Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de première

1. De Fromentine à l'Ile d'Yeu

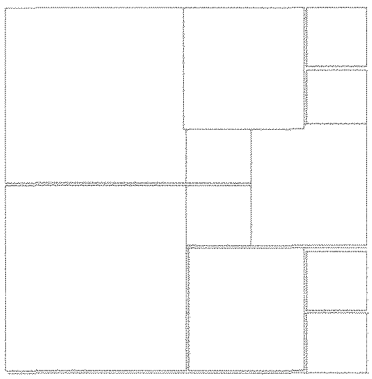
Deux bacs partent en même temps, l'un, l'Amporelle, de Fromentine vers l'Ile d'Yeu, l'autre, l'Insula Oya, de l'Ile d'Yeu vers Fromentine. L'Amporelle navigue plus rapidement que l'Insula Oya. Ils se croisent à la hauteur d'une bouée indiquant que l'Ile d'Yeu est à 7 km.

Une fois arrivés à destination, les deux bateaux s'arrêtent à quai pour débarquer et prendre leurs passagers, l'Amporelle restant à quai un peu plus longtemps que l'Insula Oya. Puis ils repartent pour leur point de départ et se croisent à nouveau à la hauteur d'une bouée indiquant que Fromentine est à 16,5 km.

Sachant qu'au moment de leur deuxième rencontre l'Insula Oya a navigué trois fois plus longtemps que l'Amporelle, quelle distance sépare Fromentine de l'Ile d'Yeu ?

2. Carré n-carrelable

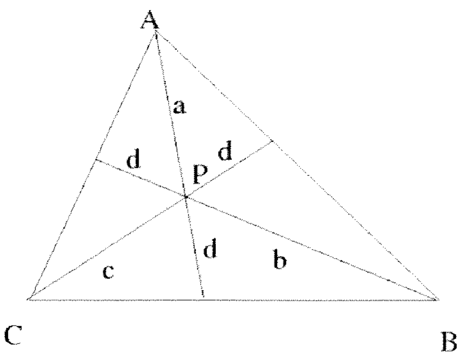
Un carré qui peut être exactement recouvert sans chevauchement par n carrés de tailles quelconques, dont les côtés sont parallèles à ses côtés, est dit n-carrelable. Par exemple, ce carré est 11-carrelable.



On se donne un carré. Pour quelles valeurs de n est-il n-carrelable ?

3. Dans un triangle

Trois droites issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en P, intérieur au triangle. On note a, b, c, d les longueurs des segments issus de P comme indiqué sur la figure.



Sachant que $a + b + c = 43$ et $d = 3$, calculer le produit abc.

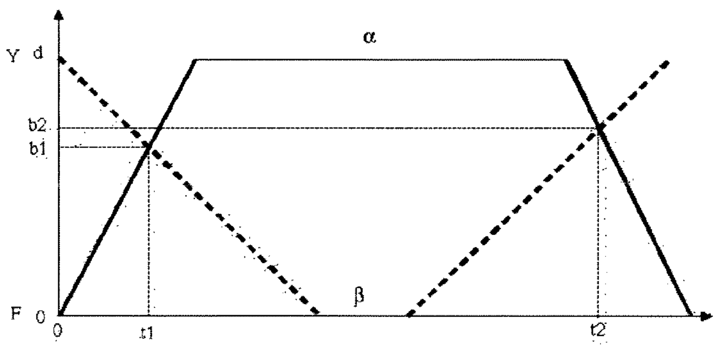
Réponses

Sujet 1. La distance Fromentine - Ile d'Yeu est de 22 km.
Sujet 2. Pour tout n entier positif autre que 2, 3 ou 5, un carré est n-carrelable.
Sujet 3. Le produit abc est égal à 441.

Solutions

Sujet 1

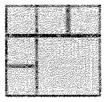
Un graphique temps-distances permet de représenter la situation décrite par l'énoncé. Sur l'axe des temps, en abscisse, on a indiqué les instants de croisement t1 et t2. Sur l'axe des distances (Fromentine étant placée à l'origine 0 et Yeu à la distance d à trouver), on a indiqué par b_1 et b_2 les emplacements des bouées. *Note à l'intention de ceux qui sont déjà allés ou se rendront à Port-Joinville : on ne peut apercevoir de telles bouées indiquant des distances, qui plus est en kilomètres plutôt qu'en milles, que si l'on est candidat à un Rallye Mathématique !* Sur le graphique, les trajets de l'Amporelle, dont on notera V_1 la vitesse, sont représentés par un trait continu épais et ceux de l'Insula Oya, de vitesse V_2, par un trait discontinu également épais. Sur le graphique, les durées d'accostage sont désignées par la lettre grecque α pour l'Amporelle et par la lettre grecque β pour l'Insula Oya.



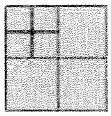
Le croisement des bateaux à l'instant t_1 permet d'écrire la relation : $V_1(d - b_1) = V_2\, b_1$, soit $7\, V_1 = (d - 7)\, V_2$. À l'instant t_2, la distance parcourue par l'Amporelle est :
$V_1(t_2 - \alpha) = d + (d - b_2) = 2d - b_2$. Au même instant t_2, la distance parcourue par l'Insula Oya est : $V_2(t_2 - \beta) = d + b_2$. L'énoncé indique : $t_2 - \beta = 3(t_2 - \alpha)$.
D'où : $d + b_2 = 3V_2(t_2 - \alpha) = 21V_1\frac{t_2 - \alpha}{d - 7}$. Il en résulte : $d + b_2 = 21\frac{2d - b_2}{d - 7}$, soit :
$(d - 7)(d + 16{,}5) = 21(2d - 16{,}5)$ et, après multiplication par 2 :
$(d - 7)(2d + 33) = 21(4d - 33)$. Cette équation s'écrit aussi : $2d^2 - 65d + 462 = 0$, ou encore : $(d - 22)(2d - 21) = 0$. La valeur (en km) $d = 22$ est bien une réponse au problème, alors que la valeur 10,5 est à rejeter (les bacs ne dépassant pas l'île).

Sujet 2.

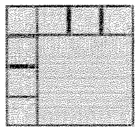
Il est immédiat de partager un carré en quatre, grâce aux médiatrices de ses côtés. On remarque que, si un carré était au départ n-carrelé et si l'on a partagé ainsi en quatre l'un quelconque des morceaux du carrelage, le carré considéré est alors (n + 3)-carrelé.



6



7



8

On voit sur la figure un 6-carrelage, un 7-carrelage (qui utilise le partage en quatre) et un 8-carrelage. Grâce à la remarque ci-dessus, qui permet une **récurrence** de 3 en 3, il en résulte qu'un carré est n-carrelable pour tout $n > 5$. Pour achever l'étude, il convient d'établir que 2, 3 et 5 ne conviennent pas pour carreler. Nous ne détaillons pas ici, nous contentant d'indiquer une piste pour une démonstration rigoureuse : considérer le ou les sommets que le carré considéré et un carreau du carrelage devraient avoir en commun.

Sujet 3.

D'une manière générale, notons XYZ l'aire du triangle de sommets X, Y et Z. Des rapports d'aires pour des triangles de même base sont égaux à des rapports de longueurs :

$$\frac{CPB}{ABC} = \frac{d}{d+a}, \frac{APC}{ABC} = \frac{d}{d+b}, \frac{APC}{ABC} = \frac{d}{d+c}.$$

Il en résulte que $d \times \left[\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d+b} + \frac{1}{d+c}\right] = 1$.

Après réduction au même dénominateur $(d + a)(d + b)(d + c)$ et développement, on obtient la condition : $2d^3 + (a + b + c)d^2 = abc$.

La substitution des valeurs de l'énoncé conduit alors à $abc = 441$.

Mais cela ne nous dit pas si un triangle donnant lieu à ces valeurs existe effectivement…

Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de Terminale

1. Millésime et Parties Entières

Combien de nombres parmi les 2001 premiers entiers strictement positifs peuvent s'écrire sous la forme $E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$

où x est un nombre réel et E (z) désigne la partie entière de z, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à z (par exemple $E(3{,}2) = 3$ et $E(-3{,}2) = -4$) ?

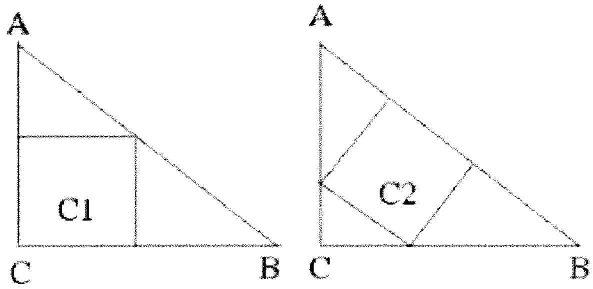
2. le Vieux Magnéto

Un magnétophone ancien nécessite 8 minutes pour rembobiner totalement une cassette ; la vitesse de rotation de l'axe de la bobine est constante. Après lecture, la bande se trouve intégralement sur une bobine et l'on procède au rembobinage.

On désire estimer le temps nécessaire au rembobinage du premier quart de la bande. Emile prétend qu'il faudra environ 3 minutes et Claire pense que 4 minutes seront nécessaires. Qu'en pensez-vous ? On pourra négliger le rayon de l'axe des bobines et assimiler chaque spire à un cercle.

3. Histoires d'Aires

On dispose d'un triangle ABC rectangle en C. Deux carrés C 1 et C 2 sont inscrits dans le triangle comme indiqué sur la figure.



Déterminer la longueur AC + CB sachant que C 1 et C 2 ont pour aire respective 441 cm^2 et 440 cm^2.

Réponses.

Sujet 1. Parmi les entiers de 1 à 2001, on obtient les 1201 entiers dont l'écriture décimale se termine par l'un des chiffres 0, 1, 2, 4, 5 ou 6.
Sujet 2. Dans les conditions indiquées par l'énoncé, 4 minutes sont nécessaires.
Sujet 3. La longueur AC + CB est égale à 462 cm.

Solutions.

1. Sujet 1

Posons $f(x) = E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$. Une périodicité s'observe sans difficulté, à savoir : $f(x + 1/2) = f(x) + 10$. Il suffit alors de connaître les entiers que l'on obtient lorsque x est choisi dans l'intervalle [0, 1/2], puis de décaler de 10 en 10 ces entiers.

La fonction E(x) a un saut au passage de chaque entier, donc E(2x) a un saut aux passages de demis et de même pour les autres termes de f(x). En réduisant au même dénominateur les fractions pour lesquelles se produisent des sauts, on est amené à envisager celles de dénominateur 24. On obtient : $f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{24}\right) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 1$, $f\left(\frac{5}{24}\right) = 2$, $f\left(\frac{6}{24}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$, $f\left(\frac{8}{24}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 5$, $f\left(\frac{11}{24}\right) = 6$, $f\left(\frac{12}{24}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

Les résultats ci-dessus permettent d'affirmer que les valeurs atteintes par f sont toutes les valeurs entières dont l'écriture décimale ne se termine ni par 3, ni par 7, par 8 ou par 9. Cela fait 6 nombres par dizaine (pour la première dizaine, 0 est à exclure, mais cela est compensé par la présence de 2000), donc 1200 nombres de 1 à 2000, auxquels il convient d'adjoindre 2001.

Sujet 2

Désignons par e l'épaisseur de la bande magnétique. La surface visible de bande enroulée a une aire A qui peut être calculée de deux façons : soit $A = e \times l$, où l est la longueur de bande enroulée, soit $A = \pi \times r^2$, où r est le rayon de bobine obtenu pour cette longueur enroulée. Il en résulte $l = \frac{\pi \times r^2}{e}$. Lorsque toute la bande est enroulée, on obtient $L = \frac{\pi \times R^2}{e}$. Ainsi, pour $l = \frac{L}{4}$, il vient $l = \frac{\pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2}{e}$, d'où $r = \frac{R}{2}$. Autrement dit, le quart de la longueur donne lieu au rayon moitié.

Et la rotation uniforme que cite l'énoncé, où en est il question dans ce qui précède ? Nulle part, mais il suffit maintenant d'observer que le rayon de bobine obtenu lors de l'enroulement augmente à chaque tour de l'épaisseur e. Ainsi le rayon de la bobine sera une fonction linéaire du temps : un rayon moitié est atteint à l'issue d'un temps moitié. Il faut donc donner raison à Claire.

Mais alors, le légendaire Émile se serait-il pour une fois hasardé à tenir des propos infondés ? Ce serait mal le connaître : il avait été surpris un chronomètre à la main en train d'observer le défilement de bandes de cassettes. S'il a dit environ 3 minutes, il convient de lui faire ce crédit et c'est donc que le modèle consistant à négliger le rayon r_0 *de l'axe des bobines ne doit pas être tout à fait correct. Si vous souhaitez approfondir la réflexion, cherchez une valeur du rapport* $\frac{R}{r_0}$ *qui soit compatible avec l'évaluation d'Émile.*

Sujet 3

Considérons un repère dont l'axe des x soit porté par CB et l'axe des y par CA. En posant selon l'usage fréquent CB = a et CA = b, on obtient pour équation de la droite (AB) : $bx + ay = ab$.

Puisque la racine carrée de 441 est 21, la droite (AB) passe par le point D de coordonnées (21 ; 21). On en déduit qu'une condition qui lie a et b est $21(a + b) = ab$.

Désignons par rac(x) la racine carrée d'un nombre positif x. Considérons l'homothétie de centre C et de rapport $k = \text{rac}[440/(a^2 + b^2)]$. Elle transforme AB en un segment A'B' de longueur rac(440).

Le carré C2 aura bien le segment A'B' comme un de ses côtés si la distance du point B' à la droite AB est égale à $\sqrt{440}$.

L'équation de (AB) s'écrivant $bx + ay - ab = 0$, la distance à (AB) d'un point quelconque M de coordonnées (x, y) est $d(M, AB) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. En particulier, pour B de coordonnées (ka, 0), on obtient $d(B', AB) = \frac{|kab - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab(1 - k)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. En reportant la valeur de k, il vient $d(B', AB) = ab\,\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{440}}{a^2 + b^2}$

Introduisons la variable $u = a + b$, qui conduit à écrire $ab = 21(a + b) = 21u$ et $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = u^2 - 42u$. L'équation $d(B', AB) = \text{rac}(440)$ s'écrit alors :

$21u\frac{\sqrt{u^2 - 42u} - \sqrt{440}}{u^2 - 42u} = \sqrt{440}$ d'où en simplifiant : $21[\sqrt{u^2 - 42u} - \sqrt{440}] = \sqrt{440}\,(u - 42)$.

On en déduit : $21\sqrt{u^2 - 42u} = \sqrt{440}\,(u - 21)$ d'où, en élevant au carré :

$u^2 - 42u - 440 \times 441 = 0$, dont le discriminant réduit est 441^2. L'équation s'écrit donc $(u + 420)(u - 462) = 0$. Seule la solution positive $u = 462$ convient.

À partir de la somme $S = a + b = 462$ et du produit $P = ab = 21 \times 462$, l'équation $X^2 - SX + P = 0$ fournit les valeurs de a et b, qui, tous calculs faits, sont : $21(11 + \sqrt{99})$ et $21(11 - \sqrt{99})$. Des valeurs approchées sont 439,95 et 22,05. L'écart de tailles fait que la représentation géométrique précise de la situation serait peu lisible !