

IREM DE PICARDIE



ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR :

de l'intuition aux concepts.



EDITION : I.R.E.M. DE STRASBOURG
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex
Pour les brochures : Bibliothèque
Tél. : 03 90 24 01 61
Fax : 03 90 24 01 65
E.mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
<http://irem.u-strasbg.fr>

ulp 
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
STRASBOURG

CETTE BROCHURE PRÉSENTE LE RÉSULTAT D'UN TRAVAIL COLLECTIF DE MISE AU POINT ET D'EXPÉRIMENTATION RÉALISÉ DEPUIS 1998 PAR UN GROUPE DE RECHERCHE-FORMATION AU SEIN DE L'IREM DE PICARDIE, AVEC L'APPUI SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE DU GROG DE MULHOUSE (IREM DE STRASBOURG).

CE GROUPE A TESTÉ L'APPLICATION DES CONCEPTS D'ORDRES DE GRANDEUR ABSOLUS À L'INITIATION DES ÉLÈVES DE PREMIÈRE ET TERMINALE (TOUTES SECTIONS) AUX NOTIONS FONDAMENTALES DE L'ANALYSE : LIMITES, DÉRIVÉES, ASYMPTOTES, INTÉGRALES. LA BROCHURE CONTIENT DES LEÇONS DESTINÉES À LA FORMATION DES ÉLÈVES. CELLES-CI ONT ÉTÉ EXPÉRIMENTÉES DE MANIÈRE SYSTÉMATIQUE DANS DES CLASSES DE TOUS NIVEAUX ET LES RÉSULTATS ONT ÉTÉ TRÈS ENCOURAGEANTS.

LE TEXTE CONTIENT ÉGALEMENT DES ÉLÉMENTS D'APPROFONDISSEMENT ET DE RÉFLEXION ÉPISTÉMOLOGIQUE DESTINÉES À LA FORMATION DES PROFESSEURS.

L'IREM DE STRASBOURG S'EST CHARGÉ DE L'IMPRESSION ET DE LA DIFFUSION DE L'OUVRAGE, L'IREM DE PICARDIE NE DISPOSANT PAS ACTUELLEMENT DES MOYENS MATÉRIELS NÉCESSAIRES.

CE TRAVAIL A ÉTÉ RÉALISÉ À L'IREM DE PICARDIE PAR :

ROGER BEAUMONT	PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLES DE GAULLE COMPIÈGNE (60)
JACQUES BOULANGER	PROFESSEUR AU LYCÉE PIERRE D'AILLY COMPIÈGNE (60)
LIONEL COMMUN	PROFESSEUR AU LYCÉE PIERRE MENDÈS FRANCE PÉRONNE (80)
SYLVIE DEVIENNE	PROFESSEUR AU LYCÉE JEAN ROSTAND CHANTILLY (60)
CLAUDE FELLONEAU	I.A. – I.P.R. AMIENS
BRIGITTE JAUFFRET	I.A. – I.P.R. AMIENS
ROBERT LUTZ	PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE HAUTE-ALSACE MULHOUSE
JEAN-PIERRE MARIN	PROFESSEUR AU LYCÉE GÉRARD DE NERVAL SOISSONS (02)
NICOLE NICOLAÏ	PROFESSEUR AU LYCÉE MARIE CURIE NOGENT SUR OISE (60)
ESTELLE PEYRAGROSSE	PROFESSEUR AU LYCÉE PIERRE MENDÈS FRANCE PÉRONNE (80)
MARIE-CLAUDE RIBON	PROFESSEUR AU LYCÉE JEAN ROSTAND CHANTILLY (60)
CATHERINE RONCIN	PROFESSEUR AU LYCÉE MARIE CURIE NOGENT SUR OISE (60)
CLAUDE SERRIS	PROFESSEUR AU LYCÉE MARIE CURIE NOGENT SUR OISE (60)
BERNARD-LOUIS THEODORESCO	PROFESSEUR AU LYCÉE MIREILLE GRENET COMPIÈGNE (60)
FABIENNE WALTON	PROFESSEUR AU LYCÉE PIERRE MENDÈS FRANCE PÉRONNE (80)

LE TRAVAIL DONT CETTE BROCHURE EST LA CONCLUSION A PU ÊTRE MENÉ À BIEN
GRÂCE À LA COLLABORATION DE :

MARIE-JEANNE POMMEROL ET HEDI DABOUSSI : DIRECTEURS DE L'IREM DE PICARDIE
JACQUELINE PENNINGCKX ET DANIEL TRONET : I.A.- I.P.R. DE L'ACADÉMIE D'AMIENS

IL A ÉTÉ DÉVELOPPÉ AVEC LE SOUTIEN INTELLECTUEL ET AMICAL
DU GROG DE MULHOUSE (IREM DE STRASBOURG)
EN PARTICULIER F. JAMM, A. MAKHLOUF, J.F. MARCHINA, E. MEYER ET J. PERRIN

SOMMAIRE

Introduction.....	page 7
Partie 1 : activités pour la classe.....	page 11
□ Ordres de grandeur.....	12
□ Dérivation.....	19
□ Comportement asymptotique de certaines fonctions.....	25
□ Convergence des suites réelles.....	29
□ Aire sous une courbe.....	35
Partie 2 : approfondissement.....	page 41
□ Limites de suites.....	42
□ Limites de fonctions.....	48
□ Aires et intégrales.....	56
□ Un peu plus loin avec « l'ombre ».....	67
Partie 3 : fonctions transcendantes élémentaires.....	page 69
□ Les concepts de nombre et de suite explicités.....	70
□ Fonctions logarithme et exponentielle.....	71
□ Fonctions trigonométriques.....	75
Partie 4 : justification logique, mathématique et épistémologique des ordres de grandeur.....	page 77

INTRODUCTION

Dans les motivations d'un projet officiel de programme pour la terminale S en date du 8 janvier 2001, les auteurs remarquent fort justement que :

« de nombreux élèves sortant de terminale vivent en mathématique dans un univers flou, sans conscience claire du statut des objets manipulés (définitions, théorèmes admis ou démontrés), sans séparation nette entre démonstration et étude de cas particuliers. Cet état de fait n'était pas inscrit dans les anciens programmes, il n'était pas prévisible à partir de leur libellé et il n'est évidemment pas voulu par les enseignants. Pour aider à endiguer ce phénomène dont les causes sont multiples, le projet proposé attache une importance particulière au statut des objets manipulés. On ne se privera pas pour autant de l'utilisation de concepts " intuitifs " (limite de fonction, aire,...). Les mathématiciens qui ont précédé Cauchy et Weierstrass ne disposaient pas de la définition actuelle de la limite et ils ont cependant fait de vraies mathématiques. Certains formalismes sont inadaptés à ce stade de la formation et il serait dommageable de noyer l'essentiel d'une démarche dans des précautions artificielles à ce niveau. Il convient cependant que les élèves sachent que les objets manipulés dans leur programme sont clairement définis dans le champ des mathématiques et que les propriétés utilisées ou qui paraissent aller de soi sont démontrées : définitions et démonstrations qui seront objet d'étude pour les élèves continuant dans une voie scientifique. ».

L'objectif essentiel du présent ouvrage est de proposer à nos collègues des moyens pour répondre positivement au souci lucidement évoqué ci-dessus. Avec l'ambition supplémentaire de gommer ce « pour autant » qui marque l'embarras des concepteurs de programmes réduits à prôner une approche intuitive non formalisée de la notion de limite tout en souhaitant faire respecter plus fermement le statut des objets manipulés. On nous suggère de chercher la solution chez les mathématiciens « pré-epsilondeltaïques ». C'est précisément ce que nous allons faire ici, tout en nous appuyant sur une démarche en accord avec les acquis modernes des mathématiques. Cependant notre finalité est plus ambitieuse : il s'agit de donner aux élèves la possibilité d'accéder à une part fondamentale de la culture mathématique, disons en gros le calcul différentiel et intégral, d'une manière formalisée accessible à l'intuition et qui les rende libres par rapport à des choix didactiques faussement simplificateurs où l'on " parachute " des vérités toutes faites après une vague préparation pseudo-intuitive. Et, bien entendu, de restaurer la pratique des démonstrations dans un domaine où le mode visuel tend à servir d'unique pièce à conviction.

Pour cela nous devons restituer aux mathématiques toute la force d'expression qu'utilisaient précisément les mathématiciens d'avant la seconde moitié du 19^{ème} siècle (et dont Cauchy lui-même faisait usage.). Son expression moderne, fruit des progrès relatifs aux fondements des mathématiques réalisés tout au long du 20^{ème} siècle, utilise la notion d'ordre de grandeur absolu, dont l'introduction axiomatique simple et facilement acceptée par les élèves vivifie une discussion sur les nombres réels en elle-même formatrice, comme nous avons pu le constater dans les nombreuses classes du second cycle et de la première année d'université où

notre groupe a mené des expériences variées depuis près de quatre ans. Car ce que nous proposons ici dépasse le cadre théorique : l'essentiel du contenu destiné aux élèves (chapitre I) a été testé de manière systématique, aussi bien dans des classes scientifiques que dans des sections où la part des mathématiques est modeste. Presque toujours nous avons constaté que l'intermédiaire des ordres de grandeur, qui allie l'intuition et le formalisme d'une manière naturelle, permet aux élèves de tout niveau de s'exprimer avec une certaine liberté, et aussi d'agir avec sécurité, pour peu que les mécanismes de calcul leur soient suffisamment familiers.

Un lecteur pressé peut construire un enseignement structuré accomplissant les programmes officiels à partir du matériau proposé dans le premier chapitre. Mais s'il veut se faire plaisir, nous lui proposons un chapitre II davantage destiné au professeur et aux sections scientifiques, plein de saveur mathématique, où l'on traite plus en profondeur les bases de l'analyse réelle à partir d'une axiomatique légèrement renforcée concernant les ordres de grandeur et la notion de nombre ou de fonction explicitée. Un chapitre spécial (III) est consacré aux fonctions transcendantes élémentaires qui constituent avec les fonctions algébriques le jardin zoologique dont nous souhaitons faire découvrir les richesses à nos élèves. Le dernier chapitre est consacré à la discussion épistémologique et logique des concepts utilisés dans les trois premiers.

Le problème du fondement a fait disparaître l'ancienne approche du calcul différentiel en termes d'infinitésimaux proposée par Leibniz. Nous voyons ici comment une théorie qui en récupère la force est parfaitement fondée si l'on utilise la notion moderne de théorie axiomatique que la grande clarification bourbakiste a mise au cœur des mathématiques. Nous espérons que cette discussion, où l'on se préoccupe en particulier de la nature des objets mathématiques, puisse servir de grille de réflexion pour ceux qui souhaitent, à l'instigation des nouveaux programmes, situer leur enseignement dans un contexte épistémologique et historique clairement précisé.

Il me reste à clore cette introduction en racontant brièvement la petite histoire fort peu linéaire qui a abouti à cette publication. En 1987, j'avais introduit dans la Gazette des Mathématiciens une théorie élémentaire appelée ZFL en l'honneur de Leibniz, dont je vénère le génie, où la notion d'ordre de grandeur absolu était formalisée et justifiée sur le plan logique sans recours à l'axiome du choix. J'avais à cette époque acquis une bonne connaissance de l'Analyse Non Standard, ce nouvel achèvement des mathématiques pressenti depuis 1958 par Laugwitz et Schmieden, présenté en 1966 dans l'ouvrage d'Abraham Robinson dans l'esprit de la théorie des modèles, puis axiomatisé en 1977 par Edward Nelson dans un esprit formaliste. J'avais contribué à l'introduire dans la pratique mathématique avec mon bon maître Georges Reeb et d'autres compagnons. Mais je trouvais cela trop compliqué et trop peu constructif pour servir à affronter le problème de l'enseignement élémentaire de l'analyse. L'existence de la théorie ZFL semblait montrer qu'une approche minimaliste était possible. A partir de l'année 93, j'eus la chance de trouver au sein de la petite section mulhousienne de l'IREM de Strasbourg deux complices intéressés, Abdenacer Makhoul et Etienne Meyer, l'un universitaire, l'autre professeur de lycée, devenu IPR entre-temps. Nous avons longuement travaillé sur les aspects fondamentaux relatifs

à une éventuelle introduction des ordres de grandeur absolus pour structurer l'initiation à l'analyse en Première et Terminale. La brochure n°103 (1996) publiée par l'APMEP a présenté les conclusions de notre travail. Un petit groupe IREM, le GROG (Groupe de Recherche sur les Ordres de Grandeur), s'est alors mis en place à Mulhouse et nous avons élaboré et commencé à expérimenter des leçons destinées aux élèves.

Puis les Picards entrèrent en scène, de manière fort énergique. Christian Boulinier, alors formateur MAFPEN à Amiens, m'invita en 1997 à un colloque très sympathique auquel participait Marie-Jeanne Pommerol, directrice de l'IREM de Picardie. Celle-ci tint à ce que j'expose nos idées lors d'une rencontre IREM la même année à Saint-Quentin, où furent présentées des brochures très intéressantes concernant l'enseignement des mathématiques. Dans l'assistance, Jacqueline Penninckx, alors IPR de l'Académie d'Amiens, comprit l'intérêt que pouvait présenter l'introduction des ordres de grandeur et se chargea d'organiser, en accord avec ses collègues et l'Inspecteur Général Marc Fort, une formation en trois jours destinée aux professeurs de l'Académie d'Amiens. Le succès fut considérable, et renouvelé l'année suivante. J'ai eu le privilège de rencontrer là un grand nombre de collègues enthousiastes, cultivés et passionnés de l'acte éducatif, en dépit des difficultés qui sont inhérentes à notre beau métier. C'est de ce vivier qu'est né le groupe IREM que j'ai eu la joie d'animer ces dernières années. La matière première fournie par le GROG de Mulhouse a été abondamment expérimentée, remaniée, étendue par les membres de ce groupe, dont l'atmosphère chaleureuse et amicale a fédéré les énergies et dépassé les clivages administratifs. Agrégés, certifiés, IPR et universitaires y ont travaillé avec un égal enthousiasme, même à l'époque récente où un oukase malheureux des autorités universitaires picardes a failli supprimer l'IREM. Le soutien matériel de l'IUFM et du Rectorat d'Amiens furent alors déterminants pour la poursuite de notre travail.

Il aboutit aujourd'hui à cette brochure, conçue et rédigée collectivement à partir de notre expérience et du savoir que nous avons élaboré ensemble. On y reconnaîtra des styles d'écriture variés, reflets d'une diversité que nous n'avons pas voulu trop lisser, car elle témoigne de ce qu'est notre groupe : un organe de réflexion, de dialogue constructif et plus profondément d'amitié. Nous espérons que nos collègues y trouveront une source de vie, de rigueur et aussi de fraîcheur pour leur enseignement et leur plaisir.

Robert LUTZ

Professeur à l'Université de Haute Alsace
IREM de Strasbourg et IREM de Picardie.

PARTIE I

ACTIVITES POUR LA CLASSE

Ordres de grandeur..... page 12

Dérivation..... page 19

Comportement asymptotique..... page 25

Convergence des suites réelles..... page 29

Aire sous une courbe..... page 35

ORDRES DE GRANDEUR

Etude de l'ensemble $\mathbb{N}$

Cette introduction résume le débat qu'il faut susciter avec les élèves. Pour s'y préparer on peut examiner les arguments développés dans la partie IV de cette brochure.

L'ensemble $\mathbb{N}$ contient une infinité de nombres. Certains sont facilement accessibles, au moins par l'écriture : 0, 1, 358, 1375695, voire $10^{2\,103\,854}$, mais on peut concevoir des nombres supérieurs à ceux que nous sommes capables d'écrire, ou d'obtenir par un procédé mathématique. Ceux-là sont hors de notre portée...

Les entiers explicites

Nous appelons **entiers explicites**, les entiers « bien » définis, par une propriété exprimable en un nombre fini de termes du langage mathématique. Nous admettons les propriétés suivantes, qui seront les seules utilisées pour les obtenir :

1. 0 et 1 sont des entiers explicites.
2. Si x est un entier explicité, tous les entiers inférieurs à x sont explicités.
3. Si x et y sont explicités, $x + y$, xy et x^y sont explicités.

Les entiers non explicités

Nous avons admis dans l'introduction qu'il existe des entiers non explicités. Etudions leurs propriétés :

Si ω est un entier non explicité, $\omega + 1$, $\omega + 2$, 2ω sont des entiers non explicités. Par conséquent, on peut obtenir autant d'entiers non explicités que l'on veut...

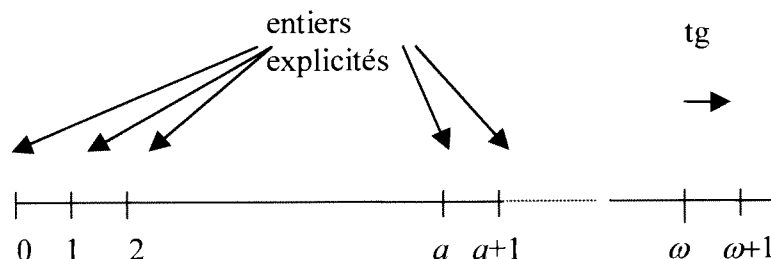
D'autre part, si ω est un entier non explicité et x un entier explicité, on ne peut avoir $\omega \leq x$ (propriété 2) donc ω est supérieur à x .

Donc les entiers non explicités sont supérieurs à tout entier explicité donné : ils seront appelés **entiers très grands (tg)**.

La « transition » entre les entiers explicités et les entiers très grands

Cette « transition floue » modélise certaines situations : un tas de sable moins un grain reste un tas, et quelques grains plus un grain ne font pas un tas... Où est la frontière entre le tas et les grains isolés ?

- Il n'y a pas de plus grand entier explicité car, si x est un entier explicité, alors $x + 1$ l'est aussi.
- Il n'y a pas de plus petit entier très grand car, si ω est très grand, alors $\omega - 1$ l'est aussi.



Conséquences pour l'ensemble $\mathbb{R}$

Comme dans $\mathbb{N}$, on qualifie d'explicité tout nombre bien défini mathématiquement. Donc, des réels comme -4 ; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$ ou π sont explicités. Nous admettons que la somme, le produit, le quotient, la puissance d'exposant n (entier explicité), de réels explicités sont explicités.

Les nombres très grands dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ contient $\mathbb{N}$, donc il contient les entiers très grands.

Nous appelons **très grand positif** tout réel supérieur à un entier très grand, et **très grand négatif** tout réel dont l'opposé est supérieur à un entier très grand.

Que dire des réels qui ne sont pas très grands ?

- Il y a les réels explicités, mais, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{N}$, ce n'est pas tout :
- Prenons ω très grand positif. Considérons son inverse $\frac{1}{\omega}$. C'est un nombre positif, non explicité. De plus, il est inférieur à tout réel strictement positif explicité. Soit en effet x un réel explicité strictement positif, son inverse $\frac{1}{x}$ est aussi explicité donc il est inférieur à ω . On en déduit que $\frac{1}{\omega}$ est inférieur à x .

Nous dirons que ce sont des réels **très petits positifs**. Leurs opposés sont des réels **très petits négatifs**. Par convention, **0 est un réel très petit**.

- Enfin, si ω est très grand, nous pouvons construire des réels comme $5 + \frac{1}{\omega}$ qui ne sont ni très petits, ni explicités.

Tous ces nombres réels non très grands sont appelés **réels modérés**.

Ordre de grandeur d'un nombre réel

Donner l'ordre de grandeur d'un réel, c'est dire si c'est :

- Un réel très grand, négatif ou positif.
- Un réel modéré. Dans ce cas, on précise encore si c'est :
 - Un réel très petit, positif ou négatif
 - Un réel modéré non très petit.

Exercice :

Compléter, si cela est possible, par des exemples de nombres :

	Modéré		Très grand
	Très petit	Modéré non très petit	
Explicité			
Non explicité			

Tables d'opérations avec les ordres de grandeur

Table d'addition

Bien sûr, ici et dans le paragraphe suivant, il faut fournir aux élèves une grille vide et la leur faire remplir ! Dans la suite de la brochure, on se réfère à ces tables sous le nom de « règles de Leibniz ».

+	<i>tp</i>	<i>mod ntp</i>	<i>tg</i>
<i>tp</i>	<i>tp</i>	<i>mod ntp</i>	<i>tg</i>
<i>mod ntp</i>	<i>mod ntp</i>	<i>mod</i>	<i>tg</i>
<i>tg</i>	<i>tg</i>	<i>tg</i>	?

modéré non
très petit.

Remarque : la somme de deux nombres très grands peut être étudiée de plus près :

$$tgp + tgp = tgp \text{ et } tgn + tgn = tgn.$$

Mais l'ordre de grandeur de la somme d'un très grand positif et d'un très grand négatif dépend de ces nombres. Par exemple, si ω désigne un nombre très grand positif :

$\omega + (3 - \omega)$ est modéré tandis que $2\omega + (-\omega)$ est très grand positif et enfin $\omega + (-2\omega)$ est très grand négatif.

Table de multiplication

$\times$	<i>tp</i>	<i>mod ntp</i>	<i>tg</i>
<i>tp</i>	<i>tp</i>	<i>tp</i>	?
<i>mod ntp</i>	<i>tp</i>	<i>mod ntp</i>	<i>tg</i>
<i>tg</i>	?	<i>tg</i>	<i>tg</i>

Remarques :

- Si ω est très grand, ω^2 l'est aussi, $\frac{1}{\omega}$ et $\frac{1}{\omega^2}$ sont très petits et $\omega \times \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega}$ est très petit tandis que $\omega^2 \times \frac{1}{\omega} = \omega$ est très grand, donc on ne peut rien dire a priori du produit « très petit $\times$ très grand ».
- On peut déduire de ce tableau l'ordre de grandeur de certains quotients puisque diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse. Il faut remarquer que les ordres de grandeurs de quotients du type $\frac{tg}{tg}$ ($= tg \times tp$) ou $\frac{tp}{tp}$ ($= tp \times tg$) ne peuvent être déterminés sans des renseignements supplémentaires sur les deux nombres considérés pour « lever l'indétermination ».

Exercices

1. Soient x et y positifs tels que $0 \leq x < y$
Que peut-on dire de y lorsque x est *tg* ? *modntp* ? *tp* ?
Que peut-on dire de x lorsque y est *tg* ? *modntp* ? *tp* ?

2. Préciser l'ordre de grandeur des nombres 1^3 , $1^{100\,000\,000}$, 1^ω où ω est un entier très grand.
Même question pour 2^3 , $2^{100\,000\,000}$, 2^ω .

3. *Nombres en écriture décimale :*

- Quelle est la 1 000 000 000^{ième} décimale d'un nombre très petit ?
- Que dire des décimales d'un nombre très petit ?

4. Soit ω un nombre *tg*. Préciser l'ordre de grandeur des nombres suivants :

- $a+b$ avec $a = b = \omega$
- ab avec $a = \omega^3$ et $b = \frac{1}{\omega}$
- $a+b$ avec $a = \omega$ et $b = -\omega$
- ab avec $a = \omega$ et $b = \frac{1}{\omega}$
- $a+b$ avec $a = \omega$ et $b = -6 - \omega$
- ab avec $a = \omega^2$ et $b = \frac{1}{\omega^3}$

5. Soit x un nombre positif. Préciser l'ordre de grandeur de $\sqrt{x}$ en fonction de celui de x .

6. *Inverses et quotients :*

- Soit x un réel différent de 0. Préciser l'ordre de grandeur de $\frac{1}{x}$ en fonction de celui de x .
- Compléter, si possible, le tableau des ordres de grandeur de $\frac{x}{y}$:

$y \backslash x$	<i>tp</i>	<i>modntp</i>	<i>tg</i>
<i>tp</i> ($\neq 0$)			
<i>modntp</i>			
<i>tg</i>			

7. Déterminer l'ordre de grandeur des expressions numériques suivantes, où h est un nombre *tp* non nul et ω un nombre *tg* :

- $\frac{h+1}{h}$; $\frac{h^2}{h^2+1}$
- $2\omega^2 - 100\omega + 5$; $\frac{1}{\omega^2}$; $\frac{10\omega^2+1}{5\omega-2}$; $\frac{\omega-1}{\omega^2-1}$; $\frac{1+\omega+\omega^2}{\sqrt{\omega}+\omega+2\omega^2}$
- $\frac{\omega}{h-2}$; $\frac{h^2}{\omega+1}$; $\frac{2h+1}{\omega+3}$; $\frac{10\omega^2+1}{5h-2}$

Nombres très proches

Les propriétés des réels très proches sont ici données à chercher dans les exercices 2 et 3. On peut choisir celles qu'on proposera de démontrer aux élèves et celles qu'on admettra comme intuitives. On peut aussi faire un autre choix et développer davantage le cours...

Définition :

Deux nombres réels sont dits **très proches** si leur différence est très petite. On note $x \approx y$.

Remarques :

- « x est très petit » peut donc aussi s'écrire « $x \approx 0$ ».
- « x est très proche de y » peut aussi s'écrire $x = y + h$, avec h très petit.

Exercices

8. Dans chacun des cas suivants, x et y sont-ils très proches ?

- $x = 125$ et $y = 125,0000007$
- $x = 125$ et $y = 125,0000000000000000002$
- $x = 125$ et $y = 124,999999999999999$

9. Donner un réel très proche de $x = 125$.

Que dire de deux réels explicites très proches ?

10. Soient a, a', b, b' et c des nombres réels. Montrer que :

- si $a \approx a'$ alors a et a' ont le même ordre de grandeur.
- si $a \approx b$ et $b \approx c$ alors $a \approx c$.
- si $a \approx a'$ et $b \approx b'$ alors $a + b \approx a' + b'$.
- si $a \approx a'$ et $b \approx b'$ avec a et b modérés alors $ab \approx a'b'$.
- si $a \approx a'$ avec a non très petit alors $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{a'}$.
- si $a \approx a'$ et $b \approx b'$ avec a modéré et b non très petit alors $\frac{a}{b} \approx \frac{a'}{b'}$.
- si h est *tp* alors $\sqrt{1+h} \approx 1$ et plus généralement : si $a \approx a'$ avec a et a' modérés alors $\sqrt{a} \approx \sqrt{a'}$.

Important !
Deux réels explicites très proches sont égaux...

On peut demander ce qui se passe si a ou b n'est pas modéré, ou poser la question sans la condition et la faire découvrir. Ceci vaut aussi pour les questions suivantes.

Le réel explicite : d'après l'exercice 2...

Les réels très petits sont très proches de 0 ; l'existence d'un réel explicite très proche d'un réel modéré non très petit est ici admise intuitivement.

11. Donner l'ordre de grandeur des expressions numériques suivantes. Dans le cas d'un modéré, donner le réel explicite très proche :

- | | |
|--|--|
| a. $\frac{2h+1}{h+3}$ avec $h \approx 0$ | b. $\frac{\omega^3}{\omega^3+1}$ avec ω <i>tg</i> |
| c. $\frac{2\omega+1}{\omega+3}$ avec ω <i>tg</i> | d. $\frac{3a+1}{a-2}$ avec $a \approx 2, a \neq 2$ |
| e. $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ avec $h \approx 0, h \neq 0$ | f. $\frac{a-1}{2-\sqrt{a+3}}$ avec $a \approx 1, a \neq 1$ |
| g. $\frac{a-3}{a^2+a-12}$ avec $a \approx 3, a \neq 3$ | h. $\frac{a^2+a-2}{2a^2-8a-10}$ avec $a \approx -1, a \neq -1$ |

12. Soient ε un nombre très petit non nul et ω un nombre très grand. Donner l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants lorsque cela est possible. Si le nombre est modéré, préciser le réel explicite très proche :

- a. $\frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{1}{\varepsilon^2}$; $-\varepsilon$; ε^2 ; $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$; $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-2}$; $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+1}$; $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2-1}$.
- b. $\frac{\omega+1}{\omega}$; $\frac{\omega}{\omega-2}$; $\frac{\omega^2}{\omega^2+1}$; $\frac{10\omega^2+1}{5\omega-2}$; $\frac{\omega-1}{\omega^2-1}$; $\frac{1+\omega^2+\omega^4}{\omega+\omega^2+2\omega^4}$.
- c. $\frac{\varepsilon}{\omega}$; $\frac{\omega}{\varepsilon}$; $\varepsilon\omega$; $\frac{\varepsilon+1}{\omega}$; $\frac{\omega}{\varepsilon-2}$; $\frac{\omega^2}{\varepsilon\omega+1}$; $\frac{\omega-1}{\varepsilon^2-1}$.

Corrigés de certains exercices

Exercice 2 :

- a. On a $1^n = 1$, pour tout entier naturel n , même s'il est très grand.
- b. 2^3 et $2^{100\,000\,000}$ sont des entiers explicites, par contre pour ω très grand, 2^ω est très grand car il est supérieur à tout entier explicite. En effet, 2^ω est supérieur à 2^k pour tout k explicite ($2^\omega = 2^k \times 2^{\omega-k}$), ce qui suffit.

Exercice 3 :

- a. Soit h un nombre très petit. Appelons d sa 10^{10^9} ème décimale : c'est un entier compris entre 0 et 9.
Alors $10^{10^9} h$ a pour chiffre des unités d : $10^{10^9} h \geq d$. Or $10^{10^9} h$ est un nombre très petit (produit d'un modéré par un très petit), donc $d = 0$.
- b. Les décimales d'un réel très petit sont nulles à tout rang explicite.

Exercice 7 :

- a. Soit ω *tg*. Déterminer l'ordre de grandeur de $\frac{\omega-1}{\omega^2-1}$.
 $\omega-1$ est *tg* ; ω^2-1 est *tg* ($tg + mod = tg$). On ne peut pas conclure directement sur le quotient $\frac{tg}{tg}$.
Mais : $\frac{\omega-1}{\omega^2-1} = \frac{\omega-1}{(\omega-1)(\omega+1)} = \frac{1}{\omega+1}$. Comme ($tg + mod = tg$), $\omega+1$ est donc *tg* et son inverse est *tp*.
- b. Soit ω *tg* et h *tp* non nul. Déterminer l'ordre de grandeur de $\frac{10\omega^2+1}{5h-2}$.
 $mod \times tp = tp$ donc $5h$ *tp*.
 $tp + modtp = modtp$ donc $5h-2$ est *modtp*, son inverse aussi.
 $modtp \times tg = tg$ donc $10\omega^2$ *tg* ; $tg + mod = tg$ donc $10\omega^2+1$ *tg*.
 $\frac{10\omega^2+1}{5h-2}$ est *tg* comme produit d'un *tg* par un *modtp*.

Exercice 10 :

- d. Si $a \approx a'$ et $b \approx b'$ avec a et b modérés alors $ab \approx a'b'$.
En effet, si $a \approx a'$ et $b \approx b'$ alors $a = a' + h$ et $b = b' + h'$ avec h et h' *tp*.
Donc $a'b' = (a+h)(b+h') = ab + ah' + bh + hh'$;
 hh' est *tp* ; si a et b sont modérés, ah' et bh sont *tp* ; et la somme de trois *tp* est un *tp*. Donc $a'b' \approx ab$.

Contre-exemple :

supposons $a \approx b$ et $a \text{ tg}$: par exemple $a = \omega$ et $b = \omega + \frac{1}{\omega}$ alors $a^2 = \omega^2$ et

$$b^2 = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2}. \quad b^2 \text{ n'est pas très proche de } a^2 \text{ dans ce cas.}$$

g. Si h est tp alors $\sqrt{1+h} \approx 1$.

En effet, posons $\sqrt{1+h} = 1+a$. A priori, a est modéré, même inférieur à 1 puisque $1+h$ est inférieur à 4... De plus, comme $\sqrt{1+h}$ est positif, a est supérieur à -1 . Montrons qu'en fait, a est tp :

$$\sqrt{1+h} = 1+a \quad \text{donc} \quad 1+h = (1+a)^2 = 1+2a+a^2 \quad \text{d'où} \quad h = a(2+a).$$

D'après les remarques sur a , $2+a$ est modéré, non très petit car supérieur à 1.

$$\text{Donc } a = \frac{h}{2+a} \text{ est } tp \text{ comme } h.$$

Remarque : On trouvera une utilisation de ce résultat, et la correction de la question e de l'exercice 11, dans le chapitre sur la dérivation.

Exercice 11 :

Donner l'ordre de grandeur des expressions numériques suivantes ; si c'est un modéré, donner le réel explicité très proche.

c. $\frac{2\omega+1}{\omega+3}$ lorsque $\omega \text{ tg}$.

L'expression est de la forme $\frac{tg}{tg}$, on ne peut conclure directement.

$$\text{Mais } \frac{2\omega+1}{\omega+3} = \frac{\omega(2+\frac{1}{\omega})}{\omega(1+\frac{3}{\omega})} = \frac{2+\frac{1}{\omega}}{1+\frac{3}{\omega}} \approx 2 \text{ car } 2+\frac{1}{\omega} \approx 2 \text{ et } 1+\frac{3}{\omega} \approx 1.$$

d. $\frac{3a+1}{a-2}$ lorsque $a \approx 2$, $a \neq 2$

Si $a \approx 2$, $a \neq 2$ alors $3a \approx 6$; $3a+1 \approx 7$ et $a-2 \approx 0$ d'où $\frac{3a+1}{a-2} \text{ tg}$.

Si de plus $a > 2$ alors $a-2 > 0$ donc $\frac{3a+1}{a-2} \text{ tg+}$.

Si $a < 2$ alors $a-2 < 0$ donc $\frac{3a+1}{a-2} \text{ tg-}$.

Ainsi, les élèves disposent d'un outil aussi puissant que la notion de limite. Nous verrons l'usage qu'ils peuvent en faire pour la convergence des suites, deux utilisations pour l'étude des fonctions, dans les leçons Dérivation et Comportement asymptotique, et leur application au calcul de l'aire sous une courbe. Le lecteur qui souhaiterait approfondir l'étude de ces notions trouvera des compléments au chapitre II et une présentation des fonctions logarithme et exponentielle au chapitre III.

Mais l'efficacité des outils présentés ne dispense pas de s'interroger plus en profondeur sur la validité de leur construction, ce qui est discuté en détails au chapitre IV.

DERIVATION

Au moins trois problèmes fondamentaux, présents sous forme implicite depuis l'Antiquité, sont à l'origine du concept de dérivation :

□ en mécanique du point matériel, on savait depuis longtemps définir la vitesse moyenne d'un point en mouvement entre les instants t et $t + \Delta t$, comme le rapport entre la distance parcourue et l'accroissement de temps Δt . Mais l'étude de mouvements non uniformes, tel celui d'un objet en chute libre, nécessite une notion de *vitesse instantanée* afin de pouvoir évoquer l'accélération, c'est à dire *la vitesse de la vitesse*. Mais on ne peut pas se contenter de poser $\Delta t = 0$, car il faudrait diviser 0 par 0, une opération indéterminée du point de vue algébrique ;

□ en géométrie, et dans ses diverses applications, par exemple l'optique, on est conduit à rechercher les droites qui *touchent* une courbe en un point. L'exemple de la parabole est typique. Pour définir cette notion de *droite touchante*, appelée plus tard *tangente* dans une terminologie scientifique plus proche du Latin, on peut considérer les directions des sécantes qui passent par le point m_0 considéré et par un point m de la courbe, puis amener les deux points à se confondre en relevant la direction de la sécante « juste avant », ce qui ne veut rien dire. A nouveau on voudrait diviser 0 par 0 ;

□ dans diverses questions pratiques ainsi qu'en astronomie se pose la question des maxima et minima d'une quantité variable y fonction d'une autre quantité x ; par exemple la détermination des distances extrêmes d'une planète par rapport au soleil, ou le sommet de la trajectoire d'un coup de canon par rapport à l'angle de tir... Autour d'un tel point, l'accroissement de y pour des accroissements de x de sens opposé a le même signe, de sorte que si l'on savait définir un accroissement relatif pour un accroissement nul de x , à la manière d'une vitesse instantanée, celui-ci serait nul en un maximum ou en un minimum, ce qui donnerait un critère pour détecter les points où il faut chercher les valeurs extrêmes de y .

Dans ces divers problèmes, il s'agit de donner un sens à un rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

lorsque h «devient petit ». Après plusieurs tentatives, Isaac Newton (1642-1727), professeur à Cambridge, aboutit vers 1676 à la notion de *fluxion* qu'il appelle « le rapport ultime dans lequel les quantités disparaissent » en précisant dans un texte publié seulement en 1704 que « ...ces rapports ultimes ne sont pas réellement les rapports des quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports des quantités, décroissant sans limite, s'en approchent toujours ; et vers lesquelles ils peuvent s'en approcher aussi près que toute différence donnée, mais dont ils ne peuvent jamais les dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment. »

On constate ici l'embarras de Newton, qui, en père de la physique moderne, a une vision dynamique de ses fluxions. Sa « définition », bien que floue, a suffi pour lui permettre de justifier intuitivement l'introduction de règles de calcul sur les fluxions.

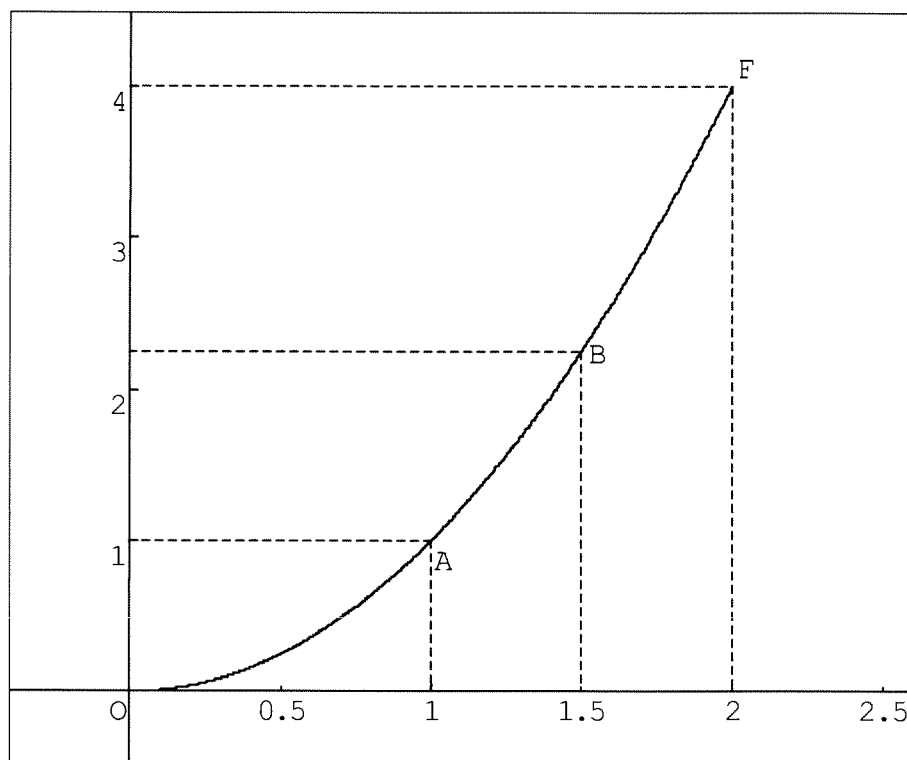
A la même époque, sur le continent, le mathématicien et logicien Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) se préoccupe du problème des tangentes d'un point de vue statique, en introduisant un calcul sur des *quantités infiniment petites* qui lui donne les mêmes règles que Newton mais dans un esprit différent. Les deux points de vue se livreront une âpre concurrence jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, où la notion actuelle de limite sera précisée.

Nous allons reprendre ces questions en utilisant les concepts d'ordres de grandeur, qui sont une version moderne et logiquement fondée des idées de Leibniz.

Approche graphique du nombre dérivé

Nous avons fait le choix d'expérimenter une approche graphique. Bien entendu, les mêmes outils s'appliquent à une approche cinématique.

On considère P , arc de la parabole d'équation $y = x^2$, obtenu pour $0 \leq x \leq 2$. Les extrémités de P sont $O(0 ; 0)$ et $F(2 ; 4)$.



I. Soit $A(1 ; 1)$, c'est un point de P .

1. Désignons par M un point variable sur P . Pour repérer la position de M par rapport à A , on pose $x_M = 1 + h$.
 - a. Entre quelles valeurs peut varier h ?
 - b. Où est M si $h < 0$? Si $h > 0$?
 - c. Que vaut y_M ?

2. Calculer le coefficient directeur de la droite (AM) .

Pour h très petit, les coefficients sont très proches de 2.

3. Que dire de ce coefficient si h est un réel très petit ?

4. Ecrire une équation de la droite (AM) et une équation de la droite D , passant par A et de coefficient directeur 2.

Pour h très petit, les sécantes forment un pinceau très fin de droites. Graphiquement, ce pinceau est représenté par la droite D .

5. On suppose encore que h est très petit. Comparer les ordonnées des deux points de (AM) et D ayant pour abscisse 100. Reprendre la comparaison pour les deux points d'abscisse 10 000, puis les deux points d'abscisse α , réel modéré.

II. Soit $B(1,5 ; 2,25)$, autre point de P . Etudier les coefficients directeurs des droites (BM) , pour M variable sur P , si l'abscisse de M est très proche de celle de B : observe-t-on un phénomène analogue au précédent ?

- III. Soit C le point de P d'abscisse a , où a est un réel explicité compris entre 0 et 2. Etudier les coefficients directeurs des droites (CM), pour M variable sur P , si l'abscisse de M est très proche de celle de C .

Nombre dérivé d'une fonction en un point

Les intervalles et les fonctions qui interviennent désormais devront être explicités, c'est à dire bien définis mathématiquement. En particulier, leur définition ne fera pas appel à des nombres très petits ou très grands.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = 2x^2 - 7.$$

C'est une fonction explicitée. Attention : rien n'interdit de considérer l'image par f d'un nombre réel très petit ou très grand !

Par contre, si nous définissons la fonction f sur un intervalle $[\alpha ; \beta]$ où α et β ne sont pas explicités, alors il ne s'agit plus d'une fonction explicitée.

De même, soit h un réel très petit et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = hx + 5$$

Il ne s'agit pas d'une fonction explicitée : elle n'est pas concernée par cette leçon.

Nombre dérivé

Soit a un réel explicité, et f une fonction définie sur un intervalle I qui contient a . S'il existe un réel explicité m vérifiant $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx m$,

pour tout réel h très petit non nul tel que $a+h$ appartient à I , alors on dit que f est dérivable en a . Le réel m est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a , on le note $f'(a)$.

Remarques :

a. Lorsqu'il existe, m est unique car deux réels explicités très proches sont égaux.

b. Si f est dérivable en a , $f(a+h) - f(a)$ est très petit pour tout h très petit. Donc $f(a+h)$ est très proche de $f(a)$ pour tout h très petit.

c. En termes de limites, on peut écrire $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exercices :

1. Montrer que les fonctions f , g , p et q , définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$, où k est un réel explicité donné, $g(x) = x$, $p(x) = x^2$ et $q(x) = x^3$, sont dérivables en toute valeur explicitée a de la variable x .

2. La fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, est-elle dérivable en $x = 0$?

3. Même question pour la fonction définie par $f(x) = |x^2 - 1|$, en $x = 1$.

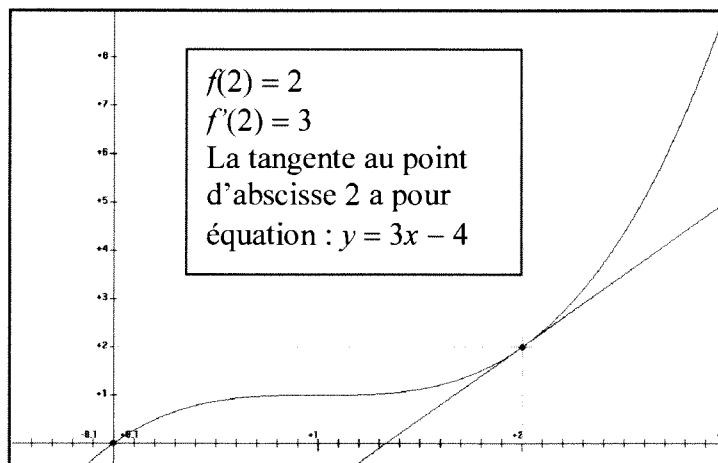
Nous admettons que toute fonction construite à partir des fonctions élémentaires (à l'aide de la somme, du produit, du quotient, de la multiplication par un réel, de la composition) est explicitée.

On peut choisir d'introduire l'écriture en termes de limites à différents stades, suivant la progression : ici, ou lors de l'étude des suites. En fait, cette écriture est disponible dès l'étude des nombres très proches : dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, c'est dire que pour tout x très proche de a , $f(x)$ est très proche de l .

Tangente

Si f est dérivable en a , alors la droite D , passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est dite tangente à la courbe représentative de f en ce point. Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Exercices :

4. Soit f la fonction « carré » définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en $x = -1$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 .

5. Même exercice si f est la fonction « cube », définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, en $x = 4$.

6. Même exercice si f est la fonction « inverse » définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 2$.

7. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$?
 - Montrer que la fonction f est dérivable en $x = 1$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Propriétés algébriques des nombres dérivés.

On peut établir les résultats usuels relatifs aux nombres dérivés des fonctions sommes, produits, quotients ou composées de fonctions dérivables en un point.

Exemple : le produit

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

Soient a un réel explicité et h un réel très petit non nul, tels que a et $a + h$ appartiennent à I .

Supposons f et g dérivables en a , alors :

$$\begin{aligned} \frac{fg(a+h) - fg(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h) + f(a+h)g(a) - f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\ \frac{fg(a+h) - fg(a)}{h} &= \frac{f(a+h)(g(a+h) - g(a)) + g(a)(f(a+h) - f(a))}{h} \end{aligned}$$

$$\frac{fg(a+h) - fg(a)}{h} = f(a+h) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$g \text{ étant dérivable en } a, \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \approx g'(a)$$

$$f \text{ étant dérivable en } a, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx f'(a) \text{ et } f(a+h) \approx f(a)$$

$$\text{d'où } \frac{fg(a+h) - fg(a)}{h} \approx fg'(a) + gf'(a)$$

On en déduit que fg est dérivable en a et que le nombre dérivé de la fonction fg en a est $(fg' + gf')(a)$.

Approximation affine d'une fonction

1. Montrer que la fonction f , définie sur $] -1 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$,

est dérivable en $x = 0$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x$.

Quelle est la nature de la fonction g ?

Compléter le tableau suivant avec les valeurs fournies par votre calculatrice :

x	-0,5	-0,01	-0,000 01	0	0,000 008	0,000 02	0,1
$f(x)$							
$g(x)$							

3. Explorer sur quel intervalle la calculatrice confond les valeurs de $f(x)$ et de $g(x)$. Sur cet intervalle, on dit que la fonction g est une *approximation affine de f* pour la calculatrice.

4. Prouver que la fonction g est une *approximation affine de f* pour les nombres réels très petits, c'est à dire que $g(x)$ est très proche de $f(x)$, pour x très petit.

5. **Généralisation :** Soit f une fonction dérivable en un point a de son ensemble de définition. Montrer qu'on peut alors utiliser le nombre dérivé $f'(a)$ pour définir une approximation affine g de f , pour x très proche de a .

Fonction dérivée

On note I un intervalle explicité sur lequel la fonction f est définie.

On dit que f est dérivable sur I , lorsqu'elle est dérivable en tout point de I .

Nous admettons que, si f est dérivable sur I alors il existe une fonction explicitée unique, définie sur I , qui fournit les nombres dérivés de f en tout point explicité de I . On l'appelle **fonction dérivée** de f sur I et on la note f' .

Exemple : on a vu dans l'exercice 1, que la fonction « carré » est dérivable en tout réel explicité a et que $f'(a) = 2a$. Ainsi la fonction $x \rightarrow 2x$, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction dérivée de la fonction « carré ».

On peut souligner le parallèle entre l'effet « horizon » sur la calculatrice et la notion de « nombres très proches ». Mais c'est aussi une nouvelle occasion de bien distinguer les valeurs de x du tableau, des nombres très petits. De même, les valeurs de $f(x)$ et $g(x)$, même confondues par la calculatrice, ne sont pas « très proches »...

Dans chaque exercice, on voit apparaître la fonction dérivée dès que l'on a trouvé la relation qui lie les réels explicités à leur nombre dérivé. La leçon se déroule ensuite de manière plus classique, par les opérations sur les fonctions dérivables, que l'on déduit des propriétés algébriques des nombres dérivés...

Corrigés de certains exercices

Exercice 6 :

On a $f(2) = \frac{1}{2}$. Soit h tp :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h} = -\frac{h}{2(2+h)h} = -\frac{1}{2(2+h)}.$$

h est tp donc $2+h \approx 2$ et $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \approx -\frac{1}{4}$.

La fonction f est donc dérivable en $x = 2$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Exercice 7 :

a. Calculons pour h tp le rapport $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

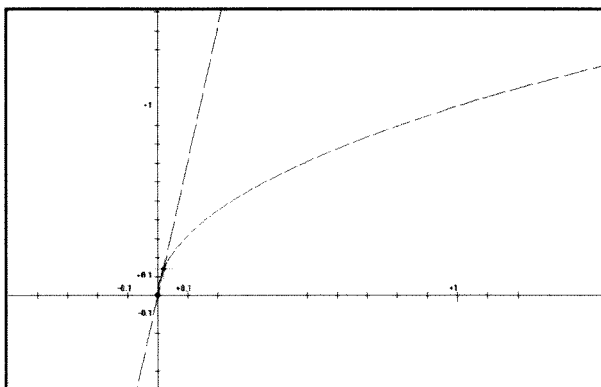
h est tp donc $\sqrt{h}$ est tp et $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est tg. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Par contre, on peut remarquer l'existence d'un « pinceau très fin » de sécantes passant par l'origine du repère.

En effet, la sécante Δ passant par O et par $M(h; \sqrt{h})$ a pour équation : $y = \frac{1}{\sqrt{h}}x$.

Donc pour un point de D tel que y soit modéré, $x = y\sqrt{h}$ est tp puisque h est tp.

On est ainsi amené à dire que l'axe des ordonnées est tangent à la courbe représentative de f .



b. Cette fois on étudie le rapport $\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$. On peut multiplier par la quantité conjuguée du numérateur, mais il peut être intéressant de revenir aux propriétés de la racine carrée :

Comme $\sqrt{1+h}$ est très proche de 1 (voir l'exercice 10g. du chapitre « nombres très proches » dans la leçon sur les ordres de grandeur), on peut écrire :

$$\sqrt{1+h} = 1 + h' (*) \text{ avec } h' \text{ tp ; donc } \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{h'}{h}.$$

Mais de (*) on déduit $1+h = 1+2h'+h'^2$ d'où $h = h'(2+h')$ puis $\frac{h}{h'} = 2+h'$ et $\frac{h'}{h} = \frac{1}{2+h'}$, ce qui fournit le nombre dérivé...

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES FONCTIONS

Le but de cette leçon est l'étude des « branches infinies » de la courbe représentative d'une fonction. Il s'agit de s'intéresser au comportement de la fonction aux bornes de son ensemble de définition et à aux conséquences éventuelles de ce comportement sur sa représentation graphique.

Exemple 1 :

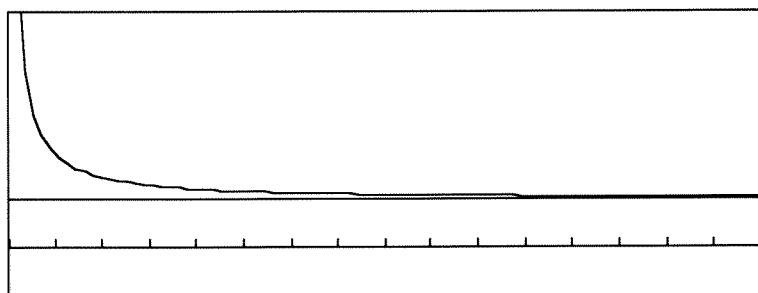
Nous avons choisi de présenter cette notion aux élèves en proposant plusieurs exemples, afin de montrer l'usage des outils fournis par les ordres de grandeur. Nous n'utilisons pas ici le mot « limite ».

Soit la fonction f définie sur $I =]2 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.

Notons C la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

L'intervalle $]2 ; +\infty[$ contient des nombres très grands positifs. Que dire de leur image ?

Faisons tracer la représentation graphique de f par une calculatrice et regardons l'écran plutôt du côté des « grandes valeurs ». Nous observons à peu près ceci :



Les points de la courbe C semblent tous avoir une ordonnée supérieure ou égale à 1. Si on trace la droite D d'équation $y = 1$, on s'aperçoit que, dès que x est « assez grand », on ne peut plus distinguer C de D . Le phénomène persiste sur des « zooms » successifs.

Cette observation nous permet de **conjecturer** :

« pour tout x très grand positif, $f(x)$ est très proche de 1 ».

Attachons nous à **démontrer ce résultat**.

Soit x très grand positif, alors $x-2$ est très grand positif et donc son inverse

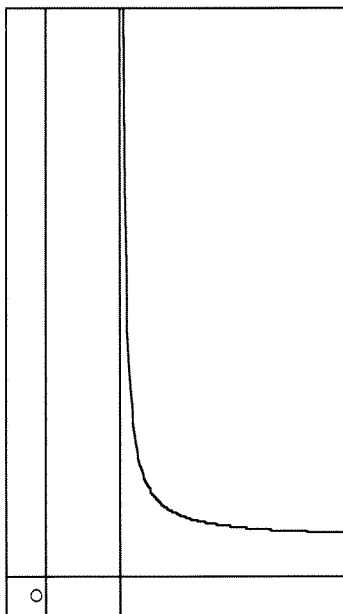
$\frac{1}{x-2}$ est très petit positif. Ainsi $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ est très proche de 1.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = 1$ est **asymptote horizontale à la courbe C** .

De plus, $f(x) > 1$ car $\frac{1}{x-2}$ est positif donc C reste au dessus de la droite D .

Dans $]2 ; +\infty[$, il y a des nombres x très proches de 2. Que dire de leur image ?

Si l'on regarde de nouveau l'écran de la calculatrice graphique, on y verra à peu près ceci :



La situation semble « symétrique » de celle du cas précédent, x et y échangeant leurs rôles. Mais n'est-il pas aussi possible que, lorsque x est très proche de 2, y soit très proche d'une valeur modérée ?

Essayons alors une approche théorique :

Si x est très proche de 2, alors $x-2$ est très petit. Puisque x est un élément de $]2 ; +\infty[$, $x-2$ est positif. Ainsi $x-2$ est très petit positif, donc $\frac{1}{x-2}$ est très grand positif. Ainsi $1 + \frac{1}{x-2}$ est aussi très grand positif.

Concluons : « quand x est strictement supérieur à 2, et très proche de 2, $f(x)$ est très grand positif ».

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = 2$ est **asymptote verticale** à la courbe C .

Exemple 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2+1}$.

Notons Γ la représentation graphique de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Que dire de $g(x)$ quand x est très grand positif ? très grand négatif ?

Soit x très grand positif.

Alors $2x$, $2x+1$, x^2 et x^2+1 sont eux aussi très grands positifs

$\frac{1}{x^2+1}$, inverse d'un nombre très grand (positif) est très petit (positif).

On en tire deux conclusions :

- Pour tout x très grand positif, $g(x)$ est très grand positif,
- Pour tout x très grand positif, $g(x) \approx 2x + 1$.

Interprétons graphiquement cette deuxième conclusion.

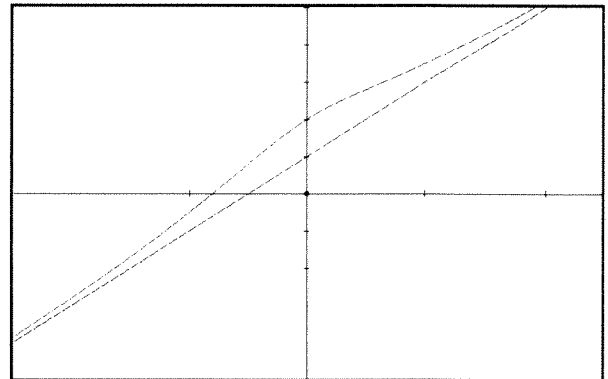
$g(x) \approx 2x + 1$ nous fait penser à la droite D d'équation $y = 2x + 1$.

Un point M de Γ a des coordonnées de la forme :

$(x, g(x))$.

« Quand x est très grand positif, $g(x) \approx 2x + 1$ » signifie que le point M est

« très proche » du point de la droite D qui a la même abscisse que lui, quand celle-ci est très grande.



Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est **asymptote (oblique) à la courbe C**.

Exercices :

1. Etudier le cas où x est très grand négatif.
2. Montrer que la distance euclidienne du point $M(x; g(x))$ à l'asymptote est très petite pour x très grand. Etudier la réciproque.

Exemple 3.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.

Sa représentation graphique est une parabole P .

Puisque h est paire, on peut se contenter de l'étude pour x positif :

Pour tout x très grand positif, $h(x)$ est très grand positif.

La situation fait penser à celle de l'exemple 2.

La parabole P admet-elle une asymptote « oblique » ?

Dans toute cette leçon, les fonctions doivent être explicitées, et pour cela, les nombres a et b sont explicités.

Soit D une droite d'équation $y = ax + b$ (a et b réels explicités).

On a donc : $h(x) - (ax + b) = x^2 - ax - b = x \left(x - a - \frac{b}{x} \right)$. Pour tous a et b

réels explicités et x très grand positif, ce produit est très grand positif.

Pour que D soit asymptote à P , il aurait fallu qu'il existe des nombres réels a et b explicités tels que, pour tout x très grand, $h(x) - (ax + b) \approx 0$.

La parabole P ne peut pas avoir d'asymptote oblique.

Exercice 3 :

Soit la fonction g définie dans $]1; +\infty[$, par $g(x) = x^3 + \frac{1}{x-1}$. On note C_g la représentation de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- a. Prouver que C_g admet une asymptote verticale que l'on précisera.
- b. Prouver que C_g n'a pas d'asymptote pour x très grand positif.

Résumé :

Une courbe C représentative d'une fonction f comporte une « branche infinie » dès qu'elle contient des points dont l'une au moins des coordonnées x ou $f(x)$ est très grande.

Les différentes situations sont résumées dans le tableau suivant, où l'on dresse l'inventaire des cas pour x positif :

x	Comportement de $f(x)$	Condition supplémentaire	Conclusion
très proche de a a explicité	très grand positif		Asymptote verticale d'équation $x = a$
	très grand négatif		
très grand positif	très proche de b b explicité		Asymptote horizontale d'équation $y = b$
	très grand positif	Il existe a et b explicités tels que pour tout x très grand, $f(x) - (ax + b)$ est très petit	Asymptote « oblique » d'équation $y = ax + b$
			Pas d'asymptote
	très grand négatif	Il existe a et b explicités tels que pour tout x très grand, $f(x) - (ax + b)$ est très petit	Asymptote « oblique » d'équation $y = ax + b$
			Pas d'asymptote

On peut naturellement construire un tableau analogue pour x négatif.

CONVERGENCE DES SUITES REELLES

Limite d'une suite

Si on considère une suite (u_n) de nombres réels, il est naturel de se demander ce qu'il advient des valeurs de u_n quand n devient très grand. Les exemples qui suivent montrent la multiplicité des situations.

Si u_n vaut :	Pour tout n entier très grand, on a :
$u_n = \frac{1}{n}$	$u_n \approx 0$
$u_n = \sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{n}$	$u_n \approx \sqrt{n}$
$u_n = \frac{n-1}{2n+1}$	$u_n \approx \frac{1}{2}$
$u_n = \sqrt{n}$	u_n est $tg > 0$
$u_n = -n^2 + n$	u_n est $tg < 0$
$u_n = (-1)^n n$	u_n n'est ni modéré, ni $tg > 0$, ni $tg < 0$

On est ainsi conduit aux définitions suivantes :

Définitions :

- On dit que la suite (u_n) converge vers un réel explicité l si, pour tout entier n très grand, u_n est très proche de l .
- On dit que la suite diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout entier n très grand, u_n est très grand positif (respectivement très grand négatif).
- Dans les autres cas on dit simplement que la suite diverge.

Théorème 1 :

Si la suite (u_n) converge vers un réel explicité l alors l est unique.

Démonstration :

S'il existe deux réels explicités l et l' tels que $u_n \approx l$ et $u_n \approx l'$ pour tout entier n très grand, alors $l \approx l'$ et donc $l = l'$ car deux réels explicités et très proches sont égaux.

Conséquence :

Cela permet d'écrire sans ambiguïté $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, +\infty, -\infty$ suivant que la suite converge vers le réel explicité l ou diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Dans chaque cas on dit que $l, +\infty, -\infty$ respectivement, est la limite de la suite.

Exercices :

1. Décrire dans le langage des limites le comportement des suites (u_n) que voici :

a. $u_n = \frac{\sin n}{n}$

b. $u_n = \frac{n}{2} + \sin n$

c. $u_n = \frac{-n^2 + n\sqrt{n} + 1}{2n\sqrt{n} - 1}$

2. On considère les suites u et v définies par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

a. Montrer que si la suite u admet une limite, celle-ci est un réel explicite l qui est solution de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

b. On suppose que la suite u converge vers l : que dire de la suite v ? En utilisant le développement de $\cos(n+1)$ montrer qu'on aboutit à une absurdité.

c. On suppose que la suite u converge vers $-\frac{1}{2}$: montrer que la suite v est convergente et que sa limite est non nulle. En utilisant le développement de $\sin(2n)$, montrer que cette situation est absurde elle aussi. Qu'en déduit-on pour u ? pour v ?

Etude des suites géométriques

Théorème 2 :

Soit q un réel explicite non nul et la suite u définie par $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n .

- Si $q > 1$ alors u diverge vers $+\infty$.
- Si $q = 1$ alors u converge vers 1 (u est une suite constante).
- Si $-1 < q < 1$ alors u converge vers 0.
- Si $q \leq -1$ alors u diverge.

Démonstration :

- Si $q > 1$, on pose $q = 1 + t$ où t est un réel explicite strictement positif. On a $(1+t)^n \geq 1 + nt$ et $1 + nt$ est un réel très grand positif dès que n est très grand. Il en est alors de même pour q^n d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $u_n = 1$ pour tout entier n d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Si $0 < q < 1$ on pose $q' = \frac{1}{q}$. On a $q' > 1$ et $(q')^n$ est un réel très grand positif dès que n est très grand. q^n est alors très petit d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $-1 < q < 0$ on pose $q' = -q$. On a $0 < q' < 1$ et $(q')^n$ est un réel très petit dès que n est très grand. Comme $q^n = (-1)^n (q')^n$ alors q^n est aussi très petit dès que n est très grand d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q = -1$ alors $q^n = (-1)^n$ et u diverge.
- Si $q < -1$ on pose $q' = -q$. On a $q' > 1$ et $(q')^n$ est un réel très grand positif dès que n est très grand. Comme $q^n = (-1)^n (q')^n$ alors u diverge.

Exercices :

3. On dispose d'un vase dont le volume est 2 litres. On y verse successivement 1 litre d'eau puis $\frac{1}{2}$ litre puis $\frac{1}{4}$ litre et ainsi de suite toujours en divisant par 2 la quantité précédemment versée. Le vase va-t-il finir par déborder ? Si oui à quelle étape ? Si non quel niveau peut-on penser atteindre en réitérant le processus indéfiniment ?

4. Pour un triangle T on appelle transformé de T et on note T' le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de T . On part d'un

Soit n un entier naturel non nul.
Soit :
 $f(t) = (1+t)^n - (1+nt)$
pour tout réel t positif.
 f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :
 $f'(t) = n(1+t)^{n-1} - n$
 $= n[(1+t)^{n-1} - 1]$.
 $f'(t) \geq 0$, f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$
donc $f(t) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
(Si l'on souhaite ne pas utiliser ici la dérivée, on peut démontrer cette inégalité par récurrence.)

triangle T_0 et soient $T_1 = T_0'$, $T_2 = T_1'$, ..., $T_n = T_{n-1}'$, ... On désigne par l_n et a_n les périmètre et aire de T_n . Déterminer les limites de ces deux suites.

5. Pour un demi-cercle C de diamètre $[AB]$, on note C' et on appelle transformée de C la réunion des deux demi-cercles situés dans le même demi-plan que C et de diamètres respectifs $[AI]$ et $[IB]$ où I désigne le milieu de $[AB]$. On part d'un demi-cercle C_0 d'extrémités A et B avec $AB = 1$ puis on considère $C_1 = C_0'$, C_2 la courbe qui se déduit de C_1 en remplaçant chacun des deux demi-cercles qui constituent C_1 par leurs transformées etc..., C_n se déduisant toujours de C_{n-1} en remplaçant tous les demi-cercles qui la constituent par leurs transformées. On désigne par l_n et a_n la longueur de C_n et l'aire du domaine qu'elle délimite avec (AB) .

- Dessiner les figures pour $0 \leq n \leq 3$.
- Déterminer les limites des deux suites (l_n) et (a_n) .
- Voyez-vous quelque chose de paradoxal dans les résultats obtenus ?

6. Pour un polygone P on appelle transformé de P et on note P' le polygone qui s'en déduit en remplaçant chacun de ses côtés $[AB]$ par la ligne brisée $ACDEB$ où C et D sont situés sur $[AB]$ et vérifient $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$, CDE étant de plus équilatéral et "greffé" à l'extérieur du polygone P .

On part d'un triangle équilatéral T_0 de côté 15 cm.

Soient $T_1 = T_0'$, $T_2 = T_1'$, ... $T_n = T_{n-1}'$, ... On désigne par l_n et a_n les périmètre et aire de T_n .

- Dessiner les figures pour $0 \leq n \leq 3$.
- Déterminer les limites des deux suites (l_n) et (a_n) .
- Voyez-vous quelque chose de paradoxal dans les résultats obtenus ?

La figure limite s'appelle "le flocon de neige de Von Koch".

Théorème des gendarmes

Théorème 3 :

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) des suites réelles telles que, pour tout entier n très grand, on ait les inégalités: $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel explicité l alors la suite (v_n) converge aussi vers l .

Démonstration :

Si pour tout entier n très grand on a les inégalités : $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors on a aussi : $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$.

Or $w_n - u_n$ est très petit donc $v_n - u_n$ l'est aussi.

Pour tout entier n très grand on a alors $v_n \approx u_n \approx l$, ce qui signifie que la suite (v_n) converge vers l .

Exercices :

7. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}.$$

8. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

(on utilisera l'encadrement : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, pour tout x réel positif).

9. Volume de la sphère selon Archimède

On considère une sphère S de centre O et de rayon R et on souhaite justifier la formule qui permet de calculer son volume. Il suffit évidemment de calculer le volume d'une demi-sphère S' obtenue en sectionnant S par un plan diamétral π . Soit Δ la perpendiculaire à π passant par O et A l'intersection de Δ avec S' . On partage le segment $[OA]$ en n segments égaux en introduisant les points A_j avec $0 \leq j \leq n$ et tels que $\overrightarrow{OA_j} = \frac{j}{n} \overrightarrow{OA}$.

Soit C_j le cercle d'intersection de S' et du plan perpendiculaire à Δ en A_j pour $0 \leq j \leq n-1$: l'idée qui sous-tend le calcul est que pour n entier très grand positif, les cylindres droits dont les bases sont les cercles C_j et la hauteur $\frac{OA}{n}$ ont un volume total très proche du volume de S' .

a. Faire une figure et montrer que le volume de S' est encadré par la somme des volumes des cylindres d'indices j avec $1 \leq j \leq n-1$ et la somme analogue avec cette fois $0 \leq j \leq n-1$.

b. Démontrer par récurrence que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et conclure grâce au "théorème des gendarmes".

Ici π est considéré non pas comme le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre mais comme celui de l'aire du disque au carré de son rayon. La cohérence des deux aspects sera approfondie dans le chapitre consacré aux aires et à l'intégrale, mais il existe un argument heuristique intéressant dû à Nicolas de Cuse (XV^{ème} siècle) : on se ramène par homothétie au cas où le rayon est 1 et il s'agit de prouver que si 2π est le périmètre du cercle trigonométrique, alors son aire vaut π . Pour cela on assimile le cercle à un polygone régulier ayant un nombre très grand de côtés. Chacun des triangles ayant pour base un côté du polygone et pour sommet le centre du cercle a une aire égale au produit de la base par la moitié de la hauteur à savoir par $1/2$; mais si on ajoute les aires de tous les triangles on trouve l'aire du polygone *i.e.* l'aire du disque et cela vaut $1/2$ multiplié par la somme de tous les côtés *i.e.* le périmètre du cercle...

Corrigés de certains exercices

1. a) $u_n = \frac{\sin n}{n}$

Pour tout entier n très grand, $\sin n$ est modéré et u_n est très petit, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = \frac{n}{2} + \sin n$

Pour tout entier n très grand, $\sin n$ est modéré, $\frac{n}{2}$ est très grand positif et u_n l'est aussi, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c) $u_n = \frac{-n^2 + n\sqrt{n} + 1}{2n\sqrt{n} - 1} = \frac{-\sqrt{n}}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2n\sqrt{n}}} \right) \quad (n \neq 0)$

Pour tout entier n très grand, $\sqrt{n}$ est très grand positif, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{n^2}$ sont très petits.

$\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2n\sqrt{n}}} \right) \approx 1$ et u_n est très grand négatif, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, $\cos(2n)$ et $\cos n$ sont très proches de l pour tout entier n très grand.

La formule $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ donne $u_{2n} = 2u_n^2 - 1$, d'où $2l^2 - 1 \approx l$.

Comme par définition l est explicité et que deux nombres explicités très proches sont égaux, on a $2l^2 - 1 = l$, ce qui montre que l est racine de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ et donc que l vaut 1 ou $-\frac{1}{2}$.

b) Si $l = 1$, pour tout entier n très grand, on a $u_n \approx 1$. De plus la formule $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ donne $v_n^2 \approx 0$ et donc $v_n \approx 0$.

Mais la formule $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$ donne alors $1 \approx \cos 1$, ce qui est faux.

c) Si $l = -\frac{1}{2}$, pour tout entier n très grand, $u_n \approx -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} \approx -\frac{1}{2}$.

La formule $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$ donne $v_n \approx \frac{-\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2}}{\sin 1}$, ce qui

prouve que (v_n) converge vers une limite non nulle l' .

Mais la formule $\sin(2n) = 2\sin n \cos n$ donne alors $l' \approx -l'$, ce qui est impossible pour $l' \neq 0$.

Finalement, u ne peut pas converger, et dans ce cas la formule

$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin n \sin 1}{\sin 1}$ montre qu'il en va de même pour v .

5. La suite (l_n) est constante car à chaque étape un demi-cercle est remplacé par deux demi-cercles de diamètre moitié. Par contre l'aire du disque étant proportionnelle au carré de son rayon, on voit que la suite des aires est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ d'où une limite nulle. Le paradoxe apparent réside en ceci qu'avec cette limite nulle on pourrait -à tort- se croire en situation d'estimer que pour n entier $tg > 0$, C_n se confond avec le segment $[AB]$ dont la longueur vaut 1 et non $\frac{\pi}{2} \dots$

6. La suite (l_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3}$, car à chaque étape un segment est remplacé par 4 autres de longueurs trois fois plus petites. L'inégalité de Bernoulli : $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}$ montre alors que pour n entier $tg > 0$, il en va de même de l_n . Par contre en raisonnant sur le nombre de côtés du $n^{\text{ième}}$ polygone et en remarquant qu'il s'agit aussi du nombre de triangles greffés à cette étape, triangles dont la longueur des côtés vaut précisément l_n

on voit que : $a_{n+1} = a_n + \underbrace{3 \times 4^n}_{\text{nombre de côtés de } T_n} \times \underbrace{l_{n+1}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}}_{\text{aire d'un triangle équilatéral de côté } l_{n+1}}$

d'où on déduit que : $a_{n+1} = a_n + 3 \times 4^n \times \left(\frac{5}{3^n}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = a_n + \frac{75\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$

d'où il vient que :

$$a_n = a_0 + \frac{75\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) = \frac{225\sqrt{3}}{4} + \frac{135\sqrt{3}}{4} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

ce qui montre que la suite des aires converge vers $90\sqrt{3}$.

Le "paradoxe" ici est qu'on dispose pour n entier $tg > 0$ d'une figure T_n dont le périmètre est très grand alors que l'aire reste en deçà de $90\sqrt{3}$.

7. On a $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. A ce stade on sait que la suite ne peut converger. Mais par télescopage, $S_{2n} - S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \geq \frac{n}{2}$ et ainsi pour m entier $tg > 0$ S_m est $tg > 0$ car du fait que la suite est croissante, il est plus grand que tous les S_{2^n} avec n modéré, et donc que tous les $\frac{n}{2}$ correspondants.

8. c) $|g(x) - g(x')| = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x'^2 + 1} \right| = \frac{1}{4} \frac{|x'^2 - x^2|}{(x^2 + 1)(x'^2 + 1)}$ donc

$$|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{4} |x'^2 - x^2| = \frac{1}{4} |x' - x| |x' + x| \leq \frac{1}{2} |x' - x| \text{ quand : } x, x' \in [0 ; 1].$$

d) Si $n \geq m$, on a :

$$|u_n - u_m| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - u_{m-1}| \leq \frac{1}{2^2} |u_{n-2} - u_{m-2}| \leq \frac{1}{2^m} |u_{n-m} - u_0| \leq \frac{1}{2^m}.$$

AIRE SOUS UNE COURBE

Le calcul intégral est le point de rencontre de deux concepts qui se sont nettement affirmés à partir du 17^{ème} siècle : celui d'aire et celui d'antidérivation.

L'aire délimitée par des figures géométriques simples (rectangles, triangles, disques) était, en raison de ses applications pratiques, un concept honoré depuis la plus haute Antiquité. A partir du 17^{ème} siècle, on chercha à calculer l'aire du domaine plan comprise entre le graphe d'une fonction positive, l'axe des x et deux segments parallèles à l'axe des y . Le cas des paraboles et celui des hyperboles servirent de point de départ. Les géomètres de l'Antiquité, à la suite d'Eudoxe et d'Archimède, obtenaient leurs aires en les encadrant par celles de domaines contenant le domaine considéré ou contenus dedans, puis vérifiaient la validité du résultat par un double raisonnement par l'absurde. Cette « méthode d'exhaustion » fut reprise par les mathématiciens arabes autour du 11^{ème} siècle et resta longtemps l'unique méthode reconnue.

La méthode d'exhaustion ne donnait pas le moyen de trouver l'aire cherchée, seulement de la justifier après avoir trouvé un « candidat ». L'idée qui fit peu à peu son chemin après la Renaissance était que l'on pouvait obtenir l'aire d'un domaine sous un graphe en le partageant (en un sens à expliciter) en un très grand nombre de lamelles rectangulaires verticales infiniment fines... Entre temps, un essai qui connut un certain succès, en particulier sous la plume de Galilée, fut celui des *indivisibles* théorisé par son élève Bonaventura Cavalieri (1598-1647) dans ses ouvrages de 1635 et 1647. L'idée était qu'un domaine plan était constitué de segments de droite indivisibles. Pour calculer une aire, il suffisait de montrer que la décomposition en segments du domaine considéré donnait des segments dans un même rapport avec ceux d'un domaine d'aire connue. Par exemple l'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire du rectangle correspondant car ses segments parallèles à un côté se retrouvent dans le rectangle complémentaire.

Finalement, l'idée des lamelles infiniment fines s'imposa en même temps que l'émergence du calcul différentiel de Newton et Leibniz. Une des raisons est qu'à la suite de Isaac Barrow (1630-1677), le prédécesseur de Newton à Cambridge, on s'aperçut que l'opération de calcul des aires pouvait être réalisée en inversant l'opération de calcul des dérivées : sommer est l'opération inverse de calculer des différences. Pendant tout le 18^{ème} siècle cette antidérivation, appelée depuis *calcul des primitives*, tint lieu de calcul intégral. Mais pour donner un sens à l'intégrale comme aire sous le graphe, il restait à s'accommoder du fait que le graphe d'une fonction n'est pas en général exactement confondu avec le bord supérieur d'une réunion de rectangles, c'est à dire avec le graphe d'une fonction en escalier. C'est seulement au 19^{ème} siècle que ce problème fut résolu en termes de limites par Augustin Cauchy (1789-1857), puis dans toute sa généralité par Georg Bernhard Riemann (1826-1866).

Nous allons utiliser le langage des ordres de grandeur pour définir l'intégrale d'une fonction explicitée à partir de la somme des aires de rectangles très fins dont le bord supérieur est très proche de la courbe, ce qui revient à approcher la fonction par une *fonction en escalier*, avec une erreur très petite. Cette somme ne dépend que très peu du choix de l'approximation, de sorte qu'il existe au plus un réel explicité très proche de toutes ces sommes. Pour les « bonnes » fonctions, dites *intégrables*, ces sommes sont modérées et un tel nombre existe.

La leçon qui suit est une succession d'activités pour les élèves. Elle devrait leur faire saisir le lien entre intégrale et aire.

Un cours plus complet est développé dans la partie II.

Cas des fonctions en escalier

Exemple

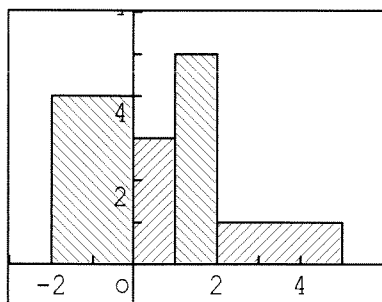
Considérons l'intervalle $I = [-2 ; 5]$.

Les nombres (-2) , 0 , 1 , 2 et 5 constituent une subdivision de I car ils le partagent en intervalles disjoints $[-2 ; 0[$, $[0 ; 1[$, $[1 ; 2[$ et $[2 ; 5]$.

La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 4 & \text{pour } x \in [-2 ; 0[\\ f(x) = 3 & \text{pour } x \in [0 ; 1[\\ f(x) = 5 & \text{pour } x \in [1 ; 2[\\ f(x) = 1 & \text{pour } x \in [2 ; 5] \end{cases}$$

est une fonction en escalier définie sur $[-2 ; 5]$. On peut remarquer que f est positive sur $[-2 ; 5]$.



Il est facile de calculer l'aire A de la portion de plan limitée par l'axe (Ox) , la représentation graphique de f et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 5$ car ce domaine est une réunion de rectangles.

On a : $A = 4 \times 2 + 3 \times 1 + 5 \times 1 + 1 \times 3 = 19$.

Dans ce cas, on dit que A est égale à « l'intégrale de f entre (-2) et 5 » et on note : $A = \int_{-2}^5 f$.

Fonction en escalier sur un intervalle explicité $[a ; b]$

Définition 1

On dit que φ est une fonction en escalier sur $[a ; b]$ s'il existe une subdivision de $[a ; b]$:

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n = b$$

telle que sur chaque intervalle $]x_k ; x_{k+1}[$, φ est constante :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]x_k ; x_{k+1}[, \varphi(x) = c_k , k \in \{0, 1, \dots, n-1\} .$$

Remarque :

Si, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, c_k est un nombre positif, on dit que la fonction est positive.

Aire sous la courbe d'une fonction en escalier positive

Définition 2 :

Soit $\varphi : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier positive.

On définit l'aire sous la courbe de φ par le réel $\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k)$, noté $\int_a^b \varphi$.

C'est la somme des mesures des aires des rectangles situés sous la courbe de φ et correspondant à la subdivision.

Intégrale d'une fonction en escalier

Généralisons la formule précédente à toute fonction en escalier :

Nous appellerons « intégrale de φ entre a et b » le nombre noté $\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k)$.

On pourra parler dans ce cas d'aire algébrique.

Aire sous un arc de parabole

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$.

La représentation graphique P de f est un arc de parabole. On cherche l'aire de la portion de plan limitée par l'axe (Ox) , P , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

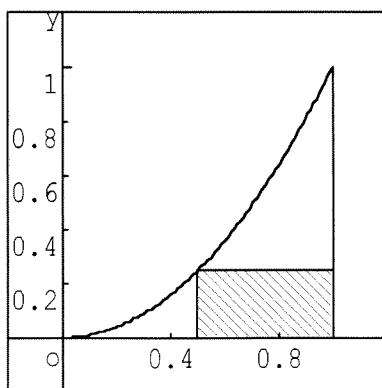
Le problème est moins simple car il ne s'agit plus de calculer l'aire de rectangles. Mais nous allons essayer de nous y ramener en considérant des subdivisions de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Première étape : partageons l'intervalle en deux.

Soit φ la fonction en escalier prenant même valeur que f en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et qui est

constante sur chacun des intervalles $[0 ; \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2} ; 1]$. Dessinons les représentations graphiques de f

et φ dans le même repère :

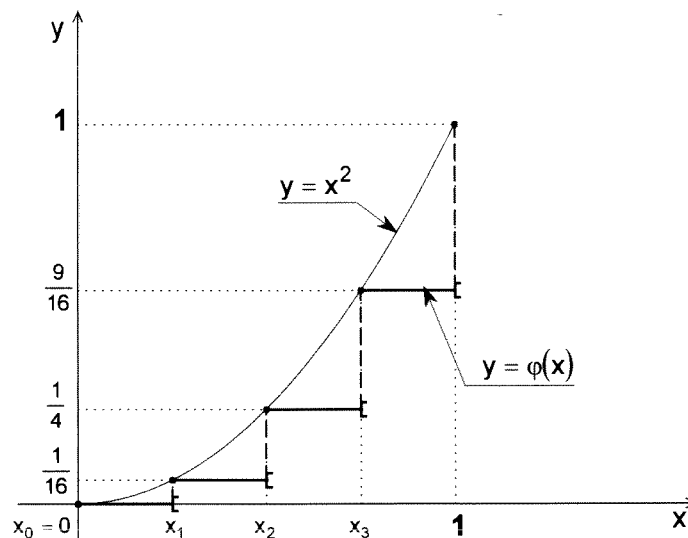


Calculer $\int_0^1 \varphi$.

Deuxième étape : partageons l'intervalle en quatre.

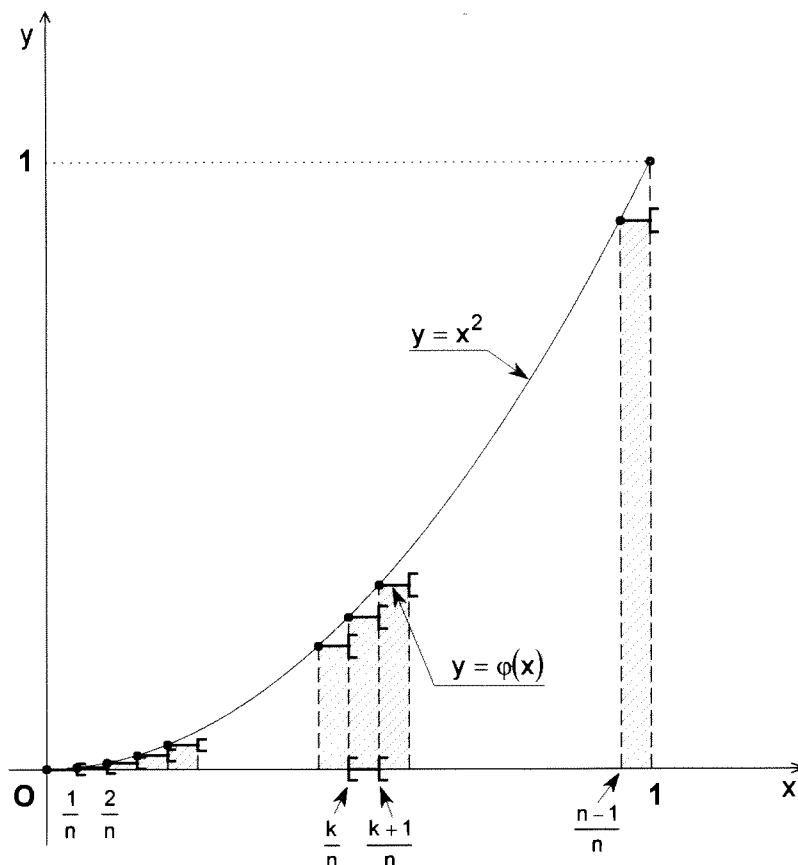
Soit alors la fonction φ en escalier qui prend mêmes valeurs que f en $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}$ et $x_4 = 1$ et qui reste constante sur chacun des intervalles $[0; \frac{1}{4}[, [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[, [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[, [\frac{3}{4}; 1]$.

Voici les représentations graphiques de f et φ sur $[0; 1]$, φ est un peu plus « proche » de f :



Calculer : $\int_0^1 \varphi$.

Continuons, en prenant pour φ la fonction en escalier qui prend les mêmes valeurs que f aux abscisses $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = 1$ et qui reste constante sur les intervalles $[0; \frac{1}{n}[, [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}[, [\frac{2}{n}; \frac{3}{n}[, \dots, [\frac{n-1}{n}; 1]$:



Pour approcher au mieux l'aire sous la courbe de f , il faudrait une fonction en escalier de subdivision « très fine », c'est à dire en n intervalles avec n entier très grand.

Montrons alors que :

a. Pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $f(x) \approx \varphi(x)$:

Soit x un réel quelconque de $[0 ; 1]$. Il existe k tel que $x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right[$ et l'on a : $0 \leq x - \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Alors : $f(x) = \varphi(x) = x^2 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \left(x + \frac{k}{n} \right) \left(x - \frac{k}{n} \right)$ et $0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \left(x + \frac{k}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \leq \frac{x}{n} + \frac{k}{n^2}$

$\frac{x}{n}$ est tp , et $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc aussi tp . Ceci nous assure $f(x) \approx \varphi(x)$ pour tout x dans $[0 ; 1]$.

b. $\int_0^1 \varphi$ est un réel modéré très proche d'un réel explicité :

$$\int_0^1 \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n^2} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

(voir à ce propos l'exercice 9 de la leçon « Convergence des suites réelles »)

Pour tout n très grand, on a : $\frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} \approx \frac{1}{3}$ donc : $\int_0^1 \varphi \approx \frac{1}{3}$

Il est alors naturel de prendre $\frac{1}{3}$ pour mesure de l'aire sous la courbe.

Exercice (généralisation) :

On veut déterminer l'aire sous l'arc de parabole $y = x^2$, $x \in [a ; b]$. Montrer, en introduisant la subdivision $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ avec n entier naturel tg et $0 \leq k \leq n-1$, selon la même méthode que

plus haut, que cette aire doit être égale à $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

Cohérence avec l'aire connue jusqu'ici :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = 2x + 1$.

Soit D la représentation graphique de f .

On cherche à évaluer l'aire « sous la courbe » représentant f .

Le calcul de l'aire grâce à la formule de l'aire du trapèze donne :

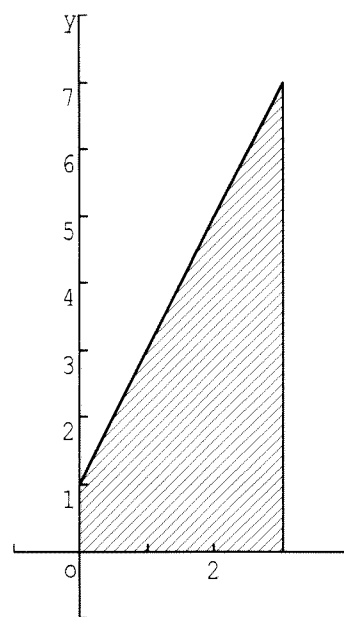
$$\mathbf{A} = 12.$$

Prenons encore pour φ la fonction en escalier qui prend les mêmes valeurs que f aux abscisses $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{n-1}{n}, 1$ et qui reste constante sur les intervalles $[0 ; \frac{1}{n}], [\frac{1}{n} ; \frac{2}{n}], [\frac{2}{n} ; \frac{3}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n} ; 1]$.

Le calcul de l'intégrale donne :

$$\int_0^3 \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{n} \left(2 \frac{3k}{n} + 1 \right) = \frac{18}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{18}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 3$$

qui est très proche de 12 pour n tg .



On retrouve (heureusement...) la valeur de $\mathbf{A}$ fournie par la formule traditionnelle.

PARTIE II

APPROFONDISSEMENT

Limites de suites.....	page 42
Limites de fonctions.....	page 48
Aires et intégrales.....	page 56
Un peu plus loin avec l' « ombre ».....	page 67

LIMITES DE SUITES

Ce chapitre prolonge celui sur la « Convergence des suites réelles » de la partie I. Pour des raisons de clarté, nous reprenons son contenu sans les exercices et en le complétant. On suppose connues les règles de Leibniz et leurs conséquences sur la relation « être très proche » (cf. chapitre « Ordres de grandeur »). On écrit tp pour « très petit » et tg pour « très grand ».

Dans tout ce chapitre le mot « suite » devra être considéré comme une abréviation pour « suite explicitée ». Cette dernière expression signifie que la définition de la suite ne met en jeu que des éléments dont on peut contrôler qu'ils sont bien les mêmes pour tous, et en particulier cette définition ne peut utiliser des réels tg ou tp : $\sqrt{2}$ est précis et objectif en ceci que tous les individus suffisamment préparés aux mathématiques peuvent s'accorder sur ses propriétés. Un entier tg n'a pas la même objectivité : si deux personnes distinctes désignent respectivement par m et n des entiers tg positifs on ne peut par exemple décider lequel des deux est le plus grand... La philosophie de cette remarque est la même que celle présentée par E. BOREL dans son article « La définition en Mathématiques » (Les Grands courants de la Pensée Mathématique, Cahiers du Sud 1948, réédité par « Rivages » en 1986). Il va de soi que toutes les suites rencontrées dans les programmes du lycée sont explicitées.

Pour une suite (u_n) telle que précédemment, les valeurs prises aux rangs entiers modérés sont elles-mêmes des réels modérés, mais il est naturel de se demander ce qu'il advient des valeurs de u_n quand n augmente indéfiniment, ce qui en langage des ordres de grandeur signifie qu'il devient très grand. Les exemples qui suivent montrent la multiplicité des situations :

<i>Si u_n vaut :</i>	<i>Pour tout n entier très grand, on a :</i>
$u_n = \frac{1}{n}$	$u_n \approx 0$
$u_n = \sqrt{\pi} + \frac{(-1)^n}{n}$	$u_n \approx \sqrt{\pi}$
$u_n = \frac{n-1}{2n+1}$	$u_n \approx \frac{1}{2}$
$u_n = \sqrt{n}$	u_n est $tg > 0$
$u_n = -n^2 + n$	u_n est $tg < 0$
$u_n = (-1)^n n$	u_n n'est ni modéré, ni $tg > 0$, ni $tg < 0$

On est ainsi conduit aux définitions suivantes :

Définitions :

La suite (u_n) converge vers un réel explicité l , si pour n entier $tg > 0$ $u_n \approx l$ (ce qui implique qu'alors u_n est modéré). On dit que la suite diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si pour n entier $tg > 0$, u_n est $tg > 0$ (respectivement $tg < 0$) ce qui exclut qu'elle converge ; de façon générale on dit que la suite diverge si elle ne converge pas.

Ainsi dans les exemples introductifs les suites indiquées sont-elles respectivement convergentes vers $0, \sqrt{\pi}, \frac{1}{2}$, divergentes vers $+\infty, -\infty$, divergente simplement.

Théorème 1 :

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel explicité l , celui-ci est unique et la suite est bornée (par un réel explicité).

preuve : On considère l'ensemble I des indices n pour lesquels $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. Tout entier tg positif appartient à I . Soit k un entier tg fixé : si n n'est pas dans I , $n \leq k$ et donc $\mathbb{N} \setminus I$ contient un plus grand élément n_0 . On en déduit que $\min\{u_0 ; u_1 ; \dots ; u_{n_0} ; l - 1\}$ est un minorant de la suite (u_n) et que par contre $\max\{u_0 ; u_1 ; \dots ; u_{n_0} ; l + 1\}$ en est un majorant. Si maintenant on suppose que l' est un réel explicité tel que pour n entier $tg > 0$ on ait $u_n \approx l'$, alors $l \approx l'$ d'où $l - l' \approx 0$ et comme $l - l'$ est explicité, il est nul.

Conséquences : *Ce qui précède permet sans ambiguïté d'écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, +\infty, -\infty$ suivant que la suite converge vers l ou diverge vers $\pm\infty$. On dit que $l, +\infty, -\infty$ est la limite de la suite.*

Théorème 2 :

Si la suite (u_n) est convergente, pour des entiers naturels m, n très grands on a toujours $u_m \approx v_n$.

preuve : si l est la limite de la suite on peut écrire $u_m \approx l$ et $v_n \approx l$ pour m, n entiers $tg > 0 \dots$

Remarque : Ceci fournit un critère de divergence d'une suite notamment lorsqu'elle est bornée. Par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente car si n est un entier tg , il en va de même de $n+1$ et cependant $|u_{n+1} - u_n| = 2$.

Exercice 1 :

Pour n entier > 0 on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Démontrer que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

Que peut-on dire de la limite de (S_n) ?

Réciproquement, on *admet* comme une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (*complétude*) l'énoncé suivant :

Propriété de Cauchy :

Si (u_n) est une suite (explicitée) de nombres réels telle que pour tous entiers naturels m, n très grands on ait $u_m \approx u_n$, alors la suite est convergente.

Remarque : Pour une suite qui ne serait pas « explicitée » la propriété de Cauchy peut être prise en défaut : il suffit de penser à une suite constante dont le terme générique serait justement un nombre réel $tg > 0 \dots$ Cela dit, on sait qu'il n'est pas question de démontrer en classe cette propriété qui est fondamentale pour le corps des réels, et fautive pour le corps des rationnels, mais elle se rattache assez bien à la pratique des calculatrices par les élèves : quand ceux-ci voient l'affichage de leur calculatrice programmable se stabiliser, ils ne voient pas *à priori* les termes de la suite s'approcher très près de l , mais bien plutôt les termes successifs de la suite être mutuellement très proches - au sens du pouvoir séparateur de la machine - lorsque n augmente, et c'est *alors* qu'intervient l'explication théorique à propos de la convergence.

Exercice 2 :

A part les équations polynomiales de degré 1 et 2, et quelques autres où on a soigneusement arrangé la présence de « racines évidentes », à part les équations trigonométriques où là encore on a organisé la présence des « valeurs remarquables », on ne sait pas en général résoudre de façon exacte les équations. E. Galois a montré qu'il était illusoire d'espérer des formules de résolution générales pour les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5. De fait la convergence de suites bien construites et la programmation du calcul des valeurs de leurs termes

successifs sont la grande méthode de résolution des équations (résolution approchée à la précision voulue). Très tôt, c'est à dire dès la Première, et sans déjà connaître le calcul des dérivées, on peut fournir des exemples de résolution approchée :

- Soit $f(x) = 4x^3 + 4x - 1$ défini pour tout x réel : montrer directement (sans étude de variation) que la fonction f est croissante strictement dans $\mathbb{R}$. En déduire que si l'équation $f(x) = 0$ admet une solution, celle ci est unique et comprise entre 0 et 1.
- Justifier que $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ où $g(x)$ est défini par $g(x) = \frac{1}{4(x^2 + 1)}$.
- Démontrer que pour $x \in [0 ; 1]$ il en va de même de $g(x)$ et que pour $x, x' \in [0 ; 1]$ on dispose de l'inégalité $|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.
- Soit la suite u définie par récurrence : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$. Montrer que pour $n \geq m$ on a $|u_n - u_m| \leq \frac{1}{2^m}$ et en déduire que si n et m sont des entiers naturels *tg* alors $u_m \approx u_n$.
- Soit α la limite de la suite u : montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$ et donc aussi de $f(x) = 0$. Donner un rang n à partir duquel on soit sûr que u_n diffère de α de moins de 10^{-6} .
- Programmer le calcul de la suite u et donner une valeur approchée de α à mieux que 10^{-6} .

Théorème 3 : *Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles telles que la première soit croissante, la seconde décroissante, avec pour chaque entier n , $u_n \leq v_n$; on suppose de plus que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.*

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et cette limite appartient à tous les segments $[u_n ; v_n]$ (propriété des « segments emboîtés »).

preuve : Si m, n sont des entiers très grands avec par exemple $m < n$, $0 \leq u_n - u_m \leq v_n - u_m \leq v_m - u_m$ ce qui montre que $u_n - u_m$ est très petit et donc selon l'axiome précédent la première suite converge vers un réel explicité l , puis pour n entier très grand $v_n \approx u_n \approx l$. Si on suppose qu'il existe un entier n tel que $v_n < l$, alors le plus petit d'entre eux n_0 est un entier explicité : mais alors pour n entier *tg* on aura $l - v_n \geq l - v_{n_0}$ ce dernier étant un réel explicité et non-nul ce qui fait que $l - v_n$ ne peut être *tp* : absurde. On procède de même pour établir $u_n \leq l$.

Exercice 3 (Méthode de Héron d'Alexandrie) :

- Pour un rectangle R de longueur L et largeur l , on appelle transformé de R et on désigne par $\widehat{R}$ le rectangle ayant même aire et dont l'une des dimensions est $\frac{L+l}{2}$. Calculer l'autre en

fonction de L et l . Montrer que si on désigne par $\widehat{L}$ et $\widehat{l}$ les longueur et largeur de $\widehat{R}$ on a nécessairement les relations suivantes: $\widehat{L} = \frac{L+l}{2}$ et $l \leq \widehat{l} \leq \widehat{L} \leq L$. Autrement dit le rectangle transformé est plus proche du format carré que le rectangle dont il est issu et possède la même aire que lui.

- On suppose que $L = 5$ et $l = 1$.

Dessiner les transformés successifs de R : $R_0 = R$, $R_1 = \widehat{R_0}$, $R_2 = \widehat{R_1}$, $R_3 = \widehat{R_2}$, avec précision et l'un sous l'autre. En convenant de poser pour tout entier naturel n : $R_{n+1} = \widehat{R_n}$ et en convenant de noter L_n et l_n les longueur et largeur de R_n , programmer à la calculatrice le calcul simultané des deux grandeurs précédentes. Que constatez-vous ?

3. On suppose maintenant que a est un réel explicite supérieur à 1 et on considère le rectangle R où $L = a$ et $l = 1$. On met en place les suites (R_n) , (L_n) , (l_n) comme à la question 2. Montrer que les deux suites (L_n) et (l_n) satisfont les conditions du théorème 3. Justifier que leur limite commune est un nombre x strictement positif et vérifiant $x^2 = a$. Quelle propriété connue vient-on de démontrer pour $a \geq 1$?

Que dire dans les autres cas ? Justifier que $L_{n+1} = \frac{1}{2}(L_n + \frac{a}{L_n})$.

4. Cette partie suppose qu'on ait déjà vu la notion de dérivée avec les élèves et qu'ils sachent mettre les tangentes à une courbe en équation afin de mettre en œuvre la méthode de Newton.

a. Représenter la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 5$, dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. On considère le point A_0 d'abscisse 5 de la courbe représentative : donner l'équation de la tangente en A_0 puis la dessiner. Déterminer l'abscisse d'intersection de cette tangente avec l'axe Ox et placer le point A_1 de la courbe situé à la verticale de cette intersection. Placer le point A_2 obtenu en répétant le processus précédent à partir de A_1 au lieu de A_0 , puis A_3 obtenu à partir de A_2 : qu'en pensez-vous ? En continuant le processus indéfiniment on construit une suite de points (A_n) de la courbe et on note (x_n) la suite de leurs abscisses : préciser la valeur de x_0 et déterminer l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .

b. Comparez la suite (x_n) à la suite (L_n) dans le cas où $a = 5$: qu'en déduit-on quant à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$? Programmer la suite (x_n) à la calculatrice et comparer la valeur de stabilisation de l'affichage avec celle que fournit la touche $\sqrt{\quad}$ de la machine. Généraliser en remplaçant 5 par un réel strictement positif.

Exercice 4 (approximation de π par la méthode des isopérimètres) :

1. On suppose que P est un polygone régulier de périmètre p et on désigne par c et i les rayons des cercles circonscrit à, et inscrit dans, ce polygone : π étant supposé défini comme le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, quel encadrement de π peut-on écrire ? Que se passe-t-il en particulier si $p = 2$?

2. On suppose ici que P est un triangle équilatéral de périmètre $p = 2$; dessiner la figure accompagnée des deux cercles et calculer l'encadrement de π auquel on aboutit. Qu'en pensez-vous ?

3. On recommence mais cette fois avec un hexagone régulier de périmètre 2 : dessin, encadrement de π . Que constate-t-on ?

4. Soit O le centre des deux cercles qui correspondent à l'hexagone précédent dont les sommets successifs sont notés ABCDEF. On introduit le point I du « petit arc » AB du cercle circonscrit à l'hexagone et qui partage ce dernier en deux arcs égaux. Soient A' et A'' les deux milieux des arcs AI et IB . Montrer que si on construit de même B' , B'' , C' , C'' , D' , D'' , E' , E'' , F' , F'' on obtient un dodécagone régulier de périmètre 2 et de centre O . Soit H l'intersection de (AB) et de (OI) , K la projection orthogonale de A' sur (OI) : calculer d'abord OK en fonction de OH et OI , puis utilisant deux méthodes distinctes de calcul du produit scalaire $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OI}$ déterminer la longueur OA' en fonction des longueurs OA et OK . Calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit correspondant au dodécagone et déterminer l'encadrement de π qui s'en déduit.

5. On désigne par (P_n) la suite de polygones définie comme suit : P_0 est le triangle équilatéral de périmètre 2, (P_1) l'hexagone régulier de même périmètre, (P_2) le dodécagone régulier construit précédemment et pour chaque polygone de la suite, son suivant est construit à partir de lui selon le protocole vu à la question 4. On désigne par c_n et i_n les rayons des cercles circonscrit et inscrit correspondant au polygone P_n . On veut calculer $(i_{n+1} ; c_{n+1})$

en fonction de $(i_n ; c_n)$: en utilisant la méthode de la question 4, montrer que $i_{n+1} = \frac{i_n + c_n}{2}$ et $c_{n+1} = \sqrt{i_{n+1} c_n}$. Programmer le calcul simultané de ces deux suites et de leurs inverses à la calculatrice. Pour quelle valeur de n la machine confond-elle les deux grandeurs $\frac{1}{c_n}$ et $\frac{1}{i_n}$?

Quelle est la valeur approchée de π qu'on obtient à ce moment là ? Quel est le nombre de côtés du polygone correspondant ?

6. Démontrer que les deux suites (i_n) et (c_n) satisfont les hypothèses du théorème 3 (on prouvera notamment $0 \leq c_n - i_n \leq \frac{c_{n-1} - i_{n-1}}{2} \leq \dots \leq \frac{c_0 - i_0}{2^n}$) et préciser leur limite commune.

Même question pour les suites inverses.

Théorème 4 :

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles telles que pour n entier $tg > 0$ on ait $u_n \leq v_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ on a nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. De même si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. Si les deux suites convergent respectivement vers l et l' alors $l \leq l'$.

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) des suites réelles telles que pour n entier $tg > 0$ on ait les inégalités : $u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel l . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ (« théorème des gendarmes »).

preuve : En ce qui concerne la première partie de l'énoncé il suffit d'observer qu'un réel supérieur à un tg positif est lui-même tg positif et qu'un réel inférieur à un tg négatif a la même qualité.

De plus si on a des limites explicitées l et l' , sous l'hypothèse $l > l'$ et pour n entier tg :

$u_n - v_n = (u_n - l) + (l - l') + (l' - v_n)$ qui est la somme de deux tp et d'un entier explicité strictement positif donc est strictement positif ce qui est absurde.

Quant à la seconde partie on voit que $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$ pour n entier $tg > 0$.

Comme alors $w_n - u_n$ est très petit, le résultat est acquis.

Indications et correction de certains exercices :

Exercice 1 :

$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. A ce stade on sait que la suite ne peut converger.

Mais par télescopage, $S_{2^n} - S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \geq \frac{n}{2}$ et ainsi pour m entier $tg > 0$ S_m est $tg > 0$ car du fait que la suite est croissante, il est plus grand que tous les S_{2^n} avec n modéré, et donc que tous les $\frac{n}{2}$ correspondants.

Exercice 2 :

c. $|g(x) - g(x')| = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x'^2 + 1} \right| = \frac{1}{4} \frac{|x'^2 - x^2|}{(x^2 + 1)(x'^2 + 1)}$, donc :

$|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{4} |x'^2 - x^2| = \frac{1}{4} |x' - x| |x' + x| \leq \frac{1}{2} |x' - x|$ sous l'hypothèse $x, x' \in [0 ; 1]$.

d. Si $n \geq m$, $|u_n - u_m| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - u_{m-1}| \leq \frac{1}{2^2} |u_{n-2} - u_{m-2}| \leq \frac{1}{2^m} |u_{n-m} - u_0| \leq \frac{1}{2^m}$.

Exercice 3 :

1. L'autre dimension de $\hat{R}$ est $\frac{2Ll}{L+l}$ qui est inférieur ou égal à $\frac{L+l}{2}$ en vertu de l'inégalité $4Ll \leq (L+l)^2$ qui découle elle-même de $0 \leq (L-l)^2$. Donc $\hat{L}$ et $\hat{l}$ sont définies respectivement par $\hat{L} = \frac{L+l}{2}$ et $\hat{l} = \frac{2Ll}{L+l}$. La moyenne $\frac{L+l}{2}$ est comprise entre les nombres L , l et ainsi $\frac{2Ll}{L+l} = \frac{L}{\frac{L+l}{2}} \times l \geq l$ ce qui achève la preuve de $l \leq \hat{l} \leq \hat{L} \leq L$.

3. Les inégalités précédentes justifient que $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$ et de plus $L_{n+1} - l_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} - l_{n+1} \leq \frac{L_n + l_n}{2} - l_n = \frac{L_n - l_n}{2}$.

D'où $0 \leq L_n - l_n \leq \frac{L_0 - l_0}{2^n}$ qui montre que pour n entier naturel tg on a $L_n - l_n \approx 0$. Le théorème 3

s'applique donc et si ω est la limite commune de ces deux suites on obtient que $\omega \geq 0$, mais de plus l'égalité $L_n l_n = a$ montre que $\omega^2 = a$. On a ainsi **démontré** l'existence de la racine carrée pour un réel a ($a \geq 1$ -mais on s'affranchit aisément de cette restriction).

4. L'équation de la tangente à la courbe en son point d'abscisse x_n est donnée par la formule :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Cela donne pour abscisse de son intersection avec l'axe Ox la valeur $x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n$ en

remarquant que le nombre dérivé $f'(x_n) \neq 0$ du fait que $x_n > 0$. Ceci est la formule récurrente générale de la méthode de Newton, qui s'actualise dans notre cas particulier en

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right) \text{ à comparer à la formule } L_{n+1} = \frac{1}{2} \left(L_n + \frac{a}{L_n} \right) \text{ où on fera } a = 5 : \text{ avec}$$

la même initialisation les deux suites coïncideront...

Exercice 4 :

4. Utiliser $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI}$ d'où $OA'^2 = OI \cdot OK$, tandis que par ailleurs on a K milieu de $[I ; H]$ d'où $OK = \frac{OH + OI}{2}$.

5. Les mêmes relations s'obtiennent dans le passage du rang n au rang $n + 1$ ce qui donne les

$$\text{relations } i_{n+1} = \frac{i_n + c_n}{2} \text{ et } c_{n+1} = \sqrt{i_{n+1} c_n} \dots$$

6. Les méthodes sont analogues à celles de l'exercice 3.

LIMITES DE FONCTIONS

Dans ce qui suit les fonctions seront toujours des fonctions *explicitées* dans le même sens que ce qui a été vu pour les suites, c'est-à-dire que leur définition ne fait appel qu'à des réels eux-mêmes explicités ; par exemple si une telle fonction est définie sur un intervalle, les bornes de celui-ci seront des réels explicités ou bien $\pm \infty$. Une version économique en explications, et qui pourrait s'adresser à des élèves mal à l'aise dans les subtilités de l'*explicité*, serait de dire qu'on ne s'intéresse qu'aux fonctions qui se construisent à partir des fonctions de base : puissances, racine carrée, sinus, cosinus, valeur absolue... par les seules opérations usuelles et la composition. Quoiqu'il en soit, toutes les fonctions des programmes du lycée sont explicitées...

Définitions

Limite d'une fonction

Soit f une fonction, A une partie de $\mathbb{R}$ incluse dans l'ensemble de définition de f , a un réel explicité ou bien encore $a = \pm \infty$. Il s'agit de préciser ce qu'il peut advenir des valeurs de $f(x)$ lorsque la variable x est « voisine » de a tout en restant dans A .

On dira que x est *voisin* de a si a est un réel explicité et que $x \approx a$, ou bien si $a = +\infty$ et que x est très grand positif, ou bien finalement si $a = -\infty$ et que x est très grand négatif.

Pour que la question précédente se pose, il faut évidemment que l'ensemble A contienne des valeurs qui soient voisines de a au sens précédent. Dans ces conditions, l étant un réel explicité ou encore $\pm \infty$, on dira que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a en restant dans A si pour tout réel x de A qui soit voisin de a , $f(x)$ est voisin de l . On montre comme dans le cas des suites que lorsqu'une telle situation se présente, l est unique ce qui permet de le noter $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$.

Continuité

Plus particulièrement si dans la situation précédente $a \in A$ alors $l = f(a)$ car il s'agit de deux réels explicités qui sont très proches l'un de l'autre. On dit alors que la fonction est *continue* en a . Si la fonction est continue en tout réel explicité de A , on dit qu'elle est *continue dans A*.

Exemples :

Des formules de Leibniz on déduit immédiatement -là encore les théorèmes du type limites et opérations sont superflus, mais aisés à justifier- que si :

1. $A =]0 ; +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = +\infty$ (qu'on écrit encore $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$) et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in A}} f(x) = 0.$$

2. $A =]-\infty ; 0[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = -\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$) et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in A}} f(x) = 0$.

On remarque qu'ici le symbole $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x)$ n'a tout simplement aucun sens si $A = \mathbb{R}^*$, mais

lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, l'usage est d'omettre A dans l'écriture du symbole.

3. $A = [0 ; +\infty[$ et $f(x) = \sqrt{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ car si $\frac{1}{\sqrt{x}}$ était modéré, il en irait de même de $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ et x ne serait pas très petit. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car si $\sqrt{x}$ est modéré, son carré l'est aussi. En utilisant l'inégalité $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x - a|}$ par exemple, on obtient que pour a explicité : $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Exercices

1. Que dire de $\sin \frac{1}{x}$ pour $x \approx 0$? (cf. l'exercice 2 du chapitre « Convergence des suites réelles »). Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

2. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \text{ où } m, n \text{ sont des entiers naturels donnés ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + |x|} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 + x - 2}.$$

3. On définit par récurrence la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 \text{ est un réel explicité } \geq -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.

a. Représenter la fonction $x \rightarrow \sqrt{2+x}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ et utiliser ces représentations pour construire géométriquement les points de Ox d'abscisses $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ avec $u_0 = -1, u_0 = 2, u_0 = 7$.

b. Que peut-on conjecturer quant à la monotonie de la suite u pour ces divers choix de la valeur initiale en examinant les constructions précédentes ? Démontrer ces conjectures.

c. Démontrer que quel que soit le choix de la valeur initiale on dispose de l'inégalité : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ pour tout entier naturel n . Qu'en déduit-on du point de vue de la convergence de la suite u ?

4. On sait que pour tout réel x il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$ et qu'on appelle partie entière de x , notée $E(x)$ ou encore $[x]$. Ceci est une conséquence de ce que la suite des entiers naturels dans $\mathbb{R}$ n'est pas majorée (on dit que $\mathbb{R}$ est archimédien) -propriété qui n'est pas à démontrer : c'est un des axiomes de $\mathbb{R}$ qui joint à l'axiome de Cauchy caractérise $\mathbb{R}$ parmi tous les corps ordonnés. Cette fonction est l'occasion de présenter aux élèves des fonctions en escaliers mais aussi de construire des fonctions qui soient périodiques sans être d'origine trigonométrique, tout cela avec des phénomènes naturels de discontinuité...

a. Donner un exemple de valeurs x, y telles que $E(x+y) \neq E(x) + E(y)$. Montrer que par contre on a toujours $E(x+1) = E(x) + 1$. En déduire que la « courbe » d'équation $y = E(x)$ est invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comment peut-on déduire le tracé complet de la courbe à partir des valeurs prises entre 0 et 1 ? Faire le dessin.

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x)$. En quels points a de $\mathbb{R}$ a-t-on $E(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{R}}} E(x)$?

c. Quels sont ceux où E est discontinue ? Que se passe-t-il du point de vue graphique en un point de discontinuité ?

d. Représenter graphiquement la fonction $x \rightarrow x - E(x)$ après avoir établi qu'elle était de période 1. Représenter de même $x \rightarrow (x - E(x))^2$ et $x \rightarrow \frac{1}{x - E(x)}$. Préciser le comportement des fonctions à droite et à gauche des points de discontinuité.

e. Montrer que la fonction $x \rightarrow E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ est continue partout et la représenter.

f. Prouver que pour tout x réel : $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.

g. En utilisant $E(\frac{x+1}{2}) = E(x) - E(\frac{x}{2})$, déduire une autre écriture de $S_n = \sum_{k=0}^n E(\frac{x+2^k}{2^{k+1}})$

où x est un réel fixé et n un entier naturel. Donner $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ en distinguant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

5. La « définition » des fonctions trigonométriques par « enroulement » de la droite $x = 1$ sur le cercle unité centré à l'origine amène à considérer que cosinus et sinus sont continues en tout réel explicité. C'est ce qu'on suppose dans la suite :

a. Pour x réel, $x \neq 0$ on pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Montrer que la fonction f est paire et vérifie

l'inégalité $f(x) \leq \frac{1}{|x|}$. Interpréter graphiquement ces résultats en utilisant notamment les deux

hyperboles d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{-1}{x}$. Préciser les points de contacts entre la courbe représentant f et chacune des deux hyperboles d'une part, l'axe des abscisses d'autre part.

On veut déterminer le comportement de f au voisinage de 0. Soit $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique associé à x , A celui qui est associé à 0. La droite (OM) recoupe la droite d'équation $x = 1$ en N .

En considérant les aires des triangles OAM , OAN et celle du secteur circulaire OAM montrer que $\sin x \leq x \leq \tan x$, puis que $\cos x \leq f(x) \leq 1$. Montrer que pour $x \approx 0$, $1 - f(x) \approx 0$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Comment peut-on en déduire directement $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Quelle est la signification graphique du résultat ? (On remarquera qu'ici on peut écrire sans ambiguïté $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, à la différence de ce qui a été vu dans l'exemple 2).

Donner l'allure de la courbe de f en liaison avec les deux hyperboles et en tenant compte de l'étude au voisinage de 0.

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 6x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

et pour x réel explicité non multiple de π et n entier naturel :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}) \text{ (on pourra utiliser la formule } \sin 2a = 2 \sin a \cos a \text{)}.$$

6.

a. Soit $h \approx 0$ et $\alpha = \sqrt{1+h}$.

Justifier que $\alpha \approx 1$. On pose $\varepsilon = \alpha - 1$. Montrer que $\varepsilon(\varepsilon + 2) = h$ et en déduire que $\varepsilon = h(\frac{1}{2} + tp)$.

Ainsi dans la suite on utilisera : pour $h \approx 0$, $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + h \times tp$.

Ecrire une égalité analogue pour $\sqrt{4+h}$ avec $h \approx 0$.

b. Déterminer en utilisant la méthode précédente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-2x} - \sqrt{4-3x}}{\sqrt{2+2x} - \sqrt{2-3x}}$.

c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x + \sqrt{x+1}}$.

d. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x}$. Préciser son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative en repère orthonormé admet un axe de symétrie. Montrer que pour x tg > 0 on dispose d'une égalité du type $f(x) = ax + b + \varepsilon$ avec $\varepsilon \approx 0$; préciser le signe de ε et la signification graphique de ce qui précède. Faire le dessin.

Théorème 1 :

On a vu l'usage des encadrements pour étudier la limite en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ et on dispose pour les fonctions d'un analogue du théorème vu pour les suites et dont la preuve est identique :

On suppose que pour x voisin de a : $f(x) \leq g(x)$, alors si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, tandis que si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors $l \leq l'$.

Si pour x voisin de a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ (« théorème des gendarmes »).

Exercice 7

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{2x}\right)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$ en utilisant le « théorème des gendarmes ».

Théorème 2 :

Le résultat suivant fait la connexion entre limite de suite et limite de fonction. Sa réciproque est vraie, même si peu utilisée dans la pratique, ce qui fait qu'une présentation alternative de la question pourrait définir le concept de limite de fonction en le ramenant à celui de limite de suite supposé déjà connu. Réciproquement, en supposant connu le concept de limite de fonction, on peut évidemment introduire le concept de limite de suite en considérant que celle-ci est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$: dualité du continu et du discret....

En tout cas le contenu du théorème est à corréler à la pratique des élèves qui pour conjecturer à propos du comportement de $f(x)$ pour $x \approx a$, utilisent la calculatrice en examinant les valeurs prises successivement par $f(x)$ en des x de plus en plus proches de a ...

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = l$. Pour toute suite (x_n) de points de A

admettant l pour limite on peut écrire : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

preuve : si n est un entier naturel tg , x_n est très proche de a et $x_n \in A$, d'où $f(x_n)$ est très proche de l .

Exercice 8

a. Démontrer que les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limites en $\pm \infty$ à l'aide du théorème 6 et de l'exercice 2 du chapitre « convergence des suites réelles ».

b. Le démontrer directement à partir de l'unicité de la limite et de la périodicité.

c. Généraliser aux fonctions périodiques.

Théorème 3 (« des valeurs intermédiaires ») :

Soit $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en tout point explicité de $[a ; b]$. Si l est un réel explicité compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = l$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

preuve : en posant $g(x) = l - f(x)$ on explicite une fonction continue dans $[a ; b]$.

Elle vérifie $g(a).g(b) \leq 0$ et il s'agit de prouver qu'elle s'annule dans cet intervalle. On définit par dichotomie deux suites (a_n) et (b_n) de l'intervalle $[a ; b]$:

Tout d'abord on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Si on suppose a_{n-1} et b_{n-1} définis avec $a_{n-1} \leq b_{n-1}$ et $g(a_{n-1}).g(b_{n-1}) \leq 0$, alors $g(a_{n-1}).g(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}) \leq 0$ ou $g(b_{n-1}).g(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}) \leq 0$. Dans le premier

cas on pose $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, et dans le second : $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.

On obtient $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$.

De plus $g(a_n).g(b_n) \leq 0$ dans tous les cas et $b_n - a_n \leq \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} \leq \dots \leq \frac{b-a}{2}$ ce qui montre que

les suites satisfont les hypothèses du théorème 3. Leur limite commune ω vérifie grâce aux théorèmes 4 et 6 :

$$g(\omega).g(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n).g(b_n) \leq 0, \text{ d'où en fait } g(\omega)^2 = 0 \text{ et } g(\omega) = 0 \dots \text{ CQFD.}$$

Remarques :

a. La preuve fait fonctionner la dichotomie qui est une méthode simple et utile et surtout montre bien en quoi *les suites sont la grande méthode de résolution des équations*. De plus elle est constructive en ce qu'elle donne un algorithme programmable avec boucle et test conformément aux recommandations des nouveaux programmes.

b. Cette même méthode permet de démontrer l'*inégalité des accroissements finis* dès qu' on aura introduit la notion de dérivée, d'où on tirera ensuite le théorème faisant le lien entre signe de la dérivée sur un intervalle et sens de variation de la fonction (faire $m = 0$ puis $M = 0$ dans l'énoncé ci-après).

En effet :

Inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction explicite dérivable dans un intervalle I , m et M des constantes explicites telles que pour tous x de I on ait $m \leq f'(x) \leq M$. Alors pour $a < b$ dans I (explicités) :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

En particulier si $|f'(x)| \leq k$ pour tous a et b de I : $|f(a) - f(b)| \leq k|a - b|$.

preuve : On observe tout d'abord que si dans un repère donné on considère des points A, B, C tels que l'abscisse de C soit comprise entre celles de A et de B , alors l'une des pentes de (AC) et (CB) est supérieure ou égale à celle de (AB) et l'autre est inférieure ou égale à celle de (AB) .

Ainsi on prend pour A et B les points de la courbe de f ayant pour abscisses respectives a et b et on raisonne par l'absurde en supposant que la pente de (AB) est strictement supérieure à M .

C désignant le point de la courbe d'abscisse moyenne de a et b , si la pente de (AC) est plus grande que celle de (AB) on pose $A_1 = A$, $B_1 = B$, tandis que sinon on convient de poser $A_1 = C$, $B_1 = B$.

Dans les deux cas les abscisses a_1 et b_1 vérifient $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ avec de plus $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ et

$\text{pente}(A_1B_1) \geq \text{pente}(AB)$. En réitérant le processus précédent à partir de A_1 et B_1 on construit une suite (A_n) de points de la courbe dont les abscisses a_n sont croissantes, une suite (B_n) de points de

la courbe dont les abscisses b_n sont décroissantes avec: $a_n \leq b_n$ et aussi $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$; de

plus la suite des pentes des droites (A_nB_n) est croissante et est minorée par celle de (AB) .

Les suites (a_n) et (b_n) vérifient les hypothèses du théorème 3 (intervalles emboîtés) et convergent donc vers un réel ω qui satisfait pour tout entier n : $a_n \leq \omega \leq b_n$. Appelons Ω le point de la courbe d'abscisse correspondante et pour chaque n soit P_n celui des points A_n, B_n tel que la droite qui le joint à Ω soit de pente la plus grande. Alors la pente de (ΩP_n) est au moins égale à celle de (A_nB_n) pour chaque n et à fortiori à celle de (AB) ce qui s'écrit :

$$\frac{f(x_n) - f(\omega)}{x_n - \omega} \geq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{où } x_n \text{ désigne l'abscisse de } P_n. \text{ En passant à la}$$

limite, selon les théorèmes 4 et 6 il vient :

$$f'(\omega) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > M \quad \text{ce qui est absurde. On procéderait de même pour assurer l'autre inégalité.}$$

Exercices

9. Démontrer la convergence de la suite définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = \pi + \cos(\frac{u_n}{2})$.

On introduira la fonction f définie par $f(x) = \pi + \cos(\frac{x}{2})$ et on cherchera une solution évidente de l'équation $f(x) = x$.

10. Résolution de l'équation $\cos x = x$

a. Montrer que si l'équation $\cos x = x$ admet une solution, celle-ci est nécessairement comprise entre 0 et 1. En utilisant la variation de la fonction $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0 ; 1]$, justifier l'existence d'une solution (théorème des « valeurs intermédiaires ») et que celle-ci est unique.

On la notera ω dans la suite ; montrer que $\omega \in [\frac{1}{2} ; 1]$.

b. Imiter la preuve du théorème des « valeurs intermédiaires » pour élaborer un programme de calcul approché de ω par dichotomie. Combien faut-il de tours de programme de votre calculatrice pour stabiliser l'affichage de celle-ci ?

- c. Représenter dans le même repère les courbes d'équations $y = \cos x$, $y = x$.
- d. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \cos u_n$. Utiliser les graphes précédents pour construire géométriquement les points d'abscisses $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ sur l'axe Ox . Que se passe-t-il en poursuivant cette construction ?
- e. Démontrer que pour $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ on a aussi $f(x) \in [\frac{1}{2}; 1]$ et $|f'(x)| \leq 0,9$. Prouver alors que tous les termes de la suite u sont dans cet intervalle et que $|u_{n+1} - \omega| \leq 10^{-6}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers ω .
- f. Donner un rang n pour lequel on soit sûr que $|u_n - \omega| \leq 10^{-6}$. Programmer le calcul de la suite (u_n) à la machine et donner la solution de l'équation $x = \cos x$ à 10^{-6} près.
- g. Comparer les performances des deux démarches de calcul approché de ω .

11. Soit f une fonction continue de $[a; b]$ dans lui-même. Montrer que $f(x) = x$ possède au moins une solution (« point fixe de f »).
Montrer que si une suite (u_n) de $[a; b]$ satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'elle converge alors sa limite est un point fixe de f .

Indications et corrigés de certains exercices :

Exercice 1 :

Pour n entier naturel tg , $x = \frac{1}{n} \approx 0$.

Si $\sin \frac{1}{x}$ avait une limite en 0, il en irait de même de la suite $(\sin n)$ ce qui est absurde (cf. exercice 2, leçon « Convergence des suites réelles »).

Par contre pour $x \approx 0$, $x \sin \frac{1}{x}$ produit d'un tp et d'un modéré est tp .

Exercice 4 :

g. Les deux membres de l'égalité $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ coïncident sur l'intervalle $[0; 1]$ et satisfont tous deux l'égalité fonctionnelle $f(x+1) = f(x) + 1$, donc coïncident partout. On a alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^n E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^n E\left(\frac{\frac{x}{2^k} + 1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n E\left(\frac{x}{2^k}\right) - E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = E(x) - E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

Pour n entier $tg > 0$, $\frac{x}{2^{n+1}} \approx 0$ avec le signe de x , donc on obtient que si $x \geq 0$ alors $S_n \approx E(x)$, tandis que dans le cas contraire $S_n \approx E(x) + 1$.

Exercice 5 :

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \dots$

Pour n tg :

$$\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} \cdot \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{4}} \dots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \approx \frac{\sin 2x}{2x}$$

Exercice 6 :

a. $h \approx 0$ et $\alpha = \sqrt{1+h}$ donc $(\alpha-1)(\alpha+1) = h$, et $\alpha-1 = \frac{h}{\alpha+1}$. Comme $\alpha+1 \geq 1$, il n'est pas

très petit et donc $\alpha-1 \approx 0$ car il est produit d'un très petit par un modéré.

$\varepsilon(\varepsilon+2) = h$ est une réécriture de $(\alpha-1)(\alpha+1) = h$ et comme $\varepsilon \approx 0$, des règles connues il

découle $\frac{1}{\varepsilon+2} = \frac{1}{2} + tp$ puis $\varepsilon = \frac{h}{\varepsilon+2} = h\left(\frac{1}{2} + tp\right) \dots$

De même si $h \approx 0$ alors $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} = 2\left(1 + \frac{h}{8} + tp\right) = 2 + \frac{h}{4} + h.tp.$

b. Avec $x \approx 0$, selon la méthode précédente :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-2x} - \sqrt{4-3x}}{\sqrt{2+2x} - \sqrt{2-3x}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x + x.tp\right) + (1-x+x.tp) - 2\left(1 - \frac{3}{8}x + x.tp\right)}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + x.tp\right) - \sqrt{2}\left(1 - \frac{3}{4}x + x.tp\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}x + x.tp}{\frac{5\sqrt{2}}{4}x + x.tp} = \frac{\frac{1}{4} + tp}{\frac{5\sqrt{2}}{4} + tp} \approx \frac{1}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

AIRES ET INTEGRALES

Introduction

Dans le plan usuel on sait mesurer l'aire de certaines figures : cela signifie qu'on associe à ces figures un nombre réel positif qui est supposé dire de chacune d'elles qu'elle est équivalente du point de vue de son étendue à un certain nombre de fois un certain carré pris comme référence.

Ceci conduit à définir l'aire d'un rectangle comme le produit de sa longueur et de sa largeur, l'unité de longueur utilisée étant justement la longueur du côté du carré pris comme unité d'aire. Le segment est assimilé à un rectangle de largeur nulle et de ce fait son aire est 0. On pose que l'aire possède une propriété d'additivité : des figures disjointes étant données d'aires respectives a et a' , la figure réunion des deux est d'aire $a + a'$. Partant de là on est amené à calculer l'aire d'un triangle en le dédoublant par symétrie par rapport au milieu d'un de ses côtés et donc à évaluer l'aire d'un parallélogramme qui lui-même, par découpage et recollement, est équivalent à un rectangle. On obtient ainsi la formule usuelle qui donne l'aire du triangle par le demi-produit de la base et de la hauteur et celle du trapèze s'obtient de manière analogue. Le disque possède lui aussi une aire qui est apprise très tôt mais dont la justification n'est possible qu'en classe de première ou de terminale. Plus généralement dans cette dernière classe on s'attache à mesurer « l'aire sous une courbe », c'est à dire que pour une courbe représentant une fonction positive f définie sur un intervalle $[a ; b]$ dans un repère orthonormé, on s'intéresse à

l'aire du domaine formé des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Le premier problème est que, pour l'instant, on n'a donné de la notion d'aire qu'une approche assez intuitive qu'il s'agira de préciser.

Définition 1 :

Soit une fonction en escaliers f définie sur un intervalle $[a ; b]$, positive : il existe une subdivision de $[a ; b]$ à savoir $x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_n = b$, telle que sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$ la fonction prenne une valeur constante c_j . Le domaine sous la courbe apparaît comme une réunion de rectangles de base $(x_{j+1} - x_j)$ et de hauteur c_j . Ces rectangles ne sont pas disjoints, mais un segment étant d'aire nulle on est amené à définir l'aire sous la courbe par la

formule $\sum_{j=0}^{n-1} c_j(x_{j+1} - x_j)$ qu'on notera $\int_a^b f$ (lire intégrale de a à b de f).

Plus généralement pour une fonction en escalier de signe arbitraire on continue de noter

$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x_{j+1} - x_j)$ qui cette fois s'interprète comme une « aire algébrique » c'est à dire que

sont comptées positivement les aires des rectangles situés au dessus de l'axe des abscisses, négativement les autres.

(On remarquera que dans ce qui précède, f n'est pas a priori supposée explicite.)

Exercices

1. Calcul de l'aire sous la courbe de f où f est définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3$.

a. Dessiner la courbe représentant f en repère orthonormé avec unité graphique égale à 10 cm. Que représente géométriquement l'intégrale à calculer ? Introduire une fonction en escalier ϕ selon le procédé vu dans la leçon « Aire sous une courbe » du chapitre I.

b. On a besoin de connaître la formule de calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$. On va procéder selon la méthode inventée par Al Karagi (mathématicien persan du XI^{ème} siècle) : on considère deux

demi-droites Ox et Oy perpendiculaires et pour chaque entier n on convient de noter A_n et B_n les points de Ox et Oy respectivement tels que $OA_n = OB_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. On note C_n le point tel que $OA_n C_n B_n$ soit un carré. Pour $n > 1$ calculer l'aire de la figure délimitée par le polygone $A_{n-1} A_n C_n B_n B_{n-1} C_{n-1} A_{n-1}$. En déduire le résultat, puis déterminer l'aire cherchée.

2. On considère la "courbe" d'équation $y = 2x - 1$ pour x dans $[1 ; 3]$. Calculer directement l'aire sous la courbe puis selon la méthode vue dans la leçon « Aire sous une courbe ». Commenter.

Les exercices précédents conduisent à *définir* l'aire sous la courbe d'une fonction positive explicite définie sur un intervalle $[a ; b]$ comme étant -s'il existe- un réel explicite très proche de $\int_a^b \varphi$ où φ est elle-même une fonction en escalier vérifiant pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \approx \varphi(x)$.

Pour qu'elle soit consistante, cette définition nécessite le lemme suivant :

Lemme : Si φ et ψ sont des fonctions en escaliers définies sur un intervalle $[a ; b]$, telles que pour tout x de $[a ; b]$, on ait $\varphi(x) \approx \psi(x)$, alors $\int_a^b \varphi = \int_a^b \psi$.

preuve : Il est immédiat de voir qu'on ne modifie pas l'intégrale d'une fonction en escalier en introduisant un point de subdivision supplémentaire et du coup un nombre fini de points supplémentaires ; il s'agit là simplement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ceci permet de supposer que pour les deux fonctions on utilise une même subdivision :

$$x_0 = a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_n = b.$$

Soient c_j la valeur de φ sur $]x_j ; x_{j+1}[$ et $c_j + \varepsilon_j$ avec $\varepsilon_j \approx 0$ celle de ψ :

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=0}^{j=n-1} c_j (x_{j+1} - x_j) \text{ et } \int_a^b \psi = \sum_{j=0}^{j=n-1} (c_j + \varepsilon_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b \varphi + \sum_{j=0}^{j=n-1} \varepsilon_j (x_{j+1} - x_j).$$

Mais si u et v désignent respectivement le plus petit et le plus grand des ε_j , on a :

$$u(b-a) \leq \sum_{j=0}^{j=n-1} \varepsilon_j (x_{j+1} - x_j) \leq v(b-a) \text{ ce qui montre que } \sum_{j=0}^{j=n-1} \varepsilon_j (x_{j+1} - x_j) \text{ est très petit.}$$

Définition 2 :

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On dit qu'elle est intégrable s'il existe un réel explicite très proche de $\int_a^b \varphi$ où φ est une fonction en escalier vérifiant pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \approx \varphi(x)$. Dans ces conditions ce réel est unique et s'appelle intégrale de f sur le segment $[a ; b]$. On le désigne par $\int_a^b f$.

Lorsque la fonction f est positive dans $[a ; b]$ -et seulement dans ce cas- cette intégrale s'interprète comme étant l'aire sous la courbe représentant f en repère orthonormé.

Théorème 1 :

Soit f une fonction explicite définie sur $[a ; b]$. Si, pour tous x et $x' \in [a ; b]$ tels que $x \approx x'$, on a $f(x) \approx f(x')$, alors il existe une fonction en escalier φ telle que $\varphi(x) \approx f(x)$ pour tout x de $[a ; b]$ et que $\int \varphi$ soit modéré.

Il en résulte que si l'on admet que pour tout réel modéré il existe un réel explicite qui lui soit très proche, la fonction f est intégrable (notons aussi qu'on exige plus que la continuité en tout point explicite de l'intervalle, mais voir pour ces questions le chapitre intitulé « Plus loin avec l'ombre »).

preuve : soit n un entier naturel très grand et posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ comme nous l'avons déjà fait (partie I, leçon « Aire sous une courbe ») pour $0 \leq k < n$. On définit la fonction en escalier φ qui coïncide avec f aux points de la subdivision et qui est constante sur les intervalles $[x_k; x_{k+1}[$. Alors pour chaque $x \in [a; b[$ $\varphi(x) = \varphi(x_k) = f(x_k) \approx f(x)$. En b on a $\varphi(b) = f(b)$. Il reste à montrer que $\int \varphi$ est bien modéré. Soit $M = \max_{1 \leq k \leq n} f(x_k)$ et $m = \min_{1 \leq k \leq n} f(x_k)$. Alors $m \leq \varphi(x) \leq M$, de sorte que $m(b-a) \leq \int \varphi \leq M(b-a)$. Il suffit donc de montrer que m et M sont modérés. Supposons par exemple M tg positif. Pour chaque entier j tel que $f(a) + j < M - 1$, i.e. $j < M - 1 - f(a)$, notons k_j le plus grand entier $\leq n$ tel que $f(x_{k_j}) \leq f(a) + j$. Alors $f(a) + j < f(x_{1+k_j}) \approx f(x_{k_j})$. Il en résulte que $f(x_{k_j}) \approx f(a) + j$. Mais alors $f(x_{k_{j+1}}) - f(x_{k_j}) \approx 1$ et comme $x_{k_{j+1}} > x_{k_j}$, on en déduit que $b - a$ est supérieur à la somme d'un nombre très grand de réels très proches de 1. Ceci contredit le fait que a et b sont explicites. Ainsi M et, pour un motif analogue, m , sont modérés.

Remarques :

□ Les fonctions polynômes satisfont cette condition dans tout intervalle fermé borné par application des règles de Leibniz et compte tenu que les éléments d'un segment sont modérés.

□ La fonction valeur absolue en vertu de ce que $\|x| - |x'|\| \leq |x - x'|$ satisfait cette condition dans $\mathbb{R}$ tout entier.

□ La fonction $\sqrt{\quad}$ en vertu de $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|}$ la vérifie dans $[0; +\infty[$.

□ En utilisant les développements $\begin{cases} \sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x \\ \cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h \end{cases}$ pour $h \approx 0$, on

voit que les fonctions sinus et cosinus satisfont cette condition dans $\mathbb{R}$.

□ Sous les hypothèses du théorème 1, la preuve montre que :

$$(1) : \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \text{ de sorte que :}$$

$$(2) : \frac{1}{b-a} \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \text{ qui fait apparaître le premier membre}$$

comme la limite des moyennes arithmétiques des valeurs de la fonction en des points régulièrement espacés de l'intervalle de départ et qui fait qu'on l'appelle *valeur moyenne de la fonction* sur l'intervalle.

□ Si on revient sur la formule (1) on voit que $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) dx_k \right)$ où les x_k sont les points de subdivision et où $dx_k = x_{k+1} - x_k$ est la différence entre deux abscisses consécutives de cette subdivision, autrement dit : $\int_a^b f \approx \sum f(x) dx$ où la somme est étendue à un très grand nombre de termes, les dx étant très petits. Pour rappeler ce phénomène on écrit $\int_a^b f(x) dx$ au lieu de $\int_a^b f$, ce qui a l'avantage, de plus, de désigner la variable lorsque la fonction utilise des paramètres.

Ainsi on écrira : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$ (chapitre I, leçon « aire sous une courbe »),
 $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ (ex.1 ci-dessus), tandis que la notation $\int_0^\pi \cos t x dx$ permet de savoir que x est la variable et t le paramètre.

Théorème 2 :

Soient deux fonctions f et g intégrables sur un intervalle $[a ; b]$. Alors :

- (i) $f + g$ est intégrable et $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- (ii) λ désignant une constante, λf est intégrable et $\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f$.
- (iii) si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

preuves :

- (i) soient φ et ψ deux fonction en escaliers définies sur $[a ; b]$ qui sont très proches de f et de g en tout point de l'intervalle. Leur somme est une fonction en escalier très proche en tout point de $f + g$. Comme $\int_a^b \varphi \approx \int_a^b f$ et que $\int_a^b \psi \approx \int_a^b g$ on a aussi $\int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \approx \int_a^b f + \int_a^b g$ ce dernier étant un réel explicite, en tant que somme de deux réels explicites. Mais il est immédiat de voir en se ramenant à une subdivision commune et par distributivité que $\int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \approx \int_a^b (\varphi + \psi)$.
- (ii) La preuve de (ii) est du même tonneau.
- (iii) Quant à (iii) on traite d'abord le cas des fonctions en escaliers pour lesquelles il s'agit de la sommation membre à membre d'inégalités de même sens en nombre fini ; ensuite si on avait $\int_a^b f > \int_a^b g$, la soustraction $\int_a^b f - \int_a^b g$ serait un réel explicite > 0 donc non tp mais très proche de $\int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \leq 0$ ce qui est absurde.

Remarque :

le (iii) garantit que si f , fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$, est explicitée et positive, alors son intégrale est positive ce qui est plutôt rassurant pour un nombre qui mesure une surface du plan ! De plus dans le cas général de ce (iii) la soustraction $\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b g - f$ apparaît, elle aussi, comme une aire : quitte à prendre une nouvelle origine, ce qui revient à ajouter une même constante aux deux fonctions et ne modifie pas leur différence, on peut supposer que les deux courbes sont au dessus de l'axe des abscisses et le principe d'additivité des aires montre que $\int_a^b g - \int_a^b f$ est l'aire du domaine caractérisé par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$.

Il faut noter que la possibilité d'un tel changement d'origine est conséquence du fait que les fonctions f et g sont bornées sur $[a ; b]$.

Propriété :

Soit une fonction f explicite, définie sur $[a ; b]$, telle que pour $x \approx x'$ dans $[a ; b]$, on ait : $f(x) \approx f(x')$. Alors f est bornée (par des réels explicites...).

preuve : On raisonne par l'absurde. Soit c le milieu de l'intervalle $[a ; b]$. On sait que f n'est pas bornée sur l'un au moins des intervalles $[a ; c]$, $[c ; b]$. Si elle n'est pas bornée sur le premier on convient de poser $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ tandis que dans le cas contraire, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.

Dans les deux cas on a construit un nouvel intervalle $[a_1 ; b_1] \subset [a ; b]$ sur lequel f n'est pas bornée et $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. En réitérant le processus on construit par récurrence deux suites explicites (a_n) et (b_n) qui satisfont les hypothèses du théorème 3 de la leçon « limites de suites » (conséquence de la propriété de Cauchy). Ces deux suites convergent donc vers un réel explicite ω : pour n très grand tous les éléments de $[a_n ; b_n]$ sont très proches de ω et donc leurs images sont toutes très proches de $f(\omega)$ qui est lui-même un réel explicite, ce qui contredit le fait que f n'est pas bornée sur cet intervalle.

Exercice 3 (on utilise ici le fait qu'une isométrie du plan conserve les aires des figures) :

- a. Quelle est l'image du domaine $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$ par réflexion dans la droite d'équation

$y = x$? En déduire les valeurs des intégrales suivantes : $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ et $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$.

- b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right)$ (utiliser la remarque du théorème 1).

Théorème 3 :

Soit une fonction f explicite, définie sur un intervalle I . Soient $a \leq c \leq b$ explicites dans I . Si f est intégrable dans $[a ; c]$ et $[c ; b]$, alors elle l'est aussi dans $[a ; b]$ et :

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \text{ (relation de Chasles).}$$

preuve : On prend φ et ψ en escaliers et très proches de f sur l'un et l'autre intervalle et on définit une fonction en escaliers par : $\begin{cases} a \leq x \leq c & x \rightarrow \varphi(x) \\ c \leq x \leq b & x \rightarrow \psi(x) \end{cases}$.

Cette fonction est très proche de f dans $[a ; b]$ et on utilise le fait que la somme de deux réels explicites est un réel explicite.

Convention : Pour $a > b$, on convient de poser $\int_a^b f = -\int_b^a f$ lorsque cette dernière expression a un sens et ainsi lorsque la fonction f est intégrable dans tout sous-intervalle fermé et borné de I , on peut écrire la relation de Chasles pour tous a, b, c de I . C'est le cas notamment pour les fonctions polynômes, sinus et cosinus, valeur absolue, racine carrée...

Théorème 4 :

Soient f et F des fonctions explicites, définies sur $[a ; b]$ telles que :

1) Pour tous x, x' dans $[a ; b]$, si $x \approx x'$ alors $f(x) \approx f(x')$.

2) Pour x dans $[a ; b]$ et $h \approx 0$ ($h \neq 0$) tel que $x + h \in [a ; b]$, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$.

Alors : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

preuve : $F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_{k+1}) - F(x_k)$ où $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est définie par $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ avec n entier très grand.

On peut écrire ainsi : $F(b) - F(a) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) + (b-a) \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}}{n}$

On observe alors que $\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}}{n}$ est *tp* car c'est la moyenne arithmétique de nombres *tp*, il est donc compris entre le plus grand et le plus petit du lot.

De plus, selon le théorème 1 : $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) \approx \int_a^b f$.

On en déduit $\int_a^b f \approx F(b) - F(a)$ et comme ce sont deux réels explicites, leur différence est un réel très petit et explicite donc ne peut être que 0 : ils sont égaux.

Remarque : là encore beaucoup parmi les fonctions usuelles satisfont ces conditions : polynômes, fonctions trigonométriques. Par exemple :

Soit à calculer l'aire sous une arche de sinusöide *i.e.* $\int_0^\pi \sin x dx$. On applique le théorème précédent avec $f = \sin$ et $F = -\cos$ et on obtient une aire égale à 2.

De même le calcul de $\int_0^1 x^2 dx$ est beaucoup plus aisé que dans la leçon « Aire sous une courbe »

en considérant la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3} x^3$.

Exercices

4. Retour sur l'aire du disque et le nombre π .

On a vu par un argument heuristique (remarque à la fin de la leçon « Convergence des suites réelles » du chapitre I), qu'on va maintenant rendre rigoureux, que π étant défini comme le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, il était aussi le rapport de son aire au carré de son rayon. Il s'agit de montrer que l'aire du disque unité vaut π (le début de l'exercice peut être fait en première après avoir donné l'argument de Nicolas De Cuse, pour montrer ainsi comment on peut le rendre rigoureux...).

Pour cela construisons une suite (P_n) de polygones réguliers inscrits dans le cercle de rayon 1 de la façon suivante : P_0 est un triangle équilatéral, P_{n+1} se déduit de P_n en insérant entre les sommets consécutifs de P_n le point milieu de l'arc de cercle ou si l'on préfère, A et B désignant deux tels sommets et O le centre du cercle, on insère l'intersection I du cercle avec la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AOB}$.

a. On veut montrer que si $d_n = (\text{aire du disque} - \text{aire de } P_n)$, alors $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$.

Avec les notations ci-dessus justifier que l'aire de la portion de disque située dans le demi-plan de bord (AB) et contenant I est inférieure au double de l'aire de AIB. Démontrer l'inégalité

désirée et conclure quant à la limite de la suite (d_n) . Justifier que si n est un entier tg , l'aire de P_n est très proche de celle du disque.

On prend n tg : montrer que A et B désignant toujours deux sommets consécutifs de P_n , on a : $\frac{\text{aire de } AOB}{AB} \approx \frac{1}{2}$. Conclure quant à l'aire du disque.

b. Dédire de ce qui précède que : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} . dx = \frac{\pi}{4}$.

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{3^2}{n^2}} + \dots + \sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}}{n} \right)$

5. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx, \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt .$$

6. Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$: calculer $I + J$, $I - J$, I et J .

7. Ici on suppose qu'on vient d'introduire la fonction logarithme népérien et le nombre e qu'il s'agit d'encadrer grossièrement (on détermine sa partie entière) :

a. Dessiner la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, en repère orthonormal et donner

l'équation de la tangente au point d'abscisse 2. Cette tangente coupe les verticales d'équations $x = 1$ et $x = 3$ respectivement en A et B dont on note A' et B' les projections orthogonales sur l'axe Ox . Déterminer l'aire de $AA'B'B$.

b. Soient C et D les points de l'hyperbole d'abscisses 1 et 2, C' et D' leurs projections sur Ox . Calculer l'aire de $CC'D'D$.

c. Dédire de **a.** et **b.** la partie entière du nombre e .

8. Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x . dx$

a. Justifier l'existence de cette intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. Prouver que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. En déduire que (I_n) converge et préciser sa limite.

d. Prouver que $I_n - I_{n+4} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ et écrire les égalités obtenues pour $n = 0, 4, 8, \dots$

Calculer I_0 et justifier la formule due à Leibniz : $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$.

e. Ici on suppose connu le logarithme népérien. Calculer I_1 et imiter la méthode précédente pour calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$.

9. Retrouver la limite précédente à partir des intégrales : $J_n = \int_0^1 x^n dx$.

10. Soit $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} .dt$ pour n entier naturel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

11. Pour chaque entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2} \text{ et on pose : } I_n = \int_0^1 f_n(x).dx.$$

a. Donner les équations des tangentes à la courbe représentant f_0 en ses points d'abscisses 0 et 1. Déterminer les positions relatives de la courbe, des deux tangentes et de la corde qui joint les deux points précédents. Déterminer l'intersection des deux tangentes, puis utiliser le principe d'additivité des aires pour donner un encadrement de I_0 .

b. Calculer $I_0 + I_1 + I_2$.

c. Démontrer que pour $0 \leq x \leq 1$ et tout entier $n \geq 0$, on a : $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Qu'en déduit-on pour les intégrales I_n et I_{n+1} ?

d. Prouver que pour $0 \leq x \leq 1$ on a : $f_n(x) \leq x^n$ et en déduire que la suite (I_n) converge en précisant sa limite.

12.

A. Pour x dans $] -1 ; 1[$, on pose : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

a. Etudier la parité de f et donner son tableau de variation accompagné des limites utiles. Tracer la courbe C représentant f (unité graphique 5 cm).

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine Δ compris entre la courbe C , l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

c. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donner la dérivée de la fonction définie par $g(x) = f(\sin x)$.

B. Dans toute la suite du problème a désigne un réel de l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ et pour $n \geq 1$

(entier), on pose : $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} .dt$

a. Prouver que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \cdot \sin^{2n} a}{\cos a}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a)$.

b. Pour $n \geq 1$ et $t \in [0 ; a]$, on pose : $F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$. Ecrire la dérivée de cette fonction et la réduire à l'aide de la formule de calcul de $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$. Calculer $F_n(0)$.

c. Montrer que $F_n(a) = f(\sin a) - I_n(a)$ en utilisant A.b. et B.b. et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(a)$.

d. Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$.

Montrer que cette suite converge vers une limite qu'on précisera.

13. (encore l'aire du disque)

On considère dans un repère orthonormé xOy du plan le cercle de centre O et rayon R .

Donner son équation cartésienne et en déduire une interprétation géométrique de l'intégrale :

$$I = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} .dx.$$

Quelle formule connue donne la valeur de I ?

Dans ce qui suit on veut retrouver cette formule. On admet ici qu'il existe une fonction F satisfaisant les hypothèses du théorème 4 en prenant l'intervalle $[0 ; R]$ et la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (F est une primitive de f dans cet intervalle).

Soit G la fonction définie dans l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ par $G(t) = F(R \cos t)$.

Déterminer les valeurs t_0 et t_1 telles que $I = G(t_1) - G(t_0)$.

Déterminer $G'(t)$ pour t appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, en déduire le calcul de $G(t_1) - G(t_0)$ et la valeur de I .

Théorème 5 :

Soit (f, F) un couple de fonctions satisfaisant les conditions du théorème 4, et (g, G) satisfaisant lui-aussi à ces conditions sur le même intervalle. Alors $F.g$ et $f.G$ sont intégrables et on dispose de la formule suivante dite d'« intégration par parties » :

$$\int_a^b F.g = F(b).G(b) - F(a).G(a) - \int_a^b f.G$$

preuve : Du fait que f est bornée selon la propriété qui suit le théorème 2, on déduit que pour $x \approx x'$ dans $[a ; b]$, $F(x) \approx F(x')$ (modéré. $tp = tp$). On a la même propriété pour G , mais aussi du coup pour $F.g$ et $f.G$ (règles de Leibniz) ce qui assure l'intégrabilité selon le théorème 1. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4 en observant que pour x dans $[a ; b]$ et $h \approx 0$ tel que $x + h \in [a ; b]$:

$$\frac{F(x+h).G(x+h) - F(x).G(x)}{h} = \frac{F(x+h)(G(x+h) - G(x)) - G(x)(F(x+h) - F(x))}{h} \\ \approx F(x).g(x) + f(x).G(x).$$

Exercices

14. Calcul de $\int_1^e \ln x . dx$, $\int_1^e x^n . \ln x . dx$, $\int_0^\pi e^x . \cos x . dx$, $\int_0^1 e^x . (x^2 - 3x + 2) . dx$, etc....

15. Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^\pi \sin^n x . dx$ (intégrales de Wallis).

- Démontrer que cette suite est décroissante et minorée. Calcul pour $n = 0, 1, 2$.
- Pour $n \geq 2$, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} par une intégration par parties.
- En déduire le calcul de I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k .
- Justifier que $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} \leq \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \leq 1$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{2.4.6.....(2k)}{1.3.5.....(2k-1)} \right)^2$.
- Démontrer que $(n+1)I_{n+1}.I_n$ est constante et en déduire les limites de (I_n) et de $(I_n . \sqrt{n})$.

16. Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ pour $n > 0$, entier.

- Démontrer que la suite (u_n) converge. Calculer u_1 .
- Donner une formule de récurrence entre les termes successifs. Calculer les termes d'indices 3 et 5.

17. Pour un entier $n > 0$ soit $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

a. Donner une relation de récurrence entre les intégrales successives et établir que :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

b. Montrer que la suite d'intégrales est bornée et en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

18. Pour un entier $n > 0$ soit $I_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \int_0^1 (1-t) \cdot e^{\frac{t}{2}} dt$.

a. Calculer I_1 puis I_{n+1} en fonction de I_n .

b. En déduire $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + I_n$.

c. Montrer que : $\sqrt{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n!} \right)$.

Indications et corrigés de certains exercices

Exercice 3:

a. Par la réflexion on voit que :

$$\int_0^1 x^2 dx = \text{aire du carré de côté 1} - \int_0^1 \sqrt{x} dx, \text{ d'où :}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \text{ et } \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

b. Selon la remarque qui suit le théorème 1, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

Exercice 4 :

a. Si I désigne le milieu de l'arc de cercle d'extrémités A et B, la parallèle à (AB) passant par I est la tangente au cercle en I. On en déduit, le cercle restant constamment du même côté de sa tangente, que l'aire S de la portion de disque contenue dans le demi-plan de bord (AB) contenant I est inférieure au double de l'aire du triangle AIB : il suffit pour s'en convaincre d'observer que si A' et B' sont les projections orthogonales de A, B sur la tangente, l'aire du rectangle AA'B'B est précisément le double de l'aire de AIB, tandis que l'arc AI passe dans le triangle AIA' et analogue pour l'arc BI. On en déduit que l'aire S' séparant l'arc AB de la ligne brisée AIB est inférieure à l'aire du triangle AIB. Comme $S = S' + \text{Aire de AIB}$, il vient $S \geq 2S'$.

Mais en sommant toutes les inégalités analogues on voit que $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$ et par récurrence

$0 \leq d_n \leq \frac{1}{2^n} d_0$ d'où pour n entier tg positif, $d_n \approx 0$, donc : aire du disque $\approx$ aire de P_n . A partir de maintenant n est un entier naturel tg :

L'aire de AOB vaut $\frac{AB \times OH}{2}$ où H désigne l'intersection de (AB) et (OI). Comme le périmètre

de P_n reste inférieur à celui du disque (convexité) et qu'il possède $3 \cdot 2^n$ côtés égaux à AB, n étant très grand on sait que AB ainsi que sa moitié AH sont très petits ce qui via le théorème de

Pythagore assure que $OH \approx OA = 1$. Donc $\frac{\text{aire de AOB}}{AB} = \frac{OH}{2} \approx \frac{1}{2}$.

Mais $\frac{\text{aire de AOB}}{AB} = \frac{\text{aire de } P_n}{\text{périmètre de } P_n}$. On sait déjà que: aire du disque $\approx$ aire de P_n et il en va de même pour les périmètres (c'est la définition même du périmètre du cercle !). Donc en vertu des règles de Leibniz :

$\frac{1}{2} \approx \frac{\text{aire de AOB}}{AB} = \frac{\text{aire de } P_n}{\text{périmètre de } P_n} \approx \frac{\text{aire du disque}}{\text{périmètre du cercle}}$ et compte tenu de ce que des réels explicites et très proches sont égaux, $\frac{\text{aire du disque}}{\text{périmètre du cercle}} = \frac{1}{2}$.

b. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ vient de ce que le premier membre représente l'aire située sous le quart de cercle de rayon unité et on applique le résultat précédent.

c. Selon la remarque qui suit le théorème 1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{3^2}{n^2}} + \dots + \sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

UN PEU PLUS LOIN AVEC L'OMBRE

Ombre d'un nombre réel

Dans le chapitre sur les suites on a introduit la propriété de Cauchy :

Propriété de Cauchy : Si (u_n) est une suite explicitée de nombres réels telle que pour tous entiers naturels m, n très grands on ait $u_m \approx u_n$, alors la suite est convergente.

Cette propriété peut être énoncée dans une version un peu plus générale comme suit :

Propriété de Cauchy (forte) :

Tout réel modéré x est très proche d'un réel explicité (nécessairement unique) appelé son ombre, notée ${}^{\circ}x$.

Pas plus que la version faible cette « propriété de Cauchy » n'a à être démontrée, mais elle donne de la droite réelle une vision particulièrement frappante, où on distinguerait les *tg* positifs, les *tg* négatifs, et pour le reste des modérés qui seraient tous agglutinés dans des *halos* disjoints, chacun des halos étant formé des réels très proches d'un unique modéré explicité.

A l'aide des formules de Leibniz on prouve que l'ombre satisfait les résultats « évidents » pour des réels modérés x, y :

$${}^{\circ}(x + y) = {}^{\circ}x + {}^{\circ}y$$

$${}^{\circ}(x \cdot y) = ({}^{\circ}x) \cdot ({}^{\circ}y)$$

$$\text{si } x < y, \text{ alors } {}^{\circ}x \leq {}^{\circ}y$$

On prouve maintenant que cette version implique bien la première :

preuve : On suppose la propriété de Cauchy « forte » et soit une suite explicitée (u_n) de réels telle que pour tous entiers naturels m et n très grands on ait $u_m \approx u_n$. Soit m un entier *tg* > 0 ; on considère les entiers k tels que $u_k \in [u_m - 1 ; u_m + 1]$ (bien sûr tous les entiers très grands satisfont cette propriété). Le minimum de ces entiers k ne peut être très grand car alors ce serait le plus petit des entiers très grands ce qui est une notion contradictoire. Donc ce minimum est modéré, *i.e.* explicité ce qui fait que le terme correspondant de la suite est explicité lui aussi, et que tous les termes de la suite sont modérés. On voit alors que la suite converge vers $\omega = {}^{\circ}u_m$.

Conséquences

On constate alors que dans le théorème 1 du chapitre sur les intégrales, la condition suffisante d'intégrabilité, qui était donnée pour plus forte *à priori* que la continuité en tout point explicité, lui est de fait équivalente :

Théorème 1 :

Soit une fonction explicitée f définie sur $[a ; b]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en tout point explicité de l'intervalle $[a ; b]$.

(ii) pour tous x, x' de $[a ; b]$, $x \approx x'$ implique $f(x) \approx f(x')$.

preuve : (ii) implique (i) est clair ; inversement supposons que (i) soit vrai, et considérons x et x' très proches dans $[a ; b]$: ils sont nécessairement modérés car a, b sont explicités et donc par continuité aux points explicités $f(x) \approx f({}^{\circ}x) \approx f(x')$.

Finalement la propriété d'être bornée par des réels explicites que possède une telle fonction peut être renforcée en :

Théorème 2 :

Soit une fonction explicite f définie sur $[a ; b]$. Si f est continue sur $[a ; b]$, alors ses valeurs explicites admettent un maximum et un minimum explicites.

preuve : Soit n un entier $ng > 0$ et $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

On considère $f(x_k)$ le plus grand possible.

Il est clair que si x est dans l'intervalle, il existe j tel que $x \approx x_j$ d'où $f(x) \approx f(x_j) \leq f(x_k)$.

Ceci vaut en particulier si $f(x)$ est explicite et dans ce cas on a $f(x) \leq f(x_k)$ car $f(x) = f(x_j) \leq f(x_k)$.

On raisonne de façon analogue pour le minimum.

Remarque : cette démonstration donne directement l'argument essentiel utilisé dans la démonstration du théorème 1 du chapitre « Aires et intégrales ». Mais il utilise un outil plus fort !

PARTIE III.

FONCTIONS TRANSCENDANTES ELEMENTAIRES

Les concepts de nombre et de suite explicités.... page 70

Le logarithme et l'exponentielle..... page 71

Les fonctions trigonométriques..... page 75

La définition des fonctions transcendantes élémentaires, c'est à dire les fonctions $\ln$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, est trop délicate pour figurer dans les programmes du second cycle. On se contente généralement d'énoncer les propriétés de ces fonctions et d'habituer les élèves à s'en servir correctement. Cependant, des élèves curieux et motivés pourraient tirer profit, peut-être sous forme de problèmes, à découvrir toute la richesse mathématique qui se cache dans ces fonctions. Nous donnons ici, surtout pour le plaisir de nos collègues, un traitement de la question dans notre contexte mathématique élargi, en supposant uniquement connue la puissance entière d'un nombre réel ou complexe, définie par récurrence et l'existence d'une racine $n^{\text{ième}}$ pour les réels positifs, en oubliant tout ce que nous savons à propos des fonctions transcendantes élémentaires. C'est aussi l'occasion de mettre en évidence les propriétés, restées à l'état intuitif dans les chapitres précédents, que nous devons attribuer au concept de *nombre réel explicité* et de *fonction explicitée* pour rendre la théorie harmonieuse. Nous en verrons la justification logique au chapitre suivant.

1. Les concepts de nombre et de suite explicités.

Jusqu'ici, nous avons dit qu'un réel, une suite ou une fonction sont explicités lorsque nous savons les caractériser par une définition qui en contient toutes les propriétés. Ceci exclut l'intervention des ordres de grandeur, ou du vocable *explicité*, dans ces définitions. Dans la suite, nous n'allons pas utiliser cette description empirique du caractère *explicité* en ce qui concerne les nombres réels, mais seulement nous en inspirer pour donner un sens à quelques axiomes qui nous serviront dans nos démonstrations. En voici une liste aussi réduite que possible.

(Ri) Les entiers 0 et 1 sont explicités.

(Rii) Tout entier naturel inférieur à un entier explicité est un réel explicité.

(Riii) Si x et y sont des réels explicités, et n un entier naturel explicité, alors les réels

$$|x|, \quad E(x), \quad -x, \quad x+y, \quad xy, \quad \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad x^n, \quad |x|^{\frac{1}{n}} \text{ sont explicités.}$$

On définit alors les ordres de grandeur de nombres réels comme au chapitre I, à partir des entiers explicités. Il s'avère qu'un réel x est très petit si et seulement si sa valeur absolue est inférieure à tout réel explicité positif y .

En effet, un réel x non nul est très petit ssi $\frac{1}{|x|} > n$ pour tout entier explicité n , en

particulier (axiome (Riii)) pour $n = E\left(\frac{1}{y}\right) + 1 > \frac{1}{y}$. D'où $|x| < y$.

Il en résulte qu'un réel explicité très petit est nul, sinon sa valeur absolue serait inférieure à elle-même. Donc deux réels explicités très proches sont égaux (utiliser (Riii)). Nous avons utilisé ce fait pour justifier l'unicité de la limite d'une suite explicitée au chapitre II.

En ce qui concerne les suites, les procédures qui donnent des suites explicitées à partir de nombres et de suites explicités sont plus variées : opérations algébriques, définition par récurrence à partir d'un passage explicité (empiriquement) de chaque terme au suivant etc.... Notons qu'une suite explicitée prend une valeur explicitée pour tout indice explicité.

Nous saurons reconnaître facilement dans les démonstrations qui suivent si une suite est explicitée ou non. Cependant, il faut commenter l'axiome de Cauchy, introduit au chapitre II, qui fournit un réel explicité à partir d'une suite explicitée dont les valeurs pour les indices très grands sont toutes très proches.

Cet axiome relie certaines suites explicitées, dites *suites explicitées de Cauchy*, à des réels explicités qui sont leurs limites. Il n'est plus de nature algébrique comme l'axiome (Riii). Il s'agit du cœur de l'Analyse réelle, dont sont issus les théorèmes d'existence de solutions pour divers types d'équations, numériques ou fonctionnels. Son expression en termes d'ordres de

grandeur rend compte de l'idée intuitive de convergence. En particulier chaque suite décimale explicite est de Cauchy et détermine un nombre réel explicite.

Nous avons vu (partie II) que la principale utilisation de l'axiome de Cauchy est l'existence d'une limite commune pour deux suites explicites adjacentes. Mais nous allons avoir besoin d'un résultat plus fort :

Théorème des suites croissantes. *Toute suite explicite croissante et majorée par un nombre explicite admet une limite.*

La démonstration consiste à construire à partir de la suite donnée (u_n) majorée par un réel explicite M une sous-suite explicite $(v_p) = (u_{n_p})$ adjacente à une suite explicite (w_n) , dont la limite commune sera la limite cherchée. Pour cela on utilise la construction par récurrence suivante, initialisée par $v_0 = u_0$, $w_0 = M$:

Soit m_p le milieu de (v_p, w_p) . Si pour tout $n > n_p$, on a $u_n < m_p$, on pose $v_{p+1} = u_{1+n_p}$ et $w_{p+1} = m_p$. Sinon, on prend pour n_{p+1} le premier indice tel que $u_{n_{p+1}} \geq m_p$ et on garde $w_{p+1} = w_p$. On obtient ainsi une suite explicite croissante majorée par tous les termes d'une suite explicite décroissante, avec $0 < w_p - v_p < 2^{-p}(M - u_0)$. Les deux suites ont une limite commune L . De plus la suite explicite d'entiers (n_p) est strictement croissante. Pour chaque indice très grand n , il existe donc un et un seul indice p très grand tel que $n_p \leq n < n_{p+1}$. Alors, grâce à la croissance de la suite initiale, on a $v_p \leq u_n \leq v_{p+1}$, de sorte que u_n est très proche de L .

Par symétrie, on a un résultat analogue pour les suites décroissantes et minorées.

2. Le logarithme du baron Napier et l'exponentielle.

2.1. Les puissances fractionnaires.

Soit b un réel positif. Nous savons définir par récurrence b^n pour les exposants entiers. Par passage à l'inverse on étend l'opération aux exposants négatifs. Puis cela passe aux exposants rationnels en utilisant l'extraction de racines $q^{\text{ièmes}}$. Nous en utilisons les propriétés algébriques sans en dresser la liste. Comment de cette algèbre et grâce à l'axiome de Cauchy pouvons nous en tirer les fonctions logarithmes et exponentielles ?

Nous procéderons dans un ordre assez proche de l'Histoire.

2.2. Le logarithme en base explicite $b > 1$.

Historiquement, le logarithme (de *logos*, la raison, et *arithmos*, le nombre) du baron écossais John Napier (1550-1617) est apparu en 1614 comme un moyen remarquablement efficace pour rendre le calcul numérique plus rapide, en particulier en ce qui concerne l'établissement de tables astronomiques. D'ailleurs Napier a profité de la nécessité pour systématiser l'écriture décimale des nombres sur une seule ligne. Plus tard Laplace a écrit que l'invention des logarithmes « en raccourcissant le travail, a doublé la vie des astronomes ». L'idée géniale a été la transformation des produits en sommes grâce aux propriétés des suites géométriques, c'est à dire des puissances d'un nombre fixé $b > 1$ appelé *base* du logarithme. Posons $b = 1 + a$. Alors pour tout entier n , on a $b^{n+1} > b^n$ et $b^n > 1 + na$ (suite croissante et non majorée). Il en résulte que pour tout réel $x > 0$ et tout entier n , il existe un et un seul entier p tel que $b^{p_n} \leq x^{10^n} < b^{p_n+1}$. Appelons le décimal $p_n \cdot 10^{-n}$ *approximation décimale par défaut du logarithme de x en base b à 10^{-n} près* et notons-le $L_{b,n}(x)$. Voyons les propriétés algébriques de cette famille de fonctions (les démonstrations sont de bons exercices).

- (i) $L_{b,n}(1) = 0$
- (ii) $L_{b,n}(x) + L_{b,n}(y) \leq L_{b,n}(xy) \leq L_{b,n}(x) + L_{b,n}(y) + 10^{-n}$
- (iii) $L_{b,n}(x) \leq L_{b,n+1}(x) < L_{b,n+1}(x) + 10^{-n-1} < L_{b,n} + 10^{-n}$
- (iv) $L_{b,n}(x) \leq \frac{x-1}{b-1} + 1$
- (v) $L_{c,n}(x) \cdot L_{b,m}(c) \leq L_{b,n}(x) < (L_{c,n}(x) + 10^{-n})(L_{b,m}(c) + 10^{-m})$ pour $b > 1$ et $c > 1$
- (vi) si $x < y$ alors $L_{b,n}(x) \leq L_{b,n}(y)$

On obtient des formules analogues pour les approximations par défaut $R_{b,n}(x) = L_{b,n}(x) + 10^{-n}$.

Il résulte de (iii) que pour x et b explicites, les suites explicitées $L_{b,n}(x)$ et $R_{b,n}(x)$ sont adjacentes. Elles ont une limite commune notée $L_b(x)$, qui est très proche de tous les réels $L_{b,n}(x)$ et $R_{b,n}(x)$ pour n très grand. Les autres propriétés donnent les relations attendues (utiliser les approximations et le fait que deux réels explicites très proches sont égaux :

$L_b(1) = 0$; si $L_b(xy) = L_b(x) + L_b(y)$; $L_b(x) \leq \frac{x-1}{b-1} + 1$; $L_c(x) = \frac{L_b(x)}{L_b(c)}$; si $x < y$ alors $L_b(x) \leq L_b(y)$. L'égalité $L_b(x) = 0$ implique $x = 1$, donc deux réels qui ont le même logarithme en base b sont égaux.

La relation constitutive $b^{p_n} \leq x^{10^n} < b^{p_n+1}$ suggère que $b^{\frac{p_n}{10^n}}$ est une approximation de x et l'on aimerait écrire $b^{L_b(x)} = x$. Mais pour cela nous devons d'abord définir b^y pour tous les réels explicites $y > 0$ (on étend aux exposants négatifs par inversion).

Or, la suite d'encadrements décimaux $p_n 10^{-n} \leq y < (1 + p_n) 10^{-n}$ fournit deux suites adjacentes $b^{p_n 10^{-n}}$ et $b^{(1+p_n) 10^{-n}}$ qui encadrent leur limite commune explicitée x , que nous notons b^y . Mais alors, par définition, $y = L_b(x)$.

On en déduit que $b^{y+z} = b^y b^z$ en comparant les logarithmes des deux membres.

2.3 Le logarithme népérien.

Contrairement à ce que son nom indique, ce n'est pas Napier qui a inventé le logarithme népérien... La base 10 lui suffisait. Le logarithme en base e est venu bien plus tard, et doit beaucoup à Euler. Voici une manière de l'introduire, indépendamment du paragraphe précédent.

Pour $x > 0$, on considère la suite $E_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$. Elle représente les pentes des

droites du plan de coordonnées passant par les points $(0,1)$ et $\left(\frac{1}{n}, x^{\frac{1}{n}} \right)$. Comment évoluent ces pentes lorsque n tend vers l'infini, du moins pour x (et donc aussi la suite) explicite ?

Proposition. Pour tout $x > 0$ explicite, la suite $E_n(x)$ admet une limite notée $\ln x$ et appelée logarithme népérien de x . On a $\ln 1 = 0$ et $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq (x-1)$.

Démonstration :

Pour $x > 1$, la suite est minorée par 0. Elle est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned}
E_{n+1}(x) - E_n(x) &= (n+1) \left(x^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right) - n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = (n+1) \left(x^{\frac{1}{n+1}} - x^{\frac{1}{n}} \right) - \left(1 - x^{\frac{1}{n}} \right) \\
&= x^{\frac{1}{n}} \left((n+1) \left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) - \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right) = x^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) (n+1-1-u-u^2-\dots-u^n)
\end{aligned}$$

est négatif car la raison $u = x^{\frac{1}{n(n+1)}}$ est supérieure à 1. Donc la suite a une limite (théorème des suites croissantes du §1). Nous en déduisons que $x^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1. Utilisons à nouveau la formule sommatoire des progressions géométriques :

$$\text{on a } n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^{1-\frac{1}{n}} > x-1 = \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \left(1 + x^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}} \right) > n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) > 0 ; \text{ donc à la limite } x-1 \geq \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

Pour $0 < y < 1$, nous avons $E_n(y) = -y^{\frac{1}{n}} E_n\left(\frac{1}{y}\right)$ qui tend vers $-\ln \frac{1}{y}$ car $y^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{n}}$ tend vers l'inverse de 1. La double inégalité s'en déduit dans ce cas.

Corollaire. Deux réels qui ont le même logarithme népérien sont égaux. Si $x < y$ alors $\ln x < \ln y$.

Proposition . Pour x, y positifs et explicites, $\ln xy = \ln x + \ln y$.

$$\text{En effet, cela se déduit de } n \left(x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) y^{\frac{1}{n}} + n \left(y^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \text{ car } y^{\frac{1}{n}} \text{ tend vers 1.}$$

Proposition. Pour $x > 0$ explicite et p entier explicite, on a $\ln(x^p) = p \ln(x)$.

$$\text{En effet, on a } pm \left(x^{\frac{p}{pm}} - 1 \right) = pm \left(x^{\frac{1}{m}} - 1 \right)$$

Corollaire. Pour $x > 0$ explicite et z réel explicite, on a $\ln(x^z) = z \ln(x)$.

En effet, on étend d'abord aux exposants rationnels par voie algébrique ; puis aux réels par encadrement décimal et croissance du logarithme.

D'après ce corollaire, on a $\ln \left(b^{\frac{1}{\ln b}} \right) = 1$ pour tout réel positif explicite b . Il existe donc un et un seul nombre $e > 0$ tel que $\ln e = 1$. Il est tel que $\ln(e^{\ln b}) = \ln b \cdot \ln e = \ln b$. D'où $e^{\ln b} = b$.

Par ailleurs, pour tout réel explicite x , on a $\ln(e^x) = x \ln e = x$. Or si $L_e(y) = x$, on a vu que $y = e^x$, de sorte que $\ln y = x = L_e(y)$. Ainsi le logarithme népérien coïncide avec le logarithme en base e . On en déduit que $L_{b(x)} = \frac{L_e(x)}{L_e(b)} = \frac{\ln x}{\ln b}$ et donc $b^x = e^{x \ln b}$ comme on en a l'habitude.

Pour avoir plus de précisions sur le nombre e , et plus généralement sur e^x pour x explicite, nous n'avons que la caractérisation $n \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 \right) = x + s_n$ où (s_n) est une suite explicite qui tend

vers 0. Cela donne encore $e^x = \left(1 + \frac{x + s_n}{n}\right)^n$. Montrons que pour n très grand, ceci est très proche de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Pour cela nous allons utiliser un résultat combinatoire intéressant en soi, dont nous laisserons la démonstration en exercice (utiliser la formule du binôme puis celle des progressions géométriques) :

Lemme. Si $|u| < 1$ alors $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n < \frac{1}{1-u}$.

Ceci permet d'évaluer la différence $A_n = \left(1 + \frac{x + s_n}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{s_n}{n} B_n$ où $|B_n| \leq n \left(1 + \frac{|x| + |s_n|}{n}\right)^n$ lorsque n est très grand, et donc s_n très petit. Posant $m = E(|x|) + 1$, et par division euclidienne $n = mp + r$ avec $r < p$ on obtient via le lemme précédent :

$$|B_n| \leq n \left(1 + \frac{|x| + |s_n|}{mp}\right)^{pm+r} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{|x| + |s_n|}{m}}\right)^m \left(1 + \frac{|x| + |s_n|}{n}\right)^r \text{ qui est un nombre modéré.}$$

D'où A_n est très petit.

Ainsi, nous avons montré que pour x explicité, e^x est la limite de la suite explicitée $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. En utilisant à nouveau la formule du binôme et celle des progressions géométriques (ce sont les deux formules les plus importantes de toute l'Analyse !) on montre facilement que e^x est aussi la limite de la suite explicitée $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

2.4. Les fonctions explicitées ln et exp.

Jusqu'ici nous avons seulement défini le logarithme et l'exponentielle pour des arguments explicités, avec des propriétés algébriques ou liées à la relation d'ordre utiles pour le calcul numérique. Donc cela suffit pour tout usage pratique, mais pour la cohérence du discours mathématique, on aimerait des fonctions définies pour tous les arguments et qui vérifient les mêmes propriétés. A ce stade il faut introduire un axiome qui affirme l'existence de ces fonctions. Nous en reparlerons au chapitre suivant. Pour le moment, contentons nous d'admettre cette existence. Nous appellerons ces fonctions ln et exp. On a vérifié sur les arguments explicités qu'elles sont strictement croissantes, réciproques l'une de l'autre, échangent sommes et produits, échangent 0 et 1, que exp est positive. Par ailleurs on a vu que $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$; de manière équivalente, on a $y + 1 \leq \exp y$ et, pour $0 \leq y < 1$, $\exp y \leq \frac{1}{1-y}$.

L'axiome d'existence affirme que ces relations se « transfèrent » aux réels non explicités, dans l'idée qu'une propriété qui est vraie dans tous les cas particuliers est vraie. On peut alors en déduire de nouvelles limites, en voici quelques unes.

Proposition. $\ln$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $\frac{1}{x}$.

En effet, on déduit de la double inégalité ci-dessus que : $\frac{h}{x} \frac{1}{1+\frac{h}{x}} \leq \ln(x+h) - \ln x \leq \frac{h}{x}$.

Pour x explicite et h très petit, le rapport d'accroissement est bien très proche de $\frac{1}{x}$.

On obtient de la même façon que la fonction $\exp$ est sa propre dérivée.

En ce qui concerne le comportement asymptotique, remarquons que $\ln 2^n = n \ln 2$ tend vers l'infini avec l'entier n . Comme $\ln$ est croissante, cela implique que $\ln x$ tend vers l'infini

lorsque x tend vers l'infini. En utilisant le fait que $0 < \frac{\ln\left(x^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{\frac{1}{p}}} < \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\right)$ pour $x > 1$ et p entier

naturel non nul, on trouve que pour p explicite et x très grand, le rapport $\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{p}}}$ est très petit, c'est

à dire que le logarithme tend vers l'infini plus lentement que n'importe quelle puissance explicite de x inférieure à 1. On en déduit que l'exponentielle tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance entière explicite de x .

Remarque.

Nous ne disons rien pour les puissances non explicites car nous n'avons pas défini la notion de limite pour des fonctions non explicites. On peut le faire de manière classique, mais alors il faut démontrer que pour les fonctions explicites, les deux définitions sont équivalentes. En échange, on pourra transférer les propriétés concernant les dérivées et les propriétés asymptotiques sans aucune restriction, mais avec leur signification classique. Nous reviendrons sur ces questions dans le dernier chapitre.

3. Les fonctions trigonométriques.

La manière la plus simple de définir les fonctions sinus et cosinus consiste à étendre l'exponentielle aux nombres complexes. Il s'agit d'un bel exercice pour le plaisir des collègues. Aussi le laisserons-nous sous forme d'énoncé commenté.

(1) On étend la notion de nombre explicite aux complexes, via les parties réelles et imaginaires. Puis on définit les complexes modérés ou très petits via le module ou, de manière équivalente, via les deux composantes réelles.

(2) On définit les suites explicites convergentes et on montre que la convergence équivaut à la condition de Cauchy généralisée. On remarque que la suite des conjugués tend vers le conjugué de la limite.

(3) Pour chaque complexe explicite z on considère les suites explicites $(u_n(z))$ et $(v_n(z))$ définies comme dans le cas réel par $u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ et $v_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$. Leurs propriétés sont des conséquences de la formule sommatoire concernant les suites géométriques et de la formule du binôme, qui restent valables dans le cas complexe.

On montre d'abord que pour n très grand, $u_n(z) \approx v_n(z)$.

Puis on montre que $v_n(z)$ est une suite de Cauchy, donc converge, ce qui implique la convergence de $u_n(z)$ vers une limite commune que l'on note $\exp z$. On a évidemment $\exp 0 = 1$. Si z est réel, on retrouve l'exponentielle réelle.

En utilisant la suite $u_n(z)$ on montre que $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$. D'où si $z = x + iy$, avec x, y réels, alors $\exp z = \exp x \exp iy$. On montre de même que $\exp pz = (\exp z)^p$ pour tout entier explicite p .

(4) On remarque que $\exp \bar{z}$ est le conjugué de $\exp z$. D'où $\exp iy$ est de module 1. On note $\exp iy = \cos y + i \sin y$. On en déduit la formule de Moivre :

$$\exp p i y = \cos p y + i \sin p y = (\cos y + i \sin y)^p = (\exp i y)^p.$$

(5) Les formules d'addition se déduisent de $\exp i(y_1 + y_2) = \exp i y_1 \exp i y_2$.

(6) On montre à l'aide des deux formules magiques que $|u_n(z) - 1 - z| \leq \frac{|z|}{2 - |z|}$ pour $|z| < 2$.

On en déduit $|\exp z - 1 - z| \leq \frac{|z|}{2 - |z|}$. Si l'on accepte qu'il existe une fonction explicite qui étend les relations qui précèdent à tous les complexes, on en déduit immédiatement les dérivées des fonctions explicitées sinus et cosinus.

(7) Il n'y a pas de fonction logarithme aussi sympathique que dans le cas réel. Ici l'exponentielle enroule la droite imaginaire sur le cercle unité d'une manière qui reste à préciser.

Si $|u| = 1$, on aimerait considérer la suite $y_n = \frac{n}{i} \left(u^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ mais il n'y a pas de racine $n^{\text{ième}}$

privilegiée dans le corps des complexes, et de toute façon, déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ suppose que l'argument soit défini, ce qui est justement notre problème. Il y a une exception : *les deux racines carrées d'un complexe unitaire peuvent être calculées algébriquement*. Si le nombre appartient au premier quadrant (i.e. si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont positives ou nulles, alors il admet une et une seule racine carrée dans le même quadrant, donc aussi une racine

$(2^m)^{\text{ième}}$ dans ce quadrant. Ceci permet de définir sans ambiguïté la suite $y_m = \frac{2^m}{i} \left(u^{\frac{1}{2^m}} - 1 \right)$;

puis on montre que cette suite converge vers un réel explicite y du premier quadrant tel que $\exp i y = u$. En particulier pour $u = i$ on obtient un nombre que l'on note $\frac{\pi}{2}$. On a alors

$\exp 2i\pi = i^4 = 1$, de sorte que $\exp(z + 2\pi) = \exp z$, ce qui rend sinus et cosinus périodiques de période 2π .

Si l'on calcule la longueur de l'arc de polygone régulier qui joint les puissances $u^{\frac{p}{2^m}}$ pour les entiers $p = 1, \dots, 2^m$, on trouve le nombre $P_m(u) = |y_m|$; ainsi, dans le premier quadrant, le réel positif y défini ci-dessus est la limite de cette longueur. Il en résulte que l'argument du nombre complexe u représente la longueur de l'arc de cercle correspondant.

PARTIE IV.

JUSTIFICATION LOGIQUE,

MATHEMATIQUE

ET

EPISTEMOLOGIQUE

DES ORDRES DE GRANDEUR

Dans le chapitre I nous avons essayé de mettre en évidence l'efficacité des concepts d'ordres de grandeur pour initier les élèves à la pratique de l'analyse. La question de la légitimité de ces concepts a été posée, mais au lieu d'y répondre, nous les avons renforcés dans les chapitres II et III pour construire un cours d'initiation à l'analyse plus complet, dont le charme et l'efficacité renforcent l'urgence de répondre à cette question. Le moment est venu de l'aborder sur le fond, ce qui va nous amener à relire les mathématiques avec l'œil de l'épistémologue et du logicien.

Nous allons d'abord concentrer notre attention sur le concept de nombre entier. Cette notion centrale des mathématiques a émergé lentement de l'habitude qu'a prise l'homme de compter les objets matériels de toute nature, puis de calculer sur les nombres pour éviter de manipuler ces objets eux-mêmes. Comment en est-on arrivé à la conception actuelle des nombres entiers ? A-t-elle atteint sa forme définitive ou peut-on utilement l'enrichir, en particulier de notions d'ordres de grandeur absolu, alors que l'on a seulement l'habitude de considérer des ordres de grandeur relatifs ?

1. La genèse du concept mathématique d'entier naturel.

An début, au temps des Sumériens, il y avait, *ges*, l'*un*, le principe masculin et *min*, *deux*, le principe féminin, et puis *es*, *beaucoup*... Puis ils fixèrent l'immensité à *sar*, 3600, *la totalité*, qui s'accordait très bien avec leur système de numération où se mêlaient les bases 10 et 6. Peu à peu l'expérience empirique développée à Babylone et en Egypte mit en évidence des recettes de calcul qui permettaient d'abréger le comptage. L'énoncé de ces recettes dans le langage courant devint le premier état du corpus mathématique, dont l'un des documents le plus célèbre est le *Papyrus Rhind* rédigé par le scribe égyptien A'hmose il y a environ 3650 ans. Puis vinrent les Grecs épris de rhétorique, qui inventèrent la déduction logique. Les mathématiques devinrent un discours où l'on part de vérités primitives, qui sont intuitivement évidentes, et que l'on ne cherche donc pas à justifier davantage, pour aboutir par le raisonnement à des vérités démontrées. Cette vision axiomatique a trouvé son plein épanouissement aux 19^{ème} et 20^{ème} siècle, lorsqu'il apparut que tout le corpus mathématique était exprimable et démontrable dans le contexte de la théorie des ensembles axiomatisée par Zermelo et Fraenkel. (théorie notée ici ZF) ou de l'une de ses variantes.

Désormais les mathématiques sont constitués de trois composantes complémentaires :

- une composante empirique,

où l'on discute les propriétés intuitivement évidentes concernant l'organisation des collections d'objets matériels ; on y prouve des faits par enchaînement d'évidences reliées par des passages évidents en regard de leurs conséquences matérielles. Ici les nombres entiers sont ce qu'il y a de commun à diverses collections d'objets que l'on peut apparier élément par élément. L'infini est uniquement présent à l'état potentiel, lorsque l'imagination se laisse fasciner par le constat que l'on peut toujours compter plus loin qu'un nombre que l'on a déjà atteint...

- une composante abstraite,

où l'on attribue les propriétés précédentes à des entités intérieures à la pensée humaine sous forme de concepts dotés de propriétés exprimées dans un langage spécialisé. Ces propriétés appelées *théorèmes* peuvent être déduites de propriétés primitives appelées *axiomes* à l'aide de raisonnements effectués selon des règles qui s'inspirent des constats que l'on peut faire à propos des raisonnements empiriques. Mais ces règles vont plus loin que ces constats. Le raisonnement par l'absurde est un exemple typique d'un tel dépassement : on ne peut pas prouver par l'absurde que dans une collection potentiellement infinie il n'existe pas d'objet matériel vérifiant une certaine propriété, mais on peut démontrer par l'absurde le théorème abstrait « il n'existe pas de nombre rationnel de carré 2 ». Avec une logique aussi puissante, il est facile de raisonner sur

un concept d'infini actuel, qui est censé représenter fidèlement les propriétés intuitives de l'infini potentiel évoqué dans la composante empirique.

- une composante formelle,

où désirant détacher les mathématiques de tout recours aux intuitions éventuellement trompeuses de l'esprit humain, on ne retient que la forme du discours présent dans la composante abstraite, sans plus penser que ce discours concerne des objets qui existent quelque part, même si ce n'est que dans l'esprit humain. Une théorie formelle est faite de *formules grammaticalement correctes* exprimées dans un langage dénué de toute signification intuitive. Certaines formules sont les *axiomes* de la théorie et on en déduit des *théorèmes* à l'aide d'un petit nombre de *règles de déduction* qui sont inspirées de celles de la mathématique abstraite. La différence essentielle avec la mathématique abstraite est qu'une théorie formelle ne « dit » rien sur rien. Elle peut être interprétée par un observateur extérieur en termes abstraits, mais cette interprétation ne fait pas partie de la théorie. Son seul critère de vérité est de ne pas contenir de contradiction, c'est à dire un théorème et sa négation. On dit alors que la théorie est logiquement consistante. Malheureusement, Kurt Gödel a prouvé en 1926 qu'aucune théorie contenant l'arithmétique ne peut être prouvée consistante... Ceci sonne le glas de l'espoir naïf, caressé par David Hilbert au début du 20^{ème} siècle, de mettre l'infini actuel en formules sans risquer la contradiction. Il est piquant de constater que l'aspect le plus solide des mathématiques reste la composante... empirique ! La solidité de la mathématique abstraite est affaire de convention collective, de bulle spéculative en quelque sorte, dont nous sommes convaincus qu'elle n'explosera pas un jour. Car nous spéculons sur les mathématiques pour gagner du temps (donc de l'argent) dans nos entreprises matérielles...

La distinction entre ces trois aspects *des* mathématiques (qui sont donc résolument plurielles !) est utile pour structurer le contenu de leur enseignement. Il est évident qu'une bonne dose de mathématique empirique est nécessaire pour former l'intuition ; une pratique assidue de la mathématique abstraite forge l'imagination et la capacité de raisonner en mariant le sens et la forme. Enfin un zeste de formalisme permet d'affiner la capacité à distinguer les modèles de la réalité... Toute tentative pour évacuer l'une des trois composantes prive les élèves de la pleine richesse culturelle des mathématiques. La difficulté est de trouver un dosage harmonieux...

Dans le présent document, la distinction entre les trois aspects est indispensable pour discuter valablement de la signification qu'a l'introduction des ordres de grandeur dans l'initiation à l'analyse.

Dans ce but, revenons sur le passage des entiers empiriques au concept abstrait d'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Les axiomes de la théorie abstraite des ensembles ont pour conséquences l'existence d'un et d'un seul ensemble sans aucun élément, dit pour cette raison *ensemble vide*, et pour chaque ensemble, du singleton dont celui-ci est le seul élément. On peut alors définir le *successeur* sE d'un ensemble E comme la réunion de E et du singleton $\{E\}$. Aux entiers empiriques 0, 1, 2, etc.... on peut associer les ensembles $\emptyset$, $s\emptyset$, $ss\emptyset$, etc.... (allez aussi loin que vous voulez !), qui à chaque stade sont à la fois éléments et sous-ensembles du successeur suivant. Dans cette construction pas à pas, l'infini reste tout aussi potentiel que dans le contexte empirique et la théorie des ensembles n'apporte rien de plus qu'une « théorie des collections d'objets matériels » (ce qu'elle est d'ailleurs dans l'esprit de la plupart des praticiens).

Le grand bond en avant de la mathématique abstraite consiste à introduire hardiment l'axiome « il existe un ensemble qui contient le successeur de chacun de ses éléments et dont l'ensemble vide est un élément ». On en déduit aisément qu'il existe un unique ensemble qui soit *minimal* parmi ceux qui vérifient cette propriété. C'est lui que l'on appelle $\mathbb{N}$ et ses éléments sont appelés *entiers naturels*. Cette appellation rappelle que les successeurs de $\emptyset$ sont éléments de $\mathbb{N}$.

Le caractère minimal implique que tout élément de $\mathbb{N}$ autre que $\emptyset$ admet un antécédent et que $\mathbb{N}$ lui-même n'a pas d'antécédent.

Il semble donc que $\mathbb{N}$ soit un bon modèle pour l'infini actuel, qui transcende l'infini potentiel de la mathématique empirique. Mais l'existence d'un tel ensemble n'est qu'un axiome... On ne peut pas « montrer » ou « construire » $\mathbb{N}$. Les seuls éléments de $\mathbb{N}$ que l'on connaisse sont les successeurs de $\emptyset$...

La relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$ et les opérations arithmétiques sont des sous-produits des autres axiomes de la théorie abstraite des ensembles : l'ordre est lié à l'inclusion, la somme à la réunion et la multiplication au produit cartésien. Ces objets abstraits ont des propriétés qui modélisent parfaitement celles de l'ordre et des opérations sur les entiers empiriques. Peut-on affirmer pour autant que toutes nos intuitions à propos des entiers empiriques se trouvent ainsi modélisées ? Puisque tout le monde est d'accord depuis longtemps, on a envie de dire oui... tant que l'on n'a pas pris au sérieux la question enfantine...

2. Jusqu'à combien peut-on compter ?

-Aussi loin que tu veux, mon enfant !

-Oui mais c'est combien « aussi loin que je veux » ?

-Dis un nombre jusqu'où tu sais compter...

-Mille...

-Ajoute un et tu sauras aussi...

-Mais alors je peux toujours compter jusqu'au suivant ... et cela ne s'arrête pas. Je n'arriverai jamais au bout...

3. L'enrichissement conceptuel de la théorie des ensembles.

Le constat empirique de l'enfant lui fait simplement découvrir l'irritante finitude des capacités humaines ; mais il ne le conduit pas pour autant à *affirmer qu'il existe des entiers inaccessibles*, puisque l'existence d'un tel entier signifierait pour lui « compter jusque là »... La question devient plus ouverte si on la pose dans le cadre de la mathématique abstraite. En effet, il s'agit de savoir si tout élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ est l'un des successeurs de $\emptyset$. En d'autres termes l'infini actuel coïncide-t-il avec l'infini potentiel ?

La difficulté de cette question ne tient pas à son sens mais à son expression ! En effet, il est impossible de l'exprimer dans le langage mathématique interne à la théorie des ensembles. Il y faudrait une phrase qui ne s'arrête jamais, du style « pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x = \emptyset$ ou $x = s\emptyset$ ou $x = ss\emptyset$ ou..... » et rien ne sert de masquer la difficulté en écrivant « etc ». Pour formuler correctement une question qui signifie au moins partiellement la même chose, il nous faudrait donc enrichir le langage ensembliste en introduisant un vocable externe à ce langage, assorti de propriétés vérifiées empiriquement par le concept métamathématique de « successeur de l'ensemble vide ». Adoptons provisoirement un vocable qui n'a pas de signification mathématique courante, par exemple l'adjectif *correct*. Voici quelques propriétés qui s'imposent d'elles-mêmes (mais elles peuvent être renforcées) :

(a) l'élément $\emptyset$ (usuellement noté 0 en tant qu'entier naturel) est correct.

(b) le successeur de tout entier correct est correct.

(c) tout élément inférieur à (c'est à dire contenu dans) un entier correct est correct.

Dans le langage ainsi enrichi, on peut maintenant poser la question « tout entier naturel est-il correct ? ». Mais on ne peut pas y répondre dans la théorie enrichie des trois axiomes externes (par rapport à la théorie des ensembles ZF) ci-dessus. En effet, l'affirmation *tout entier naturel est correct* est clairement compatible avec ZF, mais ne lui ajoute rien. Il est plus surprenant de constater que l'affirmation contraire (d) « il existe un entier non correct » est également

compatible avec ZF ! Pour justifier cette assertion, il suffit de prouver que l'ajout des axiomes (a), (b), (c), (d) à ceux de ZF donne une théorie, notée provisoirement ZF+, relativement consistante par rapport à ZF. Cela signifie que si ZF+ contient une contradiction (c'est à dire un théorème dont la négation est aussi un théorème) alors ZF contient aussi une contradiction. Comme on accepte par convention que ZF est consistante, on *doit* aussi accepter que cette convention s'étende à ZF+. Mais l'une des règles de déduction utilisée dans la logique des théories mathématiques stipule que si une théorie contient une contradiction, alors la négation de n'importe quel théorème est un théorème. Ainsi, pour vérifier la consistance relative de ZF+ par rapport à ZF, il suffit de prouver de manière empirique que si l'énoncé « $0 = 1$ » est un théorème dans ZF+, il l'est aussi dans ZF. Voici une preuve inspirée d'un récent article de R. Lutz § L.G. Albuquerque sous presse dans la revue *Synthèse*.

Imaginons une démonstration de « $0 = 1$ » à partir des axiomes internes à ZF et des axiomes externes (a), (b), (c), (d). Le vocable *correct* apparaît dans cette démonstration à chaque fois que l'on y utilise l'un des axiomes externes, et uniquement à ces endroits. Notons $A_1 \dots A_k$ les occurrences successives de ces axiomes, en respectant l'ordre chronologique. Remplaçons alors les A_i par des théorèmes de ZF selon la recette suivante :

- un axiome de type (a) est remplacé par « $0 < m_i = m_i^+$ »
- un axiome de type (b) est remplacé par « $n < m_i \Rightarrow sn < sm_i = m_i^+$ »
- un axiome de type (c) est remplacé par « $(m < n \text{ et } n < m_i) \Rightarrow m < m_i = m_i^+$ »
- un axiome de type (d) est remplacé par « $\exists n, n > m_i = m_i^+$ »

Toutes les variables m, n , se réfèrent évidemment à des entiers. Les m_i sont des entiers que l'on choisit tels que, pour chaque $i = 1, \dots, k-1$ on ait $m_{i+1} \geq m_i^+$. Ce choix a une solution purement empirique, puisque le nombre k est empirique. On obtient de cette façon une démonstration de « $0 = 1$ » sans sortir de la théorie ZF.

La preuve ci-dessus, de nature métamathématique (nous avons préféré ici parler de preuve *empirique* pour donner toutes ses lettres de noblesse à cette forme de mathématique), peut être reprise pour n'importe quelle affirmation interne au langage de ZF, à la place de « $0 = 1$ ». En effet, la seule propriété de cet énoncé que nous avons utilisée est que le vocable *correct* n'y apparaît pas. Il en résulte que nous avons prouvé une propriété de la relation entre ZF+ et ZF plus forte que la consistance relative, qui s'exprime ainsi :

Tout énoncé interne au langage de ZF qui est un théorème dans ZF+ est aussi un théorème dans ZF.

On dit que ZF+ est une extension conservative de ZF. Le mot « extension » contient le fait que tout théorème de ZF reste un théorème dans ZF+, ce qui était implicite dans notre présentation de ZF+. *Ainsi, une extension conservative de ZF ne trahit celle-ci ni par défaut, ni par excès.* Du point de vue de la validité logique, la théorie des ensemble enrichie ZF+ a exactement la même valeur que ZF. Mais elle a un avantage mathématique et didactique sur ZF, car elle permet la modélisation de concepts intuitifs plus élaborés grâce à la plus grande richesse de son langage. En effet, les entiers naturels non corrects sont plus grands que tout entier obtenu « en montant l'escalier de la succession » autant de fois (au sens empirique) que l'on veut. Ils méritent donc d'être dits *très grands*, car ils ont la vertu intuitive essentielle que nous attendons de ce concept.

Bien sûr, un praticien des mathématiques qui serait de mauvaise foi ou qui confondrait mathématique abstraite et mathématique empirique pourrait rejeter l'usage de ZF+ comme contexte de sa pratique en nous mettant au défi de lui donner un exemple *empirique* d'entier très grand. Les lignes ci-dessus devraient lui faire prendre conscience de l'absurdité d'une telle exigence, d'autant que la plupart des objets de la mathématique abstraite classique ne la satisfont

pas : par exemple les nombres réels $\sqrt{2}$ ou π ne sont que des sous-produits d'axiomes existentiels...

Une autre inquiétude à laquelle nous avons dû répondre est que « tout ceci est une conséquence de l'axiome du choix », ce qui semble pédagogiquement monstrueux si l'on oublie que la complétude du corps des réels, base de tous les théorèmes classiques d'existence de limites, est déjà un sous-produit de l'axiome du choix (ou du moins d'une de ses versions affaiblies). Mais il y a mieux : la preuve de conservativité de la théorie ZF+ donnée ci-dessus est hautement constructive. Il s'agit d'un algorithme qui transforme une démonstration externe d'un théorème interne en démonstration interne. Elle n'utilise pas du tout l'axiome du choix et reste donc valable même si l'on ne le met pas dans la liste des axiomes de ZF. Rappelons que l'axiome du choix est une affirmation très forte et longtemps controversée à propos de l'infini actuel de la mathématique abstraite. Elle prétend que pour toute famille $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles, il existe une fonction qui associe à chaque valeur de l'indice i un élément de l'ensemble E_i correspondant. Cela paraît évident dans le cas de collections empiriquement finies d'objets matériels. Accepter d'étendre cette propriété aux familles infinies d'ensembles infinis sans craindre qu'il en sorte une contradiction est plus hardi... Mais les conséquences en sont si utiles pour compléter le discours mathématique abstrait que les mathématiciens ont fini par mettre l'axiome du choix au rang des évidences que l'on ne discute plus. Mais ici la saveur du mot « existence » est aussi peu ontologique que possible...

De toute cette discussion, il résulte que le seul argument pour ou contre l'usage de ZF+ est celui de la commodité didactique (si l'on exclut les usages pour la modélisation dans les autres sciences, là où l'idée de grand nombre est omniprésente, par exemple en physique, en économie etc...). L'extension que nous venons d'élaborer reste certes très rudimentaire, mais elle a valeur de paradigme. Maintenant que le verrou a sauté, la porte est ouverte à des extensions plus élaborées susceptibles de rendre les services que nous avons mis en valeur dans les chapitres précédents. Avant de les passer en revue, il convient de lever les doutes immédiats que peut susciter l'introduction des ordres de grandeur auprès de ceux qui n'ont jamais été dans la nécessité de préciser leurs idées quant à la démonstration par récurrence et à la définition de sous-ensembles d'un ensemble en mathématique abstraite. Il s'agit de la principale difficulté psychologique que rencontre l'introduction des ordres de grandeur auprès des professeurs (les élèves, étant moins rompus à une pratique mathématique scrupuleuse, y sont nettement plus indifférents...). Là encore la distinction entre mathématique empirique et mathématique abstraite est essentielle pour clarifier le débat.

4. Les deux paradoxes fondamentaux de ZF+.

Voici une « preuve » que ZF+ est contradictoire.

« Il résulte des axiomes externes que si un entier n est correct, alors $n + 1$ l'est aussi. Comme 0 est correct, on en déduit par récurrence que tout entier est correct, ce qui contredit l'axiome (d). »

Pour celui qui écrit cette « preuve » la démonstration par récurrence peut signifier « monter l'escalier aussi loin que l'on veut ». Dans ce cas il a parfaitement raison à condition de se placer dans le contexte de la mathématique empirique. Et il aura ainsi prouvé que tous les entiers empiriques sont des entiers empiriques, le mot *correct* ne leur ajoutant rien... Mais l'axiome (d) ne dit rien au sujet des entiers empiriques. Il s'agit d'un axiome concernant uniquement la mathématique abstraite.

Si maintenant la « preuve » concerne la mathématique abstraite, alors il faut regarder la démonstration par récurrence dans ce contexte. Elle revient à considérer le sous-ensemble E des entiers naturels qui sont corrects. Or par hypothèse E est autosuccesseur et contient 0 ; comme $\mathbb{N}$ est un ensemble minimal ayant cette propriété, on en déduit que $E = \mathbb{N}$.

Est-ce la fin de notre rêve (d'ordres) de grandeur ? Non, car il y a dans cette démonstration un viol caractérisé de la théorie ZF. Qui nous a permis de considérer le sous-ensemble des entiers corrects ? Pourquoi pas celui des entiers sympathiques, bleus ou jaunes ?

Que dit l'axiome de ZF relatif à la définition de sous-ensembles ? Rien de plus que ceci :

pour toute propriété à une variable libre $P(x)$ exprimable dans le langage de ZF et tout ensemble H , il existe un et un seul sous-ensemble de E de H dont les éléments sont ceux de H qui vérifient $P(x)$.

Ainsi, les propriétés externes au langage de ZF, comme notre vocable *correct* ne sont pas concernés !

Notre second paradoxe relève du même abus, mais il ouvre des perspectives fascinantes.

On sait que deux des propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ que Péano a mis à la base de l'arithmétique sont les suivantes :

- toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ;
- toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Or, *il n'existe pas de plus grand entier correct*. En effet, le suivant serait encore correct, ce qui est contradictoire. De même *il n'existe pas de plus petit entier très grand* (c'est à dire non correct). En effet, l'entier précédent $n-1$ serait encore très grand, sinon n serait correct.

Nous venons de démontrer deux théorèmes de ZF+. Ils semblent contredire les propriétés ci-dessus. Mais vous devinez pourquoi il n'y a pas de contradiction : il n'y a pas d'ensemble des entiers corrects ni d'ensemble des entiers très grands !

En revanche, nous avons gagné un aspect précieux de ZF+ pour la modélisation de l'idée intuitive de *transition floue* : on sait quand c'est « avant », on sait quand c'est « après », mais il n'y a pas d'instant précis ou a lieu la transition. L'exemple typique, qui a fait réfléchir plus d'un philosophe depuis l'Antiquité, est la constitution d'un tas de sable. On ajoute un grain à ce qui n'est pas un tas et on n'a pas encore un tas. On enlève un grain à un tas et on a encore un tas. Une autre histoire typique est celle de l'homme qui descend du singe... ou simplement de l'enfant qui devient un adulte, de l'herbe qui devient un arbre etc.... En fait, dans la vie réelle, toutes les transitions ont ce caractère *flou* qu'une mathématique trop pauvre comme celle de ZF ne permet pas de modéliser. Ici, ce caractère flou est inscrit dans la constitution de la modeste extension ZF+, tout simplement parce que l'on a introduit des concepts externes qui ne sont pas assortis d'une définition exprimable dans le langage de ZF, et donc ne définissent pas des sous-ensembles, ce qui permet une plus grande liberté.

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit des notions beaucoup plus élaborées que celle d'entier correct ou très grand, avec des propriétés plus fortes. Nous allons les commenter maintenant à la lumière de ce que nous avons compris à propos de ZF+. Cela nous permettra aussi de délimiter leur champ d'application respectif.

Tout d'abord nous allons remplacer le vocable provisoire « correct » par un vocable dont le contenu affectif soit aussi proche que possible de l'usage que nous en faisons dans nos extensions du contexte mathématique. Ce choix obéit au souci pédagogique suivant : les élèves ne sont pas explicitement concernés par la distinction entre mathématique empirique et mathématique abstraite ou formelle. Pour eux (mais non pour leur professeur !) tout ceci se confond. Il convient donc que le vocabulaire soit aussi porteur que possible, même s'il faut en délimiter la signification en précisant les règles du jeu au moment voulu.

Après de longues discussions et expérimentations, nous avons sélectionné l'adjectif *explicité* que nous avons introduit dans les chapitres précédents, à la place de l'adjectif *correct* utilisé ci-dessus pour les besoins techniques de notre discussion concernant les extensions conservatives de ZF.

Réciproquement, tous les indices très grands dépassent n_0 de sorte que les termes correspondants u_ω sont dans l'intervalle $[a, b]$. Il en résulte que pour tout entier modéré k , on a $|u_\omega - L| < \frac{1}{k}$. Ceci implique que $u_\omega \approx L$, donc la suite converge.

Le nombre L n'est ni unique ni modéré en général (par exemple dans le cas d'une suite constante à valeur très grande). Mais pour des suites raisonnables, le second défaut disparaît, comme le montre le résultat suivant, qui concentre l'essentiel du classique « critère de Cauchy » :

Théorème (D). *Soit une suite qui converge et qui prend des valeurs modérées à tous les rangs modérés. Alors elle prend aussi des valeurs modérées aux rangs très grands.*

En effet, soit ω un rang très grand et A l'ensemble des rangs n tels que $|u_n - u_\omega| < 1$. Soit n_0 le plus petit élément de A . Si n_0 était très grand, alors $n_0 - 1$ le serait aussi, et donc serait élément de A car la suite converge. Ceci contredit la minimalité de n_0 . Ainsi ce nombre est modéré, donc aussi u_{n_0} . Il en résulte que u_ω est modéré.

Nous avons déjà exigé des suites explicitées qu'elles prennent des valeurs explicitées à tout rang explicité (cette propriété passe aisément à travers notre preuve de conservativité). Le théorème D leur est donc applicable, et en passant à l'ombre nous obtenons immédiatement à partir des théorèmes C et D la formulation du concept de limite utilisée dans les chapitres précédents :

Théorème de convergence. *Une suite explicitée est convergente si et seulement si il existe un réel explicité L (et un seul) tel que pour tout n très grand, $u_n \approx L$.*

A partir de là on démontre aisément les propriétés habituelles des limites : sommes, produits, gendarmes etc.... Il reste à établir le lien entre cette notion de limite et celle qui s'est imposée au 19^{ème} siècle. Nous avons pour le moment la traduction suivante :

Une suite explicitée est convergente si et seulement si il existe un réel explicité L tel que, pour tout intervalle ouvert $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$, avec ε explicité positif, il existe un rang explicité à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

En effet, la limite issue du théorème de convergence vérifie cette propriété d'après le théorème C. Réciproquement, les rangs très grands dépassant tout rang explicité, les termes qui leur correspondent sont plus proches de la limite L que les bords de tout intervalle explicité qui contient cette limite ; ils lui sont donc très proches.

Il reste à enlever le qualificatif *explicité* dans cette traduction et l'on obtient la version classique de la convergence. Cette suppression nécessite un axiome qui est la traduction formelle de l'idée intuitive que « ce qui est vrai dans tous les cas particuliers est vrai en général ». Plus précisément le schéma d'axiome de transfert s'énonce grossièrement ainsi, à propos des nombres et des suites :

Une propriété interne concernant des nombres et des suites est vraie si et seulement si elle est vraie lorsque tout ou partie des objets sur lesquels on quantifie sont supposés explicités.

Moyennant cet axiome, on obtient l'équivalence entre les deux notions de limite pour les suites explicitées, ce qui est rassurant. On en déduit aussi qu'une propriété interne vérifiée par les suites explicitées est vraie pour toutes les suites. Par exemple les théorèmes généraux sur les limites : sommes, produits etc....

Du point de vue épistémologique, il est maintenant intéressant de comprendre pourquoi, comme nous l'avons annoncé plus haut, l'axiome du choix doit être adjoint à la théorie des ensembles ZF pour que la preuve de conservativité s'étende à l'extension avec transfert.

Considérons par exemple une occurrence d'un axiome de transfert qui soit de la forme : « s'il existe un x vérifiant la propriété $P(x)$ alors il existe un y explicite vérifiant $P(y)$ ».

Ici P est une propriété interne au langage de ZF.

Dans une traduction locale on voudra écrire « s'il existe un x vérifiant $P(x)$ alors il existe un $y \in E$ vérifiant $P(y)$ » où E est l'ensemble fini qui croît au fil de la traduction d'une démonstration externe, selon la procédure que nous avons illustrée plus haut en matière de preuve de conservativité. Mais si le E entrant ne contient pas de y qui convient, il faut lui en adjoindre un en *choisissant* parmi tous les x qui satisfont P . S'il n'y a pas unicité, ni aucune procédure explicite pour faire ce choix, il ne reste plus que le recours à l'axiome du choix, exactement comme dans la démonstration classique de ce que toute suite de Cauchy converge dans le corps des réels considéré comme l'anneau quotient de l'anneau des suites de Cauchy de rationnels par l'idéal des suites qui tendent vers 0.

8. Extension aux fonctions : les axiomes de détermination.

La discussion ci-dessus peut être reprise pour la notion de convergence concernant les fonctions réelles de variables réelles. Tant qu'il s'agit seulement de calculer des limites ou de démontrer des propriétés algébriques à propos de fonctions explicites, on n'utilise que très peu de propriétés du concept de fonction explicite : essentiellement ce qui concerne la fabrication de fonctions explicites à partir d'autres à l'aide des opérations algébriques : sommes, produits, quotients, composition. On utilise également l'affirmation qu'une telle fonction prend des valeurs explicites en tout point explicite, ce qui est aisément acceptable à partir de l'idée intuitive correspondante. Du point de vue de la conservativité, tout ceci passe aisément le cap des traductions locales, sans recours à l'axiome du choix. Bien entendu, pour établir l'équivalence entre formulation interne et externe de la notion de limite, il faut étendre le schéma de transfert aux fonctions, ce qui suppose que l'on utilise l'axiome du choix dans la preuve de conservativité.

Mais il y a nouvelle demande qui émerge dans le cas des fonctions. Elle concerne la définition d'une fonction explicite à partir d'une construction externe. L'exemple typique en est la fonction dérivée. Si nous considérons une fonction explicite dérivable en tout point explicite d'un intervalle explicite, nous aurons pour chacun de ces points un nombre dérivé explicite. Dans les cas pratiques, qui concernent les élèves, on voit tout de suite apparaître une fonction explicite qui prend en ces points explicites la valeur du nombre dérivé, ce qui justifie la manière dont la fonction dérivée a été introduite au chapitre I.

Mais dans les questions théoriques, il faut affirmer l'existence d'une telle fonction. Son unicité relève du transfert, mais son existence relève d'un nouveau schéma d'axiome, que l'on pourrait appeler de *détermination de fonctions*. Il affirme que toute procédure qui associe à chaque réel explicite d'un intervalle explicite une valeur explicite détermine une (unique par transfert) fonction explicite qui coïncide avec l'effet de cette procédure sur les réels explicites.

On obtient de cette façon une fonction F en intégrant une fonction continue f . Pour a et x explicites, elle est définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ au sens de l'ombre de l'intégrale d'une approximation de f par une fonction en escalier, comme dans les chapitres précédents. Ailleurs la fonction F n'est pas définie par une telle construction, mais existe en vertu de l'axiome de détermination. On garde la même notation, mais les propriétés internes de F doivent être démontrées par transfert à partir du cas où x est explicite. Par exemple la linéarité de l'intégrale ou la formule de la moyenne se vérifient sur les intervalles explicites et par transfert cela suffit.

De cette façon, on montre aisément la réciproque du théorème fondamental du Calculus : la fonction F a pour dérivée f .

En effet, par transfert et formulation externe de la limite pour les fonctions explicitées, il suffit de montrer que pour tout x explicité, et tout $h \approx 0$, on a $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$. Par la formule de la moyenne, le premier membre est très proche d'une valeur $f(\xi)$ pour un certain ξ compris entre x et $x+h$. Par continuité de f , on a $f(\xi) \approx f(x)$ ce qui clôt la démonstration.

On en déduit comme d'habitude que toute fonction continue admet une primitive, ce qui permet de définir et justifier l'existence de solutions pour de nombreuses équations différentielles.

9. Relation de tout ceci avec l'Analyse Non Standard : l'extension conservative IST.

Jusqu'ici nous avons délibérément évité toute allusion à l'Analyse Non Standard, de peur que certains préjugés attachés à ce vocable par quelques mathématiciens professionnels n'empêchent le lecteur de suivre la démarche simple et constructive que nous lui proposons, *et dont la nature épistémologique est différente de celle de l'ANS* comme nous avons tenté de le montrer ci-dessus. Ces préjugés sont les inévitables relents de la bataille historique, étalée sur trois siècles, qui a conduit à l'évacuation des infinitésimaux leibniziens pour cause de non-existence en tant qu'objets mathématiques empiriques. Notre proposition est certes liée à l'ANS par certains aspects fondamentaux, tels l'introduction d'extensions conservatives de la théorie des ensembles comme l'est la théorie IST de E. Nelson, mais elle a son originalité propre puisque, comme nous l'avons montré plus haut, on peut aller assez loin dans le cadre d'une extension conservative de la théorie des ensembles sans axiome du choix (l'ouvrage sur *Le Constructivisme Non Standard* de J.M.Salanskis, aux Presses Universitaires du Septentrion, 1999, est éclairant à ce sujet). Disons que, du point de vue de la recherche mathématique, l'émergence de l'ANS a brisé le vieux tabou relatif aux infinitésimaux ce qui, loin de susciter l'enthousiasme auquel on aurait pu s'attendre, puisqu'un problème ancien tant de fois débattu trouvait enfin sa solution, a plutôt suscité la méfiance et une bonne dose d'incompréhension, tout en permettant de résoudre élégamment divers problèmes ardu.

Cependant du point de vue de l'enseignement des rudiments d'analyse, l'introduction *a minima* des ordres de grandeur résulte plutôt d'une réflexion systématique entre mathématiciens rompus à des versions faibles de l'ANS et pédagogues avertis, présentée initialement à l'état théorique dans la brochure 103 de l'APMEP. Elle a été abondamment poursuivie et expérimentée depuis par les artisans du présent ouvrage, qui en proposent le résultat à l'attention des collègues confrontés à la difficulté d'enseigner l'usage de notions dont les définitions restent à l'état intuitif. Ici nous faisons entrer une part de ces aspects intuitifs dans le discours mathématique formalisé...

BIBLIOGRAPHIE

A) Deux articles parus dans le Bulletin APMEP n° 428, mai 2000, téléchargeable sur le site :

<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/ateliers.htm>

Analyse au lycée en termes d'ordres de grandeur, par A. MAKHLOUF et E. MEYER.

Enseigner l'analyse autrement : la technique de l'enrichissement conceptuel, par R. LUTZ.

B) L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur, in : Repères-IREM n° 24, p. 103 115, par R. Lutz - A. Makhlouf et E. Meyer.

C) Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : Les réels dévoilés, par R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer, Paris, APMEP, 1996 (Publication n° 103).

D) Hébergés par le Rectorat de Strasbourg :

Un forum de discussion :

<http://www.nt.ac-strasbourg.fr/discus/messages/61/104.html>

Un site qui contient toutes les informations concernant le groupe et ses productions :

http://194.254.2.19/microsites/maths_01/index.htm

A toutes fins utiles, nous vous signalons deux sites Internet à consulter pour des recherches (bibliographiques entre autres) :

<http://irem.u-strasbg.fr>

<http://www.apmep.asso.fr/publimat.htm>

Titre	ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR : DE L'INTUITION AUX CONCEPTS
Brochure A4	88 pages
Auteur	Groupe "Ordres de Grandeur" de l'IREM de Picardie
Mots-clés	Analyse - limite - dérivation - aire - intégrale - ordres de grandeur - entier - réel - très grand - très petit - intuition - démonstration
Date	Mars 2002 - 2 ^e Impression
Editeur	I.R.E.M. de Strasbourg (S. 182)
ISBN	2-911446-17-8
Public concerné	Professeurs de mathématiques
Résumé	Depuis plusieurs années, un groupe de professeurs répartis dans toute l'académie d'Amiens a expérimenté une initiation aux notions fondamentales de l'Analyse au moyen des ordres de grandeurs absolus. Il s'agit de montrer que l'intuition peut être formalisée par une réflexion sur les nombres réels qui redonne aux élèves les moyens de raisonner avec les repères nécessaires pour que ces raisonnements aient du sens. Cette brochure présente des activités et des leçons qui ont été testées dans des sections très diverses. Elle propose ensuite des leçons plus approfondies destinées aux sections scientifiques et aux professeurs puis termine par une justification épistémologique et logique des concepts dont la première partie constitue la transposition didactique.
Prix	7,60 € (+ 3,05 € de frais d'envoi).