PROBABILITÉS, RÉALITÉS ET… PESANTEUR(S)[1]

Il est rare qu'un problème économique et social d'envergure puisse être éclairé de façon décisive par le recours à des mathématiques du niveau de Terminale S. Actuellement éditorialiste de l'Express, Claude ALLEGRE en propose un exemple, lumineux au premier abord, qui pourrait être soumis aux élèves. Dans son « Éphéméride » du n° 2591 (1 au7 mars 2001), il écrit :

> *« Prenons pour exemple une maladie rare qui atteint, disons 1 individu sur 10 000 (ce peut être le Sida ou la maladie de la vache folle). On met au point un test pour détecter si un individu est infecté par la maladie. Ce test donne des résultats fiables dans 99,9% des cas. C'est donc a priori un excellent test. Supposons à présent qu'on pratique le test sur un individu pris au hasard et que ce test soit positif. Quelle est la probabilité que l'individu ainsi testé soit effectivement infecté ? Le calcul des probabilités nous répond sans hésiter 10% (9% exactement). Autrement dit, alors que le test est positif, l'individu a 90% de chances d'être sain ! ».*

Et il poursuit :

> *« Si dans notre exemple la maladie atteignait 1% des individus, le test positif sur un individu pris au hasard l'informerait qu'il a plus de 90% de chances d'être infecté ».*

J'avoue ma stupéfaction et mon incrédulité à la première lecture. J'ai pris mon stylo et j'ai transformé le texte en arborescence avec des probabilités conditionnelles. Dans le premier cas, la probabilité d'être infecté sachant le test positif est de 9,08% ! Dans la seconde hypothèse, cette probabilité passe à 90,98%. ! Les résultats sont irréfutables.

Les tests sont-ils utiles ? demande Claude ALLEGRE. Il déduit des résultats obtenus que :

> *« Les tests de dépistage ne sont efficaces que pour les maladies fréquentes ou les épidémies. Dans le cas des maladies rares, contrairement à ce que disent les bons esprits, (« le test n'est pas parfait, mais ça vaut mieux que rien »), il faut que les tests soient parfaits. »*

> *« Si on applique un tel test (excellent mais imparfait) pour dépister la maladie de la vache folle et qu'on abatte les vaches testées positives, on va déclencher un massacre bovin généralisé, ruineux et inutile. »*

Aucune des personnes auxquelles j'ai soumis le problème n'a eu l'intuition du résultat qu'un élève de Terminale S, armé d'un stylo et formé aux probabilités du baccalauréat, est capable de vérifier. « La connaissance scientifique est l'inverse du bon sens. Croire que l'on peut comprendre le monde avec comme seul bagage le bon sens, même appuyé sur l'intelligence, est une erreur ». L'instrument qui défie le bon sens, infirme (même armé d'intelligence et de beaucoup d'ordinateurs) face à la réalité

[1] Ce texte doit beaucoup à Henri LOMBARDI, dont la critique sévère de la première version m'a obligé à affiner une pensée un peu approximative. Le débat permet de progresser.

complexe du monde, s'appelle les Mathématiques. Le journaliste Claude ALLEGRE rappelle ce que le ministre avait si violemment (et si stupidement) contesté...

À y regarder de plus près cependant, l'exemple proposé n'est pas aussi limpide qu'il y paraît au premier abord. Il exige une double prise de distance : que signifie « un test fiable à 99,9% ? ». Mais alors, quelles décisions prendre si, lorsqu'on pratique les tests, on obtient les résultats décrits ?

Sans doute Monsieur ALLEGRE considère-t-il que la probabilité d'être sain sachant que le test est positif (**P**(S/P)) est égale à celle d'être malade sachant que le test est négatif (**P**(M/N)) et que leur valeur commune est de 0,001. Or il n'y a aucune raison biologique pour que les deux probabilités soient égales. Il serait prudent de les distinguer. Soit y = **P**(S/P)) et z = **P**(M/N). Soit enfin x la probabilité d'être malade : x = **P**(M) . Ces trois nombres sont voisins de 0 (x car la maladie est rare, y et z car le test est réputé excellent. Le calcul fait dans ces hypothèses montre qu'à peu de choses près, la probabilité **P**(M/P) d'être malade sachant que le test est positif est de $\frac{1}{1+\frac{z}{x}}$. La probabilité **P**(M/N) d'être malade sachant que le test est négatif est de l'ordre de xy (ce qui est une excellente nouvelle). On mesure la grande sensibilité de z/x aux variations d'ordre de grandeur de z et x, d'autant **qu'il faut s'interroger sur la façon de les obtenir et sur leur fiabilité.**

Comment connaître précisément la proportion x de bêtes malades sachant que l'incubation se fait silencieusement et qu'on n'a pas de tests permettant de conclure ? Et si on se trompait d'ordre de grandeur ? Pour déterminer z faut-il abattre des bêtes réputées saines et analyser leurs tissus cérébraux, au risque d'affoler le consommateur si z n'est pas aussi négligeable qu'on le suppose ? Les choses sont loin d'être simples.

La décision liée à l'application du test (même pratiqué dans les conditions de l'exemple proposé) est loin d'être indiscutable ! La probabilité d'être testé positif est de l'ordre de 1,1 millièmes. Sur une population de 10 000 individus, on peut s'attendre à obtenir 11 tests positifs. On va donc sacrifier 10 bêtes probablement saines sur 10 000. L'hécatombe annoncée est ramenée à de justes proportions. Peut-on payer ce prix pour la sécurité alimentaire de la population (et/ou sa quiétude psychologique) ? La question est d'autant plus pertinente que la probabilité d'être malade avec un test négatif est de l'ordre du dix millionième ! Le test ne laisse échapper (dans les conditions décrites) aucune vache malade (un millième de vache sur 10 000 pour les puristes !)

La décision est politique et mérite débat. La science permet simplement de calculer l'ordre de grandeur du coût de la décision (abattre toutes les bêtes testées positives). À comparer avec le coût de l'analyse des tissus cérébraux de toutes les bêtes (réputées saines) abattues. La science ne saurait trancher à la place des citoyens informés du coût de leurs décisions

Il n'est en revanche point besoin de mathématiques pour réfuter une assertion imprudente (et fausse dans sa généralité) dans laquelle Claude Allègre s'enferre depuis de longs mois et qu'il répète dans le même éditorial : « Tous les corps tombent dans le vide avec la même vitesse, et c'est vrai aussi dans l'air en première approximation pour des trajets de quelques mètres. Tout le monde aujourd'hui a admis cela, sauf quelques journalistes du Canard enchaîné qui, il y a deux ans évoquaient l'effet de la résistance de l'air exactement comme l'évoquaient les collègues scolastiques de Galilée opposés à sa théorie et insensibles à l'expérience. » On retrouve la légendaire morgue et le mépris de l'ancien ministre pour tous ceux qui ne partagent pas ses avis, même clairement erronés.

Il n'est évidemment pas vrai que dans l'air, même en première approximation, deux objets quelconques tombent à la même vitesse. Voici **deux ballons sphériques de même rayon**, l'un de basket, l'autre publicitaire pour enfant, gonflé à la bouche. La résistance de l'air est la même pour les deux objets. Qui croira qu'ils tombent à la même vitesse ? Qui croira qu'un parachutiste tombe à la même vitesse, parachute ouvert ou fermé ? On discerne dans ces contre-exemples simples l'erreur de raisonnement de Monsieur Allègre. La résistance de l'air peut être considérable selon la forme de l'objet, et conduire à un mouvement de chute uniforme (parachute ouvert), alors que l'objet de même poids (et de forme compacte) tombe de manière uniformément accélérée. La masse de l'objet a (et elle seule) une influence décisive dans le premier exemple. **Masse et forme jouent évidemment un rôle dans la chute des objets non ponctuels dans l'air.**

Les mathématiques mettent en évidence les paramètres pertinents de la chute des corps dans l'air. Si l'on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse (cas des vitesses pas trop importantes), à la forme de l'objet (k est le Cx) et à l'aire de la projection de l'objet sur le plan perpendiculaire au déplacement (S) on obtient l'équation différentielle $mx''(t) + kSx'(t) - mg = 0$ dont la solution (avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$) est : $x(t) = g\left(\frac{m}{kS}\right)^2 \times \left(e^{\frac{-kSt}{m}} - 1\right) + \frac{mgt}{kS}$

Dans le cas où $\frac{kSt}{m}$ est voisin de 0 (mais alors seulement), le développement de Taylor à l'ordre 2 de x(t) restitue : $x(t) = 0{,}5\ gt^2$. Le paramètre pertinent est $u = \frac{kSt}{m}$. Si u est grand, le mouvement observé ne coïncidera avec le mouvement dans le vide que dans un intervalle infinitésimal, et non sur quelques mètres[2]. On voit en particulier que la masse joue un rôle, comme le confirme l'expérience.

Les mathématiques peuvent éclairer certains problèmes économiques et scientifiques. Elles évitent à l'esprit honnête de répéter durant des années les mêmes erreurs. Mais elles ne peuvent rien pour qui décide d'avoir raison contre l'évidence.

G.KUNTZ

[2] Prenons $g = 10\ m.s^{-2}$ et $t = 1$ s. Les distances parcourues en mètres sont 4,98 (u = 0,01), 4,84 (u = 0,1), 3,67 (u = 1), 1,6 (u = 5), 0,9 si u = 10. À comparer avec les 5 mètres parcourus dans le vide.