ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : LA PERTE DU SENS EST-ELLE SANS RISQUES ?

Gérard KUNTZ (IREM de Strasbourg)

De réduction de programme en réduction de programme, le chapitre « équations différentielles » de Terminale scientifique a été ramené à sa plus simple expression. En fait, le chapitre a disparu en tant que tel et les deux équations différentielles qui restent au programme sont mentionnées dans le chapitre « fonctions usuelles » ! Comme chacun sait, l'équation $y' = ay$ est un aspect de la fonction exponentielle et $y''+\omega^2y = 0$ un reflet des fonctions circulaires !

Les livres scolaires ont emboîté le pas à cette joyeuse rigolade. Fractale[1] par exemple sort du chapeau l'équation différentielle $y''+ \omega^2y = 0$ dans le paragraphe « dérivées successives ». L'élève de Terminale a droit à une phrase unique et définitive :

> *résoudre sur* R *l'équation différentielle* $y''+ \omega^2y = 0$, *c'est déterminer toutes les fonctions* f, *deux fois dérivables sur* R *telles que, pour tout nombre* x *de* $\mathbb{R}$, $f''(x)+\omega^2f(x) = 0$.

Aucune explication sur la raison d'être du problème : pourquoi traite-t-on une telle question ? D'où provient le problème ? À quoi sert cette résolution ? Pas un mot sur la radicale nouveauté qui consiste à prendre une fonction comme inconnue d'une équation.

Fractale considère l'équation différentielle $y' = ay$ en fin du chapitre consacré à l'exponentielle, après sa dérivée et ses primitives. Il ne manque pas d'humour : « Dans le chapitre 2, vous avez étudié l'équation différentielle $y''+\omega^2y = 0$ » ! On est à la page 122, le chapitre 2 se trouve page 35. L'élève de Terminale S n'est pas vraiment frappé par l'unité de la question, éclatée en deux parties fort éloignées dans le livre, sans aucune justification et sans la moindre tentative de montrer l'intérêt, la nouveauté et la profondeur de la démarche. Pas vraiment contrariant et surtout préoccupé de réussite, l'élève de Terminale S conclut qu'il n'y a rien à comprendre et qu'il suffit (une fois encore) d'apprendre les solutions pour les « recracher » à l'examen. Il baille, mais il sait faire ! Et pourtant, il n'est pas bien difficile de donner à cette courte partie du programme l'éclairage qui lui donne sens et intérêt.

Expliquer l'origine et la nature du problème au moyen d'exemples connus des élèves

Les élèves de Terminale connaissent le principe fondamental de la dynamique. Ils ont fait de l'électricité. Voilà deux domaines qui génèrent naturellement de très nombreuses équations différentielles. Il faut savoir « perdre » deux heures (ou davantage) à traiter quelques problèmes introductifs qui vont montrer la nouveauté, l'unité et la puissance de la démarche.

Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation

Un point matériel est soumis à la seule pesanteur. Il part à l'instant O de l'origine du repère avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ faisant avec l'axe des abscisses un angle orienté α. Les élèves savent exprimer les vecteurs vitesse et accélération. En projetant l'équation

$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ sur les deux axes, ils obtiennent les relations suivantes :

[1] Éditions Bordas.

$x''(t) = 0$; $y''(t) = g$, avec des notations habituelles. **Ces relations sont d'un type totalement nouveau.** Les fonctions x(t) et y(t), coordonnées de M en fonction du temps sont inconnues (ce sont elles qu'ont aimerait déterminer). Mais leurs dérivées seconde obéissent aux relations que l'on vient d'écrire et qui permettent sans difficulté, avec les seules connaissances des élèves de Terminale (primitives) , de remonter aux fonctions elles-mêmes :

$$x'(t)=\text{constante}=V_0\cos(\alpha)\ ;\ y'(t)=gt+V_0\sin(\alpha) \qquad \text{et}$$

$$x(t)=V_0\cos(\alpha)\times t\ ;\ y(t)=\frac{1}{2}g\,t^2+V_0\sin(\alpha)\times t.$$

Pour calculer la valeur des constantes qui figurent dans les primitives, les conditions initiales (vitesse et position initiales) sont déterminantes : on fait comprendre à l'élève que, parmi tous les mouvements possibles, un seul correspond **aux conditions** réelles du problème, ce qui rejoint l'intuition qu'il en a. On peut alors achever l'exercice (de faible difficulté technique) en établissant que la trajectoire du point est parabolique. Il n'est pas interdit de faire remarquer que le même traitement s'applique au mouvement d'un électron dans un champ électrostatique.

Pour la première fois, l'élève rencontre des relations portant sur des dérivées de FONCTIONS INCONNUES. Ces relations expriment des **INVARIANTS MATHÉMATIQUES** du mouvement. Elles permettent de déterminer une famille de fonctions correspondant à ces invariants, puis par les conditions initiales, les fonctions (uniques) qui décrivent le mouvement.

On peut alors rechercher une description plus réaliste du problème, en introduisant dans une résistance de l'air, proportionnelle à la vitesse. Les relations précédentes deviennent :

$$x''(t)+\frac{k}{m}x'(t) = 0\ ;\quad y''(t)+\frac{k}{m}y'(t) = g \quad \text{(k réel positif).}$$

D'où en passant aux primitives et en tenant comte des conditions initiales :

$$x'(t)+\frac{k}{m}x(t) = V_0\cos(\alpha)\ ;\quad y'(t)+\frac{k}{m}y(t) = \mathbf{gt} + V_0\sin(\alpha)$$

On obtient des relations entre des fonctions inconnues —x(t) et y(t)— et leurs dérivées premières. Ces relations expriment les invariants mathématiques du mouvement : une expression contenant des fonctions inconnues (et bien sûr variables), leurs dérivées premières (également variables) et diverses fonctions connues reste, au cours du temps, **CONSTAMMENT NULLE !**

Je me souviens de mon éblouissement, quand je découvris cela au cours de mes études : je venais de comprendre ce qu'est une équation différentielle. J'étais prêt à entrer dans les diverses techniques de résolution et à me servir du précieux outil pour faire apparaître des invariants dans le monde mouvant de la physique. Un grand merci à l'enseignant qui prit la peine de m'éclairer.

Les relations obtenues ci-dessus résistent au traitement par les seules primitives. Il faut de nouvelles méthodes pour les résoudre. **Cela justifie la brève introduction qui va suivre sur le sujet**. Et, cerise sur le gâteau, on pourra revenir ensuite à ces équations pour les résoudre entièrement (avec un léger complément sur les équations à second membre traité en TP) et pour mettre en évidence (grâce aux courbes paramétrées) la trajectoire asymptotique du point soumis à la résistance de l'air.

Oscillations électriques et mécaniques

Il reste à enfoncer le clou en puisant dans un autre chapitre de la physique pour montrer aux élèves que l'outil que l'on forge sera efficace dans les divers champs où on l'applique. L'oscillateur harmonique est un bel exemple.

Un circuit comporte un condensateur de capacité C, initialement chargé couplé à une bobine d'auto-inductance L et de résistance R. Le condensateur se décharge dans la bobine. Un courant d'intensité croissante circule dans le circuit et crée une force électromotrice d'auto-induction. Quand la charge du condensateur est nulle, un courant induit charge le condensateur en sens inverse qui se décharge à nouveau et ainsi de suite.

Soit q(t) la charge du condensateur à l'instant t. À chaque instant, la tension aux bornes A et B de la bobine est égale à la tension aux bornes du condensateur. Soit i(t) l'intensité du courant dans le circuit et e(t) la force électromotrice d'induction. On a les relations suivantes (que l'on trouve dans les ouvrages de Terminale):

$$i(t) = q'(t) \quad ; \quad V_B - V_A = \frac{q(t)}{C} \quad ; \quad V_B - V_A = R\, i(t) - e(t) \quad ; \quad e(t) = -L\, i'(t)$$

Donc, par substitution :

$$e(t) = -L\, q''(t) \quad ; \quad R\, i(t) - e(t) = R\, q'(t) + L\, q''(t)$$

Puis :

$$R\, q'(t) + L\, q''(t) = -\frac{q(t)}{C} \quad \text{donc finalement} \quad : \; q''(t) + \frac{R}{L} q'(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

Dans le cas particulier où R est négligeable, on obtient une relation plus simple :

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0,$$

que le cours à venir permettra de débrouiller.

Il est particulièrement éclairant de comparer cette relation (entre des grandeurs électriques) avec celle obtenue en mécanique avec le pendule de torsion ou en faisant osciller une masse au bout d'un ressort (en s'écartant légèrement de la position d'équilibre).

La similitude des relations étonne les élèves les plus blasés !

Il ne reste plus alors qu'à donner un nom aux choses et à traiter explicitement les deux cas particuliers qui sont au programme.

L'introduction aux équations différentielles que je viens d'esquisser prend, dans cette question**, autant de temps que le cours lui-même** (c'est-à-dire pas grand chose). C'est pour moi un passage obligé pour **donner du sens à une question qui va connaître par la suite, des développements considérables, dans toutes les disciplines scientifiques.**

Ma critique ne porte pas sur le fait que le programme actuel ne retienne que deux cas particuliers d'équations différentielles. Après tout, il faut faire des choix. Mais elle stigmatise la perte de sens à laquelle conduit, par un laxisme intolérable, cette limitation. Ce chapitre, même réduit, n'est pas anodin. L'équation différentielle est un des outils majeurs de la science. **Le minimum d'estime dû aux élèves consiste à leur expliquer la nature radicalement nouvelle du problème et ses enjeux avant de leur donner des théorèmes et des formules « prêtes à l'emploi ».**

Nos collègues physiciens revendiquent de plus en plus ouvertement l'enseignement de larges parties des mathématiques dont ils ont besoin dans leur domaine. Nous leur avons déjà abandonné la mécanique. Il est clair que la façon actuelle de traiter en Terminale les équations différentielles plaide en leur faveur. Si nous renonçons à donner du sens aux notions que nous enseignons, d'autres le feront aussi bien que nous (aussi mal serait plus exact). Le risque n'est pas théorique, nous le verrons dans un instant.

Il faut résister coûte que coûte aux pressions de l'institution et des parents pour un enseignement immédiatement efficace, du strict point de vue de la réussite à l'examen. **Notre métier consiste d'abord et surtout à faire comprendre des démarches, des méthodes et des enjeux à nos élèves.** Si par fatigue ou par commodité, nous nous contentons de diffuser des recettes, nous ouvrons une voie royale aux industriels de l'enseignement qui savent très bien le faire (c'est la seule chose qu'ils savent faire avec les techniques informatiques actuelles) et l'évaluer (des QCM s'y prêtent fort bien). **Abandonner la quête du sens, c'est perdre notre raison d'être.**

D'inquiétantes perspectives qui exigent une réaction vigoureuse.

Quand on se tourne vers les projets de programme de Terminale S du GTD (en débat pour la rentrée 2002), on y lit le paragraphe suivant :

> « Certaines équations différentielles (notamment $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$) sont abordées dans le cours de physique, ***où la méthode d'Euler fera l'objet d'un travail consistant.*** Dans le cours de mathématiques, on introduira la notion d'équation différentielle (équation dont les solutions sont des fonctions) à partir d'exemples étudiés qualitativement, en s'appuyant notamment sur des champs de tangentes tracés par des logiciels. Les équations différentielles, traitées en complémentarité en mathématiques et en physique, éclaireront la cohérence naturelle entre ces deux disciplines. »

Voici un texte très étonnant. A-t-on vraiment besoin de la méthode d'Euler pour résoudre les équations différentielles $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$? Ne faudrait-il pas réserver cette méthode à des cas moins élémentaires, nécessitant effectivement un travail consistant ? Mais si le futur cours de physique utilise d'autres équations différentielles plus complexes, le traitement mathématique de ces équations différentielles ne relève-t-il plus des mathématiques ? L'enseignant de physique est-il plus qualifié que son collègue de mathématique pour expliquer « avec consistance » la méthode d'Euler ?

Il n'y a aucune raison que l'enseignement des mathématiques de la physique échappe aux enseignants de mathématiques. Il faut le faire savoir avec détermination.

Leur responsabilité est d'introduire, d'expliquer et de rendre opérationnel l'outil mathématique. Aux physiciens de traduire leurs problèmes en équations différentielles, puis d'interpréter en termes physiques les résultats obtenus par les diverses méthodes de résolution mises à leur disposition. Le mélange des genres n'est pas souhaitable.

Ceci posé (mais c'est un préalable fondamental) la collaboration entre les deux disciplines est indispensable : les équations différentielles seraient un merveilleux sujet de TPE.

Si l'on renonce au sens des choses, elles finissent par nous échapper. Toutes sortes de « techniciens » prétendent alors les prendre en charge. Le programme projeté invite au sursaut : il propose de traiter des exemples (même s'il ajoute bizarrement « qualitativement »); il suggère de s'appuyer sur le champ des tangentes tracées par ordinateur. Nous y ajoutons la méthode d'Euler, sans laquelle les tracés précédents sont incompréhensibles. On peut ainsi donner du sens à ce chapitre fort important. Cela prend, hélas du temps, ce temps d'année en année plus chichement mesuré. La réduction des horaires de Terminale, si elle est confirmée, conduira à sacrifier, une fois de plus, le sens au profit de techniques facilement évaluables. Et anéantira les bonnes intentions annoncées. Comme c'est le cas dans les programmes actuels.