerat*) l'espace en GÉOMÉTRIE, le temps en MÉCANIQUE PURE »[38]. Mais peut-on véritablement regarder autre chose que l'espace ? En tout état de cause, l'espace pur, dans la pensée kantienne, est le matériau, mais aussi l'écran, le lieu de présentation possible, des élaborations du géomètre.

De cette structure particulière, la mathématique hérite d'un statut privilégié parmi tous les régimes de connaissance ou de pensée.

2– Une science exemplaire

L'exemplarité des mathématiques réside d'abord dans le fait que, pour Kant, jamais le statut de science des mathématiques n'a été mis en question : les mathématiques résistent à toutes les crises relatives à la validité de la connaissance, et particulièrement aux trois plus graves[39] : la crise *« sceptique »* des années 1763-1766, le ressaut dogmatique de 1770, et le *« grand silence »* qui précède la 1re édition de la *Critique de la raison pure*, dont la célèbre lettre à HERZ du 21 février 1772 marque l'entrée : crise très grave, “ hypersceptique ” si c'était possible, puisque c'est de manière radicale que la conformité éventuelle des choses et de nos représentations fait problème[40].

Tel est le fait, et il a une conséquence explicitée dès 1763 : « L'usage que l'on peut faire des mathématiques en philosophie consiste soit dans l'imitation de leur méthode, soit dans l'application réelle de leurs propositions aux objets de la philosophie. On ne voit pas que la première ait été jusqu'ici de quelque utilité, si grand que soit l'avantage qu'on s'est promis d'en tirer d'abord. (...) Le second usage fut au contraire d'autant plus profitable, pour les parties de la philosophie qu'il concernait, qu'en tournant à leur profit les leçons des mathématiques elles se sont élevées à une hauteur à laquelle elles n'auraient jamais pu prétendre autrement »[41]. Proposition sur le second usage incompréhensible si l'on oublie que la partie de la philosophie concernée est la physique[42] , comme KANT le précise aussitôt, avant d'ajouter, concernant la philosophie spéculative : « Quant à la métaphysique, au lieu d'utiliser quelques-uns des concepts ou des enseignements des mathématiques, le plus souvent, au contraire, cette science s'arme contre elles (...). On peut aisément deviner de quel côté sera l'avantage dans le conflit entre les deux sciences, dont l'une surpasse toutes les autres par une certitude et une clarté auxquelles l'autre ne fait que s'efforcer de parvenir »[43]. Autrement dit : la métaphysique n'est pas la mathématique, d'où l'impertinence d'une imitation. Mais la vérité mathématique, non seulement ne peut pas être contredite, mais encore doit être intégrée par la philosophie sous la forme où elle

---

[38] *Dissertation* de 1770, Section II, § 12, Ak. II 397, Pl. I 645.

[39] Une autre « discipline » se sauve toujours en compagnie des mathématiques : la morale. Il est remarquable que dans la lettre à HERZ, ces deux sauvetages aient des raisons « parentes » : l' « archétypicité » (à entendre ici surtout comme apriorité) de leurs concepts ou principes, plus spécifiquement des instances qui les énoncent. Cf. Ak. X 130 et 131, Pl. I 692 et 693, et nos travaux cités.

[40] L'étude des principaux textes dits “ précritiques ” parce que reniés par KANT en 1781, a fait l'objet de notre thèse de doctorat : Raymond BÉNÉVENT : *l'archéologie du discours critique de Kant*, ANRT Lille 1989, dont la publication citée à la note 10 résume les positions essentielles.

[41] KANT : *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives* (1763), Ak. II 167, Pl. I 261.

[42] Cet usage newtonien, en fait commun, de la philosophie comme philosophie naturelle, est fréquent dans les premières œuvres de KANT, où le philosophe est, par exemple, celui qui fait des expériences sur la chute des corps ou observe les lois de la balistique (cf KANT : *Conception nouvelle du mouvement et du repos* (1758), Ak. II 013-025, entre autres).

[43] *Essai* ..., op. cit. Ak II. 167-168, Pl. I 262.

se propose lorsque les champs des deux disciplines se croisent. Deux décennies plus tard, KANT ne dit pas autre chose, si l'on excepte le fait qu'entre temps, l'illusion dialectique lui est apparue avoir sa source dans une problématique imitative : « La mathématique donne le plus éclatant exemple d'une raison pure qui s'étend d'elle-même avec succès, sans le secours de l'expérience. Les exemples sont contagieux, surtout pour ce pouvoir, qui se flatte naturellement d'avoir dans d'autres cas le même bonheur qui lui est échu dans un cas particulier. Aussi la raison pure espère-t elle pouvoir s'étendre, dans l'usage transcendantal, avec autant de bonheur et de solidité qu'elle est parvenue à le faire dans l'usage mathématique, surtout si elle applique à celui-là cette même méthode qui lui a été dans celui-ci d'une si évidente utilité »[44]. La tentation est fallacieuse, voire mortelle, mais l'exemplarité est affirmée sans équivoque.

Voilà le fait. Il faut en examiner le droit.

Or, le texte cité pose problème : « la mathématique donne le plus éclatant exemple d'une raison pure qui s'étend d'elle-même avec succès ». N'avons-nous pas entendu, depuis que nous nous référons à la *1re Critique* et aux *Prolégomènes*, qu'il fallait que les concepts du mathématicien aient un ancrage dans l'intuition pure ? Assurément, et la phrase de KANT que nous venons de citer est unilatérale, puisque nous sommes dans la Dialectique : la mathématique comme pure raison, c'est justement la seule chose que retient celui qui va fuir dans les délires logiques. Et c'est vrai absolument : *seulement la mathématique est la science ou l'on n'a plus à choisir, ni entre apriorité et objectivité, ni entre conceptuel et intuitif, puisque ces régimes s'appellent, se " commutent ", s'identifient. Voilà la clé de l'exemplarité mathématique en même temps que de son statut d'exception*, ce qui ne va pas sans paradoxe, mais est vérifiable dès les premières réflexions spécifiées de KANT sur la nature de la clarté mathématique, en 1763 à nouveau : « Dans leurs analyses, leurs démonstrations et leurs conclusions, les mathématiques considèrent le général sous les signes *in concreto*, la philosophie par des signes *in abstracto* »[45]. Le concept, l'universel, s'offre dans l'intuition singulière, dont il sera dit plus tard, on l'a vu, qu'elle ne se découpe elle-même que sur un fond d'intuition pure.

Or le lieu où cette identification tendancielle du conceptuel et de l'intuitif est la mieux dite, ce n'est jamais que la géométrie.

B - Le paradigme géométrique

1– Le déséquilibre géométrie-arithmétique

Dans le rapport à l'évidence intuitive, la balance géométrie-arithmétique est très déséquilibrée au profit de la géométrie, sans que la balance espace-temps, qui lui paraît conjointe, le soit également, au contraire : telle est la proposition paradoxale que nous voudrions maintenant établir. Et si paradoxe il y a, c'est qu'une lecture synthétique de l'œuvre critique de KANT paraîtra confirmer deux faits têtus : l'arithmétique est science du temps, et la géométrie de l'espace ; et, dans la problématique critique, le rapport de l'homme au temps devient beaucoup plus important que son rapport à l'espace.

À ce dernier point, nous apportons un accord sans réserve, avec notre lecture de la quasi-totalité de l'œuvre précritique. La perspective critique est un changement de

---

[44] *Critique de la raison pure, Théorie transcendantale de la méthode*, Première section, Ak. III 468-469, Pl. I 1297.

[45] KANT : *Recherche sur l'évidence des principes de la théologie naturelle et de la morale* (1763), § 2, Ak. II 278, Pl. I 219.

portance indéniable entre temps et espace, en ce sens que la pensée de la finitude d'une part, les préoccupations morales et politiques d'autre part, rendent prégnante la considération pour l'histoire, à la fois de l'humanité et de chaque homme. KANT a lui-même formulé, dans une *Réflexion* remarquable des années 1772-1775, cette mutation de sa pensée : il faut « être non celui qui contemple l'Univers, mais celui qui en est le citoyen »[46], ou en d'autres termes, eux-mêmes kantiens, même si le premier renvoie aussi à HUYGHENS : il faut passer du « cosmothéorique » au « cosmopolitique ».

Ceci est incontestable. Par contre, si nous revenons à la question des mathématiques, il n'en est plus de même.

D'abord, la connexion du temps et de l'arithmétique est subtilement. La thèse kantienne est connue : « La géométrie prend pour fondement l'intuition pure de l'espace. L'arithmétique élabore elle-même ses concepts de nombre par addition successive des unités dans le temps »[47]. Mais KANT ajoute, dans le texte des *Prolégomènes* : « et la mécanique surtout ne peut élaborer ses concepts de mouvement qu'au moyen de la représentation du temps »[48]. Certes, mais où est le problème ? Il est dans le fait que nous avons là trois sciences pour deux intuitions pures. Or, qu'est-ce que la mécanique pour KANT ? Il n'y a pas de réponse explicite à cette question dans la 1° *Critique*, et même les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* n'en proposent que des éléments, par exemple des lois[49]. Le sens kantien le plus tôt illustré[50] emprunte à la classique " mécanique céleste ", comporte des connotations d'ordre dynamique, mais est surtout très proche de ce qui se nomme à l'époque " phoronomie ", science du déplacement ou du mouvement, laquelle s'articule autour de considérations que nous appellerions aujourd'hui cinématiques[51].

Tout ceci pour dire que la mécanique renvoie bien plus à du géométrique qu'à de l'arithmétique, et qu'elle est en concurrence avec l'arithmétique pour l'articulation au temps, même dans l'œuvre critique. Or cette juridiction fragile de l'arithmétique face à la mécanique s'est donnée à voir dès 1770, quand le temps occupe pour la première fois un des plateaux d'une balance dont l'autre contient l'espace : « La MATHÉMATIQUE PURE considère l'espace en GÉOMÈTRIE, le temps en mécanique pure ». (*et il y a un point !*) « À cela s'ajoute un concept, intellectuel en lui-même, mais dont l'actualisation dans le concret exige le secours des notions d'espace et de TEMPS (car il faut, pour le former, ajouter successivement plusieurs unités et les poser les unes à côté des autres), c'est le concept de nombre, dont traite l'ARITHMÉTIQUE »[52]. Comment ne pas remarquer que si l'intuition a toujours à voir avec une immédiateté ou une évidence, celle de l'Arithmétique est compromise par une telle généalogie ?

---

[46] *Réflexion* n° 1170.

[47] *Prolégomènes*, § 10, Ak. IV 283, Pl. II 051.

[48] Ibidem.

[49] KANT : *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1786), Ak. IV 552, Pl. II 475.

[50] Dans les œuvres de la période 1747-1755 surtout, mais aussi dans la « petite cosmologie » de *l'Unique fondement*... op. cit.

[51] *Les Premiers principes* ... tentent une élaboration plus fine des rapports entre " phoronomie ", mécanique, dynamique et " phénoménologie " Cf. Préface, Ak. IV 477, Pl. II 375.

[52] *Dissertation*, § 12, Ak. II 397, Pl. I, 645.

On pourrait objecter que ce texte est précritique. Mais, outre que l'objection ne tient pas compte de la constance générale de la conception des mathématiques chez KANT, elle ne résiste pas à l'examen de l'œuvre dite *définitive* de KANT.

Nous voici face au second aspect du déséquilibre entre arithmétique et géométrie : le caractère intuitif de l'arithmétique n'est jamais posé qu'en deuxième position, comme si ce caractère ne lui était conféré que par analogie, alors que la géométrie l'a en propre. Ainsi le triangle de THALÈS représente la totalité des mathématiques au début de la 1° *Critique*. Ainsi, même dans la configuration officielle liant géométrie à espace et arithmétique à temps, la paire spatiale précède l'autre, lui offrant ensuite son évidence. Ce processus est impressionnant dans les *Prolégomènes* : l'exposé de la mathématique étant terminé, KANT rédige un nouveau paragraphe pour confirmer toute la science : « Pour ajouter quelque chose à titre d'explication et de confirmation, l'on n'a qu'à considérer la méthode habituelle et absolument nécessaire des géomètres »[53]. Puis, à l'intention de qui résisterait encore à la nature de l'espace et du temps, KANT, dans un paragraphe supplémentaire, propose d'exercer sa perspicacité sur un paradoxe : celui des figures non congruentes, plus précisément des triangles sphériques déjà mentionnés[54] ! Pour faire bonne mesure, il ajoute une *Remarque* : « la mathématique pure, et notamment la géométrie pure, ne peut avoir de réalité objective qu'à la condition de concerner seulement les objets des sens »[55]. La suite, à la limite, ne nous intéresse guère. Ce qui fait sens, c'est le renvoi constant de la mathématique dans son ensemble à la géométrie seule. Quelle en est la raison dernière ?

2– La géométrie et son modèle

En 1770 déjà, KANT écrivait : « Ainsi la mathématique pure, exposant la forme de toute humaine connaissance sensitive, est l'*organon* des principes de toute connaissance à la fois intuitive et distincte ; et comme les objets de cette science sont non seulement les principes formels de toute intuition, mais eux-mêmes des intuitions originaires, elles fournissent une connaissance très vraie et, en même temps, le modèle de la suprême évidence dans les autres sciences »[56]. Si l'*organon* est un exemple de règles qui fait modèle et outil, la mathématique marque l'idéal d'une connaissance, comme simultanéité ou conjonction de l'intuitif et du distinct. Qu'est-ce à dire ? C'est à nouveau la géométrie qui en rend compte, après mention de la non congruence d'une main droite et d'une gauche et, on l'aura deviné, des triangles sphériques : « La géométrie fait usage, non seulement de principes indubitables et discursifs, mais de principes qui tombent sous le regard de l'esprit ; et l'évidence dans les démonstrations (qui est la clarté d'une connaissance certaine en tant qu'elle est assimilée à la connaissance que nous donnent les sens), est non seulement, en géométrie, la plus grande, mais la seule que l'on trouve dans les sciences pures ; aussi paraît-elle, dans les autres sciences, le modèle de toute évidence et le moyen d'y parvenir. (...) Au reste, la géométrie ne démontre pas ses propositions universelles à la façon dont on traite de questions rationnelles, en pensant l'objet par un concept universel ; elle les place sous nos yeux, par une intuition singulière, comme l'on fait pour les questions qui relèvent de la connaissance sensitive »[57].

---

[53] *Prolégomènes*, § 12, Ak. IV 284, Pl. I 053.

[54] *Ibidem*, § 13, Ak. IV 285, Pl. II 054 (Ce qui est souligné l'est par nous).

[55] *Ibidem*, *Remarque I*, Ak. IV 287, Pl. II 056.

[56] *Dissertation*, § 12, Ak. II 397-398, Pl. I 645.

[57] *Ibidem*, Section III, § 15C, Ak. II 403, Pl. I 653 et 654.

La géométrie est donc unique dans le rapport à l'évidence, se détachant non seulement des sciences empiriques, mais de toute autre science pure, y compris ses compagnes mathématiques à qui elle sert de modèle et de médiateur dans le rapport à l'intuition : « C'est pourquoi l'espace est appliqué à titre d'image, au concept du temps lui-même ; on représente alors le temps par une ligne, et ses limites (les moments) par des points »[58]. On note le parallélisme rigoureux entre *principes qui tombent sous le regard de l'esprit* et *propositions... placées sous nos yeux*. Est-ce à dire qu'en géométrie, l'esprit voit les figures, ou bien, ce qui revient au même, les yeux voient les concepts ? Il faudrait que les *principes indubitables et discursifs* et les *principes qui tombent sous le regard de l'esprit* ne fassent qu'un. Or le texte latin parle bien, non de deux catégories de principes, mais d'une seule[59].

Que le regard des yeux et celui de l'esprit s'y identifient jusqu'à se confondre, et à faire même choir la distinction de l'intuitif et du discursif, tel est le privilège que la géométrie offre à l'envie des autres sciences, parce qu'elle-même le réalise. Ce qui signifierait alors que cette identification ultime serait l'idéal d'une connaissance achevée, ayant explicité et identifié la totalité des caractères constitutifs des choses. Si l'on est déiste, on dira : une connaissance finalement équivalente au dessein créateur de l'origine. Se pourrait-il que la géométrie, chez KANT, ait elle-même un tel modèle ?

Les textes cités de la *Dissertation* sont précédés de deux exemples de non congruence : les triangles sphériques, les mains droite et gauche. Historiquement, c'est ce dernier qui est premier, et il a à peine deux ans. Le voici sous sa forme originale, dans ses conclusions : « Il est déjà évident, à partir de l'exemple commun des deux mains, que la figure d'un corps peut être tout à fait semblable à la figure d'un autre, et la grandeur de leurs dimensions tout à fait égale, et qu'il subsiste cependant une différence interne, à savoir qu'il est impossible que la superficie qui enferme l'une puisse enfermer la seconde ». Et KANT tire de là sa conversion newtonienne momentanée à l'espace absolu : « De tout cela, il est clair (...) que dans la structure des corps on peut trouver des différences et même de vraies différences qui se rapportent uniquement à un espace absolu et originaire, car c'est lui seul qui rend possible le rapport des choses corporelles, puisque l'espace absolu est non pas l'objet d'une sensation extérieure, mais un concept fondamental qui avant tout, en conditionne la possibilité, nous ne pouvons apercevoir ce qui, dans la forme d'un corps, a trait seulement à son rapport à l'espace pur que par son opposition symétrique aux autres corps (...) C'est pourquoi un lecteur réfléchi prendra le concept de l'espace tel que le pense le géomètre »[60]. Mais de cet espace différenciant originairement les corps symétriques, quelle est l'origine? « Si on se représente que la première créature soit une main d'un homme, il est nécessaire qu'elle soit gauche ou droite, et, pour créer la première, l'opération de la cause créatrice était nécessairement autre que celle par laquelle sa réplique pouvait être faite »[61].Dieu, au moment de la création, a différencié les corps symétriques. Puisque ceux-ci ont même concept, il a fallu que Dieu ne se contente pas de les penser, mais se les expose, se les esquisse, se les projette en quelque sorte différentiellement.

Or ce Dieu existe dans la pensée kantienne, l'espace originaire de présentation des choses se nommant *schema intellectus divini* dans les textes latins, *Entwurf* ou *Projekt* dans

---

[58] *Ibidem*, Section III Corollaire, Ak. II 405, Pl. I 657.

[59] « *Hinc Geometria principiis utitur non indubitatis solum ac discursivis, sed sub obtutum mentis cadentibus* ». Sur ce point capital, la traduction ALQUIE est gravement approximative.

[60] *Du premier fondement* ... op. cit. Ak. II 382 et 383, édit. cit. pp. 97 et 98.

[61] *Ibidem*.

la cosmologie de 1755 qui deviendra celle de Laplace-Kant. Mais ce Dieu-là, ou le modèle qu'il représente, est-il encore actif dans la *Dissertation* où nous avons examiné la structure de l'évidence géométrique ? Tout à fait, puisque le *schema*, après une éclipse de quinze années, reparaît pour nommer l'espace et le temps, ces intuitions originaires qui sont l'objet des mathématiques, lesquelles ont leur propre modèle dans la géométrie.

Qu'est-ce que le *schema* divin de 1755 ? « De ce que Dieu a simplement établi l'existence des choses, il ne découle pas qu'il ait aussi établi entre elles des rapports mutuels, à moins que le même *schema* de l'entendement divin qui donne l'existence, en concevant les choses comme corrélatives, n'ait établi les rapports des choses entre elles ; il est alors bien évident que les relations universelles de toutes les choses ne peuvent être dues qu'à la conception de cette idée divine »[62]. Le *schema* est ici répondant figuratif de l'entendement, projetant en plan d'ensemble les identités et relations substantielles issues des idées de Dieu. KANT précise : « le *schema* de l'entendement divin, origine des existences, est un acte permanent (on l'appelle conservation) dans lequel il n'y aurait nul rapport ni lien mutuel, si ces substances y avaient été conçues par Dieu de façon isolée et sans rapport entre leurs déterminations. Mais si elles sont conçues dans leur relation par l'intelligence divine, alors, conformément à cette idée, s'établissent ensuite dans le cours de leur existence des rapports mutuels entre les déterminations »[63] Le *schema*, espace configuratif des concepts, n'est pas simple plan, mais acte de maintien, temps originaire déroulé par anticipation dans son effectivité. Enfin, « comme le rapport mutuel des substances requiert un plan (*delineatio*) conçu, relativement à lui, dans une représentation efficace de l'entendement, et comme cette représentation est tout à fait arbitraire pour Dieu, qui peut fort bien, selon son bon plaisir, l'admettre ou la rejeter, il s'ensuit que des substances peuvent exister qui ont pour loi de n'être en aucun lieu, et d'être absolument sans aucune relation, par rapport aux choses de notre univers »[64]. Le *schema* prend l'allure d'un tracé, témoignant que Dieu a voulu pour nous un univers spatialisé d'une certaine façon : le *schema* est spatialité originaire, envoyant dans le monde cet espace exact que le physicien reconnaît, et que le chanceux géomètre terrien pense et voit en même temps, réalisant ainsi l'idéal de toute connaissance : refaire à rebours le geste même de la création.

Conclusion : Qu'est-ce que connaître ?

Nous voici à la fin de notre parcours, et les toutes dernières considérations sont des passages à la limite. Pour le KANT critique, le géomètre ou le physicien regardant le monde à travers l'espace ne verra pas la nature originelle de choses, puisque l'accès à la chose en soi est barré ; et pas davantage Dieu le regardant dans les yeux, puisque Dieu n'a de sens que comme idée, idéal de la raison pure ou postulat de la raison pratique.

Pourtant, le modèle que l'on vient de décrire de la connaissance, comme coïncidence de l'intuitif et du conceptuel « telle qu'à l'origine », ne sera jamais désinvesti par KANT, chez qui il figure toujours comme horizon, même hors de notre portée ; et l'hommage au géomètre accompagnera toujours la mise en exergue d'une connaissance sur la limite extrême de la finitude. Mais cette constance elle-même fait problème, dans la mesure où le géomètre, après les années 1768, n'a plus de représentant assigné dans l'histoire

---

62 KANT : *Nouvelle explication des premiers principes de la connaissance métaphysique* (1755), explication de la proposition XIII, Ak. I 413, Pl. I 156.

63 Ibidem, *Éclaircissement*, Ak. I 413-414, Pl. I 158-159.

64 Ibidem, *Application*, Ak I. 414, Pl. I 159.

de la pensée. En fait, *le géomètre, pour KANT, ce n'est personne en propre* : cela aura été, en 1747, DESCARTES contre LEIBNIZ ; ce sera, plus tard, Newton contre les deux autres cette fois réunis ; ce sera enfin, en 1770 " les anglais ", sans autre précision. Le géomètre, c'est une fonction ou une figure : c'est l'**autre** du métaphysicien délirant par pure raison, c'est celui dont les objets de pensée ont un ancrage réel indubitable, ce dont témoigne précisément l'intuition au sens d'ouverture originelle à un monde. Mais cela ne suffit pas : il lui faut une puissance de conceptualisation à hauteur de son intuition[65]. Le vrai géomètre, c'est donc Dieu, à condition qu'il existe, et en sachant que l'idée de la connaissance qu'il possèderait est elle-même une pensée-limite, corrélée non pas à une réceptivité ou même à une intellection, mais à une création.

Il serait possible de laisser Kant à lui-même, et sa pensée à l'histoire, si un soupçon ne nous saisissait sur la permanence, dans la visée de la connaissance, du modèle qu'il a articulé à la fin du XVIII^e^ . Certes les géomètres modernes, en quelque sorte, ont trahi, en renonçant à l'intuition au profit du concept, à l'évidence intuitive au profit de la cohérence axiomatique ! Chez qui donc le fantasme que portait le géomètre vu par KANT est-il le plus prégnant ? Sans doute chez le physicien, ou en tout cas, chez cette variété du physicien qu'est le cosmologiste, hybride de la physique et de la philosophie : La signification de la science est de faire " pénétrer notre regard dans l'esprit de Dieu ", écrit un cosmologiste anglais de ce siècle[66]. Et Stephen HAWKING, qui se flatte d'occuper la chaire qui fut celle de Newton, écrit, à propos de l'origine de l'univers : « Si nous trouvons la réponse à cette question, ce sera le triomphe ultime de la raison humaine - à ce moment, nous connaîtrons la pensée de Dieu »[67].

Enonçant cela, nous cherchons à dire une seule chose : peut-être la conception de la connaissance en œuvre dans des sciences définitivement laïcisées est-elle de nature secrètement « cosmothéorique », au sens où nous écrivions plus haut que *le regard des yeux et celui de l'esprit s'y identifient jusqu'à se confondre, et à faire même choir la distinction de l'intuitif et du discursif.* Avoué et parfois même éclatant dans la cosmologie, le fantasme cosmothéorique, dont la figure kantienne du géomètre a constitué la représentation la plus épurée, structure sans toujours souterrainement l'entreprise de connaissance.

Cette hypothèse, que des philosophes ont déjà travaillée à leur façon et avec leurs concepts, mériterait sans doute, entre eux et les mathématiciens, un chantier commun de recherche épistémologique.

---

[65] Dans l'ordre humain, les vraies géomètres auraient pu être ce genre que toute une tradition culturelle dote d'une « intuitivité » radicale, à savoir les femmes. Mais hélas, selon KANT, elles ne satisfont justement pas à la deuxième réquisition : une intellectualité à hauteur de leur pouvoir d'intuition : « La belle intelligence choisit comme objet tout ce qui touche de près le sentiment sous la forme la plus fine, et laisse les spéculations, ou les connaissances abstraites, qui sont utiles, mais arides, à l'intelligence appliquée, solide et profonde. Les femmes, dans ces conditions, n'apprendront pas la géométrie ». (*Observations sur le sentiment du beau et du sublime* (1764), Section III, Ak II 230, Pl. I 478). Sur la misogynie intellectuelle kantienne, cf. notre étude, parue dans les *Cahiers philosophiques de Strasbourg*, tome 9, mars-avril 2000, pp. 65 à 93 : Raymond BENEVENT : *Kant, le sexe et le secret.*

[66] E.A. MILNE, cité par : Jacques MERLEAU-PONTY, *Cosmologie du XX^e^ siècle*, Paris Gallimard 1965, p. 171.

[67] Stephen HAWKING: *Une brève histoire du temps*, traduction française Paris Flammarion 1989, p. 213. Cette phrase est le dernier mot du livre.

ARTS ET MATHÉMATIQUES

Maubeuge les 20, 21 et 22 septembre 2000
Regards sur le colloque au travers de l'enseignement en classes de collège
par Richard DENNER
Collège La Providence Strasbourg, annexe de Vendenheim

« Le savoir ne peut pas se passer de la beauté. Je cherche une science belle. »
« Viens, le dernier des enfants des hommes à pouvoir entendre et voir, viens sentir et toucher, tu apprendras bien assez tôt la science, assuré que tu l'apprendras. »
Michel SERRES, *Les cinq sens*, pp 133 – 134

Ville fortifiée par Vauban, Maubeuge occupe une place idéale en raison de son histoire et sa topographie pour devenir d'ici quelques années la cité des géométries. Elle a accueilli, en septembre dernier, un colloque sur le thème : Arts et Mathématiques.

Laissons à Claude Paul Bruter* (professeur à l'Université Paris 12 et initiateur du projet ARPAM**) le soin de présenter les objectifs du Colloque(1):

« L'objectif central du Colloque est de nature pédagogique. De manière subtile, il voudrait concerner la formation de l'esprit. De façon plus apparente, il tourne autour de la transmission et de l'acquisition des connaissances à travers des représentations visuelles, qu'elles soient statiques comme la peinture, la sculpture ou l'architecture ou bien plus dynamiques, comme les animations audio-visuelles, la qualité de ces représentations étant soutenue par les ressources de l'art musical et de l'art littéraire. »

Dans les contextes actuels, la question « Comment les Arts peuvent-ils venir en aide à l'enseignement des Mathématiques ? » était au cœur du débat.

Permettre à chacun de se forger sa propre idée en faisant la synthèse des faits qui m'ont le plus marqués en tant que professeur de collège tel est le but de cet article qui contient un nombre important de liens Internet.

La recherche d'approches pédagogiques nouvelles qui faciliteraient l'apprentissage et l'assimilation en constitue la toile de fond.

1. Regard sur le colloque au travers de l'enseignement en classes de collège.

De tout temps, la réalisation de belles figures a fasciné les géomètres. Les dessins que l'on découvre dans les cavernes préhistoriques(2) continuent d'exercer un attrait mystérieux sur l'homme contemporain qui dispose des ordinateurs (3) les plus performants pour visualiser les objets de ses études. Pourtant, au moment où l'on détient les moyens technologiques les plus avancés, les conditions d'enseignement deviennent plus difficiles.

Au niveau du collège, les professeurs sont amenés à accueillir des élèves dont les profils sont de plus en plus variés. Il s'agit non seulement de transmettre des connaissances mais surtout, de développer des compétences et des attitudes qui permettent l'apprentissage.

La géométrie offre une approche intéressante des mathématiques [1] : de part les constructions qu'elle permet de faire, elle suscite l'attrait et provoque le questionnement.

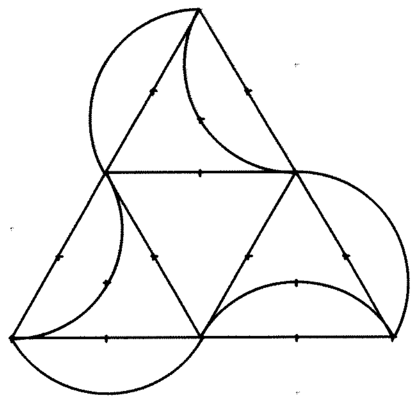
Les jeunes élèves le remarquent bien quand ils commencent à faire leurs premiers tracés avec la règle et l'équerre. La construction de paraboles, d'ellipses voire d'hyperboles comme enveloppes de leurs tangentes est à la portée d'un collégien. En traçant des traits droits, ils ont la surprise de voir apparaître des courbes connues depuis l'antiquité grecque.

En agissant avec leurs mains, les élèves peuvent se confronter avec les difficultés de la figure qu'ils sont en train de dessiner ; les questions surgissent naturellement, la matière résiste. Quand ils aboutissent, ils éprouvent un réel plaisir et peuvent dévoiler leur travail aux regards des autres. Cette démarche ne ressemble-t-elle pas à celle de l'artiste ? Pour vous en convaincre, découvrez les magnifiques sculptures symboliques John Robinson(4) et toute la beauté qu'elles dégagent.

Un autre domaine qui fascine les enfants est celui de la construction de polyèdres ; quand pour la première fois ils fabriquent un solide en partant de son patron, c'est toujours avec étonnement qu'ils le voient prendre forme entre leurs doigts. Les adultes également sont séduits par la vue des polyèdres. George W.Hart(5), sculpteur américain en a fait sa passion, son site Internet est d'une très grande richesse. On y découvre de nouveaux polyèdres ainsi que de multiples façons, parfois inattendues, de les assembler.

Il y a quelques années, les bracelets brésiliens étaient à la mode. En réalité, l'usage des nœuds et des cordages remonte à la préhistoire. Comme l'a montré Ronnie Brown(6), il est possible de les utiliser dans l'enseignement en faisant l'analogie entre la théorie des nœuds et l'algèbre.

Les bulles de savons(7) cachent également plus de mathématiques qu'on pourrait le penser. Isolées, elles sont des sphères parfaites. Quand elles s'assemblent par deux, trois ou plusieurs elles révèlent le monde des surfaces minimales. Dans sa vidéo « Touching Soap Films (8)», Konrad Polthier(9) nous invite à les découvrir. En 1760, Lagrange posa le premier le problème : étant donné un bord de forme quelconque, existe-il une surface d'aire minimale s'appuyant sur ce bord ? Une boucle quelconque en fil de fer plongée dans de l'eau savonneuse, fera immédiatement apparaître la solution. Une description de ce phénomène est donnée par Nathaniel Friedman(10) qui montre, à la manière de Spivak dans le volume IV de son traité de géométrie différentielle, comment on peut ainsi générer un ruban de Möbius.



L'architecture, avec la construction de toitures qui soient les plus légères possibles, en est un domaine d'application privilégié. Un exemple typique est la construction du stade olympique de Munich.

La visualisation des surfaces et des solides est rendue très conviviale à l'aide du logiciel JavaView(11) mis au point à l'Université Technique de Berlin, il peut être téléchargé par Internet. Il est également possible de consulter et de soumettre des modèles sur le site Electronic Geometry Models(12).

Le thème des pavages n'est pas nouveau dans les classes de collège. En étalant le travail sur une durée suffisamment longue, il est possible que les élèves conçoivent leur propre chef d'œuvre en utilisant par exemple la technique de l'enveloppe [2]. Mike Field(13) utilise des ordinateurs pour créer des pavages. Il révèle des motifs fascinants qui provoquent l'admiration et encouragent l'observateur à développer ses propres capacités en recherchant des idées nouvelles.

Une autre source d'inspiration est l'art islamique(14). En pénétrant avec Antonio F. Costa(15) dans les murs de l'Alhambra de Grenade(16)on y découvre mille merveilles, notamment les pavages(17) du plan qui sont autant de chefs d'œuvre de finesse et d'ingéniosité. J'ai retenu en particulier un exemple qui me semble réalisable par des élèves de cinquième. Les premières réalisations furent encourageantes. On reconnaîtra aisément la construction du motif de base ci-contre à partir des quatre triangles équilatéraux.

La piste suivie par Maria Dedo(18) est très intéressante car elle met facilement en contact avec la théorie des groupes. Elle utilise des miroirs pour visualiser des pavages et des polyèdres. Le motif de base, par réflexion dans trois miroirs, remplit tout le plan ou permet de visualiser un polyèdre dans l'espace comme on a pu le voir lors de la récente exposition « Math.u-vu ? »(19) organisée par l'IREM de Strasbourg.

Dans sa vidéo « The Optiverse » John Sullivan(20) a présenté sa dernière version du retournement de la sphère(21).

De magnifiques images qui suscitent l'imagination ! La sphère se déforme sans se déchirer, sa surface se traverse elle-même, sa face interne et sa face externe apparaissent en même temps à celui qui suit la déformation. Le tout passe par une étape centrale puis un chemin semblable conduit à la sphère retournée.

Quelle belle invitation à dépasser ses propres limites !

Les tableaux faits avec des fils tendus entre des clous sont bien connus ; leur attrait provient des courbes dont l'arrangement permet de produire les motifs les plus variés.

Les mathématiciens utilisent des méthodes analogues pour engendrer des surfaces. Les surfaces réglées en sont un exemple typique, elles sont générées par des droites. On peut les matérialiser en assemblant des segments métalliques comme le fait Philippe Charbonneau(22) pour construire des surfaces réglées du troisième degré dont l'aspect esthétique retient le regard et fascine. Il en est de même des tracés pendulaires obtenus par l'artiste et qui se situent dans le sillage des *entrelacs* [3] dont l'origine remonte à la préhistoire.

Une autre méthode permettant de visualiser les surfaces réglées consiste à tendre du fil à coudre entre deux plaques parallèles comme l'a expliqué François Apéry(23) au cours de son intervention. Il utilise également des ellipses en fil de fer pour visualiser des surfaces et en particulier son modèle central du retournement de la sphère. Il a soigneusement expliqué comment on fabriquait ce genre de modèles qui demandent précision et minutie.

Au cours d'un des ateliers, j'ai présenté mon diaporama sur le retournement du cuboctaèdre. Il illustre les principales étapes de la déformation et permet de comprendre les transformations qui se succèdent à l'intérieur des modèles construits en carton bicolore et en plastique transparent.

Prises au téléobjectif et en lumière artificielle, ces diapositives complètent mon article paru dans L'Ouvert n°94[24] et n°95[25]. L'ensemble des modèles était également exposé ; John Sullivan en a pris quelques photos[26] visibles sur une des ses pages Web.

Une des séquences de « The Optiverse » illustre la version du retournement du cuboctaèdre[27] réalisée par François Apéry en 1992. Elle se résume en une simple interpolation linéaire entre le modèle central et le modèle de départ. (F. Apéry, G. Francis, C. Hartman and G. Chappell, University of Illinois at Urbana-Champaign.)

Je terminerai ici cette première partie en citant les travaux du graveur sur cuivre Patrice Jeener[28] avec qui je me suis longtemps entretenu. Il a également été passionné par la bouteille de Klein et la surface de Boy dont il a fait de magnifiques lithographies. Sa triple bouteille unilatère est particulièrement remarquable. Certaines de ses images ont donné lieu à des animations sur ordinateur réalisées par Jean-François Colonna.

2. L'enseignement des mathématiques a-t-il besoin de l'apport de l'art ?

Les brochures de l'APMEP[29] font depuis longtemps une large part à l'activité de l'élève. On pourrait penser au premier abord que ce côté « artistique » soit inutile voire superflu. Comme le souligne Xah Lee[30] l'*admiration* d'une belle image fractale n'apprend rien sur les mathématiques sous-jacentes ! En parcourant le site qu'il a indiqué, on découvrira de multiples aspects de l'activité mathématique. La recherche de problèmes en fait leur essence même !

Dans une brochure éditée par l'IREM de Reims en 1986 [4], Michèle et André Arsène recherchent des applications de l'œuvre de Jean Piaget à l'enseignement au collège. Je n'en citerai que quelques extraits dus à Piaget lui-même :

« L'enfant retient ce qu'il a compris et non pas ce qu'il a vu, et ce n'est pas si naturel qu'on pourrait le penser. » p 92

« L'action propre donne de meilleurs résultats que la perception et l'apprentissage dans l'ordre action perception réussit mieux que dans l'ordre perception action. » p 92

« … la représentation ne remplace vraiment l'action qu'après avoir été suffisamment informée par l'action elle-même, et l'on ne saurait ainsi, sans une coupure artificielle, la détacher de son contexte actif, pas plus que l'on ne peut dissocier une perception de son contexte sensori-moteur. » p.61

« Il n'y a de progrès pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait ». Alain. p 96

« En un mot, dès qu'il s'agit de la parole ou d'enseignement verbal, on part du postulat implicite que cette transmission éducative fournit à l'enfant les instruments comme tels de l'assimilation, en même temps que les connaissances à assimiler, en oubliant que de tels instruments ne peuvent s'acquérir que par une activité interne et que toute assimilation est une restructuration ou une réinvention. » p 91

« C'est précisément parce que ces connaissances sont tirées des actions et non pas des objets comme tels qu'elles peuvent dans la suite être traduites en opérations symboliques et en langage. » p 73

Parlant de l'apprentissage, les auteurs notent que : « toute la difficulté est de trouver des activités qui permettront aux élèves de mettre en place leurs propres structures logiques, petit à petit, dès la classe de 6e, en les faisant agir sur des objets géométriques par exemple, mais surtout sans vouloir formaliser trop vite ». p 36

Il me semble que ces quelques phrases peuvent servir de repères dans la recherche d'améliorations des pratiques pédagogiques. Quel peut alors être le rôle des arts ?

C'est la multiplicité des profils des élèves qui peut amener à diversifier les modes d'approches. De plus en plus on rencontre des jeunes qui traversent des moments difficiles, les situations qu'ils vivent parfois ne favorisent pas leur parcours scolaire et souvent les empêchent de fixer leur attention. Comment prendre en compte cette instabilité ? Une simple activité intellectuelle peut-elle la contrebalancer ? Les mathématiques peuvent-elles leur laisser une impression qui ne soit pas forcément synonyme d'échec ?

Une des critiques formulées par David Cohen dans [5] à l'encontre de Piaget est de négliger l'aspect affectif et l'influence de la société sur l'évolution de l'enfant. Or actuellement, les comportements des jeunes semblent dire qu'ils ne sont pas négligeables.

Les images que l'on a pu voir au colloque, issues de l'imagination et du travail des mathématiciens mais également fabriquées des mains des artistes, exercent un pouvoir d'attraction sur l'observateur. C'est comme si soudain les mathématiques elles-mêmes devenaient tangibles, on peut d'un coup d'œil appréhender ce qui était dans l'imaginaire. L'objet mathématique devient objet réel, rempli de toute l'information que l'artiste y a déposée. Enrichi par tout le temps accumulé, il peut s'inscrire dans la durée.

Avec Manuel Arala Chaves, professeur à Porto et membre du comité organisateur du colloque, découvrons le site « atractor »(31) de l'Université de Lisbonne. On y trouvera en particulier une très belle collection de polyèdres ainsi que des animations sur le ruban de Möbius. À noter également une introduction aux représentations par des modèles réels des surfaces mathématiques complétée par une étude de leur orientation.

Rendre les mathématiques interactives est un des objectifs de l'association qui gère le site. La réalisation d'une exposition itinérante est à l'étude dans le cadre d'un projet européen. Des liens vers d'autres sites participant au projet ainsi que vers des musées scientifiques à travers le monde s'y trouvent.

Avec les possibilités des multimédias, la tentation de passer d'un sujet à un autre sans approfondissement représente un écueil certain ; cependant, ils ouvrent de multiples horizons et permettent d'aller à la rencontre des artistes et des chercheurs en faisant connaître leurs travaux.

C'est dans cette ouverture nouvelle que l'on peut mieux situer le débat de l'influence de l'art sur l'enseignement des mathématiques.

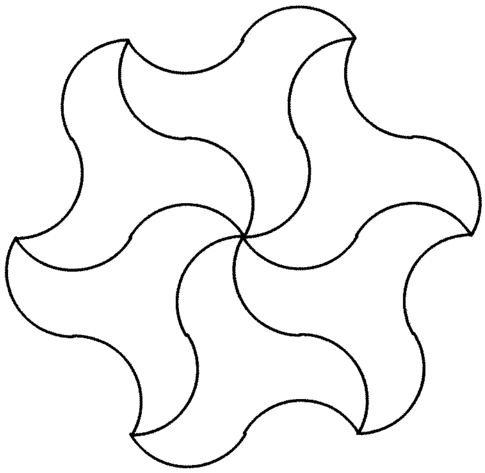
La réalisation d'une œuvre d'art mobilise tous les talents de l'artiste adulte, n'en pourrait-il pas être de même pour nos élèves ? Pour aboutir, de nombreux problèmes doivent être résolus et ce n'est qu'avec le temps et de très nombreuses approches successives que l'on arrive au bout du chemin. En leur proposant une « œuvre » à leur portée, ils pourraient y exprimer de nombreuses potentialités et éprouver la joie que procure sa réalisation tout en faisant fonctionner les mathématiques sous-jacentes.

En somme, les arts ne pourraient-ils pas devenir facteur déclencheur de l'apprentissage en suscitant l'activité réelle de l'élève au sens où l'a décrite Piaget ?

Quelques approches en classes de collège

Depuis de nombreuses années, depuis ma rencontre avec Bernard Morin(33), je fais réaliser par mes élèves, parallèlement aux cours habituels, des dessins géométriques qui illustrent telle ou telle propriété. Elles sont en grandes parties tirées des tomes 1 à 4 de l'ouvrage « La géométrie … pour le plaisir » de Lysiane et Elyse Denière [6]. L'aspect esthétique de la géométrie peut se révéler être source de motivation : des élèves en difficulté s'impliquent dans leurs productions.

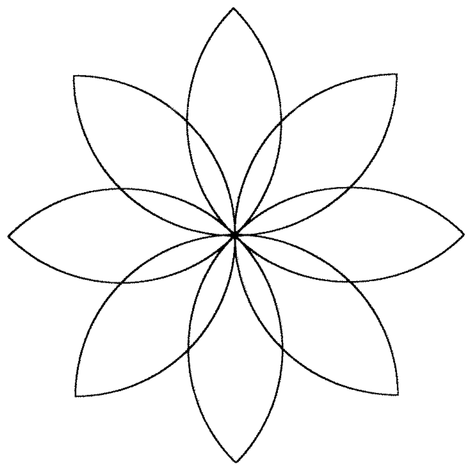
ASSEMBLAGE DE SIX MOTIFS ÉLÉMENTAIRES POUR UN MODÈLE VISIBLE[32] À L'ALHAMBRA



Repris par mes collègues professeurs de mathématiques de la Providence-Nord et grâce aux conseils des professeurs d'arts plastiques, ces travaux donnent chaque année de belles réalisations.

Certains élèves montrent très rapidement de réelles capacités. Pour la plupart, les progrès viennent avec le temps. L'intérêt de ces élèves grandit d'années en années. C'est avec un réel plaisir qu'ils demandent à faire de nouveaux dessins.

Le pouvoir d'attraction des figures est ressenti par les enfants, naturellement ils dessinent des rosaces. Une attitude de recherche peut être provoquée par la découverte d'une construction qui ne leur est pas familière.



C'est le cas de la rosace ci-contre, extraite du bulletin APMEP n° 371[7], elle a eu un certain succès dans une classe de 6ème malgré la grande hétérogénéité des élèves alors que d'autres essais préliminaires furent moins bien réussis. Bien que turbulents par ailleurs, certains élèves ont montré une rapidité et une qualité d'exécution remarquable. Il a ainsi été possible de mettre en place un vocabulaire de géométrie élémentaire ainsi que, après plusieurs semaines, la rédaction du programme de la construction.

Les tracés de courbes point par point et par tangentes permettent également de belles réalisations.

Au cours de l'année scolaire précédente j'avais retenu, en classe de 6ème, le thème des courbes mathématiques. Inspiré des travaux de l'Irem de Strasbourg [8] et de la brochure de présentation des nouveaux programmes [9], ce travail s'est révélé fructueux.

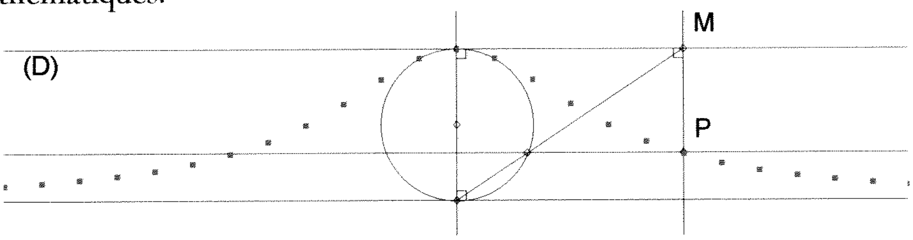
Il montre qu'avec le simple matériel de géométrie habituel, il est possible d'amener de très jeunes élèves à exécuter des tracés très précis. Ils se familiarisent ainsi avec des courbes dont l'étude se prolonge jusqu'à l'université.

Les exemples sont classiques comme la cardioïde, l'astroïde et la rosace à quatre feuilles, l'ovale, l'ellipse, la parabole, mais aussi la cissoïde, la strophoïde droite, la cubique d'Agnesi [10] et la cubique anguinea voire la trisectrice de Mac-Laurin ou la spirale de Théodore de Cyrène [11].

Il me revient à l'esprit le cas d'un élève qui savait à peine manipuler l'équerre en début d'année et qui de semaines en semaines a fait de beaux progrès ; mais d'autres également qui ont très rapidement fait preuve d'excellentes qualités graphiques.

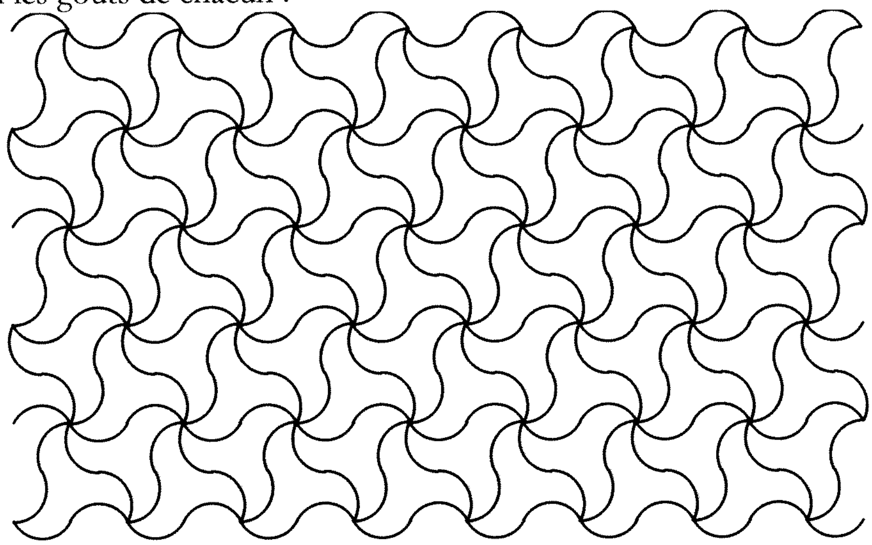
La répétition d'un même geste est ici un élément essentiel, il favorise l'acquisition des représentations internes des concepts.

On trouvera sur le site de Jean-Paul Quelen(34), professeur au lycée Jean Monnet de Strasbourg, des animations de quelques-unes de ces courbes ainsi que bien d'autres thèmes mathématiques.



CONSTRUCTION : QUAND LE POINT M DÉCRIT LA DROITE (D) LE POINT P DÉCRIT LA CUBIQUE D'AGNESI

Les pavages [12] offrent en 5ème des approches intéressantes. Après avoir expliqué le motif de base indiqué précédemment, il n'est pas très difficile de passer au plan entier à l'aide du pavage triangulaire pour obtenir le dessin ci-dessous qui peut être colorié selon les goûts de chacun :



PAVAGE(35) RÉALISÉ PAR LES ÉLÈVES DE 5^E

On prépare ainsi l'apprentissage des transformations géométriques ; l'utilisation du papier calque est très utile dans cette démarche car elle permet de mettre en évidence, en agissant, qu'une symétrie centrale correspond à une rotation d'un demi-tour. Certains élèves observent que si l'on enchaîne deux symétries centrales le motif est simplement décalé.

Il a été possible d'aller plus loin à partir d'un retour sur l'étude de la symétrie axiale vue en 6e. En prenant comme point de départ le pavage « des petits chinois d'Escher » ([2] ou [13]), il a été envisageable d'introduire la technique de l'enveloppe. Après un temps de maturation certain et une utilisation intensive du papier calque, les élèves ont pu créer leur propre pavage.

La démarche est semblable à celle suivie par des élèves de cinquième au cours d'un parcours diversifié[36] au collège Marcel Pagnol de Vernouillet dans l'académie d'Orléans Tours.

Certaines réalisations furent particulièrement remarquables, et témoignent de réels talents. Les conseils des professeurs d'arts plastiques constituent à ce niveau d'avancement une aide précieuse pour les élèves qui peuvent ainsi mettre en œuvre toutes les ressources de leur imagination. De jour en jour, mais plutôt de semaine en semaine on voit poindre des améliorations dans les tracés et la finition mais également dans la création des modèles dont certains sont devenus très élaborés.

Par la suite, en 4e et 3e l'étude des translations et l'introduction des vecteurs sera grandement facilitée.

Les règles de la perspective cavalière peuvent être expliquées dès les premières années du collège et initient les élèves aux représentations spatiales. Le fichier « Pratiquer la géométrie. » [14] de l'Irem de Lorraine est apprécié depuis de nombreuses années par les élèves et les professeurs de notre établissement. Il favorise le travail indépendant introduit agréablement la géométrie dans l'espace.

Un travail qui a été motivant en début de 5ème a consisté à fabriquer un prisme droit à base hexagonale en papier blanc puis de faire réaliser, en perspective cavalière, le dessin d'un assemblage de plusieurs de ces prismes droits ayant des hauteurs différentes.

Au cours du colloque Dick Termes[37] [15] a expliqué comment représenter sur une sphère la globalité de ce que voit un observateur placé en un lieu donné en regardant dans toutes les directions ; il utilise ainsi une perspective avec six points de fuite ! Un exemple typique est la représentation de l'intérieur de la Sainte-Chapelle à Paris ou celle de la basilique Saint-Pierre à Rome.

Au collège des dessins avec un ou deux points de fuite sont possibles et permettent un parallèle fructueux avec les cours d'arts plastiques. Pour aller plus loin, Nicole Vogel[38], professeur au LEGT de Haguenau, propose sur son site quelques belles balades mathématiques, des excursions animées dans l'espace et une initiation au dessin en perspective.

Au moment où cet article se termine, j'initie mes élèves aux représentations en perspective cavalière du cube en prenant comme point de départ l'ouvrage « Dessiner l'espace » de Michel Rousselet [16]. Il est ainsi possible d'introduire les règles de dessin à respecter et de préparer une utilisation future des logiciels de dessin. En prolongement, on pourra envisager de représenter quelques troncatures du cube ainsi que des polyèdres comme le tétraèdre régulier, l'octaèdre régulier ou le cuboctaèdre.

Ces quelques exemples, tirés de la pratique quotidienne sont autant de tentatives pour présenter la géométrie de façon attrayante à travers des activités qui visent la construction progressive des connaissances. Les aboutissements sont de « petits chefs-d'œuvre » exposables comme ceux de l'artiste adulte.

Conclusion

Le colloque ouvre de nombreuses voies, chacun pourra les parcourir à sa guise, y trouver maintes sources de curiosité, d'enrichissement et d'approfondissement. On peut sans doute y découvrir des voies d'exploration utiles à la mise en place des parcours diversifiés dans les collèges, et des sujets d'étude pour les travaux personnalisés encadrés (TPE)[39].

Une œuvre d'art, la résolution d'un problème, sont de longs cheminements, des aboutissements. Artistes et chercheurs sont des personnes entièrement engagées dans le courant qui les porte vers l'accomplissement de leur ouvrage. Ils font confiance en leur expérience propre et en l'évaluation interne du travail qu'ils sont en train de réaliser.

Faire en sorte que l'élève puisse mener à son terme une œuvre personnelle, si petite soit-elle, au contact d'un professeur me semble être un complément intéressant aux nouvelles technologies. Cette démarche qui permet le développement de la créativité personnelle tout en exigeant persévérance et ténacité, s'apparente à celle de l'artiste et du chercheur.

Comme l'a fait remarquer Claude Paul Bruter, l'œuvre achevée, exposée, crée une stabilité, un équilibre. L'œil de l'observateur revient se poser souvent sur elle pour en saisir les plus infimes détails. De même, la main du sculpteur, celle du géomètre, du mathématicien aveugle, perçoit les moindres variations de la courbure de la surface qu'elle effleure.

Des pyramides d'Égypte à la pyramide du Louvre(40), de l'art rupestre aux plus belles images fractales, Arts et Mathématiques marquent leur temps et sont les témoins de l'ingéniosité des hommes qui les ont fait naître. Puissent-ils être des exemples pour nos élèves en les incitant à développer le goût du beau et de la recherche(41).

Bibliographie :

[1] Bulletins n^{os}430 & 431 de l'APMEP.

[2] *Activités mathématiques en classe de quatrième-troisième*, tome II, brochure APMEP n°38, pp 79–115.

[3] *Théorie des nœuds et enluminures celtes*, Christian MERCAT. L'Ouvert n° 84. pp 1–22.

[4] *Jean Piaget et les mathématiques au* collège, Michèle et André ARSÈNE , IREM de Reims, Moulin de la Housse 51100 Reims.

[5] *Faut-il brûler Piaget ?* David COHEN. Éd. Retz, Paris.

[6] *La géométrie... pour le plaisir.* Tome 1 à 4. Éd. Kim, 26 rue Jules-Degroote 59240 Dunkerque.

[7] *Géométrie, une approche par le dessin géométrique* CM2–6^e. Yves DUCEL, Marie-Lise PELTIER. Bulletin APMEP n°371. pp 659–670.

[8] *Activités géométriques de la sixième à la terminale.* IREM de Strasbourg

[9] *Mathématiques en classe de Sixième*, La mise en œuvre des programmes de 9, Fascicule 2. Académie de Strasbourg.

[10] L'Ouvert n°96, pp 47– 50.

[11] *Les spirales*, André STOLL, L'Ouvert n°96 pp 1–13 et n°97 pp 1–15.

[12] *Le secret des pavages* Raoul RABA, Éd. du Plot.

[13] *Maths en scène*. Brochure APMEP n° 121.

[14] *Pratiquer la géométrie.* Classe de 6^e et classe de 5^e. Fichier de l'Irem de Lorraine. Éd. Belin.

[15] *New perspective système, seing the total picture, one through six point perspective*, Dick A.TERMES. (605) 642-4805, Route 2 Box 435 B, Spearfish, SD 57783, USA.

[16] *Dessiner l'espace ou comment employer Cabri-Géomètre dans l'espace*, Michel ROUSSELET. Éd. Archimède.

ARPAM : Association pour la Réalisation et la Gestion du Parc de Promenade et d'Activités Mathématiques.

Les figures de cet article sont faites avec le logiciel gratuit Déclic(42).

Adresses Internet :

*http://arpam.free.fr/bruter.html
**http://www.arpam.fr.st
(1)http://arpam.free.fr/colloques.html
(2)http://www.bradshawfoundation.com/
(3)http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/vgp/content/index.htm
(4)http://www.bangor.ac.uk/SculMath/image/main.htm
(5)http://www.georgehart.com/index.html
(6)http://www.bangor.ac.uk/SculMath/image/knots2.htm
(7)http://www.unice.fr/LEML/coursJDV/morpho3-2.htm
(8)http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/booklet/intro.html
(9)http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/video.html
(10)http://arpam.free.fr/friedman.html
(11) http://www.javaview.de/
(12)http://www.eg-models.de
(13)http://nothung.math.uh.edu/~mike/
(14)http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/UVLibre/9900/bin08/archi.htm
(15) http://www.maa.org/reviews/twovideos.html
(16)http://www.vivagranada.com/fr/alhambra/alhambraalta.htm
(17)http://weasel.cnrs.humboldt.edu/~spain/gran/index.htm
(18)http://arpam.free.fr/dedo.html
(19) http://science-ouverte.u-strasbg.fr/math2000/mathuvu.html
(20)http://new.math.uiuc.edu/optiverse
(21)http://www.math.uiuc.edu/~jms/Papers/isama/color/
(22) http://arpam.free.fr/charbonneau.html
(23) http://arpam.free.fr/apery.html
(24)http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IST99010.htm
(25)http://publimath.univ-lyon1.fr/biblio/IST99003.htm
(26)http://www.math.uiuc.edu/~jms/Photos/MathArt/Maubeuge/
(27)http://new.math.uiuc.edu/five
(28)http://arpam.free.fr/jeener.html
(29)http://mathpuzzle.com/
(30)http://www.apmep.asso.fr/
(31)http://www.fc.up.pt/atractor
(32)http://weasel.cnrs.humboldt.edu/~spain/gran/other/image1.gif
(33)http://www.math.uiuc.edu/~jms/Photos/MathArt/Maubeuge/dickson-morin/
(34)http://perso.wanadoo.fr/jpq/
(35)http://www.vivagranada.com/images/alhambrabath1.jpg
(36)http://etab.ac-orleans-tours.fr/clg-mpagnol-vernouillet/Les%20pavages.htm
(37)http://arpam.free.fr/termes.html
(38) http://perso.wanadoo.fr/nvogel/index.html
(39)http://www.eduscol.education.fr/tpe/default.htm
(40)http://www.louvre.fr/
(41)http://www.palais-decouverte.fr/
(42)http://home.nordnet.fr/~eostenne/declic.htm

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : LA PERTE DU SENS EST-ELLE SANS RISQUES ?

Gérard KUNTZ (IREM de Strasbourg)

De réduction de programme en réduction de programme, le chapitre « équations différentielles » de Terminale scientifique a été ramené à sa plus simple expression. En fait, le chapitre a disparu en tant que tel et les deux équations différentielles qui restent au programme sont mentionnées dans le chapitre « fonctions usuelles » ! Comme chacun sait, l'équation $y' = ay$ est un aspect de la fonction exponentielle et $y''+\omega^2 y = 0$ un reflet des fonctions circulaires !

Les livres scolaires ont emboîté le pas à cette joyeuse rigolade. Fractale[1] par exemple sort du chapeau l'équation différentielle $y''+ \omega^2 y = 0$ dans le paragraphe « dérivées successives ». L'élève de Terminale a droit à une phrase unique et définitive :

> *résoudre sur* R *l'équation différentielle* $y''+ \omega^2 y = 0$, *c'est déterminer toutes les fonctions* f, *deux fois dérivables sur* R *telles que, pour tout nombre* x *de* $\mathbb{R}$, $f''(x)+\omega^2 f(x) = 0$.

Aucune explication sur la raison d'être du problème : pourquoi traite-t-on une telle question ? D'où provient le problème ? À quoi sert cette résolution ? Pas un mot sur la radicale nouveauté qui consiste à prendre une fonction comme inconnue d'une équation.

Fractale considère l'équation différentielle $y' = ay$ en fin du chapitre consacré à l'exponentielle, après sa dérivée et ses primitives. Il ne manque pas d'humour : « Dans le chapitre 2, vous avez étudié l'équation différentielle $y''+\omega^2 y = 0$ » ! On est à la page 122, le chapitre 2 se trouve page 35. L'élève de Terminale S n'est pas vraiment frappé par l'unité de la question, éclatée en deux parties fort éloignées dans le livre, sans aucune justification et sans la moindre tentative de montrer l'intérêt, la nouveauté et la profondeur de la démarche. Pas vraiment contrariant et surtout préoccupé de réussite, l'élève de Terminale S conclut qu'il n'y a rien à comprendre et qu'il suffit (une fois encore) d'apprendre les solutions pour les « recracher » à l'examen. Il baille, mais il sait faire ! Et pourtant, il n'est pas bien difficile de donner à cette courte partie du programme l'éclairage qui lui donne sens et intérêt.

Expliquer l'origine et la nature du problème au moyen d'exemples connus des élèves

Les élèves de Terminale connaissent le principe fondamental de la dynamique. Ils ont fait de l'électricité. Voilà deux domaines qui génèrent naturellement de très nombreuses équations différentielles. Il faut savoir « perdre » deux heures (ou davantage) à traiter quelques problèmes introductifs qui vont montrer la nouveauté, l'unité et la puissance de la démarche.

Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation

Un point matériel est soumis à la seule pesanteur. Il part à l'instant O de l'origine du repère avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ faisant avec l'axe des abscisses un angle orienté α. Les élèves savent exprimer les vecteurs vitesse et accélération. En projetant l'équation

$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ sur les deux axes, ils obtiennent les relations suivantes :

[1] Éditions Bordas.

$x''(t) = 0$; $y''(t) = g$, avec des notations habituelles. **Ces relations sont d'un type totalement nouveau.** Les fonctions x(t) et y(t), coordonnées de M en fonction du temps sont inconnues (ce sont elles qu'ont aimerait déterminer). Mais leurs dérivées seconde obéissent aux relations que l'on vient d'écrire et qui permettent sans difficulté, avec les seules connaissances des élèves de Terminale (primitives) , de remonter aux fonctions elles-mêmes :

$$x'(t)=\text{constante}=V_0\cos(\alpha)\ ;\ y'(t)=gt+V_0\sin(\alpha) \qquad \text{et}$$

$$x(t)=V_0\cos(\alpha)\times t\ ;\ y(t)=\frac{1}{2}g\,t^2+V_0\sin(\alpha)\times t.$$

Pour calculer la valeur des constantes qui figurent dans les primitives, les conditions initiales (vitesse et position initiales) sont déterminantes : on fait comprendre à l'élève que, parmi tous les mouvements possibles, un seul correspond **aux conditions** réelles du problème, ce qui rejoint l'intuition qu'il en a. On peut alors achever l'exercice (de faible difficulté technique) en établissant que la trajectoire du point est parabolique. Il n'est pas interdit de faire remarquer que le même traitement s'applique au mouvement d'un électron dans un champ électrostatique.

Pour la première fois, l'élève rencontre des relations portant sur des dérivées de FONCTIONS INCONNUES. Ces relations expriment des **INVARIANTS MATHÉMATIQUES** du mouvement. Elles permettent de déterminer une famille de fonctions correspondant à ces invariants, puis par les conditions initiales, les fonctions (uniques) qui décrivent le mouvement.

On peut alors rechercher une description plus réaliste du problème, en introduisant dans une résistance de l'air, proportionnelle à la vitesse. Les relations précédentes deviennent :

$$x''(t)+\frac{k}{m}x'(t) = 0\ ;\quad y''(t)+\frac{k}{m}y'(t) = g \quad (\text{k réel positif}).$$

D'où en passant aux primitives et en tenant comte des conditions initiales :

$$x'(t)+\frac{k}{m}x(t) = V_0\cos(\alpha)\quad ;\quad y'(t)+\frac{k}{m}y(t) = \mathbf{gt} + V_0\sin(\alpha)$$

On obtient des relations entre des fonctions inconnues —x(t) et y(t)— et leurs dérivées premières. Ces relations expriment les invariants mathématiques du mouvement : une expression contenant des fonctions inconnues (et bien sûr variables), leurs dérivées premières (également variables) et diverses fonctions connues reste, au cours du temps, **CONSTAMMENT NULLE !**

Je me souviens de mon éblouissement, quand je découvris cela au cours de mes études : je venais de comprendre ce qu'est une équation différentielle. J'étais prêt à entrer dans les diverses techniques de résolution et à me servir du précieux outil pour faire apparaître des invariants dans le monde mouvant de la physique. Un grand merci à l'enseignant qui prit la peine de m'éclairer.

Les relations obtenues ci-dessus résistent au traitement par les seules primitives. Il faut de nouvelles méthodes pour les résoudre. **Cela justifie la brève introduction qui va suivre sur le sujet**. Et, cerise sur le gâteau, on pourra revenir ensuite à ces équations pour les résoudre entièrement (avec un léger complément sur les équations à second membre traité en TP) et pour mettre en évidence (grâce aux courbes paramétrées) la trajectoire asymptotique du point soumis à la résistance de l'air.

Oscillations électriques et mécaniques

Il reste à enfoncer le clou en puisant dans un autre chapitre de la physique pour montrer aux élèves que l'outil que l'on forge sera efficace dans les divers champs où on l'applique. L'oscillateur harmonique est un bel exemple.

Un circuit comporte un condensateur de capacité C, initialement chargé couplé à une bobine d'auto-inductance L et de résistance R. Le condensateur se décharge dans la bobine. Un courant d'intensité croissante circule dans le circuit et crée une force électromotrice d'auto-induction. Quand la charge du condensateur est nulle, un courant induit charge le condensateur en sens inverse qui se décharge à nouveau et ainsi de suite.

Soit q(t) la charge du condensateur à l'instant t. À chaque instant, la tension aux bornes A et B de la bobine est égale à la tension aux bornes du condensateur. Soit i(t) l'intensité du courant dans le circuit et e(t) la force électromotrice d'induction. On a les relations suivantes (que l'on trouve dans les ouvrages de Terminale):

$$i(t) = q'(t) \quad ; \quad V_B - V_A = \frac{q(t)}{C} \quad ; \quad V_B - V_A = R\, i(t) - e(t) \quad ; \quad e(t) = -L\, i'(t)$$

Donc, par substitution :

$$e(t) = -L\, q''(t) \quad ; \quad R\, i(t) - e(t) = R\, q'(t) + L\, q''(t)$$

Puis :

$$R\, q'(t) + L\, q''(t) = -\frac{q(t)}{C} \qquad \text{donc finalement} \quad : \ q''(t) + \frac{R}{L} q'(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

Dans le cas particulier où R est négligeable, on obtient une relation plus simple :

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0,$$

que le cours à venir permettra de débrouiller.

Il est particulièrement éclairant de comparer cette relation (entre des grandeurs électriques) avec celle obtenue en mécanique avec le pendule de torsion ou en faisant osciller une masse au bout d'un ressort (en s'écartant légèrement de la position d'équilibre).

La similitude des relations étonne les élèves les plus blasés !

Il ne reste plus alors qu'à donner un nom aux choses et à traiter explicitement les deux cas particuliers qui sont au programme.

L'introduction aux équations différentielles que je viens d'esquisser prend, dans cette question**, autant de temps que le cours lui-même** (c'est-à-dire pas grand chose). C'est pour moi un passage obligé pour **donner du sens à une question qui va connaître par la suite, des développements considérables, dans toutes les disciplines scientifiques.**

Ma critique ne porte pas sur le fait que le programme actuel ne retienne que deux cas particuliers d'équations différentielles. Après tout, il faut faire des choix. Mais elle stigmatise la perte de sens à laquelle conduit, par un laxisme intolérable, cette limitation. Ce chapitre, même réduit, n'est pas anodin. L'équation différentielle est un des outils majeurs de la science. **Le minimum d'estime dû aux élèves consiste à leur expliquer la nature radicalement nouvelle du problème et ses enjeux avant de leur donner des théorèmes et des formules « prêtes à l'emploi ».**

Nos collègues physiciens revendiquent de plus en plus ouvertement l'enseignement de larges parties des mathématiques dont ils ont besoin dans leur domaine. Nous leur avons déjà abandonné la mécanique. Il est clair que la façon actuelle de traiter en Terminale les équations différentielles plaide en leur faveur. Si nous renonçons à donner du sens aux notions que nous enseignons, d'autres le feront aussi bien que nous (aussi mal serait plus exact). Le risque n'est pas théorique, nous le verrons dans un instant.

Il faut résister coûte que coûte aux pressions de l'institution et des parents pour un enseignement immédiatement efficace, du strict point de vue de la réussite à l'examen. **Notre métier consiste d'abord et surtout à faire comprendre des démarches, des méthodes et des enjeux à nos élèves.** Si par fatigue ou par commodité, nous nous contentons de diffuser des recettes, nous ouvrons une voie royale aux industriels de l'enseignement qui savent très bien le faire (c'est la seule chose qu'ils savent faire avec les techniques informatiques actuelles) et l'évaluer (des QCM s'y prêtent fort bien). **Abandonner la quête du sens, c'est perdre notre raison d'être.**

D'inquiétantes perspectives qui exigent une réaction vigoureuse.

Quand on se tourne vers les projets de programme de Terminale S du GTD (en débat pour la rentrée 2002), on y lit le paragraphe suivant :

> « Certaines équations différentielles (notamment $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$) sont abordées dans le cours de physique, ***où la méthode d'Euler fera l'objet d'un travail consistant.*** Dans le cours de mathématiques, on introduira la notion d'équation différentielle (équation dont les solutions sont des fonctions) à partir d'exemples étudiés qualitativement, en s'appuyant notamment sur des champs de tangentes tracés par des logiciels. Les équations différentielles, traitées en complémentarité en mathématiques et en physique, éclaireront la cohérence naturelle entre ces deux disciplines. »

Voici un texte très étonnant. A-t-on vraiment besoin de la méthode d'Euler pour résoudre les équations différentielles $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$? Ne faudrait-il pas réserver cette méthode à des cas moins élémentaires, nécessitant effectivement un travail consistant ? Mais si le futur cours de physique utilise d'autres équations différentielles plus complexes, le traitement mathématique de ces équations différentielles ne relève-t-il plus des mathématiques ? L'enseignant de physique est-il plus qualifié que son collègue de mathématique pour expliquer « avec consistance » la méthode d'Euler ?

Il n'y a aucune raison que l'enseignement des mathématiques de la physique échappe aux enseignants de mathématiques. Il faut le faire savoir avec détermination.

Leur responsabilité est d'introduire, d'expliquer et de rendre opérationnel l'outil mathématique. Aux physiciens de traduire leurs problèmes en équations différentielles, puis d'interpréter en termes physiques les résultats obtenus par les diverses méthodes de résolution mises à leur disposition. Le mélange des genres n'est pas souhaitable.

Ceci posé (mais c'est un préalable fondamental) la collaboration entre les deux disciplines est indispensable : les équations différentielles seraient un merveilleux sujet de TPE.

Si l'on renonce au sens des choses, elles finissent par nous échapper. Toutes sortes de « techniciens » prétendent alors les prendre en charge. Le programme projeté invite au sursaut : il propose de traiter des exemples (même s'il ajoute bizarrement « qualitativement »); il suggère de s'appuyer sur le champ des tangentes tracées par ordinateur. Nous y ajoutons la méthode d'Euler, sans laquelle les tracés précédents sont incompréhensibles. On peut ainsi donner du sens à ce chapitre fort important. Cela prend, hélas du temps, ce temps d'année en année plus chichement mesuré. La réduction des horaires de Terminale, si elle est confirmée, conduira à sacrifier, une fois de plus, le sens au profit de techniques facilement évaluables. Et anéantira les bonnes intentions annoncées. Comme c'est le cas dans les programmes actuels.

DANS NOS CLASSES,... EN 6^e, CONSTRUCTION D'UN TRIACONTAÈDRE

Il y a près de 15 ans, j'ai été sollicité pour intégrer l'équipe de l'IREM de Strasbourg chargée de la rédaction de manuels scolaires pour le Collège (collection Istra pour ceux qui s'en souviennent...) Dans la répartition des tâches, ma passion de la géométrie a fait que je me suis retrouvé tout naturellement en charge du livre de 6^e, notamment du chapitre intitulé *Solides*. Je me suis donc investi dans la recherche d'exercices, que je souhaitais bien sûr des plus motivants. C'est ainsi que grâce à l'un de mes bons amis, chercheur et cristallographe à ses heures, je suis tombé sur un article de *Pour la Science*, concernant un quasi cristal qui avait alors donné bien des frayeurs aux cristallographes...

Cette « frayeur » vient de nous être partagée par Philippe Lombard lors de sa conférence aux journées APMEP de Gérardmer, que j'ai suivie avec un intérêt tout particulier, car tout en me ramenant 15 ans en arrière, elle m'apportait certaines explications sur l'origine de cette découverte (figure **I**)... qui avait pour nom *triacontaèdre* et qui était constituée de 30 losanges

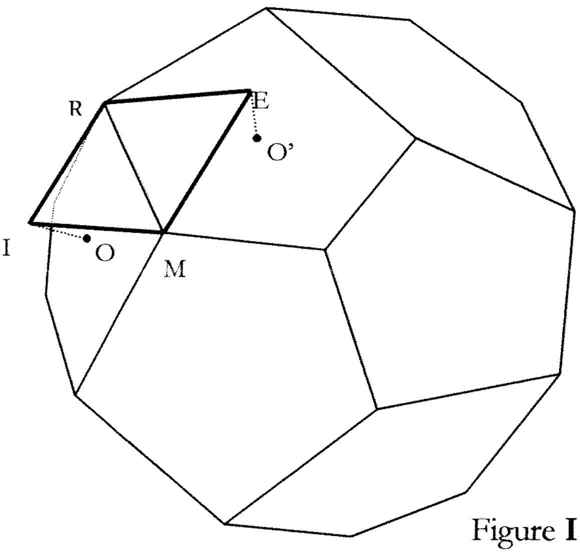


Figure **I**

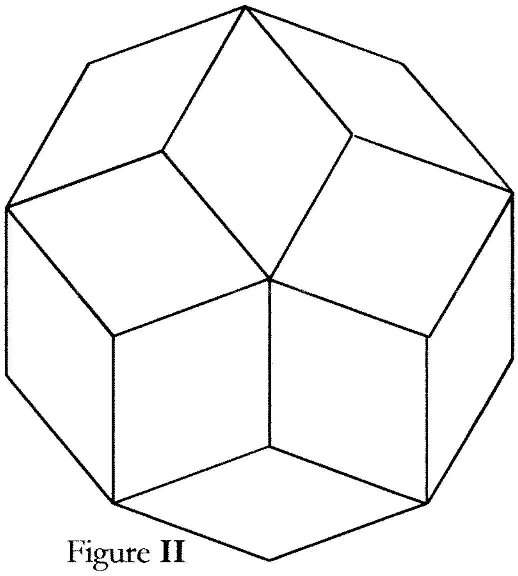


Figure **II**

parfaitement identiques (figure **II**)...

D'où la frayeur devant ce qui pouvait apparaître comme un cristal ayant une symétrie d'ordre 5, ce qui est interdit comme tout cristallographe le sait !

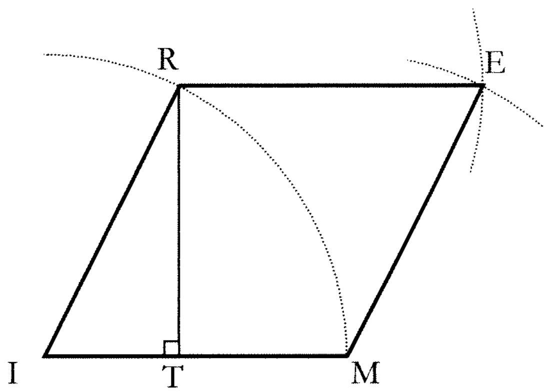
Pour ceux qui n'ont pas eu la chance d'écouter cette conférence, vous pourrez en savoir un peu plus dans les actes des Journées de Gérardmer (BV de l'APMEP n°428).

La [1]figure **I** devrait néanmoins vous permettre de comprendre assez facilement comment obtenir un triacontaèdre à partir d'un dodécaèdre… Fabuleux non !!!

Et maintenant, voici l'exercice que j'avais rédigé à l'époque (ex. n°32 page 220) en souhaitant vous donner l'envie de rouvrir ces « vieux » livres de l'IREM de Strasbourg où vous pourrez trouver une mine d'exercices !

N'étant pas cristallographe, je dois bien avouer que ce qui m'avait attiré en premier c'est la construction des losanges constituant ce *triacontaèdre*. En effet leur construction s'intégrait parfaitement dans l'esprit des programmes de 6e de l'époque et de ce que je recherchais, à savoir une construction originale qui ne soit pas *gratuite* or celle-ci débouchait sur une construction d'un solide récemment mis à jour ! Que demander de mieux !

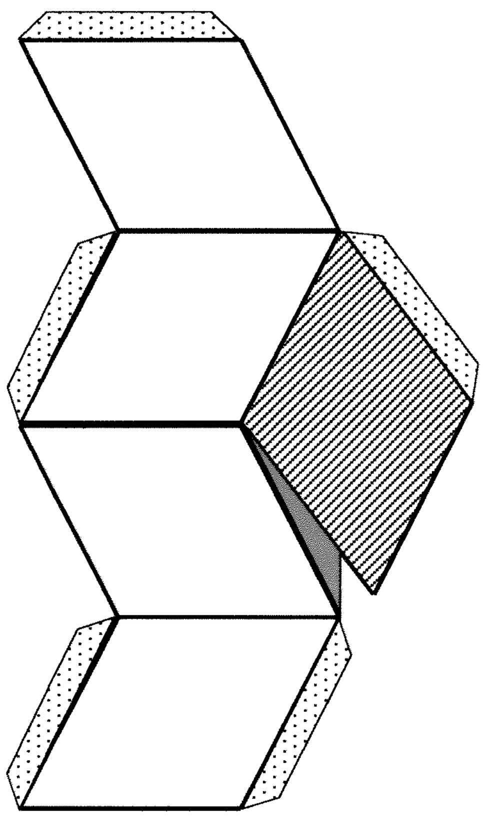
Voici donc cette construction :



1° Tracer un triangle TRI rectangle en T tel que la longueur du côté [RT] soit le double de celle du côté [IT].

2° Construire le losange MIRE tel que les points M, T, I soient alignés.

Bien entendu, les élèves ne disposaient pas de la figure...



Il restait maintenant à construire un tel triacontaèdre… J'ai alors cherché comment rendre cette construction la plus aisée possible pour mes élèves de 6e. C'est ainsi que j'ai imaginé puis opté pour la solution consistant à faire réaliser, par chaque élève, trois éléments de base constitués de cinq losanges identiques (construits selon le modèle décrit précédemment) comme celui représenté ci-contre.

On peut demander à chaque élève d'en réaliser un, ce qui est très formateur pour l'utilisation des instruments de dessin et le soin et la précision que l'on doit apporter aux figures en géométrie.

---

[1] Les points O et O′ sont les centres respectifs de deux pentagones réguliers du dodécaèdre ayant un côté commun (ici le côté [RM]) ; les segments IO et EO′ sont respectivement orthogonaux à ces pentagones tels que M, I, R et E soient coplanaires et O′E = OI)

On peut ensuite faire photocopier le modèle obtenu sur du carton léger au format A4 (2).

Dans un premier temps, après avoir soigneusement découpé chaque élément de base, les élèves doivent coller le losange hachuré sur la languette en grisé. Comme il en avait trois à monter, cela a permis de bien laisser sécher les premiers collés, ce qui est indispensable pour la suite des opérations...

Dans un deuxième temps, les élèves se sont associés en binôme pour assembler six éléments de base de façon à obtenir le triacontaèdre. Opération loin d'être évidente pour beaucoup, aussi bien pour les problèmes de collage que pour l'assemblage ! Mais le désir d'obtenir le solide demandé, *pour voir de quoi il a l'air vraiment*, a permis de surpasser ces problèmes et puis j'étais là pour les plus maladroits...

Finalement cette petite activité a donné satisfaction à plus d'un, à commencer par mon ami chercheur à qui j'ai offert le premier triacontaèdre monté par mes soins : lui aussi était impatient de *le voir* !

À vous de *jouer* maintenant avec patience et persévérance...

Et, comme je n'en doute pas un seul instant, certains d'entre-vous ont déjà entrevu des prolongements[3] à ce petit exercice... Qu'ils n'hésitent pas en nous en faire profiter. En particulier, une démonstration, montrant que la valeur de la tangente de l'angle $\widehat{RIM}$ est 2, serait la bienvenue !

[2] En partant d'un triangle rectangle TRI où TI = 3 cm, l'élément de base constitué de cinq losanges ainsi disposés remplit assez bien une feuille A4.

[3] Comme de *corser la chose* en imposant la longueur du côté du losange de base, par exemple RI = 8 cm... mais pas en 6e bien sûr !

J'AIME ALICE, DONC ALICE MÊME

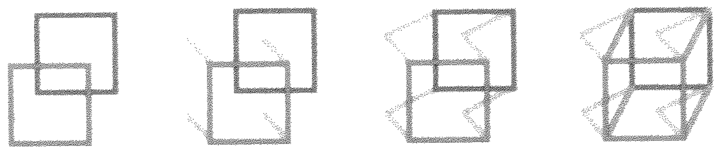
Propos sur l'hyperespace

par **Antoine WALTER**

Antoine WALTER est un artiste qui prend une grande part de son inspiration dans les mathématiques qu'il interprète à sa façon. Il a été luthier, ce qui a enrichi sa dextérité et sa sensibilité à l'âme des objets, notamment celle du violon. Il est également très influencé par LACAN et la psychanalyse en général.

Il a offert deux couvertures à la revue, ce numéro 103 et le précédent et nous livre en toute liberté dans son article, quelques clés sur sa façon de travailler en tant qu'artiste non mathématicien. Il s'agit donc d'une interprétation subjective des mathématiques et non d'un article mathématique.

Ma première rencontre visualisée avec l'hyperespace a été un dessin très simple : trois carrés reliés entre eux forment trois cubes.

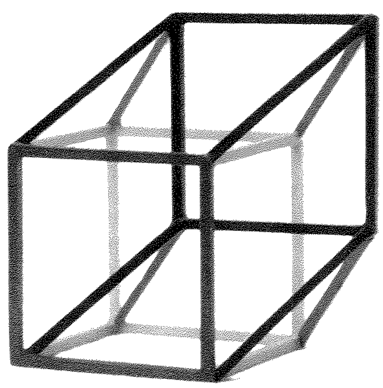


J'ai passé une dizaine d'années à tourner et retourner cette chose mystérieuse sans trop savoir comment la ranger dans l'ordre des polyèdres et polytopes. Je l'appelais le cube au cube K^3. J'y voyais plutôt une multiplication de 3 cubes entre eux qu'une addition qui aurait été 3 cubes juxtaposés. Je conjuguais ce dessin dans un petit livre intitulé « l'Histoire du carré », affublant chacun des 3 carrés d'une couleur primaire, la couleur secondaire correspondante formant la liaison.

J'appliquais toutes sortes de trinités à ces trois espaces topologiquement reliés : grâces mythologiques, Sainte Trinité religieuse, nœud borroméen lacanien RSI[1], etc.

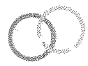
L'accueil de mes idées auprès des personnes que le rencontrais était très mitigé, souvent admiratif, étonné, dérouté.

En 2000, je rencontrais le professeur Nicolas Rivier de la faculté de Physique des Solides de Strasbourg, qui m'a beaucoup aidé à préciser mes notions de l'hyperespace. Grâce à lui, HMS Coxeter nous envoyait un mail disant de mon cube au cube qu'il s'agit d'un double prisme ou produit rectangulaire ou produit cartésien d'un carré et d'un triangle[2].



C'est un polytope bien sûr, mais non régulier, puisqu'il y a des faces triangulaires. Ces triangles témoignent du passage d'un cube à l'autre. Ils sont l'angle de rotation d'un cube à l'autre. On pourrait dire qu'ils sont l'angle temporel si le temps est pris comme quatrième dimension. En chaque sommet de K^3, tous les angles sont orthogonaux. Nous sommes dans la quatrième dimension, puisque en chaque sommet, pour le cube, il y a 4 arêtes.

---

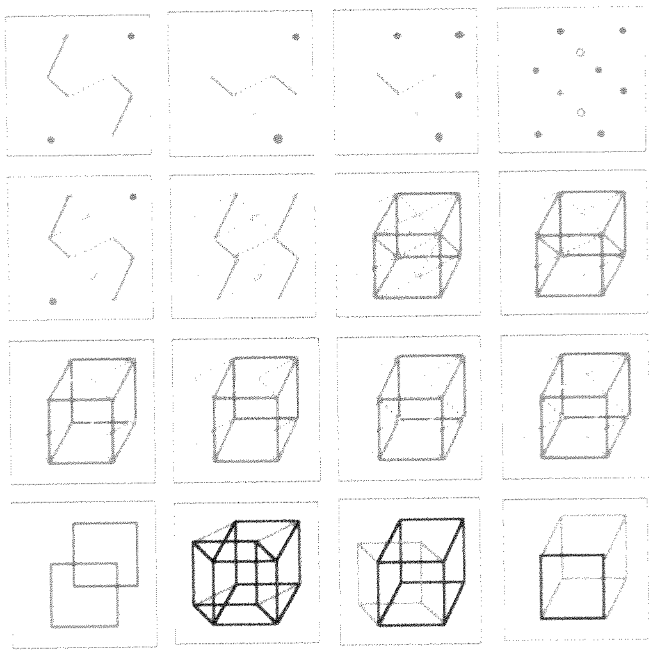
[1] Jacques Lacan disant « l'inconscient est structuré comme un langage » a schématisé la Psyché  selon un nœud borroméen à trois ronds liant les trois registres fondamentaux : réel, symbolique, imaginaire. La propriété borroméenne est liée au fait que la coupure d'un rond libère les deux autres.

[2] Regular Polylopes p.124 Regular Coxeter Polytopes p.37

La modélisation de K^3 en 3D m'a longtemps posé problème. Alors qu'en 2D la représentation en perspective cavalière nous paraît orthogonale. et qu'elle est strictement orthogonale en 4D, la 3D oblige à tronquer 2 cubes en parallélépipèdes.

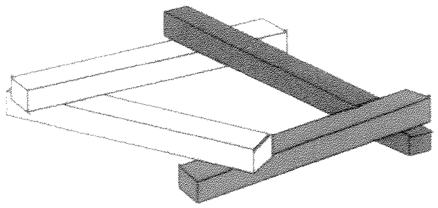
	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Polytope K3	12	24	15	3-Cell	{4}×{3}

Construction et évolution de K^3
- carré
- cube
- 2 cubes
- 3 cubes
- 3 carrés
- K^3
- la tour
- le berceau
- le haut-fourneau
- le livre
- la totale
- l'aile volante
- les lunettes
- l'éolienne
- le scarabée
- le rossignol
- la voie lactée

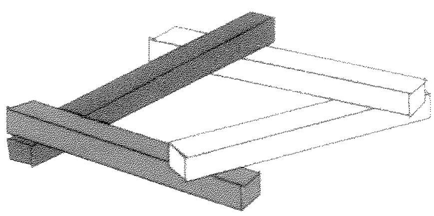


Plus loin, je regardais les gravures d'Escher. Comment faisait-il pour évoquer sur son dessin des espaces tellement difficiles en 3D ? Je trouvais une solution en donnant une épaisseur aux arêtes du plan et en les superposant dessus-dessous. Cela formait des plans hélicoïdaux qui pouvaient être soit lévogyre, soit dextrogyre. J'apprenais que l'espace courbe est orienté.

Plan lévogyre

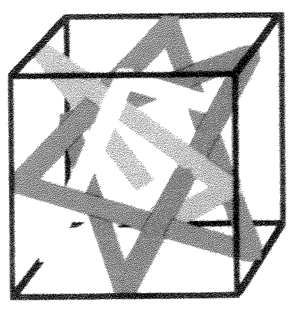


Plan dextrogyre



Un cube eschérien a 6 faces hélicoïdales orIentées dans le même sens. L'étude des symétries y est Intéressante. La courbure de l'espace augmente au fur et à mesure que l'on resserre cube sur lui-même tout en gardant l'épaisseur des arêtes.

Il arrive un moment où les 12 arêtes du cube forment un entrelacs symétrique de 4 triangles, dont les sommets sont inscrits dans un cuboctaèdre.



Pour ceux qui se sont intéressés à la théorie des nœuds, les sommets d'un cube eschérien sont des *triskels*. Ses faces sont des *quadriskels*.

Pour le tétraèdre, sommets et faces sont des *triskels*.

Pour l'octaèdre, sommets *quadriskels*, faces *triskels*.

Dans l'espace eschérien, il s'agit d'une courbure des directions de l'espace qui n'est pas encore de l'hyperespace. C'est de la 3D courbée telle qu'Einstein le montre avec la relativité aux abords des très grandes masses ezt de la vitesse de la lumière.

L'hyperespace en tant que tel demande une gymnastique de l'esprit un peu particulière. C'est que nous sommes très habitués à réfléchir et à nous représenter le monde cartésien avec trois dimensions: largeur, hauteur, profondeur.

La première idée pour symboliser une 4e dimension est de dire que c'est du temps. C'est la position de la physique newtonienne. Faire de cette idée de temps une idée de géométrie spatiale, voilà la difficulté.

Et pourtant, nous y sommes tous les jours invités. Le chant d'un oiseau qui brise le silence et traverse l'espace, c'est une quatrième dimension. Un tableau dans une chambre change l'atmosphère et l'espace s'en trouve recentré ou dispersé, oppressé ou agrandit. Un musicien fait vibrer à travers l'espace de la salle celui de son violon, de la musique qu'il interprète, de l'époque qu'il met en jeu dans la situation présente.

En fait toute irruption du langage dans le monde me paraît comme une invitation à l'*hyperspacialité*.

Comment s'échafaude les lieux des dimensions entre elles ?

J'ai souvent remonté l'échelle de ce qui est apparent, bien connu de nos consciences:

- un point	fait parti de la dimension	0
- un segment	"	1
- un plan	"	2
- un espace	"	3
- un temps	"	4
- une lumière	"	5

Cela demanderait de long développements qu'il n'est pas utile de faire ici.

Mais pour comprendre spécifiquement l'hyperespace, il faut essayer de penser le bord de ces dimensions.

- une arête	est bordée par des	points
- un plan	est bordé par des arêtes	
- un espace	est bordé par des plans	
- un hyperespace	sera bordé par des	espaces.

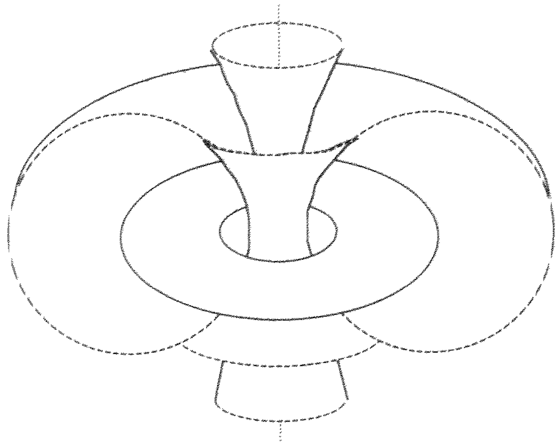
Un hyperespace n'est absolument pas un objet 3D. Ce qu'on peut représenter en 2D ou 3D ne sont que des projections, tout comme un plan d'achitecture n'est pas la maison même, ou une carte du Club Vosgien, le ballon d'Alsace. Edwin Abott en 1884 écrivait son livre *Flatland*, où il raconte l'existence d'êtres vivants 2D sur des plans. Le narrateur y est un carré et se demande ce que pourrait être *Spaceland*. Nous sommes les êtres de *Flatland* pour l'hyperespace.

Pour se représenter mentalement un hypercube, il faut penser un cube bordé par des cubes chacun bordé par des cubes, sachant qu'il y a seulement 8 cubes dans un hypercube. et non un remplissage de l'espace 3D par des cubes. Le bord de l'hypercube est toujours un cube. Il faut que l'espace devienne mou comme chez Dali, qu'il se relativise comme chez Einstein, et on rentre dans la 4D comme un yogi tout à fait relaxé. Il est étonnant de sculpter une pierre, parce qu'il faut toujours en enlever, et il est étonnant de pousser son esprit vers l'hyperespace parce que toute notre gloire cartésienne y est intrinsèque et ne cesse d'y demeurer.

Coordonnées euclidiennes de S_3 dans $\mathbb{R}^4$:

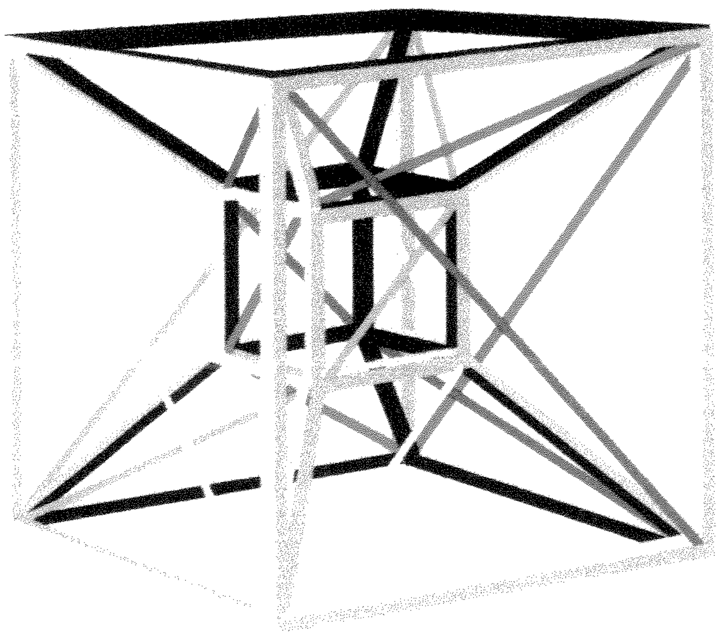
$$x^2 + y^2 + z^2 + t2 = r^2$$

Fibration de Hopf de S_3 représentée par projection dans $\mathbb{R}^3$ (cf. JF Sado: La frustration géométrique)

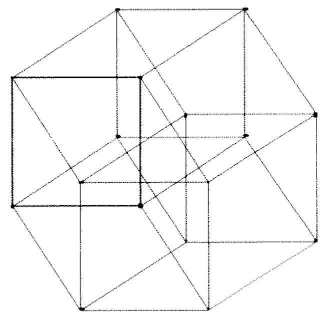


Penser les polytopes réguliers de la 4e dimension ne peut se faire sans passer par l'hypersphère S_3. Tout comme un polyèdre est la solidification de la sphère S_2 dans $\mathbb{R}^3$, un polytope sera la solidification de l'hypersphère S_3 dans $\mathbb{R}^4$.

La fibration de Hopf donnant le sens de l'espace courbe permet d'inscrire les sommets du polytope sur une grille ressemblant à des méridiens sur S_2. Sur S_3 les fibres de Hopf sont des parallèles courant sur les 3 tores dans $\mathbb{R}^3$ ou sur l'hypersphère dans $\mathbb{R}^4$.

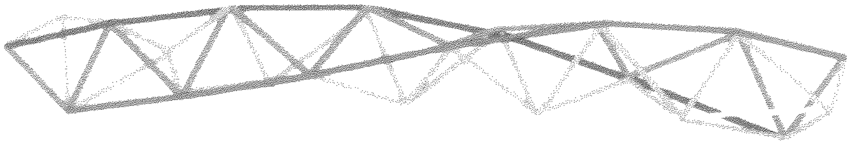


Projection centrale d'un hypercube quadridimentionnel dans l'espace à trois dimensions avec les fibres de Hopf

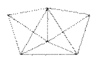


	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Hypercube C8	16	32	24	8-Cell	{4, 3, 3}

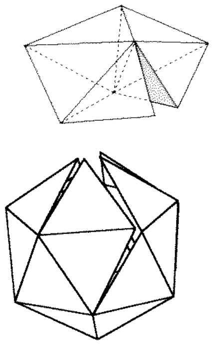
L'hélice de Coxeter est un empilement de tétraèdres qui rend bien compte de la nature de ces fibres structurant l'espace courbe.

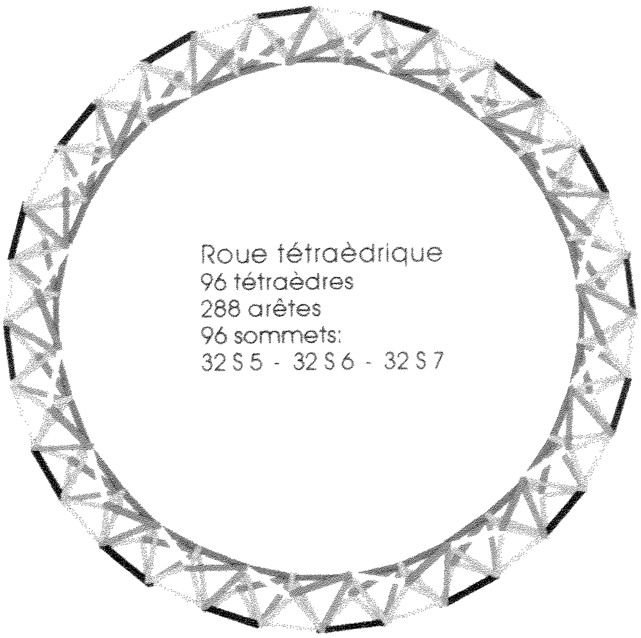


Je me suis rendu compte par hasard qu'en inversant la chiralité (le sens de la courbure) tous les six tétraèdres, on obtenait une roue tétraédrique plane de 96 tétraèdres

– 32 fois 3 tétraèdres formant un bateau : 

Plastiquement, cette roue se ferme bien. Mathématiquement, il y a cependant un trou angulaire de 6° 36' 11". La roue de 5 tétraèdres nous avait déjà montré un angle de cette nature.





Il a été nommé par J.F. Sadoc, lors de son étude des symétries de l'icosaèdre et des structures moléculaires de dimension 4: la frustration géométrique. Il s'agit là d'une porte qui mène de l'icosaédrisme (structures basées sur le polyèdre régulier le plus proche de la sphère : l'icosaèdre) vers l'espace courbe quand les tétraèdres non réguliers de l'icosaèdre deviennent réguliers.

C'est par un manque que la structure s'ouvre, comme dans le cycle des tonalités musicales, un manque qui fait la vibration de la musique, l'élan du discours, la source du désir. L'imperfection de la 3D mène vers un monde plus vaste et plus conscient, où le cartésianisme est intrinsèque. C'est le passage qu'explore Alice vers les lieux de son rêve.

Oh saisons,
Oh châteaux,
Quelle âme est sans défauts

Tableau des 5 polyèdres réguliers dans $\mathbb{R}^3$ et des 6 polytopes réguliers dans $\mathbb{R}^4$

	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Tétraèdre	4	6	4	1	{3, 3}
Hyper.tétraèdre C5	5	10	10	5-Cell	{3, 3, 3}
Hyper-tétraèdreC16	8	24	32	16-Cell	{3, 3, 4}
Cube	8	12	6	1	{4, 3}
Polytope non rég.	152	24	15	3-Cell	{4}×{3}
Hyper.cube C8	16	32	24	8-Cell	{4, 3, 3}
Octaèdre	6	12	8	1	{3, 4}
Hyper.octaèdre	24	96	96	24-Cell	{3, 4, 3}
Icosaèdre	12	30	20	1	{3, 5}
Hyper.icosaèdre	120	720	1200	600-Cell	{3, 3, 5}
Dodécaèdre	20	30	12	1	{5, 3}
Hyper.dodécaèdre	600	1200	720	120-Cell	{5, 3, 3}

Formule d'Euler pour les Segments:
$S = 2 \quad \Leftrightarrow N_0=2$
Formule d'Euler pour les Polygones:
$S - A = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1=0$
Formule d'Euler pour les Polyèdres:
$S - A + F = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1 + N_2 = 2$
Formule d'Euler pour les Polytopes:
$S - A + F - E = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$

Remarquer l'oscillation entre 0 et 2 autour du nombre 1
S: Nombre de Sommets $= N_0$
A: Nombre d'Arêtes $= N_1$
F: Nombre de Faces $= N_2$
E:Nombre d'Espaces $= N_3$

Code Schläfli: {p,q,r}
p: Nombre de Cotés par Face dans le Polygone ordre de Symétrie d'une Face / Polygone
q: Nombre d'Arêtes ou Faces par Sommet dans le Polyèdre ordre de Symétrie d'un Sommet / Polyèdre
r: Nombre de Polyèdres ou Faces par Arête dans le Polyèdre ordre de Symétrie d'une Arête / Polytope

Bibliographie

Les Polyèdres : Louis JOLY, éd. Blanchard, 1992
L'univers des Polyèdres : PLOT-APMEP Université d'Orléans, 1987
Regular Polytopes :H.M.S. COXETER, Dover Publication,N.Y., 1963
Frustration Géométrique : Jean- François SADOC, éd. Eyrolles, 1997
La quatrième dimension : Thomas BANCHOFF, éd. Belin,1996
Revue *HYPERSPACE* vol. IX n° 1BC helix : J-F SADOC et N.RIVIER , 2000
Dictionnaire de la Psychanalyse : Roland CHEMAMA, Larousse , 1994
Étoffe-Nœud : Jean Michel VAPPEREAU, Topologie en extension, 1997
Poésies : Arthur RIMBAUD, Poésie Gallimard, 1992
Alice au Pays des Merveilles : Lewis CARROLL , Folio Gallimard, 1998

Publications

– Livres d'artiste : Histoire du Carré
Huit navires portant chacun trésor
– Revue *HYPERSPACE* vol. IX n° 3 2000 Japan society for Hyperspace Science
Polyèdres couplés et Polytopes Commentaires du Professeur Nicolas Rivier

Exposition

Espace la Pierre Large, 25 rue des Veaux, Strasbourg du 10 au 27 mai 2001, tous les jours 13h–19h : *Polyèdres – Polytopes – Infographies – Aquarelles – Livres*

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Session de **2001**
Classe de PREMIÈRE
Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

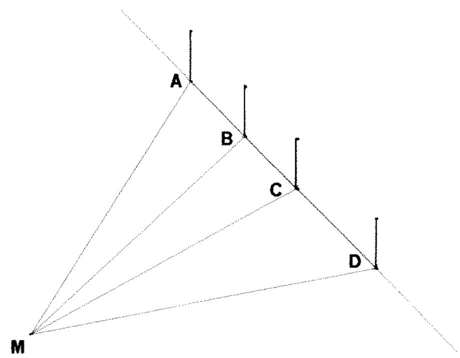
Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur une table, face «1» contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.

À l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme ***s*** de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le «1» initial.

1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour ***s***.

2) La somme ***s*** peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs?

EXERCICE 2

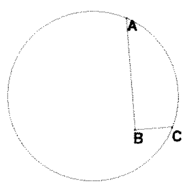


Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.

Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs : AB = 1, BC = 2, CD = *d*, où *d* est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.

EXERCICE 3



Un disque de rayon $\sqrt{50}$ cm est découpé comme l'indique la figure ci-contre.

On donne $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm et l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit. Calculer le carré de la distance de B au centre du disque.

EXERCICE 4

Dessinez un cube ***C*** (un dessin même approximatif en perspective suffira).

Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment [AB] soit le centre du cube.

Considérons un autre cube ***C'*** admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.

Certaines arêtes de ***C*** rencontrent des arêtes de ***C'***. Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de ***C*** et une arête de ***C'***.

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

V étant le volume de ***C***, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes ***C*** et ***C'***?

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2001

Classes de PREMIÈRE

Sujet 1 : de Fromentine à l'Ile d'Yeu

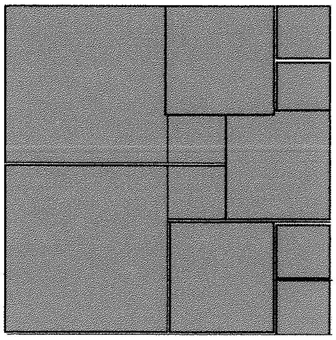
Deux bacs partent en même temps, l'un, l'Amporelle, de Fromentine vers l'Ile d'Yeu, l'autre, l'Insula Oya, de l'Ile d'Yeu vers Fromentine. L'Amporelle navigue plus rapidement que l'Insula Oya. Ils se croisent à la hauteur d'une bouée indiquant que l'Ile d'Yeu est à 7 km.

Une fois arrivés à destination, les deux bateaux s'arrêtent à quai pour débarquer et prendre leurs passagers, l'Amporelle restant à quai un peu plus longtemps que l'Insula Oya. Puis ils repartent pour leur point de départ et se croisent à nouveau à la hauteur d'une bouée indiquant que Fromentine est à 16,5 km.

Sachant qu'au moment de leur deuxième rencontre l'Insula Oya a navigué trois fois plus longtemps que l'Amporelle, quelle distance sépare Fromentine de l'Ile d'Yeu ?

Sujet 2

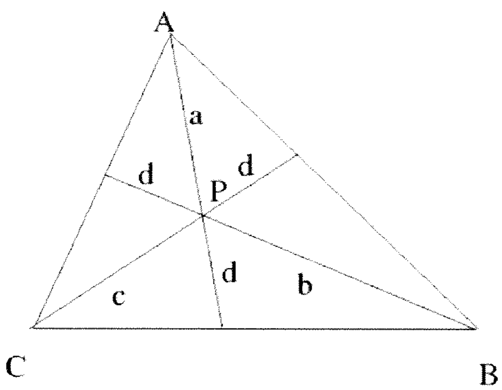
Un carré qui peut être exactement recouvert sans chevauchement par n carrés de tailles quelconques, dont les côtés sont parallèles à ses côtés, est dit n-carrelable. Par exemple, ce carré est 11-carrelable.



On se donne un carré. Pour quelles valeurs de n est-il n-carrelable ?

Sujet 3

Trois droites issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en P, intérieur au triangle. On note a, b, c, d les longueurs des segments issus de P comme indiqué sur la figure.



Sachant que $a + b + c = 43$ et $d = 3$, calculer le produit abc.

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2001

Classes de TERMINALE

Sujet 1 : Millésime et Parties Entières

Combien de nombres parmi les 2001 premiers entiers strictement positifs peuvent s'écrire sous la forme $E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$

où x est un nombre réel et $E(z)$ désigne la partie entière de z, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à z (par exemple $E(+3{,}2) = 3$ et $E(-3{,}2) = -4$) ?

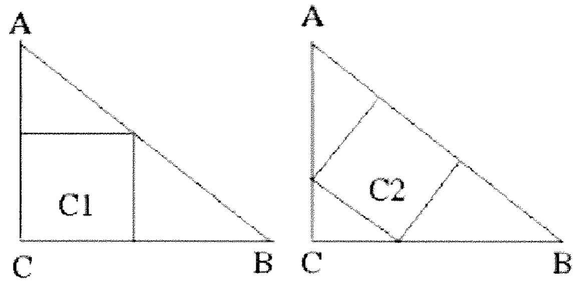
Sujet 2 : le Vieux Magnéto

Un magnétophone ancien nécessite 8 minutes pour rembobiner totalement une cassette ; la vitesse de rotation de l'axe de la bobine est constante. Après lecture, la bande se trouve intégralement sur une bobine et l'on procède au rembobinage.

On désire estimer le temps nécessaire au rembobinage du premier quart de la bande. Émile prétend qu'il faudra environ 3 minutes et Claire pense que 4 minutes seront nécessaires. Qu'en pensez-vous ? On pourra négliger le rayon de l'axe des bobines et assimiler chaque spire à un cercle.

Sujet 3 : Histoires d'Aires

On dispose d'un triangle ABC rectangle en C. Deux carrés $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont inscrits dans le triangle comme indiqué sur la figure.



Déterminer la longueur $AC + CB$ sachant que $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ ont pour aires respectives 441 cm² et 440 cm².

CARRÉS GRÉCO-LATINS : MODE D'EMPLOI[⊗]

Michèle AUDIN

Un carré gréco-latin, autrement nommé « bi-carré latin orthogonal » est un échiquier dont chaque case contient deux attributs, un chiffre et une lettre par exemple, comme dans l'exemple ci-dessous.

1V	2R	3C
2C	3V	1R
3R	1C	2V

Les deux attributs sont soumis à des règles très strictes: il y a un et un seul chiffre dans chaque ligne et chaque colonne, de même pour les lettres, de plus un chiffre donne n' arrive avec une lettre donnée qu'une seule fois. L'écrivain Georges PEREC nous explique cela beaucoup plus clairement.[1]

« Le plus simple, pour faire comprendre ce qu'est un bi-carré latin orthogonal d'ordre 10 et quelles peuvent en être les applications romanesques, est de partir d'un bi-carré latin orthogonal d'ordre 3.

Supposons donc une histoire en trois chapitres dans laquelle s'agitent trois personnages respectivement nommés Dupont, Durand et Schustenberger. Dotons ces trois individus de deux séries d'attributs: d'une part, des coiffures, soit un képi (K), un melon (M) et un béret (B); d'autres part, des choses (?) que l'on peut tenir à la main: un chien (C), une valise (V) et un bouquet de roses (R). Le problème est alors de raconter une histoire dans laquelle les trois personnages auront tour à tour ces six éléments mais n'auront jamais les deux mêmes. La formule suivante

	Dupont	Durand	Schustenberger
1	KV	BR	MC
2	BC	MV	KR
3	MR	KC	BV

qui n'est rien d'autre qu'un bi-carré latin orthogonal d'ordre 3 (trivial) donne la[2] solution du problème : dans le premier chapitre Dupont aura un képi et une valise, Durand un béret et des roses, Schustenberger un melon et un chien; dans le second, Dupont aura un béret et un chien, Durand un melon et une valise, Schustenberger un képi et un bouquet de roses; dans le troisième, Dupont portera un melon et des roses, Durand en képi promènera son chien et Schustenberger en béret coltinera une valise. il ne restera plus dès lors qu'à inventer les histoires justifiant ces successives transformations. »

PEREC parle dans ce texte d' applications *romanesques* de la construction des carrés gréco-latins. Nous, mathématiciens, nous y intéressons en général pour d'autres

[⊗] Écrit pour la fête de la science, Strasbourg, octobre 2000.
[1] Dans Georges PEREC, « Quatre figures pour La *Vie mode d'emploi* », L'arc, 76(1979) p. 50-53.
[2] ... ou en tout cas une ... (note de M. A.)

raisons. En plus de notre goût immodéré pour la résolution de tous les problèmes qui nous tombent sous les yeux (et PEREC va encore nous expliquer qu'il s'agit d'un problème vieux et classique), notre intérêt pour les carrés gréco-latins a des applications pratiques, par exemple en statistique pour modéliser des plans d'expérience où l'on veut considérer la cohabitation de différents facteurs.

Mais revenons aux applications romanesques. PEREC nous explique encore :

« Dans *La Vie mode d'emploi,* ce ne sont pas deux séries de trois éléments, mais vingt et une fois deux séries de dix éléments qui sont ainsi permutées et qui déterminent les éléments constitutifs de chaque chapitre.

N.B. On ne peut pas construire des bi-carrés latins orthogonaux à partir de n 'importe quel nombre. Par exemple, il n'existe pas de bi-carré latin d'ordre 2. Pendant plus de deux siècles, il fut tenu pour impossible de construire un bi-carré latin orthogonal d'ordre 10, EULER en ayant conjecturé la non-existence. C'est seulement en 1960 que BOSE, PARKER et SHRIKANDE[3] réussirent à en obtenir un spécimen. »

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1	1 1	7 8	6 9	5 0	0 2	9 4	8 6	2 3	3 5	4 7	Combles 2
2	8 7	2 2	1 8	7 9	6 0	0 3	9 5	3 4	4 6	5 1	Combles 2
3	9 6	8 1	3 3	2 8	1 9	7 0	0 4	4 5	5 7	6 2	Sixième
4	0 5	9 7	8 2	4 4	3 8	2 9	1 0	5 6	6 1	7 3	Cinquième
5	2 0	0 6	9 1	8 3	5 5	4 8	3 9	6 7	7 2	1 4	Quatrième
6	4 9	3 0	0 7	9 2	8 4	6 6	5 8	7 1	1 3	2 5	Troisième
7	6 8	5 9	4 0	0 1	9 3	8 5	7 7	1 2	2 4	3 6	Deuxième
8	3 2	4 3	5 4	6 5	7 6	1 7	2 1	8 8	9 9	0 0	Premier
9	5 3	6 4	7 5	1 6	2 7	3 1	4 2	9 0	0 8	8 9	Rez-de-ch.
10	7 4	1 5	2 6	3 7	4 1	5 2	6 3	0 9	8 0	9 8	Caves

[3] Dans BOSE R. C.; SHRIKHANDE S. S.; PARKER, E. T. *Further results on the construction of mutual orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture,* Canad. J. Math. 12 1960 180-203. Ils montrent dans cet article qu'on peut construire des carrés gréco-latins de tous les ordres sauf 2 et 6.

Le tableau précédent est à la fois un exemple d'un tel spécimen et une des utilisations que PEREC en a faites dans *La Vie mode d'emploi.* Le carré représente un immeuble parisien vu de face, dont on aurait retiré la façade, celui représenté page 2. Chaque case est ainsi une pièce d'un appartement, un morceau d'escalier, une cave. Elle devient un chapitre du livre.

Pour écrire chaque chapitre, PEREC s'impose vingt et une paires de contraintes. Par exemple, deux citations à prendre dans deux listes de dix auteurs. Au premier étage, à gauche de l'escalier (case 8,4), dans le chapitre 23, on trouvera donc une (en fait deux) citation(s) de Jules VERNE[4] et une de JOYCE[5].

Encore des mathématiques... et de la poésie. L'utilisation de chacune des paires de contraintes dans tel ou tel chapitre est régie par le grand carré gréco-latin. Mais comment les vingt et une paires de contraintes sont-elles combinées entre elles ? Grâce à une « nouvelle » règle mathématique empruntée... à un poète du moyen-âge, Arnaud DANIEL, la *quénine*[6].

Et le romanesque ? Cette structure compliquée ne fait-elle que stimuler l'imagination de l'écrivain? Tous les mathématiciens à la recherche de nouveaux bi-carrés latins orthogonaux trouveront les mêmes solutions, mais seul PEREC pouvait écrire *La Vie mode d'emploi.*

Des questions. Et dans quel ordre les cases du carré, devenues chapitres, apparaissent-elles dans le roman?

Pourquoi le roman n'a-t-il que quatre-vingt-dix-neuf chapitres ? Quel est le numéro manquant ?

Pour en savoir plus. En plus des articles de PEREC et de BOSE *et al.* cités, on peut lire *La bibliothèque oulipienne,* ouvrage collectif édité par Seghers, le merveilleux *Cahier des charges de la Vie mode d'emploi* publié par le CNRS... et on doit lire *la Vie mode d'emploi*[7].

Michèle AUDIN
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX FRANCE

E-mail
Michele.Audin@math.u-strasbg.fr

Url
http: //www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

---

[4] Description du contenu de la malle de *L'Île mystérieuse*, bibliothèque du capitaine Némo
[5] La maison de poupée est la maison dont Bloom rêve à la fin d' *Ulysse*
[6] Dont le nom est lié, lui, à un autre écrivain amateur de mathématiques, Raymond QUENEAU
[7] *La Vie mode d'emploi* : Romans, Hachette, collection POL, 1978.

LES RATS QUI ONT À CONSTRUIRE LE LABYRINTHE DONT ILS SE PROPOSENT DE SORTIR

Richard CABASSUT,
Lycée International , Strasbourg

Les mathématiques peuvent être source d'inspiration pour de nombreux arts[1] et nous souhaitons évoquer dans cet article les relations entre mathématiques et littérature au travers d'un groupe de recherche sur la littérature expérimentale : « L' OULIPO ». Les membres de ce groupe, les oulipiens , sont définis comme des « rats qui ont à construire le labyrinthe dont ils se proposent de sortir »[2]. En effet, les membres de ce groupe (les rats) s'imposent des contraintes d'écriture (les labyrinthes) pour essayer de produire de la littérature respectant ces contraintes.

L' OULIPO et les mathématiques

L'OULIPO est fondé en 1960 par Raymond QUENEAU et François LE LIONNAIS. QUENEAU (1903-1976) a suivi des études de philosophie : c'est un écrivain, romancier et poète, qui a traversé le surréalisme. ROUBAUD raconte[3] que QUENEAU avait horreur du manque de rigueur des avant-gardistes. Il est attiré par les mathématiques et concevra le groupe de mathématiciens BOURBAKI comme un contre modèle au modèle du groupe surréaliste.

LE LIONNAIS (1901-1984) a reçu une solide formation en mathématiques : il est ingénieur chimiste de formation. Conseiller scientifique dans des organismes de recherches ou à la télévision, producteur, éditeur ou auteur en vulgarisation scientifique, il sera président de l'association des écrivains scientifiques. ». Comme le rappelle Jacques ROUBAUD[4], LE LIONNAIS est surtout « l'assembleur des textes d'un livre qui a suscité bien des vocations : *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, publié[5] par une revue de poésie, les **Cahiers du Sud**, un peu après la guerre. Ce livre magnifique combinait des écrits de grands mathématiciens sur les mathématiques et surtout, fait important pour ma génération, le premier texte non technique d'un auteur mystérieux destiné à devenir célèbre dans le monde scientifique: le mathématicien collectif écrivant sous le nom de BOURBAKI ».

Cette rencontre de l'écrivain attiré par les mathématiques, QUENEAU, et du mathématicien attiré par la littérature, LE LIONNAIS, explique pourquoi L'OULIPO est un groupe rassemblant environ une vingtaine d' écrivains ou de mathématiciens, certains combinant les deux qualités , d'autres étant correspondants à l'étranger. On remarque deux mathématiciens professionnels , Claude BERGE et Jacques ROUBAUD, un écrivain célèbre, Georges PEREC.

On retrouve l'influence de BOURBAKI dans la constitution du groupe : le groupe est secret ; on y rentre par cooptation ; on y recourt quelquefois à des systèmes

---

[1] Nous renvoyons aux articles d'Antoine WALTER et de Richard DENNER de ce numéro 103 de **L'Ouvert**.
[2] Cité par LESCURE dans *Petite histoire de l'Oulipo*, dans *La littérature potentielle*, Oulipo, Folio, Gallimard,1973.
[3] Conférence de Jacques ROUBAUD le 3 mai 1994 à l'Institut de mathématiques de Strasbourg
[4] Article de Jacques ROUBAUD sur François LE LYONNAIS dans ***Encyclopédie Universalis***.
[5] Publié en 1961

axiomatiques. ROUBAUD déclare[6] : « Raymond QUENEAU et François LE LIONNAIS, les cofondateurs de l'OULIPO, connaissaient bien les mathématiques. Et avaient noué des contacts personnels avec plusieurs membres de BOURBAKI. Au fond, les *Éléments de mathématiques* de BOURBAKI résultent d'une composition sous contraintes très fortes, en premier lieu celle du travail collectif. Donc, sous bien des aspects, les deux projets se ressemblent, même si celui de l'OULIPO possède, en apparence, un caractère beaucoup moins sérieux. » Et on sent poindre également une moquerie vis à vis de BOURBAKI, comme dans cet écrit[7] de Raymond QUENEAU.

« Après avoir assisté à Halle à une conférence de WIENER (pas Norbert bien sûr) sur les théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS, David HILBERT, attendant le train pour Koenisberg en gare de Berlin, murmura pensivement : « Au lieu de points, de droites et de plans, on pourrait tout aussi employer les mots, tables , chaises et vidrecomes[8] ». De cette réflexion naquit un ouvrage qui parut en 1899, « les Fondements de la géométrie », dans lequel l'auteur établissait de façon définitive (ou provisoirement définitive) l'axiomatique de la géométrie euclidienne et de quelques autres par surcroît. M'inspirant de cet illustre exemple, je présente ici une axiomatique de la littérature en remplaçant dans les propositions d'HILBERT les mots « points », « droites », « plans », respectivement par « mots », « phrases », « paragraphes ».

Axiome 1 : Il existe une phrase comprenant deux mots donnés.

Commentaire : évident. Exemple : soient les deux mots « la » et « la », il existe une phrase comprenant ces deux mots : « le violoniste donne le la à la cantatrice » .... »

Les contraintes oulipiennes

L'OULIPO propose des contraintes pour aider à la création littéraire. Des contraintes existaient déjà : les douze pieds de l'alexandrin, la structure d'un sonnet, la règle des trois unités de la tragédie classique,... Certaines contraintes mises en valeur par l'OULIPO sont des généralisations de contraintes existantes : la sextine inspirée des poèmes d'Arnaut DANIEL (1180-1210 ?) généralisée par QUENEAU en quenine[9], ou bien la métrique du poème traditionnel japonais , le Tanka, adoptée par ROUBAUD dans son recueil « Trente et un au cube ». Ces contraintes peuvent être non mathématiques, comme le lipogramme qui consiste à ne pas utiliser de mots renfermant une ou des lettres données, ou bien mathématiques, comme par exemple le respect d'une structure algébrique, celle de groupe commutatif dans *La princesse Hoppy ou le conte du Labrador* de ROUBAUD , que nous étudierons plus loin.

OULIPO est le sigle de *Ou*vroir de *Li*ttérature *Po*tentielle. Cela signifie que les contraintes sont sources de création littéraire, en deux tendances principales. « La tendance analytique travaille sur les œuvres du passé pour y rechercher des possibilités qui dépassent souvent ce que les auteurs avaient soupçonnés... La tendance synthétique est plus ambitieuse... Il s'agit d'ouvrir de nouvelles voies inconnues de nos prédécesseurs. Les mathématiques —plus particulièrement les structures abstraites des mathématiques contemporaines— nous proposent mille directions d'explorations, tant

6 Entretien au monde de l'Éducation, janvier 2001.

7 Extrait des « Fondements de la littérature d'après David HILBERT » de Raymond Queneau

8 Un vidrecome est un grand verre à bière que l'on se *repasse* d'un ami à un autre autour d'une table pour boire chacun son tour (de l'allemand « Wiederkommen ».

9 Qui sera étudiée plus loin.

à partir de l'Algèbre (recours à de nouvelles lois de compositions) que de la Topologie (considérations de voisinage, d'ouverture ou de fermeture de textes)».[10]

Examinons quelques exemples de contraintes oulipiennes.

Lipogrammes

La contrainte du lipogramme consiste à écrire sans utiliser une ou plusieurs lettres.

Georges PEREC dans son roman *La disparition*, écrit en 1969, écarte la lettre **e** , la plus utilisée en langue française, comme on peut l'apprécier dans l'extrait suivant.

« L'ambition du « Scriptor », son propos, disons son souci, son souci constant, fut d'abord d'aboutir à un produit aussi original qu'instructif, à un produit qui aurait, qui pourrait avoir un pouvoir stimulant sur la construction, la narration, l'affabulation, l'action , disons d'un mot, sur la façon du roman d'aujourd'hui ».

Trois ans plus tard, avec un nouveau roman *Les revenentes*, il prend la contrainte opposée, en n'utilisant pour voyelle que la lettre **e** :

« Telles des chèvres en détresse, sept Mercédès-Benz vertes, les fenêtres crêpées de reps grège, descendent lentement West End Street et prennent sénestrement Temple Street vers les vertes venelles semées de hêtres et de frênes près desquelles se dresse, svelte et empesé en même temps, l'Evêché d'Exeter. »

De ces deux romans Georges PEREC écrivait qu'ils « se ressemblent par de nombreux traits bien qu'ils n'aient aucun mot en commun ».

Un carré latin orthogonal d'ordre 10

Dans *La vie mode d'emploi*[11] de PEREC, paru en 1978, l'histoire se déroule dans un immeubles sur dix niveaux (étages et sous-sols) avec dix pièces par niveau, soit un carré d'ordre dix. Dans le cahier des charges (édité après son roman) quarante-deux listes de dix éléments sont fixées comme contraintes à respecter : des animaux, des couples célèbres,…) L'ordre du parcours de ce carré est celui du cavalier. Et ce carré doit vérifier les propriétés algébriques d'un carré latin orthogonal d'ordre dix, quant aux objets, événements ou personnes affectant chaque case du carré.

Les alexandrins de longueurs variables

L'alexandrin de BAUDELAIRE « Laissent piteusement leurs grandes ailes blanches » a quatre **e** muets comptés. Si on ne les comptait pas («Laiss'nt piteus'ment leurs grand's ail's blanches ») on obtiendrait un octosyllabe.

Jacques ROUBAUD[12] décrit une axiomatique des alexandrins de longueurs variables.

« 1. L'alexandrin classique comporte certains graphèmes **e** que la langue, souvent, élide.

2. Parmi ceux-ci on peut distinguer ceux qui, placés autrement dans un vers, pourraient être élidés, de ceux qui de toute façon ne le seraient dans aucun vers. La première variété est celle des **e** qui finissent un mot, la deuxième comprend les **e** finaux suivis de **–s** et des **e** suivis de **–nt** , et les **e** intérieurs à un mot.

---

[10] *La Lipo, théorie et histoire*, de François LE LIONNAIS, dans « La littérature potentielle », Oulipo.

[11] Nous renvoyons à l'article plus détaillé de Michèle Audin.

[12] La bibliothèque Oulipienne, numéro 64, Jacques JOUET et Jacques ROUBAUD , volume 5, édité chez Le castor astral.

3. Si j'écris *des* **e** suivis de **–nt** et non *les* **e**, c'est que certains de ces **e** doivent être considérés non comme 'muets' mais comme 'morts' (ceux des imparfaits, par exemple qui peuvent se trouver sans peine à la césure ou en fin de vers masculine).

4. Si on tient compte du traitement des **e** par la langue, il faut distinguer le moment (dans l'histoire), le registre, la position syntaxique, l'environnement (règle des trois consonnes, par exemple). Tout cela fait bien des distinctions.

5. On choisira la définition suivante, en vue de la manipulation contrainte :

– aucun **e** muet versificatoire n'est précédé d'une frontière de mot (les **e** de *le, je, me, leçon* ne sont pas des e muets) ;

– ceux du type *pensaient* non plus ;

– tous les autres le sont (y compris dans *contrecoup*, par exemple) ;

– il n'y a pas deux **e** muets consécutifs dans une séquence de syllabes.

6. Dans ces conditions, les règles classiques ne permettent de **e** qu'en position 2, 3, 4, 5 de chaque hémistiche (donc 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 et 11 du vers).

7. pour les contraintes oulipiennes de placements des **e** que nous envisageons (création) et pour la collecte des exemples (érudition) on définit une variété d'alexandrin par l'axiome **(JJ)** suivant :

(JJ). Un **alexandrin jouetien**[13] est un vers à douze positions n'ayant pas de **e** muets dans les positions 1, 6, 7, 12. (Les positions sont comptés classiquement).

8. Il y a 64 espèces d'alexandrins jouetiens.

9. Tout alexandrin classique est jouetien.

....

13. Suivant une proposition de Paul BRAFFORT, on associera à tout alexandrin le vecteur numérique comptant de une à quatre places qui indique la position des **e** comptés dans le vers. Ce vecteur s'appelle le **jouet du vers**.

Exemple, le vers de RONSARD

Une plaisante farce, une belle mensonge

a pour jouet le vecteur 2 5 8 10.

14. Les vers dont le jouet est à quatre termes sont dits **jouetiens maximaux.** »

Les travaux de l'OULIPO illustrent par des exemples extraits de la littérature française les 64 espèces d'alexandrins jouetiens et comportent des études exhaustives des alexandrins jouetiens maximaux contenus dans différentes œuvres littéraires.

L'OULIPO n'ayant pas trouvé dans la littérature de sonnets comportant 14 vers à 4 **e** muets comptés, Jacques ROUBAUD a donc écrit un tel exemple , où est précisé au début de chaque vert son vecteur :

« Litanies du e muet

2.5.8.11 Brille l'étoile, meurt ; blanche, la lune luit ;
3.5.8.10 Lumière d'astre net, douce lampe sereine
3.5.8.10 La houle gonfle, loin, l'ample vague se traîne
2.5.8.11 Gouttes, ah ! gouttes d'eau, gouttes-feu, gouttes-nuit.

2.5.8.11 Tiède, l'averse pleut, l'aube suave suit,
3.5.8.10 L'aurore, roses doigts, touche tendre la plaine

[13] Sans doute en référence à Jacques JOUET qui, avec Jacques ROUBAUD, est à l'origine des recherches sur les alexandrins de longueurs variables.

3.5.810 La brise fraîche vient, calme , forte, prochaine,
2.5.8.11 Pleine d'eau, pleine d'or ; porte-sel, porte-bruit.

2.5.9.11 Brume, là, lèche l'air, la barque touche terre
2.5.9.11 Herbe, là, couvre-moi ! la source coule, claire
2.4.8.10 L'ombre cache le ciel, l'arbre s'enfle de noir

3.5.9.11 La pierre trouble l'eau, la flèche siffle, chante,
2.4.8.10 Flammes flambe le feu, sombre s'ouvre le soir
3.5.9.11 Le sable glisse , sourd, et l'heure tombe, lente. » !

Variations homophoniques :

Soit le texte de LUCRÈCE, dans *De rerum natura,* II, 1-2 :

« *Suave, mari magno turbantibus aequora ventis,*
e terra magnum alterius spectare laborem »

et le texte de John Keats, dans *Endymion :*

« *A thing of beauty is a joy for ever* ».

À partir de ces deux textes BÉNABOU compose le poème *Un singe de beauté*, en utilisant des traductions homophoniques des deux citations précédentes.

« Suave Emma, ris, ma Guéhenne au turbab,
Tes buts s'écœurent au vent d'ici.

Sue avec Marie, ma guenon ;
Turbans, gibus et cors à vent tisse

Éther à magnum allaite et ris
Où se pique, tarée, la bohême

Ah singe débotté,
Hisse un jouet fort et vert. »

La technique homophonique est utilisée également par L'OULIPO pour animer les stations de tramway de la ligne A de la ville de Strasbourg : « Ici, les Oulipiens se sont attachés à exploiter les possibilités offertes par la dislocation phonique des six syllabes de la séquence : *Le tramway de Strasbourg.* Cette dislocation a permis d'obtenir trente-deux nouvelles séquences voisines (par exemple : *Les trois muets de cédrats se bourrent* ...) qui ont servi de matrices aux trente-deux brèves histoires rapportées. »[14] Ainsi la brève histoire :

« Sans être le moins du monde gênés par leur langue coupée, les eunuques , négligeant de veiller sur les femmes du sérail, font une razzia sur les réserves de confiture du sultan. »

est résumée par : « *Les trois muets de cédrats se bourrent* ».

Transformation M ± n

Jean LESCURE explique[15] la méthode de transformation :

[14] Extrait de « Troll de tram , Le tramway de Strasbourg » , bibliothèque Oulipienne n°68.
[15] Méthode S+7 dans *La littérature potentielle*, OULIPO.

« la méthode M ± n, que l'on propose d'abord sous la forme encore limitée dite S+7… consiste à remplacer dans un texte existant… les mots (M) par d'autres mots de même genre qui les suivent ou les précèdent dans le dictionnaire, à une distance variable mesurée par le nombre des mots. Aussi S+7 veut dire simplement que l'on remplace tous les substantifs d'un texte par le septième qui le suit dans un lexique donné. »

LESCURE considère comme texte de départ le postulat d'EUCLIDE et s'autorise de remplacer la préposition *de* dans l'expression « de ce côté » par la préposition *dans* si le sens l'exige.

« Si deux angles situés dans un même plan font avec une sécante des angles intérieurs du même côté dont la somme soit plus petite que deux droits, ces deux droites se rencontrent de ce côté » qui est transformé , à l'aide du dictionnaire français-italien, Hatier, 1929, par S+2 en :

« Si deux drôles situés dans un plancher font avec une même sécession des angoisses intérieures de la même côtelette dont le sommeil soit plus petits que deux droitures ces deux drôles se rencontrent dans cette côtelette. »

En utilisant S+4 sans le dictionnaire philosophique de LALANDE on obtient :

« Si deux durées situées dans un pneumatique font avec une même sémantique des animismes intérieurs du même crime dont la sophistique soit plus petite que deux dupliques, ces deux durées se rencontrent dans ce crime. »

Les n-ine ou quenine

Considérons un poème dont la première strophe est composée de n vers. Chaque vers se termine par un mot distinct, appelé mot-clef. La contrainte portant sur les mots terminant les vers de chaque strophe suivante est qu'ils doivent être transformés des mots terminant les vers de la première strophe par une permutation bien déterminée, appelée permutation de QUENEAU-DANIEL. Queneau la définit en ces termes :

« Considérons un groupe symétrique d'ordre n des permutations de n lettres (chaque lettre représente un mot terminal ou clausule[16]). Si l'on peut trouver une permutation dont les puissances successives engendrent un sous-groupe cyclique (transitif) d'ordre n, alors on dira que le problème de la n-ine est possible… En fait le problème est toujours possible, avec comme solution triviale et peu élégante la permutation circulaire. La 'mutation en spirale'[17] définit une permutation telle qu'à tout élément numéroté 2p+1 correspond n – p et à tout élément 2p l'élément p… Pour n=4, 7, 10, etc., il y aura une lettre qui ne changera pas de place ; pour n=8, le sous-groupe ne sera que du quatrième ordre, etc. »

Une permutation de QUENEAU-DANIEL est donc une 'mutation en spirale' définie précédemment par QUENEAU. Elle est d'ordre n [18]. Une quenine ou n-ine est un poème construit en satisfaisant la contrainte précédente.

Un nombre de QUENEAU est un nombre entier n pour lequel la n-ine existe. On dit dans ce cas que n est admissible.

---

[16] Une clausule est le vers final d'une strophe, ou le dernier membre d'une période oratoire, d'un vers.

[17] Cette permutation est encore appelée permutation de QUENEAU-DANIEL d'ordre n. Arnaut DANIEL est un troubadour du XIIe siècle qui a composé en sextines et QUENEAU est à l'origine de l'étude des quenines à l'OULIPO.

[18] « d'ordre n » signifie que l'application successive n fois de suite de cette permutation redonne la position de départ.

Les 31 premiers nombres de Queneau sont : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 14, 18, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 39, 41, 50, 51, 53, 65, 69, 74, 81, 83, 86, 90, 95, 98, 99.

Les travaux[19]de l'OULIPO portent sur les aspects historiques et combinatoires des quenines et proposent des exemples de compositions de bibines (2-ines), terines (3-ines) , de quinines (ou 5-ine) et autres quenines.

Illustrons avec une terine, assaisonnée de sel, sucre et poivre, qui correspond à la permutation $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, qui est bien d'ordre 3 :

« Le sel de la mer 1
Le sucre de la terre 2
Le poivre de l'air 3

Le sel de l'air 3
Le sucre de la mer 1
Le poivre de la terre 2

Le sel de la terre 2
Le sucre de l'air 3
Le poivre de la mer » 1

On comprend pourquoi la quenine de 4 (appelée encore quatrine) n'est pas possible . Elle devrait obéir à la transformation : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ qui est d'ordre 3 puisque les quatre strophes auraient la structure : $\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}$

On démontre les quelques résultats suivants : pour que n soit admissible il est nécessaire que 2n+1 soit premier ; dans ce cas une condition nécessaire et suffisante pour que n soit admissible est qu'il soit d'ordre n ou 2n dans le groupe multiplicatif des entiers modulo 2n.

Les travaux de l'Oulipo ont permis des extensions de la notion de quenine. On ne se limite plus à la 'mutation en spirale' (ou permutation de QUENEAU-DANIEL) .

Voici une quatrine proposée par ROUBAUD (qui rappelle que les meilleures quatrines viennent de Russie) :

« Soleil noir derrière l'est 1
Terre bleue contre le sud 2
Étoiles jeunes sur l'ouest 3

Planètes blanches du nord 4
Jais noir au-devant de l'est 1
Turquoise bleue sur le sud 2

Abalone [20]jaune à l'ouest 3
Blancs coquillages du nord 4
Enfance très noire à l'est 1

Âge et grand âge du sud 2

[19] Notamment les numéros 65 & 66 de la bibliothèque oulipienne et dans le n°27 de 1969 de la revue *Mathématiques et Sciences Humaines.*

[20] Coquillage (une variété d'ormeau).

Mort jaune mort jaune à l'ouest 3
Blanc ressuscité au nord » 4

On observe 4 strophes avec 4 mots-clefs (Est, Sud, Ouest, Nord) mais seulement trois vers par strophe.

Des travaux plus récents de ROUBAUD propose de remplacer la multiplication par 2 dans la quenine par la multiplication par 3. Il peut alors composer une 3-octine évoquant les problèmes combinatoires rencontrés par QUENEAU pour composer et dont voici un extrait :

« Je le vois au bord de la Seine
Couleur d'un ciel couleur d'eau
Il rêve du monde rêvé
Où les nombres succombent mieux
Aux manigances du poème
je vois, les feuilles sont tombées
Aux flaques de basse lumière
Est-de décembre ou bien novembre ?

Dès que les feuilles sont tombées
On sort son carnet à poème
On marche au bord de la Seine
c'est le soir : la pauvre lumière
Solaire faiblit. Il vaut mieux
Laisser son ombre prendre l'eau
Sous les averses de novembre
En rêvant du nombre rêvé

Notre ombre en automne prend l'eau
Nos pompes ne valent pas mieux
Gluantes des feuilles tombées
Dans les caniveaux de novembre
Le soir dirige sa lumière
Vers le calepin à poème
Où s'inscrit le nombre rêvé
En marchand au bord de la Seine … »

Contrainte du jeu de go

Dès 1967 ROUBAUD publie son premier recueil de poésies « ∈ ». Il précise que « ce livre se compose , en principe , de 361 textes, qui sont les 180 pions blancs et les 181 pions noirs d'un jeu de go ». Ou encore « chaque paragraphe a pour titre un signe mathématique, pris dans un sens non mathématique dérivé ; à la suite de ce paragraphe ce sens sera précisé par des extraits des articles correspondants du *Dictionnaire de la langue mathématique* de LACHATRE et GROTHENDIECK (2e éd. 1969) » . Cette structure logique du recueil permet une lecture « qui suit le déroulement d'une partie de go » mais n'exclut pas la poésie comme le montre l'extrait : « Six o [GO 82] » :

« la paume mouillée s'écrase sur la vitre
la chevelure de l'eau sur les épaules

les cuisses brûlent sur les feuilles du verre
les seins frottent la pluie à des millimètres
il parle par une lumière de cidre
agit par ombres ruisselantes de saule
les draps de boiseries le rond de la lampe
les hydrographies de la chaux servent d'astres
elle revient il boit le froid sur son ventre
le plein froid de ses seins bat comme une tempe
il la brûle dans l'oreiller que s'efface
l'irruption des mondes le signal des centres
il la lie il la retourne comme terre
il saccage la fraîcheur il l'oblitère ».

Groupe de Klein

Jacques ROUBAUD dans son conte *La princesse Hoppy ou le conte du labrador* (1990) utilise la contrainte d'un groupe de Klein comme le montre l'extrait suivant :

« Le conte rappelle ici que quand le roi Utherpandragon se trouva atteint du mal de mortil fit venir auprès de lui la princesse et son chien et aussi ses quatre neveux Imogène, Aligoté, Babylone, Eleonor (sans e) et il leur dit : « mes enfants, mon enfant, mon chien, je sais que je vais mourir. J'ai le mal de la mort et ça ne pardonne pas. Quand je serais mort, ajouta-t-il, en se tournant vers les quatre rois, ses neveux, je sais bien ce qui va se passer. Imogène, par exemple va rendre visite à Babylas en son royaume, avec sa princesse et son chien, et qu'est ce qu'ils vont faire, je vais vous le dire. Ils vont envoyer la princesse jouer à la balle avec son chien sur la pelouse au bas du perron, ils vont entrer dans le bureau, tourner la clé et comploter. Contre qui ? je ne sais pas. O.K. je ne peux pas vous en empêcher . J'ai le mal de la mort, je vais crever, Merlin me l'a dit y'a rien à faire. Mais il est une règle sacrée qu'en des temps immémoriaux institua Saint Benoît et que vous allez me jurer de respecter pour comploter. O.K . ? et Utherpandragon continua d'une voix forte

Règle de Saint Benoît : *Soient trois rois parmi vous quatre : le premier roi, le deuxième roi, le troisième roi. Le premier roi est n'importe quel roi, le deuxième roi est n'importe quel roi,...*

« Le deuxième roi peut-il être le même que le premier ? » interrompit Eleonor.

« Of course » dit Uther... *le troisième roi est n'importe quel roi. Alors :*

Le roi contre lequel complote le premier roi quand il rend visite au roi contre lequel complote le deuxième roi quand il rend visite au troisième roi doit être le même roi précisément contre lequel complote le roi contre lequel complote le premier roi quand il rend visite au deuxième, quand il rend visite au troisième.

« O.K. ? » dit Uther « ce n'est pas tout » :

Quand un roi rendra visite à un autre roi ils comploteront toujours contre le même roi. Et si deux rois distincts rendent visite à un même troisième, le premier ne complotera jamais contre le même roi que le deuxième. Contre tout roi il sera comploté au moins une *fois l'an dans le bureau de chacun des rois.* « J'ai dit » dit Uther. « O.K. ? » dit Uther. Et il mourut…

Le conte va droit au but et dit que quand Aligoté par exemple rendait visite à Imogène à seule fin de comploter avec lui selon la règle de saint Benoît, la reine Adirondac rendait visite à la reine Ingrid en sa cuisine. Et pendant que les rois *complotaient* les reines faisaient de la *compote.* Tant et si bien qu'en s'en allant le roi Aligoté pouvait déposer à la poste un colis contenant le reste de compote qui n'avait pas été mangé au goûter et qui était destiné à la reine qui était l'épouse du roi contre lequel il avait l'après-midi même dans le bureau d'Imogène comploté. Et c'est ainsi que cela se passait.

Tout se passait pour le mieux dans les royaumes. Les rois complotaient, les reines compotaient, la princesse jouait à la balle avec son chien sur la pelouse toute verte au bas du perron, le chien janvier traduisait de français en **chien** et de **chien** en français, quand un matin… »

Jacques ROUBAUD explique[21] : « la règle x complote avec y contre z est une loi de groupe. Comme il y a quatre rois, c'est une structure de groupe à quatre éléments donc nécessairement commutatif. Le fait de savoir que c'est un groupe à quatre éléments ne nous dit pas laquelle des deux structures de groupe il s'agit et qui joue le rôle de quoi, c'est-à-dire quelle est la présentation du groupe. Il s'agit d'introduire dans les chapitres suivants des contraintes supplémentaires qui, une fois résolues, permettront de savoir quel est celui qui complote contre qui et quelle est la loi du groupe choisi. » Jacques ROUBAUD explique avec ironie que d'autres contraintes, non mathématiques, pèsent sur le conte. « On utilise une structure algébrique très simple à quatre éléments, car on sait que les chiens savent compter jusqu'à quatre, mais ont du mal à dépasser quatre. De même, les reines font de la compote pendant que les rois complotent parce que les rois complotent sans elles (sans *l*). Donc elles compotent pour vérifier une relation d'isomorphisme avec les rois. » La relation est devenue x fait de la compote avec y pour l'envoyer à z.

François LE LIONNAIS évoquait la généralisation de l'OuLiPo à l'Ou-x-Po, avec par exemple l'OuPeinPo pour l'*Ou*vroir de *Pein*ture *Po*tentielle, l'OuLiPoPo pour l'*Ou*vroir de *Li*ttérature *Po*licière *Po*tentielle voire L'OuMathPo pour l'*Ou*vroir de *Math*ématiques *Po*tentielle. Roubaud a signalé l'existence de l'OuMathPo , avec notamment la participation de Pierre SAMUEL. Mais les travaux de ce groupe sont restés confidentiels et se sont peu développés. On peut le regretter et souhaiter une réactivation de l'OUMATHPO à l'image du dynamisme de l'OULIPO.

Bibliographie :

Robert DAVREU : *Jacques Roubaud*, poètes d'aujourd'hui, Seghers,1985.

Jacques ROUBAUD : *Mathématiques*, Seuil, 1997.

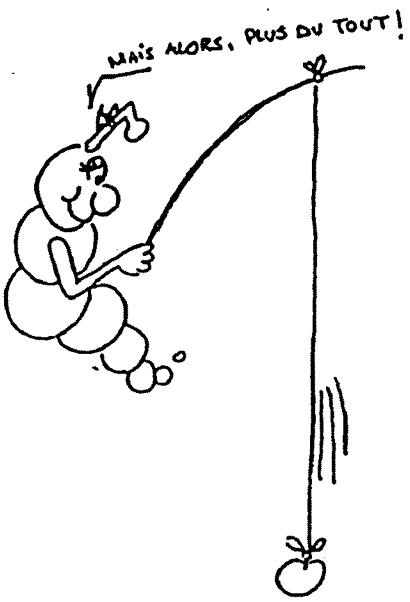
L'OULIPO : *La littérature potentielle*, Folio essais, Gallimard, 1973.

Marc LAPPRAND : *Poétique de l'Oulipo,* Faux titre.

La bibliothèque de l'Oulipo, volume 5, Le Castor Astral.

[21] Conférence du 3 mai 1994 à l'Institut de Mathématiques de Strasbourg.

Nouvelle brochure 2000



POURQUOI PAS ? DES MATHÉMATIQUES

Auteurs

Groupe IREM «Liaison Lycée-DEUG» :

WEIL Dominique SLUPINSKI Markus

KOCH Bernard DIDIERJEAN André

BLASCO Laure ATLAGH Mohumed

Mots-clés

Liaison lycée-université
Analyse
Algèbre linéaire
Logique
Arithmétique

Éditeur

I.R.E.M. de Strasbourg (S. **179**).

ISBN

2-911446-14-3.

Public concerné

Lycéens en fin de terminale scientifique & Étudiants en DEUG.

Résumé

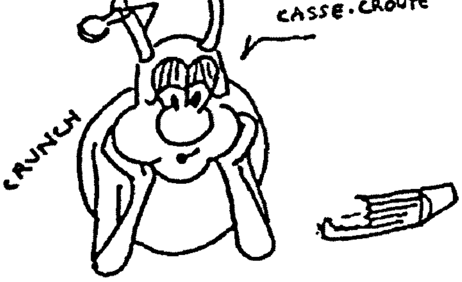
Cette brochure est conçue pour être lisible par un élève à sa sortie de terminale scientifique.

Elle l'invite à une lecture active de petits textes mathématiques lui présentant des notions incontournables au cours d'études scientifiques.

Ce fascicule comprend quatre parties pouvant être lues indépendamment et développant les thèmes suivants :

- application et fonctions vues à travers divers domaines ;
- lecture accompagnée d'un texte mathématique sur lessuites récurrentes et l'application logistique ;
- arithmétique ;
- notion d'espace vectoriel.

Entre chacune de ces parties se trouvent quelques récréations logiques.



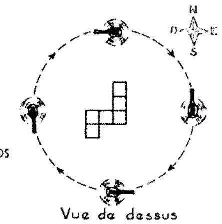
Prix : 55 F (+ port : 20 F)

Nouvelles brochures 2001

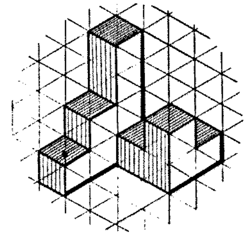
Les Étoiles de «MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES» 1997-2000 -- Fascicule 5 -- Edition française.

Exercice 9 10 Points **Héli 3D**

Un hélicoptère tourne au-dessus d'un immeuble pour en faire des photos aériennes.
L'édifice est constitué de onze cubes.



On peut en voir à droite une vue du Nord-Ouest.
Dessiner suivant le même mode de représentation la vue du Sud-Est



Présentées par : L'Inspection Pédagogique Régionale, les Equipes de Professeurs, l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Strasbourg.

Auteurs : Eliane LEGRAND et l'équipe de conception du concours « Mathématiques Sans Frontières ».

Mots-clés : troisième – seconde – rallye.

ISBN : 2-911446-15-1.

Public concerné : Professeurs et élèves des classes de Troisième et Seconde.

Résumé : 3500 classes de Troisième et de Seconde ont concouru en 2000. 90000 élèves de 15 à 17 ans ont ainsi découvert des mathématiques ludiques et attirantes grâce au travail de 30 équipes d'organisation. La présentation d'exercices dans d'autres langues que le français donne à la compétition un attrait supplémentaire.

Prix : 35 F (+ port : 15 F).

Les Étoiles de «MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES» 1997-2000 -- Fascicule 6 -- Edition internationale

français, allemand, italien, anglais, espagnol, polonais.

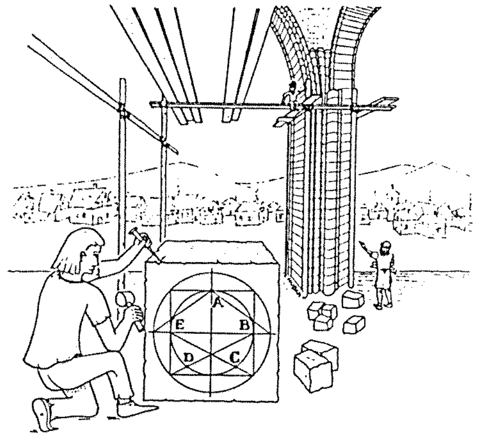
Aufgabe 13 15 Punkte ***Genau?***

Um ein regelmäßiges Fünfeck zu erhalten, benutzten die Bauleute des Mittelalters die folgende Konstruktion:

Man zeichnet ein Quadrat mit seinen Mittelsenkrechten, seinem Inkreis und seinem Umkreis. Die fünf Eckpunkte A, B, C, D und E liegen auf dem Inkreis. Man konstruiert diese Punkte so, wie es auf der Zeichnung zu sehen ist.

Sind diese fünf Eckpunkte in gleichen Abständen auf dem Inkreis verteilt?

Begründe die Antwort.

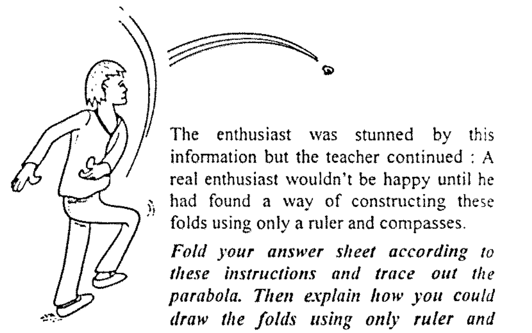


QUESTION 7 10 POINTS ***Folding***

When the teacher had finally stopped talking one of the enthusiastic pupils asked him : What curve is traced out by a stone thrown in the air ?

The teacher answered : Good question. It's a parabola and here's a simple method of drawing one.

Mark a point F on the long axis of symmetry of an A4 sheet of paper, 4 cm from the edge AB. Mark a point M on AB, place M on top of F and mark the fold. Start again changing the position of M on the edge AB. The folds are the envelope of a parabola and when you have made enough folds it is easily seen.



The enthusiast was stunned by this information but the teacher continued : A real enthusiast wouldn't be happy until he had found a way of constructing these folds using only a ruler and compasses.

Fold your answer sheet according to these instructions and trace out the parabola. Then explain how you could draw the folds using only ruler and compasses.

ISBN : 2-911446-16-X.

Prix : 60 F (+ port : 20 F).

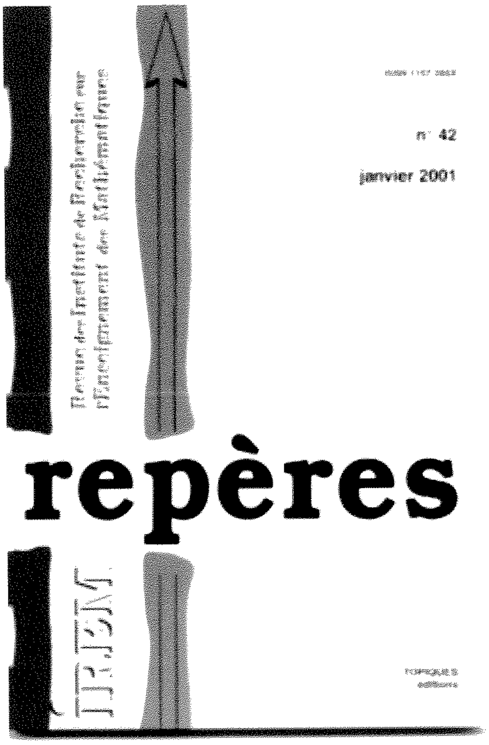
Est-t-il bien raisonnable que REPÈRES-IREM soit absent du CDI des collèges et des lycées et de la bibliothèque des enseignants de Mathématiques?

REPÈRES-IREM,

La revue des IREM de France,

entame sa deuxième décennie.

Reflet de l'important travail de réflexion et d'expérimentation mené dans le réseau des IREM, REPÈRES-IREM propose à ses lecteurs :



– des articles de fond sur les mathématiques et leur enseignement ;
– des réflexions et des travaux menés en commun par des enseignants et des chercheurs en didactique et en histoire des mathématiques ;
– des recherches et des expérimentations à propos des nouvelles technologies ;
– des articles sur la formation initiale et continue des enseignants ;
– des points de vue et des débats ;
– des notes de lecture ;
– des informations sur les activités du réseau des IREM (colloques, universités d'été, publications).

Ces textes concernent tous les niveaux d'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université. Ils témoignent de l'extraordinaire vitalité des IREM, en dépit des faibles moyens dont ils disposent…

Repères-Irem figure sur le site des IREM :
http://www.univ-irem.fr/commissions.html

REPÈRES-IREM paraît 4 fois l'an..
Prix du numéro : 70 F.
Abonnement : Etablissements 250 F. Particuliers 200 F.
Demande d'abonnement à envoyer à :
TOPIQUES ÉDITIONS 3 place Jeanne d'Arc 57000 METZ
Téléphone-télécopie : 03 87 75 75 19
accompagnée du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel