# DESCARTES : LE TEMPS DE LA CONSTRUCTION DU SAVOIR

Alain MERCIER
École Nationale de Formation Agronomique

## Exposé des motifs

On peut penser que le projet cartésien décrit dans les *Regulæ ad directionem ingenii* est une tentative de reproduire volontairement les conditions qui ont produit les découvertes mathématiques de DESCARTES. Le texte des *Regulæ* contient la description d'une organisation nouvelle du savoir dont l'auteur affirme la nécessité et la force ; et nous avons, au titre de démonstration, un exposé des découvertes dont DESCARTES cherche à reproduire les conditions d'existence dans le texte de *La Géométrie* (écrit en 1637, et qui constitue le troisième Essai de la méthode). DESCARTES annonce en effet dans *Le Discours de la méthode* que cette réorganisation est à l'origine de la production qu'il publie. Il expose ainsi comment la méthode qu'il décrit a été son guide dans les études qu'il a entreprises après la fin de sa scolarité (au Collège de La Flèche jusqu'en 1614, puis à l'université de droit de Poitiers jusque vers 1616). Le *Discours* peut donc être considéré comme la préface à une première publication des résultats de ce projet, qui s'y énonce par quatre préceptes en forme d'axiomes (ces préceptes permettent de reconstruire le contenu des *Regulæ* – que l'auteur ne cite pas –, c'est un texte inachevé, à usage privé).

L'intention **autodidactique** de DESCARTES – dans un premier temps, les *Regulæ* exposent la méthode à l'intention de leur auteur –, l'a amené en effet à mettre en doute les savoirs qui lui ont été enseignés, pour « revenir aux sources de l'intuition » et imaginer une reconstruction complète qui enchaînerait seulement les certitudes qu'il a pu en retirer, en se nourrissant de son propre fonds. Nous l'avons montré en 1987, avec Yves CHEVALLARD, (*Sur la formation historique du temps didactique*, IREM d'Aix-Marseille) DESCARTES affirme ainsi que le changement, qui amènera la production scientifique à quitter le terrain des pratiques scolastiques, consiste dans le développement d'un corpus scientifique, libéré de l'accumulation encyclopédique par **le travail de la rationalité interne de son exposé** ; il poursuit aussitôt en proposant que l'enseignement suive ce même précepte. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il critique le projet de COMENIUS : *« Outre qu'il est souvent très malaisé de bien juger de ce que les autres ont écrit et d'en tirer le meilleur sans rien prendre avec cela de mauvais, les vérités particulières qui sont par cy par là dans les livres sont si détachées et si indépendantes les unes des autres, que je croy qu'il serait besoin de plus d'esprit et d'industrie pour les assembler en un corps bien proportionné et bien en ordre, suivant le désir de l'auteur (Comenius), que pour composer un tel corps de ses inventions.»* (Lettre à MERSENNE, cité par MANDROU, 1973, *Des humanistes aux hommes de science*, Seuil, p.164).

Le travail sur le savoir que DESCARTES propose est très précisément celui que la théorie de la transposition didactique décrit comme l'effet de l'intention d'enseigner. Ce travail de transposition produit *«... l'ordre et l'arrangement des objets sur lesquels il faut faire porter la pénétration de l'intelligence... nous y resterons soigneusement fidèles si... partant des (propositions les) plus simples de toutes, nous tâchons de nous élever par les mêmes degrés... »* Ce temps, fondé sur la description rationnelle du savoir, est très précisément le temps didactique.

Mais ce temps, produit par l'exposition ordonnée du savoir, ne permet semble-t-il qu'une forme de recommencement, une reprise et une réorganisation des savoirs déjà connus. Pour produire du nouveau sur l'élan de cette reconstruction, il faut supposer que le nouveau puisse sortir de l'ancien, ce qui ne mène pas loin celui qui ne sait pas déjà beaucoup, ou qui avance sans maître. Car, chaque fois que la déformation professionnelle d'un enseignant lui fait confondre l'organisation du savoir qu'il expose avec l'organisation du savoir quand il vient d'être produit, c'est-à-dire, chaque fois qu'un enseignant oublie l'existence d'une transposition didactique, Guy BROUSSEAU le rappelle sous cette forme : *« les raisons de l'exposé du savoir* (qui produisent le texte du savoir enseigné) *ne sont pas des causes de l'invention du savoir* (ces causes sont les problèmes, que le savoir permet de résoudre) *»*.

On ne s'étonnera donc pas des multiples remarques sur ce point : ce que DESCARTES expose est d'abord une remise en ordre, disent en substance de nombreux historiens. La question : « Cette remise en ordre accompagne-t-elle un travail de production de savoirs nouveaux ? » est alors posée, et chacun peut retrouver, dans les éléments de l'organisation nouvelle, des matériaux reconnaissables dont la paternité n'est pas cartésienne : nous trouvons là les limites de tout exposé à usage didactique, qui ne nomme pas ses emprunts et semble toujours, comme un bricolage, réalisé avec des matériaux que l'auteur du montage n'a pas pensés depuis leur origine, par lui-même, des matériaux qui gardent la trace de leur origine .

Cependant, *La Géométrie*, annexée au *Discours*, montre un visage que la description précédente ne nous avait pas fait imaginer : car DESCARTES y suit ses préceptes en commençant par un problème qui, s'il doit être considéré comme relevant de l'évidence première, suppose du lecteur une culture scolaire complète relative à la géométrie ancienne ; et les moyens par lesquels il attaque ce problème sont les savoirs algébriques les plus développés parmi ceux dont disposent les mathématiciens de son époque. Ainsi, DESCARTES s'appuie sur le travail des problèmes donnés par la culture ancienne pour avancer avec sûreté dans la voie de la certitude. Cette remarque n'est pas fréquemment posée, parce que la théorie de la transposition didactique ne fait pas partie des outils de l'historien.

De ce fait, *La Géométrie* – considérée comme texte scientifique – est rarement associée au *Discours de la méthode* – considéré comme texte didactique –, alors que le travail d'invention mathématique sur les questions de *La Géométrie* donne très probablement à DESCARTES, comme le montre la tentative inachevée des *Regulæ ad directionem ingenii*, l'occasion d'imaginer le « projet d'une science universelle » et le lieu d'expérimentation d'une « méthode » capable de produire une telle science à partir des sciences existantes.

Mon exposé s'appuie en particulier sur l'analyse de Vincent JULLIEN, qui a montré (dans les pages 35 à 50 de *Descartes, La Géométrie de 1637*, Coll. Philosophies, PUF) l'intérêt de la mise en rapport de ces trois textes. C'est donc le paradoxe apparent produit par la mise en rapport de *La Géométrie* avec *Le Discours de la méthode*, que je voudrais travailler ici pour montrer comment il relève d'un paradoxe didactique connu, que les interprétations constructivistes ne peuvent résoudre parce que l'objet de la méthode n'est pas la connaissance dans son état natif, mais l'exposé à usage didactique des savoirs culturellement donnés, dont DESCARTES montre, en particulier dans le cas de *La Géométrie*, la productivité scientifique. Je vais donc tenter d'examiner la méthode comme une description des ***principes des stratégies gagnantes***, ainsi que JULLIEN l'énonce (p. 18) : *« Si l'on comparait l'acquisition de connaissances certaines à un jeu, la méthode ne fournirait pas les "règles du jeu", mais plutôt les principes (ou règles) des stratégies gagnantes »*, en s'appuyant sur une note de J. BRUNSCHWIG dans sa traduction des *Regulæ* (Garnier-Flammarion, note 2, p. 92).

## Introduction

Je considère ici que le *Discours* introduit, à l'intention des lecteurs, le « Projet d'une science universelle qui puisse élever notre nature à son plus haut degré de perfection », puisque c'est sous ce titre que DESCARTES voulait d'abord publier. Cependant, le travail privé de ce projet s'est inscrit dans les *Regulæ*. DESCARTES y a pris, pour fondement et modèle, les règles de l'étude et les produits de l'instruction mathématique, parce qu'il les pense avec plus de précision et qu'il les met en œuvre avec plus de succès.

Je commencerai par un commentaire de la règle IV, où le projet d'une *Mathesis universalis* s'énonce. *Matanein*, c'est d'abord, selon le *Robert historique*, ce qui peut être enseigné ; c'est-à-dire, le savoir considéré comme discipline d'enseignement : ainsi PLATON débat-il, dans le dialogue du *Ménon*, de la question : « *La vertu est-elle* **enseignable** *?* », et c'est à cette occasion qu'il montre que les mathématiques, pour leur part, sont **enseignables**. Même si SOCRATE pense qu'il ne transmet pas à l'esclave un savoir qui aurait été une possession préalable de SOCRATE, il montre que l'esclave peut, bien questionné, se ressouvenir des mathématiques ; tandis que la vertu n'est pas un objet de réminiscence. Lorsque DESCARTES écrit les *Regulæ*, il expose dans cette règle (Librairie Vrin, 1970, p.27), que le nom de *Mathesis universalis*, qu'il prend alors pour nommer la méthode, vient d'une autre propriété du terme : *«... il n'est presque personne, pourvu qu'il ait seulement touché le seuil des écoles, qui ne distingue facilement parmi ce qui se présente à lui, ce qui appartient à la Mathesis et ce qui appartient aux autres disciplines. En y réfléchissant avec plus d'attention, il me parut enfin clair de rapporter à la Mathesis tout ce en quoi seulement on examine l'ordre et la mesure, sans avoir égard si c'est dans des nombres, des figures, des astres, des sons, ou n'importe quel autre objet, qu'une pareille mesure soit à chercher. Il en résulte qu'il doit y avoir une* <u>*science générale*</u> *(je souligne) qui explique tout ce qu'on peut chercher concernant l'ordre et la mesure, sans les appliquer à une matière spéciale... »* Ainsi, DESCARTES affirme que les disciplines que sont l'Astronomie, la Musique, l'Optique, la Mécanique, ne sont que des noms de *matières* auxquelles s'applique la *Mathesis Universalis*, *« ce qui leur a fait donner le nom de parties des mathématiques. »* c'est pour cela, conclut-il, que *«... conscient de ma faiblesse, j'ai décidé d'observer obstinément un tel ordre dans la recherche des connaissances que, débutant toujours par les objets les plus simples et les plus faciles, je ne passe jamais à d'autres sans qu'il me semble que les premiers ne me laissent plus rien à désirer. C'est pourquoi j'ai cultivé jusqu'ici cette Mathesis Universalis, autant qu'il était en moi, en sorte que je crois pouvoir dans la suite traiter de sciences plus élevées, sans m'y appliquer prématurément. »* La *Mathesis Universalis* est la plus simple des sciences, parce qu'elle est dégagée de la complexité supplémentaire amenée par les objets particuliers des autres sciences.

Les *Regulæ* apparaissent ainsi comme une tentative pour énoncer la *mathesis*, les règles par lesquelles DESCARTES étudie les sciences dans l'ordre qui convient à cette entreprise pour progresser dans les certitudes qui les caractérisent, tandis que les quatre règles du *Discours de la Méthode*, exposent brièvement l'essentiel de ce que nous devons en connaître, pour entrer à sa suite dans le projet de nous instruire en ces sciences nouvelles où la *mathesis* se réalise. Suivant en cela G. ISRAËL je considérerai alors *La Géométrie* comme l'exemple premier du travail de production de la *Mathesis Universalis*, un savoir que, selon DESCARTES, les anciens ont sans doute connu mais qu'ils ont tenu secret : pour lui, la tâche consiste à mettre au jour (à inventer) ce savoir, comme il l'a fait d'abord dans le cas de la géométrie. Ainsi, *La Géométrie* démontre l'efficacité et l'assurance que donne la méthode, et elle en est comme la pierre de touche.

Je ne fais donc pas œuvre d'historien, mais je m'appuie sur la connaissance historique d'un cas et plus précisément, sur une part, relative aux mathématiques, de la biographie didactique d'un élève remarquable. Dans le rapport de DESCARTES aux mathématiques, j'essaierai d'étudier ce qui a formé « la méthode » c'est-à-dire, les gestes **autodidactiques** d'enseignement et d'étude des mathématiques qu'il a lui-même décrits. Qu'on me comprenne bien : j'adhère à l'idée cartésienne, selon laquelle cette méthode ne fait pas discipline, et je ne considère donc pas que la méthode soit un objet d'enseignement possible. La méthode peut seulement faire l'objet d'un discours. Mais *le discours de la méthode expose une connaissance didactique : c'est cette connaissance que je cherche à identifier.*

## Première partie

Je me propose donc de commencer par parcourir les *Regulæ*, pour y étudier les effets d'une intentionnalité didactique qui est d'abord relative à des objets mathématiques : je suivrai ici le travail réalisé avec Yves CHEVALLARD en 1987.

Le premier mouvement consiste à poser, comme je l'ai déjà signalé ici, que le savoir qu'il convient de construire doit suivre **un ordre à part**, pur de toute importation incontrôlée à partir du savoir ambiant. Le doute méthodique est le moyen de ce **recommencement absolu**. Il installe la construction à venir **en un lieu où nul autre discours ne peut venir en contrarier la marche**. Voici ce qu'en dit la Règle II : *« Aussi vaut-il mieux ne jamais étudier que de s'occuper d'objets tellement difficiles, que, sans pouvoir distinguer le vrai du faux, nous soyons forcés d'admettre pour certain ce qui est douteux... En conséquence... nous déclarons qu'il faut se fier seulement à ce qui est parfaitement connu et dont on ne peut douter... »* et la règle III énonce : *« Pour ce qui est des objets considérés, ce n'est pas ce que pense autrui ou ce que nous conjecturons qu'il faut rechercher, mais ce que nous pouvons voir par intuition avec clarté et évidence... »*

DESCARTES commente : *«... par* intuition*, j'entends... le concept que l'intelligence pure et attentive forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons... et dont la certitude est plus grande, à cause de sa plus grande simplicité, que celle de la déduction elle-même... »* L'intuition correspond semble-t-il à ce que les mathématiciens, dans les exposés, nomment des « évidences ». Car tous **les préceptes développés dans les huit premières règles servent à se prémunir contre ce qui pourrait annuler le chemin parcouru**, soit en invalidant un élément initial, soit en invalidant une production intermédiaire, soit en invalidant la direction un moment suivie. Ainsi, et c'est la règle IV, *« Toute la méthode consiste dans l'ordre et l'arrangement des objets... nous y resterons soigneusement fidèles, si nous ramenons graduellement les propositions compliquées et obscures à des propositions plus simples, et ensuite si... nous tâchons de nous élever par degrés à la connaissance de toutes les autres. »* puis, règle VII, *«... il faut passer en revue une à une toutes les choses qui se rattachent à notre but par un mouvement de pensée continu et sans nulle interruption... »* au point que la règle VII précise qu'il ne faut jamais poursuivre au delà d'un point *«... que notre* *entendement ne puisse assez bien voir par intuition…»*

Les règles IX et X précisent la nécessité d'un exercice systématique de la méthode, et DESCARTES poursuit par la règle XI : *« Après l'intuition de quelques propositions simples, quand nous en tirons une autre conclusion, il est utile de parcourir les mêmes conclusions dans un même mouvement continu et nulle part interrompu de la pensée, de réfléchir à leurs rapports mutuels, et d'en concevoir distinctement plusieurs à la fois, autant qu'on le peut…»* et la règle XII indique comment cette intuition productrice de liaisons pertinentes doit être développée. En quelque sorte, il s'agit, en tout point de l'étude, de construire une plate forme de départ, une *intuition* suffisamment proche pour que la certitude soit conservée, et suffisamment vaste pour que la stabilité de la progression à venir soit assurée. *L'intuition apparaît ainsi comme l'expression d'une certitude instruite.*

Les règles XIII et suivantes portent sur les moyens d'utiliser les mathématiques dans une modélisation en posant convenablement les « questions », c'est-à-dire, en identifiant les problèmes de mesure, en utilisant un modèle géométrique intermédiaire, en définissant des notations algébriques simples, en centrant la réflexion sur les relations des grandeurs entre elles plutôt que sur la connaissance de leurs valeurs, en réduisant les relations aux quatre opérations arithmétiques, qu'il faut se garder de chercher à effectuer prématurément, et en exprimant les grandeurs cherchées de plusieurs façons différentes, pour obtenir « des comparaisons entre des choses égales », suite à quoi il sera possible de chercher à réduire les équations ainsi obtenues.

Les *Regulæ* sont inachevées, soit parce qu'elles débouchent en fait sur La Géométrie, soit parce que DESCARTES n'y aboutit pas à l'identification de la *mathesis*, dans la mesure où l'approfondissement des notions impliquées dans le travail scientifique (la grandeur, la pluralité, l'étendue, la mesure, les figures, les notations que l'on peut en faire et les opérations simples sur ces objets dont les notations permettent de rendre compte, etc.) aboutit au mieux à une **algébrisation**. Alors même qu'il démontre l'efficacité de l'**algébrisation** comme système de production de raisonnements, DESCARTES semble avoir hésité à réduire la *Mathesis universalis* à ce qu'en démontre la modélisation algébrique du raisonnement géométrique qu'au même moment il réalisait pourtant avec le succès que l'on sait : comme s'il avait pensé qu'à l'évidence, l'usage absolu de sa méthode allait lui interdire l'intégration des réponses aux questions philosophiques dans le domaine des savoirs constructibles avec certitude, et qu'il avait reculé devant cette découverte.

## Deuxième partie

Je me propose maintenant d'interroger le texte des *Regulæ* à la lumière des théories de la transposition et, plus particulièrement, de la description du temps didactique.

La première idée générale que l'on peut tirer de la visite rapide que nous venons d'en faire, c'est que l'ordre du savoir, que construit l'étude menée selon la méthode, doit être pur de toute concession au savoir déjà connu. C'est **une première fiction propre au jeu didactique** : *le savoir parle de lui-même, il ne s'autorise de personne, il est imperméable aux discours extérieurs.* Nul besoin de références, il est indifférent, hostile à tout éclectisme.

Tel que la théorie de la transposition le définit, le « texte du savoir » produit au terme du processus de transposition didactique possède nécessairement ces propriétés.

Il est absolument linéaire, parfaitement segmentaire. Le texte du savoir s'organise selon la linéarité des raisons internes à un exposé du savoir, et cette linéarité ne suppose ni hésitation ni faille, elle se doit de parcourir exhaustivement le domaine considéré sans laisser aucun lieu dans l'ombre, pour se garantir d'être absolue.

Les difficultés doivent être, par principe, divisibles autant qu'il est nécessaire pour que celui qui franchit chacun des seuils partiels ait de ce fait réalisé toute la progression nécessaire sur ce sujet. C'est **une deuxième série de fictions, propre au jeu didactique** : *l'étude du savoir commence à son début et progresse sans accrocs ni failles, elle produit ainsi des acquis partiels définitifs.* C'est à cette seule condition que le texte du savoir peut trouver son autorité en lui-même, du premier coup.

La nature du texte du savoir est un effet du « contrat didactique » usuel, qui prévaut parce qu'il permet de résoudre pratiquement un paradoxe connu dès l'antiquité, celui de l'injonction faite à l'élève « d'apprendre ce qu'il ne connaît pas et qui par conséquent ne peut pas lui être nommément désigné ». L'organisation didactique du savoir permet à tout moment au professeur de démontrer à l'élève qu'il peut trouver par lui-même ce qu'il ignore, puisque cela se déduit de ce que l'élève sait déjà. Le nouveau provient toujours de l'ancien. Cela suppose que les obstacles puissent toujours être réduits en une suite de degrés telle, que chaque degré nouveau soit une conséquence naturelle des degrés précédents. Ainsi, les degrés déjà franchis ne sont jamais remis en question.

Cependant, la méthode exposée dans les *Regulæ* est réaliste. L'exposé du texte du savoir est sans doute linéaire, mais sa lecture suppose, pour être adaptée à la linéarité de l'organisation, que l'intuition initiale soit à tout moment reconstruite afin de fournir un point d'appui pour la construction à venir. *Les fictions institutionnelles du temps didactique sont porteuses d'injonctions didactiques bien précises, qui renvoient à l'action personnelle de l'élève ce que l'enseignement ne peut prendre en charge.* C'est une définition par défaut. **La solution tient dans l'étude et dans son lieu**, qui est nécessairement extérieur, mais qui doit pourtant veiller à rester complémentaire à la l'enseignement proprement dit.

Les règles IX à XII décrivent les gestes de l'étude, par lesquels, en lien avec l'enseignement mais sous sa responsabilité personnelle, l'élève peut « suivre » le « cours » du texte du savoir qui se déroule en classe. Tel est, pour moi, le sens didactique du travail renouvelé de l'intuition auquel DESCARTES s'astreint en suivant la règle XI, qui termine sur un exemple remarquable de ce que peut être l'intuition… du degré d'un problème **algébrisé** : *« Par exemple, supposons que je parcoure quelques grandeurs continuellement proportionnelles, voici tout ce à quoi je réfléchirai. C'est par un concept semblable… que je reconnais le rapport qui existe entre la première et la seconde, entre la seconde et la troisième… Mais je ne puis concevoir aussi facilement quelle est la dépendance de la seconde à l'égard de la première et de la troisième à la fois… car cela ne peut se faire qu'à l'aide d'un concept enveloppant à la fois deux des précédents. Étant donné seulement la première et la quatrième, il me sera encore plus difficile de voir par l'intuition les deux moyennes, parce qu'il y a ici trois concepts impliqués… »*

Le *Discours* reprend les conséquences de ces intuitions premières, en un résumé saisissant de cela seul, qui doit être retenu par le lecteur des travaux cartésiens pour profiter au mieux de l'exposé qui en est publié.

Le premier précepte donne le point de départ de l'exposé : *« ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle. »* Une attitude qui ne prédispose guère à reconnaître une filiation historique, à se référer à une œuvre : *le savoir cartésien n'a pas de passé*. Ce précepte donne une règle de jugement de la qualité du point choisi : ***« ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute »***.

Le second précepte garantit une progression régulière. DESCARTES organise celle-ci en supposant qu'il est toujours possible de ***« diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre »***. Le discours tenu dans ces conditions se déploie selon une ligne absolument singulière et ne revient jamais sur ses pas. De ce fait, *le discours tenu ne s'autorise de personne que de son organisation propre*.

Le troisième précepte décrit le mouvement par lequel un chemin de cette sorte peut être tracé : ***« conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples... à connaître, ... jusques à la connaissance des plus composés ; ... supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement »***. C'est une garantie nécessaire à qui vient d'affirmer qu'il ne s'autorisera désormais que de lui-même. Mais *cette attitude interdit l'irruption d'un nouveau* qui pourrait annuler le chemin parcouru : tout nouveau procède donc nécessairement de l'anciennement connu.

Le quatrième prévient contre les lacunes, qui pourraient hypothéquer le cheminement vers la vérité : ***« faire partout des dénombrements si entiers, ... que je fusse assuré de ne rien omettre. »*** Il pourrait être interprété comme le signe d'un fantasme d'exhaustivité, mais il est évident qu'il n'est lui aussi que la conséquence incontournable du second. C'est encore en effet *une garantie contre la possible irruption d'un nouveau qui imposerait de tout reprendre du début*.

Car pour DESCARTES, *étudier le savoir, c'est d'abord se l'exposer à soi-même*. Il ne pense pas que tout élève doive agir ainsi, puisqu'il reproche à ses professeurs leur carence sur ce point. Le dernier exemple en date d'une attitude semblable à celle de DESCARTES est naturellement celui de Nicolas BOURBAKI, dont le traité « reprend les mathématiques à leur début », parce que l'enseignement qui lui était proposé posait les constructions nouvelles sur les fondations anciennes. Remarquons à ce propos que le coût énorme d'une reconstruction menée avec la rigueur cartésienne impose que son auteur se fasse l'idée que, au moins, le travail entrepris sera définitif. Or on sait, aujourd'hui, que beaucoup d'autres ont, depuis DESCARTES, entrepris de reprendre la tâche et qu'ils ont tous dû imaginer que leur reconstruction serait, enfin, définitive.

Ainsi, l'élève DESCARTES est obligé de s'exposer à lui-même le savoir selon ses raisons. L'expression est de Gaston Bachelard, qui semble avoir pratiqué cet exercice à son usage personnel tant il emploie ce terme comme si tous les élèves procédaient de cette manière, DESCARTES « repasse son cours ». Certains parmi vous se souviennent sans doute avoir eu ce projet, et l'avoir réalisé avec plus ou moins de fermeté et de rigueur. C'est le **projet de s'enseigner soi-même, tel qu'il peut se former après qu'un premier enseignement ait présenté les objets sur lesquels l'effort autodidactique doit porter**.

On peut alors considérer que le projet cartésien est une sorte de théorie de l'enseignement. Mais l'étude des conditions de production de cette théorie, que nous avons esquissée ici, montre ce qu'en seront les limites, puisque *cet enseignement suppose que l'élève connaisse déjà ce qui lui sera enseigné selon la raison*. Nous terminerons alors cet exposé en recherchant ce que nous pouvons en apprendre, et ce qu'il nous restera à connaître.

## Troisième partie

DESCARTES a décrit précisément ce que Yves CHEVALLARD a appelé le temps didactique. La théorie en a été exposée pour la première fois en 1980, dans le chapitre 8 de *La Transposition Didactique,* et nous en avons exposé la genèse historique dans un ouvrage publié par l'IREM d'Aix-Marseille en 1987.

C'est, depuis deux siècles, le temps scolaire ordinaire ; ce fut d'abord le temps de l'instruction des enfants qu'imagina COMENIUS dans *« la Grande Didactique »* ; ce fut, après DESCARTES, le temps de l'enseignement des sciences ; c'est surtout devenu, progressivement, le temps de toutes les écoles « à l'occidentale », qui organisent l'enseignement progressif des enfants selon leur âge, en commençant par des savoirs élémentaires produits spécialement à l'usage didactique : « B.A.-BA ». Le temps didactique est progressif, fondé sur un exposé du savoir qui se présente comme la lecture d'un texte. L'exposé didactique part du certain, se fonde sur la division des difficultés, mène du simple au composé, et se prémunit contre toute nécessité de retour en arrière en prétendant construire des acquis définitifs. Ainsi, l'avenir se trouve aussi étranger à la construction scolaire moderne (ou à la construction cartésienne) que le passé : nombreux sont les historiens qui ont remarqué à quel point l'auteur de La Géométrie pensait en avoir définitivement terminé avec ce domaine, nombreux sont les élèves et même, les professeurs, qui pensent que, sur les questions qu'ils enseignent, tout a été dit et qu'il n'y a rien de plus à dire, mais surtout qu'il n'y a plus rien à chercher : que dire, encore, des techniques de la division ? Ramené systématiquement à l'ancien, le nouveau n'est pas pensé en tant que tel. L'existence de l'inconnu s'en trouve niée. Le plus souvent, c'est cela qui interdit la réussite de l'organisation linéaire, régulière, irréversible, de la progression : du nouveau émerge, qui n'était pas prévu. Le travail demandé par DESCARTES doit être repris sans cesse, par chaque cohorte d'élèves, par chaque génération de mathématiciens.

Je reviendrai rapidement sur le *Discours de la méthode*, pour en mettre l'interprétation didactique à l'épreuve de l'étude exposée dans le troisième essai, *La Géométrie.*

Car la première lecture de *La Géométrie* étonne le lecteur prévenu, qui s'attend à y voir le travail mathématiques « repris du début », selon l'expression de Nicolas BOURBAKI. Il est vrai que l'on apprenait aussitôt que pour BOURBAKI, le début se trouvait exactement à l'aboutissement des études universitaires : il consistait dans la culture de la Licence de Mathématiques !... Or, voilà que *La Géométrie* commence par un problème qui termine la géométrie grecque et où elle achoppe, et voilà que l'auteur y met en œuvre d'emblée une technique algébrique nouvellement mise au point.

Si l'on considère que le *Discours de la méthode* met la méthode des *Regulæ* à l'épreuve de la réalité d'une étude mathématique, et que *La Géométrie* en expose l'essai, cela semble relever d'une aimable fiction. DESCARTES a pourtant, dans les *Regulæ*, annoncé le travail qui aboutit à la solution du problème de PAPPUS : il présente ainsi, dans *La géométrie*, la manière dont il démontre sa solution : *«... l'équation qui sert à déterminer les points cherchés, ne monte jamais que jusques au carré ; il est évident que la ligne courbe où se trouvent ces points est nécessairement quelqu'une de celles du premier genre ; à cause que cette même équation explique le rapport qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite.../... Au reste, à cause que les équations* *ne montent que jusques au carré, sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer* ... le problème des anciens en trois et quatre lignes est icy entièrement achevé.* » Or, j'ai cité la règle XI, dans laquelle DESCARTES concluait : « ... *Mais je ne puis concevoir aussi facilement quelle est la dépendance de la seconde (proportionnelle) à l'égard de la première et de la troisième à la fois... car cela ne peut se faire qu'à l'aide d'un concept enveloppant à la fois deux des précédents...* » et il est vrai que ce concept est une équation de degré deux : le degré de l'équation mesure, en quelque sorte, le nombre d'objets pris ensemble dans la pensée de leur interrelation. L'équation exprime cette interrelation de telle manière qu'on peut obtenir, en interrogeant les caractères de l'équation, des informations sur l'interrelation. Ces informations portent en particulier sur le nombre d'objets en interrelation, donc sur la difficulté des raisonnements qui peuvent produire une solution du problème.

Car, et c'est l'autre savoir que j'ai appris du rapprochement des *Regulæ* avec *La géométrie* (et, il faut le dire, du travail d'analyse de Vincent JULLIEN), les opérations algébriques sont considérées par DESCARTES comme des modèles du raisonnement géométrique, qui ne porte pas sur des nombres mais sur des grandeurs (des objets mesurables), nommées de la manière la plus simple possible (par une simple lettre) tandis que les opérations élémentaires sur ces grandeurs sont nommées par les opérations élémentaires + et ×. C'est un raisonnement qui produit normalement l'analyse du problème, et cette analyse aboutit à l'énoncé des interrelations entre les objets qui participent à la définition du problème. Le travail consiste ensuite à démêler l'inconnu du connu, en reprenant à partir de l'inconnu maintenant bien identifié. Ce travail d'analyse/synthèse, le calcul algébrique le prend en charge, et le degré des équations selon les inconnues donne la complexité du raisonnement qui permet de démêler l'inconnu du connu[1]. C'est ainsi que DESCARTES peut annoncer superbement, au bout de quatorze pages, avoir « résolu complètement » (en cinq pages) le « problème de PAPPUS en trois, quatre, ou cinq lignes », dans toute sa généralité, puisque c'est un problème de degré deux. DESCARTES poursuit La géométrie par l'exposé de la question de la recherche des moyennes proportionnelles pour exposer la question du degré. Mon hypothèse sur le fait que le travail de l'intuition exposé dans les *Regulæ* permet à l'étudiant de suivre, et même d'imaginer quelque anticipation, semble donc recevoir ici un fondement sérieux. c'est ce point que je voudrais étudier maintenant, pour finir.

La description du temps didactique, mise à l'épreuve de la réalité d'une classe de mathématiques, apparaît comme un texte de didactique-fiction dans la mesure où les élèves qui apprennent sont justement ceux qui trouvent un peu d'espace où agir librement, ceux qui ne se soumettent pas absolument aux fictions didactiques de la progression sans retour dans la suite échelonnée des raisons d'un texte qui contiendrait tout le savoir. Ces fictions, qui semblent être les savoirs des acteurs d'un système didactique, des savoirs pratiques relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage d'une discipline scientifique, correspondent pourtant à des fictions institutionnelles étonnamment efficaces. J'en vois deux raisons.

Premièrement, elles permettent de donner des règles de comportement aux acteurs d'un système qui est fondé sur une injonction paradoxale si nette, qu'elle est relevée par tous les auteurs d'études sur l'enseignement, depuis SOCRATE et le dialogue du *Ménon*,

[1] Josep GASCON a bien étudié cette question dans un numéro récent de (RDM......).

que j'ai cité en introduction. Je l'ai montré en étudiant précisément le texte des *Regulæ*.

Deuxièmement, elles ne rendent pas compte de l'efficacité didactique des comportements qu'elles produisent. Pour des développements, je renverrai l'auditeur intéressé aux travaux que j'ai menés sur ce point depuis maintenant cinq ans (et plus particulièrement à l'article du numéro spécial « didactiques » de la Revue de l'Éducation XXII, à paraître en décembre). ***La Géométrie*** **montre comment l'idée du travail permanent de l'intuition permet à celui qui étudie, au terme de ses études scolaires, de poser comme des problèmes scolaires les questions sur lesquelles ses professeurs ont buté.** Cela étonne toujours les moralistes de l'éducation, les innovateurs de l'enseignement direct des problèmes ou des méthodes, qui voudraient contourner par un côté ou par l'autre la réalité de la transposition didactique des savoirs, mais c'est un fait observable : **l'enseignement de savoirs mathématiques transposés peut produire des élèves qui posent avec assurance des questions nouvelles, dès lors que ces élèves ont appris les gestes de l'étude des œuvres qui leur sont ainsi enseignées**.

## Conclusion

Quel est, alors, le problème de l'enseignement ? C'est d'aider les élèves à réaliser, chacun pour soi-même mais chaque fois, au profit de tous, l'injonction cartésienne. Cela suppose sans doute un professeur conscient des problèmes difficiles qu'il affronte. Mais la conscience ou la connaissance, en ces matières comme en d'autres, ne suffisent pas.

DESCARTES a expliqué dans les règles IX à XIII les préceptes que peut suivre un élève, mais le problème du professeur est celui de la direction d'une étude qui comprendrait la réalisation de ces préceptes. Certaines études didactiques récentes ont commencé de montrer la voie d'une solution possible.

Deux directions de travail se proposent aujourd'hui : l'une consiste à organiser l'étude, par les élèves eux-mêmes, en dehors des heures de classe, à long terme, de certains **« grands problèmes des mathématiques »** : ainsi en est-il par exemple des fractions à l'École Élémentaire, des systèmes de nombres au Collège, des problèmes linéaires et de la linéarisation des problèmes non linéaires au Lycée, etc. Le professeur peut choisir certaines des questions produites, qu'il juge potentiellement plus productives, et les donner comme sujets d'une étude collective plus systématique, les solutions proposées peuvent alors être exposées à intervalles réguliers, elles participent à la progression dans le savoir. **Il s'agit, en parallèle au déroulement du temps didactique ordinaire pour conserver une articulation forte avec la progression scolaire, de faire du professeur un directeur d'étude, sur une partie bien délimitée des savoirs à étudier .**

L'autre consiste à **reprendre, officiellement, au niveau scolaire *n+p*, les savoirs étudiés au niveau *n*, pour tenter de les approfondir en utilisant les outils mathématiques forgés entre temps**. C'était il n'y a guère une pratique courante, qui était même systématique à l'entrée dans un nouveau cycle d'études (Brevet Élémentaire, Troisième, Maths Sup.). C'est aujourd'hui une pratique perdue[2], j'en veux

[2] De ce fait, je peux quotidiennement constater que le jeune certifié a encore tout à apprendre, sur les mathématiques qui lui ont été enseignées et qu'il devra bientôt transmettre, parce que jamais ses études ne lui ont donné l'occasion de revenir sur ce qu'il savait pour le reconstruire, l'occasion de l'examiner selon la méthode : car souvent il ne sait, des mathématiques de l'école, que ce qu'il savait en « passant de classe ». En particulier, il ne sait pas toujours « faire les exercices » qu'il voudrait poser : il arrive même assez souvent qu'il n'ait jamais su, concernant la trigonométrie, ou la combinatoire, la géométrie dans l'espace ou les statistiques, le calcul

pour exemple cet enseignant universitaire, qui, en réponse à la question : « Que sait un élève qui sort du DEUG A ? » s'était écrié : « Dans le meilleur des cas, juste assez pour suivre en Licence sans trop de casse ! » Quel que soit le niveau, la réponse est la même.

Il s'agit dans les deux cas, de **donner aux élèves des moyens personnels aptes à ouvrir leur avenir à l'irruption du nouveau et pour cela, de leur donner une certaine maîtrise de leur passé**. Le travail que nous venons de réaliser en étudiant la méthode d'un élève remarquable montre la pertinence de ces éléments didactiques de réponse.

barycentrique, la rectitude des droites ou la résolution des équations polynomiales, que ce qu'il faut pour être un élève moyen de la classe où de telles questions sont abordées.