LES ETOILES DE MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

1997 - 2000

LES ETOILES DE MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

ACADEMIE DE STRASBOURG

présentées par
l'Inspection Pédagogique Régionale,
les Equipes de Professeurs,
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Strasbourg.

FASCICULE 6
EDITION INTERNATIONALE

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Sujets

de décembre 1997 à mars 2000

FASCICULE 6
EDITION INTERNATIONALE

Mathématiques Sans Frontières
Collège Fustel de Coulanges
4, rue Jacques Peirotes
F- 67000 Strasbourg

e-mail : math_sans_frontieres@email.com

Site internet : http://www.ac-strasbourg.fr

Dans les menus, choisir la rubrique **Pédagogie, second degré, mathématiques**.

« Mathématiques sans Frontières »

Les nouvelles Etoiles
1997-2000

Au cœur de « l'Année Mondiale des Mathématiques », la compétition internationale « Mathématiques sans Frontières », créée dans l'Académie de Strasbourg en 1989, ne cesse de s'étendre, favorisant esprit d'équipe, démarche scientifique et ouverture aux langues vivantes dans les établissements scolaires.

80 000 élèves de 15 à 17 ans ont découvert ces mathématiques ludiques et attirantes grâce au travail de 30 équipes d'organisation. Les exercices proposés sont résolus en fonction des goûts et compétences de chacun. La présentation d'exercices dans d'autres langues que le français donne à la compétition un attrait supplémentaire.

Cette manifestation est d'autant plus importante que l'avantage d'une orientation scientifique en terme d'avenir professionnel n'est pas assez perçu par les élèves et n'attire pas assez les jeunes filles. Pourtant, les besoins en scientifiques sont aujourd'hui importants.
Au même titre que « La Fête de la Science » repose sur l'expérimentation concrète, « Mathématiques sans Frontières » met en avant le développement des capacités d'analyse et de synthèse. Cette attention portée dans tous les domaines à la valorisation de multiples formes d'intelligence doit nous permettre de diversifier les accès à la réussite, toujours dans l'objectif d'offrir une meilleure égalité des chances à nos élèves.

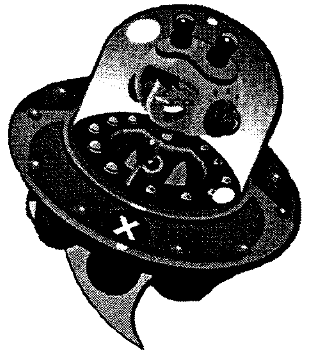
Les professeurs, les inspecteurs et les chefs d'établissement des équipes d'organisation de « Mathématiques sans Frontières » présentent ici les annales des compétitions de décembre 1997 à mars 2000. Elles sont donc le résultat d'un travail international de conception, mené dans un climat d'écoute et d'humour sans frontières.

Que ces étoiles des mathématiques brillent dans les collèges et lycées de nombreux pays pour la réussite et le plaisir de tous...

Claude LAMBERT
Recteur de l'Académie de Strasbourg

N.B : cette version internationale de « Mathématiques sans Frontières » 1997-2000 est couplée avec une version française éditée également par l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
...une compétition interclasses !



Un concours interclasses

- Des classes entières de troisième et de seconde ou de niveau équivalent dans des pays étrangers concourent entre elles.
- Une palette d'exercices variés leur est proposée (dix en troisième et treize en seconde).
- La solution de l'un des exercices doit être rédigée en langue étrangère.
- La classe s'organise pour résoudre les exercices en une heure et demie et rend une seule feuille-réponse pour chacun d'eux.

L'équipe d'organisation

- Elle est composée de professeurs, de chefs d'établissement et d'inspecteurs.
- Elle se réserve le droit de modifier le règlement de la compétition en cas de nécessité.
- Elle a créé une association culturelle et scientifique du nom de ***Mathématiques sans frontières.***

Pour quoi faire ?

- Ouvrir des frontières :
  - entre la France et les pays voisins,
  - entre les établissements scolaires, les entreprises et la cité,
  - entre les mathématiques et les langues vivantes,
  - entre les collèges et les lycées,
  - entre les élèves d'une classe.
- Favoriser :
  - l'intérêt pour les mathématiques,
  - le travail en équipe,
  - la participation de tous,
  - l'initiative des élèves,
  - la pratique d'une langue étrangère.

Des exercices variés

- Ils sont de genres divers et de difficulté variée.
- Ils cherchent à favoriser le travail en équipe et s'adressent à tous les élèves.
- La rédaction d'un des exercices doit se faire en anglais, en allemand, en espagnol ou en italien.
- Chaque élève peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Participation en chiffres

année	nombre de classes	nombre d'élèves
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- 14 langues, 25 pays, 30 secteurs d'organisation.

Comment s'inscrire ?

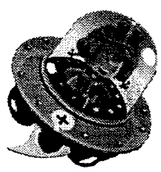
- Seules les classes entières de troisième, de seconde ou de niveau équivalent peuvent s'inscrire.
- La compétition s'adresse aux établissements publics ou privés.
- L'inscription se fait après accord entre la classe entière, le professeur de mathématiques et le chef d'établissement.

Calendrier annuel

- Septembre - octobre : inscription des classes,
- Décembre - janvier : épreuve d'entraînement,
- Mars : épreuve officielle,
- Mai : remises des prix.

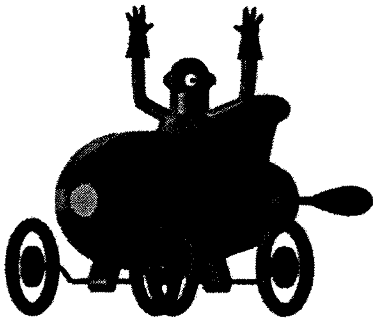
De nombreux lots

- Sur chaque secteur concerné, deux palmarès sont établis : l'un pour les classes de troisième, l'autre pour les classes de seconde ou niveaux équivalents.
- Chaque élève d'une classe primée bénéficie d'une part du lot (par exemple : cadeau, voyage, spectacle, etc.).
- Les remises des prix par secteur se font en présence des classes gagnantes, de leurs professeurs, des personnalités locales, des parrains de la compétition et de la presse.
- Des lots de participation sont attribués par tirage au sort.



Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül

...ein Schülerwettbewerb für Schulklassen.



Art des Wettbewerbs

- Geschlossene 10. und 11. Klassen und vergleichbare Stufen anderer Länder tragen den Wettbewerb unter sich aus.
- Eine Reihe verschiedener Aufgaben wird ihnen gestellt (10 für Klasse 10 und 13 für Klasse 11).
- Die Lösung einer der Aufgaben muß in einer Fremdsprache verfaßt werden.
- Die Aufgaben werden klassenintern innerhalb von anderthalb Stunden gelöst ; die Klasse gibt für jede Aufgabe nur ein Lösungsblatt ab.

Organisationskomitee

- Es setzt sich zusammen aus Lehrern, Schulleitern und Mitgliedern der Schulaufsichtsbehörde.
- Es behält sich das Recht auf Änderungen der Wettbewerbsregeln vor.
- Es gründete eine kulturelle und wissenschaftliche Vereinigung mit dem Namen "**MATHEMATIK OHNE GRENZEN**".

Zielsetzungen

- Grenzen zu sprengen :
  - zwischen Frankreich und seinen Nachbaren,
  - zwischen Schulen, Unternehmen und Städten,
  - zwischen Mathematik und Sprachen,
  - zwischen Schularten
  - zwischen den Schülern einer Klasse,
- Fördern :
  - den Zugang zur Mathematik,
  - Gruppenarbeit
  - gemeinsame Teilnahme aller,
  - Schülerengagement,
  - Anwendung einer Fremdsprache.

Die Aufgaben

- Sie sind aus verschiedenen Bereichen und von verschiedenem Schwierigkeitsgrad.
- Sie versuchen die Gruppenarbeit zu fördern und wenden sich an alle Schüler.
- Eine der Aufgaben muß in Englisch, Französisch, Italienisch oder Spanisch verfaßt werden.
- Jeder Schüler kann nach seinen Interessen und Fähigkeiten arbeiten.

Beteiligung

Jahrgang	Schulklassenanzahl	Schüleranzahl
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- 14 Sprachen, 25 Länder, 30 Organisationskomitees.

Teilnahmebedingungen

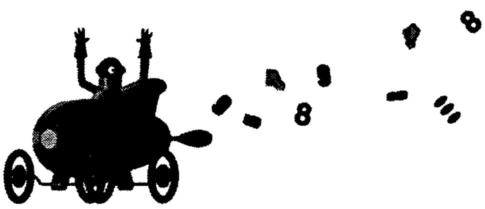
- Nur gesamte Klassen der Stufe 10 und 11 bzw. vergleichbare Stufen anderer Länder können teilnehmen.
- In diesem Jahr richtet sich der Wettbewerb an die öffentlichen und privaten Schulen der auf der Karte eingezeichneten Regionen.
- Die Anmeldung kann nur unter Zustimmung der ganzen Klasse, des Mathematiklehrers und des Schulleiters erfolgen.

Termine

- September - Oktober : Anmeldung der Klassen.
- Dezember, Januar : Probedurchgang.
- März : Offizielle Prüfung.
- Mai : Preisverleihung.

Preisverleihung

- Jede Stufe eines teilnehmenden Landes erhält zwei Preise.
- Jeder Schüler einer ausgezeichenen Klasse erhält einen Preisanteil, z.B. Reisen, u.s.w.
- Die Preisverteilung findet in Anwesenheit der Teilnehmer, ihrer Lehrer, der örtlichen Presse und den Sponsoren des Wettbewerbes statt.



- Einige Preise werden unter den Teilnehmern verlost.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül

... una gara interclassi !

Natura della gara

- Classi intere di 3^a media e di 1^a superiore (o di livello equivalente nei paesi esteri) competono fra di esse.
- Una paletta di esecizi vari è proposta agli alunni (10 in 3^a media e 13 in 1^a superiore).
- La soluzione di uno di questi esercizi deve essere stesa in lingua straniera.
- La classe si organizza per risolvere l'esercizio entro un'ora e mezza e consegna un solo foglio-risposta per ognuno di essi.

Gli organizzatori

- Sono professori, presidi e ispettori.
- Si riservano il diritto di modificare il regolamento della gara in caso di necessità.
- Hanno creato un'associazione culturale e scientifica, chiamata **"MATEMATICA SENZA FRONTIERE"**.

Obiettivi

- Aprire le frontiere
  - tra la Francia ed i paesi vicini,
  - tra le scuole, le imprese e la città,
  - tra le matematiche e le lingue vive,
  - tra la scuola media e il liceo,
  - tra gli alunni di una stessa classe
- Favorire
  - l'interesse per le matematiche,
  - il lavoro di gruppo,
  - la partecipazione di tutti,
  - l'iniziativa degli alunni,
  - la pratica di una lingua straniera.

Gli esercizi

- Sono di vari generi e di varia difficoltà.
- Cercano di favorire il lavoro di gruppo e si rivolgono a tutti gli alunni.
- La stesura d'uno degli esercizi va fatta in francese, in tedesco, in inglese o in spagnolo.
- Ogni alunno ci proverà piacere secondo le sue preferenze e le sue competenze.

Alcuni dati sulla partecipazione

anno	Numero di classi	Numero di alunni
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- 14 lingue, 25 paesi, 30 settori di organizzazione.

Condizioni di iscrizione

- Solo le classi intere di 3^a media, 1^a superiore o livello equivalente possono iscriversi.
- Quest'anno la gara è riservata alle scuole pubbliche o private delle regioni indicate sulla mappa.
- L'iscrizione si fa previo accordo tra la classe intera, il professore di matematica e il preside.

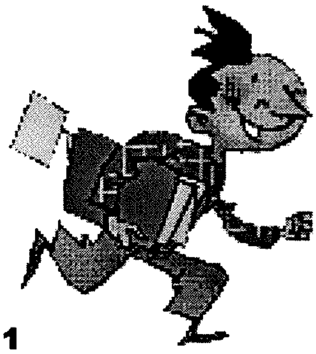
Calendario dell'anno

- Da novembre a gennaio : iscrizione delle classi.
- Febbraio : la gara di prova.
- Marzo : la gara ufficiale.
- Maggio : le consegne dei premi.

Consegna dei premi

- Per ogni settore interessato, vengono fatte due classifiche : una per gli alunni di 3a media e una per quelli di 1^a superiore.
- Ogni alunno della classe premiata riceve una parte del premio (es : un viaggio, uno spettacolo ecc .).
- La consegna dei premi si fa in presenza delle classi premiate, dei loro professori, delle personalità locali, dei padrini della gara e della stampa.
- Alcuni premi di partecipazione sono attribuiti per sorteggio.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül



... a maths competition for pupils in years 10 and 11

The competition

- Complete classes of pupils in Years 10 and 11 (or classes of a similar level in Maths) compete against each other .
- A range of Maths exercises is offered to them (10 for the pupils in Year 10 and 13 for those in Year 11).
- The answer to one of the exercises must be written in a foreign language.
- The pupils have one hour and a half in which to find the answers to the questions set. They are expected to work together on the exercises and must hand in one answer sheet for each exercise.

The organisers

- The competition is organised by a group of teachers, headteachers and school inspectors.
- The organisers are entitled to modify the regulations should the need arise.
- They have created a cultural and scientific association which goes by the name of ***Mathématiques sans frontières.***

Objectives

- Lifting of barriers between
  - France and neighbouring countries,
  - the different schools, local firms and local authorities,
  - Mathematics and Modern Languages,
  - middle and upper schools,
  - pupils in the same class.
- To promote
  - interest in Mathematics and Foreign Languages,
  - team work,
  - a greater sense of involvement,
  - pupil-centred initiatives.

The maths exercises

- The exercises offered vary in type and degree of difficulty.
- They encourage group work and are meant to be tackled by all pupils.
- The answer to one of the exercises must be written out in either French, German, Italian or Spanish.
- Every pupil will find something that appeals to his or her interest and ability.

Participation in figures

year	Number of classes	Number of pupils
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- 14 languages, 25 countries, 30 local teams.

How to take part

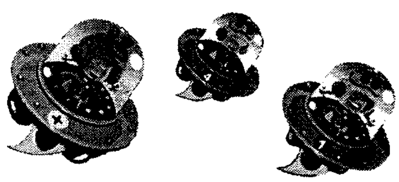
- Only complete Year 10 and Year 11 classes (or their equivalents) may apply.
- This year the competition will be open to state-run or private schools in the areas shown on the map.
- In order to take part, classes must first have obtained the consent of their Maths teacher and their Headteacher.
- Applications must be sent in by the local teams.

Timetable

- September-October : applications are sent in.
- December-January : mock competition.
- March-April : official competition.
- May : prize-giving.

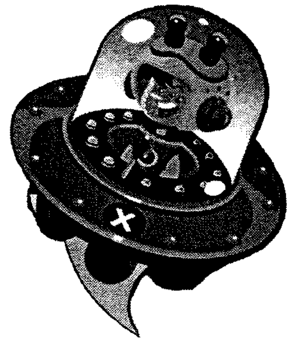
Prizes

- For each area taking part two prize lists are drawn up : one for pupils in year 10, the other for pupils in year 11.
- Prizes are shared out amongst all the participants of a winning class (eg. a trip, a concert or a show, etc...)
- All the pupils of a winning class, their teachers, local dignitaries, sponsors and the press are invited to the prize-giving ceremony.
- A few prizes are set aside to be drawn for classes participation.



Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matemáticas sin fronteras

... una competición entre clases.



Naturaleza de la competición

- Clases enteras de 3° y de 2° o de nivel equivalente en países extranjeros compiten entre sí.
- Se les propone una serie de ejercicios variados (10 en 3° y 13 en 2°).
- La solución de uno de los ejercicios debe ser redactada en lengua extranjera.
- La clase se organizará para resolver los ejercicios en una hora y media y se entregará una sola hoja-respuesta por cada uno de los ejercicios.

El equipo de organisación

- Está compuesto de profesores, directores de centros e inspectores.
- El equipo se reserva el derecho de modificar el reglamento de la competición en caso de necesidad.
- El equipo ha creado una asociación cultural y científica llamada : ***"Mathématiques sans frontières"***.

Objetivos

- Abrir fronteras
  - entre Francia y los países vecinos,
  - entre los centros escolares, las empresas y la ciudad,
  - entre las matemáticas y los idiomas modernos,
  - entre los colegios y los institutos,
  - entre los alumnos de una misma clase.
- Favorecer
  - el interés por las matemáticas,
  - el trabajo en equipo,
  - la participación de todos
  - la iniciativa de los alumnos,
  - la práctica de un idioma extranjero.

Los ejercicios

- Hay diferentes tipos y son de dificultad variada.
- Intentan favorecer el trabajo en equipo y se dirigen a todos los alumnos.
- Uno de los ejercicios debe ser redactado en francés o en alemán o en inglés o en italiano.
- Cada alumno puede participar según sus gustos y sus capacidades.

Participatión en cifras

año	número de clases	número de alumnos
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- 14 lenguas, 25 países, 30 zonas de organización.

Condiciones de matrícula

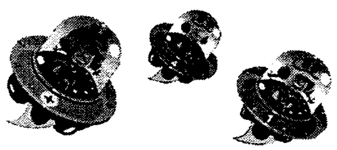
- Sólo pueden matricularse las clases enteras de 3°, de 2° o de nivel equivalente.
- Este año, la competición se dirige a los centros públicos o privados de las regiones señaladas en el mapa.
- La matrícula se hace tras un acuerdo entre toda la clase, el profesor de matemáticas y el director del centro.

Calendario anual

- Noviembre-enero : matrícula de las clases.
- Diciembre-enero : prueba de entrenamiento.
- Marzo : prueba oficial.
- Mayo : entrega de premios.

Entrega de premios

- En cada sector implicado serán establecidas dos categorías de premios : una para las clases de 3°, otra para las clases de 2°.
- Cada alumno de una clase premiada recibe un premio (por ejemplo : viaje, espectáculo etc ...).
- La entrega de premios se hace en presencia de las clases premiadas, de sus profesores, de las personalidades locales, de los patrocinadores de la competición y de la prensa.
- Algunos premios de participación son atribuidos por sorteo.



Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematyka bez granic

Miedzyklasowy konkurs matematyczny

Zasady ogólne

- Do konkursu przystępuja klasy pierwsze i drugie gimnazjalne w Polsce oraz klasy tego samego poziomu w innych krajach europejskich.
- Poziom i liczba ćwiczeń są zróżnicowane (10 zadań dla klas pierwszych i 13 dla klas drugich).
- Rozwiązanie każdego ćwiczenia musi być zredago wane w języku obcym.
- Cala klasa uczestniczy w rozwiązaniu zadań i po 1,5 godziny oddaje rozwiązanie każdego ćwiczeni a na oddzielnym arkuszu egzaminacyjnym.

Grupa organizacyjna

- W jej skład wchodzą nauczyciele, dyrektorzy szkół i inspektorzy oświaty.
- Grupa organizacyjna ma prawo modyfikacji zasad współzawodnictwa w przypadku gdyby to było konieczne.
- Grupa organizacyjna założyła stowarzyszenie kulturalno-naukowe noszące nazwę *"Matematyka bez granic"*.

Cele ogólne

- Otwarcie granic :
  - między Francją i krajami ościennymi,
  - między szkołami, zakładami pracy i miastami,
  - między matematyką i językami obcymi,
  - między szkołami podstawowymi i ogólnokształ cącymi.
  - między samymi uczniami.
- Podniesienie :
  - zainteresowania matematyką,
  - zainteresowania pracą w grupach,
  - stopnia zaangażowania wszystkich członków grupy,
  - inicjatywy własnej uczniów,
  - stopnia opanowania jezyków obcych.

Cwiczenia

- Są z różnych dziedzin i o zróżnicowanym stopniu trudności.
- Mają na względzie podniesienie pracy w grupach iadresowane są do wszystkich uczniów.
- Opis ćwiczeń musi być zredagowany w języku angielskim, niemeckim, hiszpańskim lub włoskim.
- Kazdy uczeń winień umieć znależć przyjemność odpowiadającą jego zainteresowaniom i umiejętnościom.

Uczestnictwo

rok	ilość klas	ilość uczńúw
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

14 języków, 25 krajów, 30 sektorów organisacyjnych.

Warunki uczestnictwa

- Jedynie pełne klasy mają prawo uczestnictwa w zawodach.
- W bieżącym roku szkolnym do współzawodnictwa staja szkoły państwowe i prywatne z krajów wyszczególnionych na załączonej mapie.
- Zapisy następują za zgodą całej klasy, nauczyciela matematyki i dyrektora liceum.

Kalandarz

- Wrzesień-luty : zapisy klas.
- Grudzień-luty : egzamin przygotowawczy.
- Marzec : egzamin oficialny.
- Maj : wręczenie nagród.

Rozdanie nagród

- W każdym regionie przyznawane będą dwie głowne nagrody.
- Jedna w pionie klas pierwszych i druga w pionie klas drugich.
- Każdy uczeń klasy nagrodzonej skorzysta ze swej części nagrody (np. wycieczka, przedstawienie i.t.d.).
- W każdym regionie uroczystość przyznania nagród odbędzie się w obecności klasy nagrodzonej, jej nauczycieli, osobistości lokalnych promotorów konkursu i przedstawicieli prasy.
- Nagrody pocieszenia będą przyznane drodze ciągniecia.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1997-1998

9ème édition

Mathématiques sans frontières

Les exercices n° 2, 4, 6, 8, 9 et 12 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées.
Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.

Exercice 1 — 10 Points

Abracadabra !

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

David, der Zauberer betritt die Bühne und zeigt dem Publikum drei Kisten. Auf eine dieser Kisten sind zwei Kaninchen gemalt, auf eine andere zwei Tauben, auf die dritte eine Taube und ein Kaninchen.

Mit verbundenen Augen bittet David einen Zuschauer, in eine Kiste zwei Tauben, in eine andere zwei Kaninchen und in die letzte ein Kaninchen und eine Taube zu setzen. Dabei soll das Bild auf der Kiste in keinem Fall mit dem Inhalt übereinstimmen.

Nun behauptet David, daß es ihm genüge, nur einer der drei Kisten ein einziges Tier zu entnehmen, um den Inhalt aller Kisten herauszufinden.

Erkläre, was sich der Zauberer dazu überlegen muß.

David the magician is going on stage and is showing the audience three big boxes.

There are two rabbits drawn on one of the three boxes, two doves on another one and a rabbit and a dove on the last one.

Blindfolded David asks one of the member of the audience to put two rabbits into one box, two doves into another box and finally a rabbit and a dove into the last box so that the content of each box does not correspond to its drawing.

Then David announces that taking one single animal out of only one of the three boxes is enough for him to find out the content of each box.

Explain his reasoning.

David el mago sale a escena y presenta al público tres cajones gruesos. Sobre el primero ha dibujado dos conejitos, sobre el segundo dos palomas, y sobre el tercero un conejito y una paloma.

Vendados los ojos, David le pide a un espectador que ponga dos conejitos en un cajón, dos palomas en otro y por fin un conejito y una paloma en el último cajón, de tal manera que lo que contiene cada cajón no corresponda con el dibujo.

Entonces David declara que no le hace falta sacar más de un animal de un solo cajón para saber lo que contiene cada cajón.

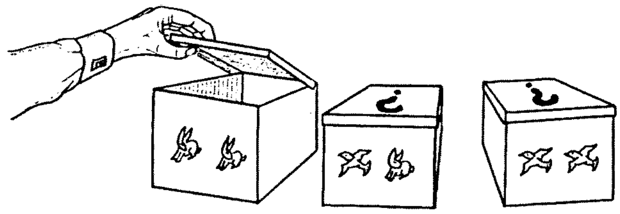
Explicad su razonamiento.

Il prestigiatore Davide entra in scena e presenta al pubblico tre scatoloni. Su uno di questi sono raffigurati due conigli, su un altro sono disegnate due colombe e sul terzo un coniglio e una colomba.

Davide, con gli occhi bendati, chiede ad uno spettatore di introdurre in uno scatolone due conigli, in un altro due colombe e, infine, nell'ultimo scatolone un coniglio e una colomba in modo che il contenuto di ogni scatolone non corrisponda alla figura esterna.

Davide dichiara, quindi, che gli basta levare un animale da uno solo dei tre scatoloni per scoprire il contenuto di ogni scatolone.

Si spieghi il ragionamento del prestigiatore.

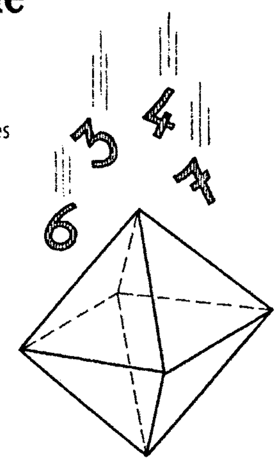


Exercice 2 — 5 Points

Platonique

L'octaèdre régulier est un des cinq solides de Platon.

Fabriquer un octaèdre régulier. Numéroter ses faces de 1 à 8 de sorte que la somme des numéros des quatre faces autour de chaque sommet soit égale à 18.

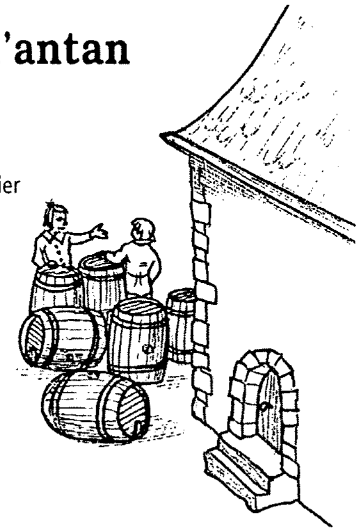


Exercice 4 — 5 Points

Algèbre d'antan

Nicolas Chuquet a écrit en 1484 le premier livre d'algèbre rédigé en français. Dans un problème, il demande de partager entre trois personnes vingt et un tonneaux de vin dont sept pleins, sept vides et sept à moitié pleins, de telle sorte que chaque personne ait le même nombre de tonneaux et la même quantité de vin sans ouvrir un seul tonneau.

Donner un partage possible.

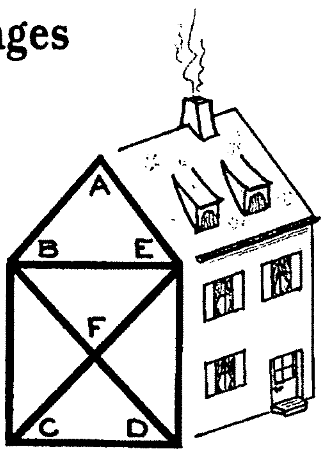


Exercice 3 — 10 Points

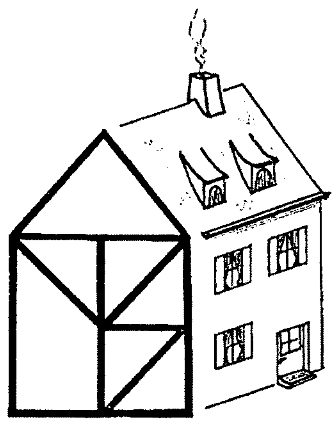
Colombages

Anne essaie de tracer les poutres du pignon de sa maisonnette sans lever le crayon et sans repasser sur un segment préalablement tracé.

Elle y réussit assez vite et, après avoir compté le nombre de segments issus de chaque point nommé, elle comprend qu'il n'y a que deux points possibles pour le début ou la fin du tracé.

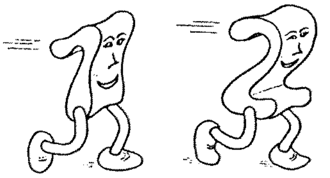


En respectant la règle du jeu d'Anne, montrer qu'il est possible de tracer les poutres du pignon de la maisonnette de droite. Donner les étapes du tracé.



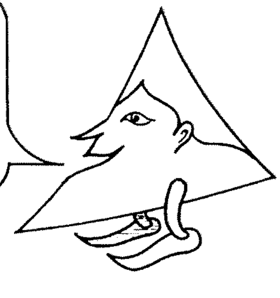
Exercice 5 — 10 Points — Le premier à 20

Thimothée et Hélène jouent à "la course à 20".
Thimothée commence en écrivant au choix 1 ou 2. Hélène ajoute 1 ou 2 au nombre de Thimothée et écrit la somme obtenue. Puis Thimothée ajoute 1 ou 2 au dernier nombre écrit par Hélène et ainsi de suite à tour de rôle. Le premier qui arrive à 20 a gagné !
Thimothée affirme qu'il a une stratégie qui permet au premier joueur de gagner à coup sûr.
Expliquer la stratégie de Thimothée.



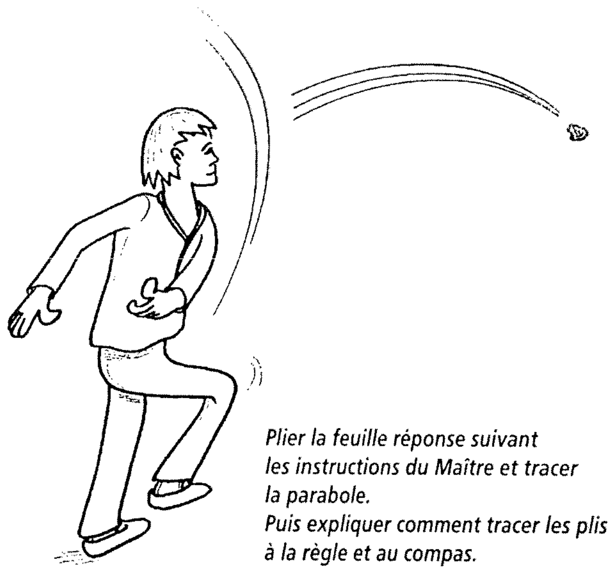
Exercice 6 — 5 Points — Dessine-moi un triangle

Un de mes angles mesure 50°, un autre 30° et mon périmètre est égal à 15 cm.
Dessinez-moi de la façon la plus précise possible !



Exercice 7 — 10 Points — Parapli

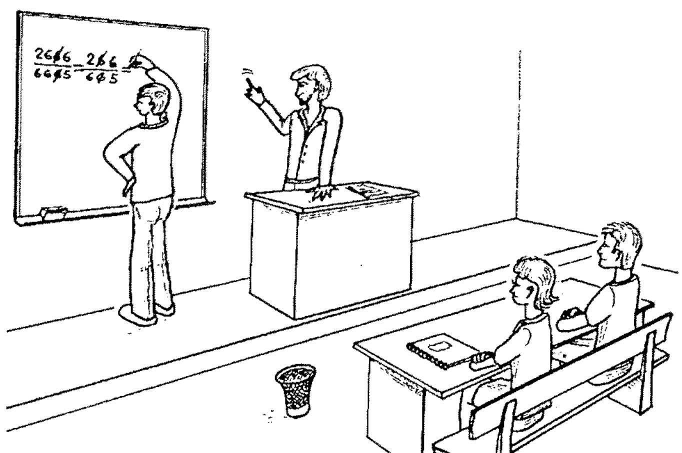
Lorsque le Professeur eut terminé son cours, un de ses disciples lui demanda :
"Maître, quelle est la courbe décrite par une pierre que je lance devant moi ?"
Le Maître lui répondit : "Bonne question ! C'est une parabole et voici un procédé simple pour l'obtenir :
place un point F sur le grand axe de symétrie d'une feuille, à 4 cm du bord supérieur AB. Place un point M sur AB, superpose M et F, marque le pli et déplie, puis recommence en changeant la position de M sur AB.
Après avoir obtenu un certain nombre de plis, tu découvriras que les traces de ces plis enveloppent une parabole."
Le disciple était comblé, mais le Maître ajouta :
"Le bon disciple ne se contente pas de cela et cherche une construction géométrique à la règle et au compas des traces de chaque pli !"



Plier la feuille réponse suivant les instructions du Maître et tracer la parabole.
Puis expliquer comment tracer les plis à la règle et au compas.

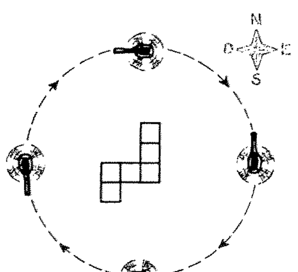
Exercice 8 — 5 Points — Scandaleux !

Thimothée est au tableau pour simplifier la fraction 2666/6665.
"Facile, dit-il, j'enlève un 6 au numérateur et un 6 au dénominateur, j'écris 266/665 puis je recommence. Je trouve 26/65 et enfin 2/5 qui est irréductible."
A la grande surprise de ses camarades, Thimothée ne déclenche pas les foudres de son professeur!
"Toutes les fractions que tu as écrites sont égales, mais quelle drôle de méthode!", dit le professeur.
Trouver une fraction de la forme abbb/bbbc, égale à 1/2 qui se simplifie à la mode de Thimothée.



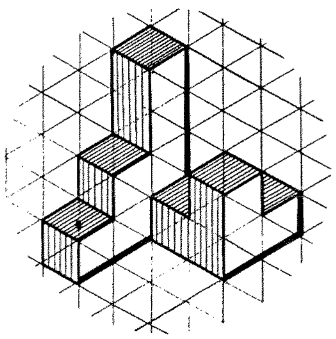
Exercice 9 — 10 Points — Héli 3D

Un hélicoptère tourne au-dessus d'un immeuble pour en faire des photos aériennes.
L'édifice est constitué de onze cubes.

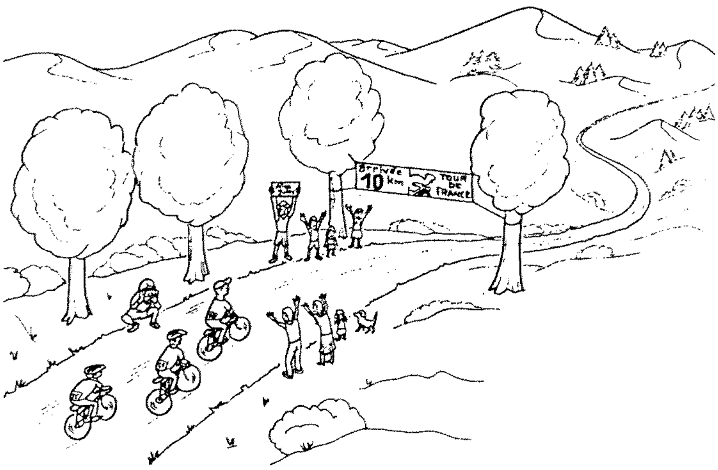


Vue de dessus

On peut en voir à droite une vue du Nord-Ouest.
Dessiner suivant le même mode de représentation la vue du Sud-Est

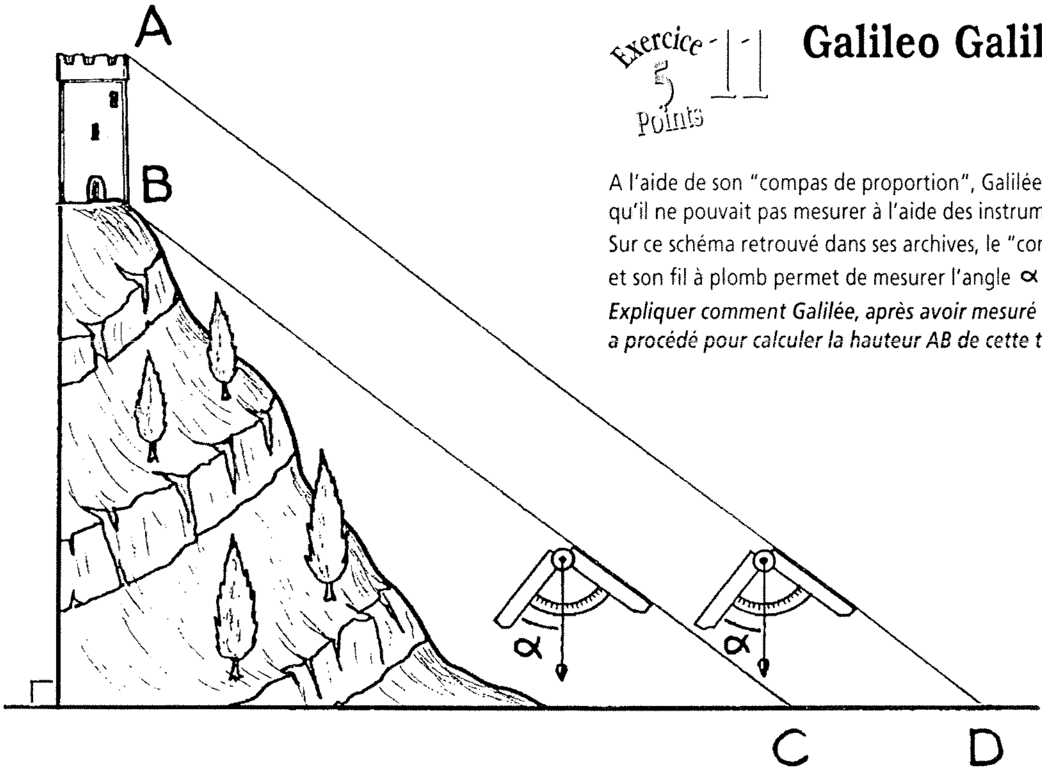


Exercice 10 — 15 Points
Exercice de rattrapage



L'arrivée d'une étape du Tour de France cycliste est au sommet du Ballon d'Alsace.
Jules franchit la banderole "Arrivée à 10 km" quatre minutes avant le coureur Richard.
Trente minutes plus tard, Jules franchit la ligne d'arrivée six minutes après Richard.
On suppose qu'entre ces deux instants les vitesses de Jules et Richard sont constantes.
A quelle distance de l'arrivée Richard a-t-il dépassé Jules ?

Exercice 11 — 5 Points
Galileo Galilei



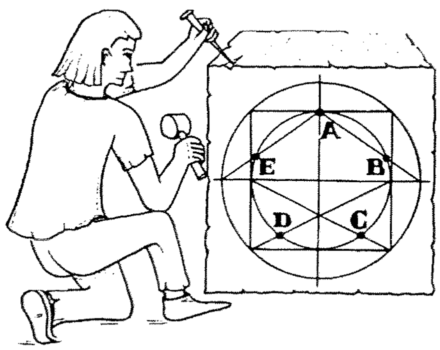
A l'aide de son "compas de proportion", Galilée calculait des longueurs qu'il ne pouvait pas mesurer à l'aide des instruments classiques.
Sur ce schéma retrouvé dans ses archives, le "compas" forme un angle droit et son fil à plomb permet de mesurer l'angle α.
Expliquer comment Galilée, après avoir mesuré la distance CD, a procédé pour calculer la hauteur AB de cette tour.

Exercice 12 — 10 Points
Plein format

Gaëtan expose des photos de la remise des prix des Mathématiques sans Frontières sur un panneau carré de 75 cm de côté.
Il dispose de trente photos à placer horizontalement et de trente photos à placer verticalement, toutes de format 9 x 13 cm et veut en exposer le maximum.
Dessiner une disposition possible à l'échelle 1/5e sur la feuille-réponse et indiquer le nombre de photos exposées.

Exercice 13 — 15 Points
Erreur de taille ?

Dans le but d'obtenir un pentagone régulier, les bâtisseurs du Moyen-Age utilisaient la construction suivante :
On trace un carré et ses médianes, puis le cercle inscrit dans le carré et le cercle circonscrit à ce carré, enfin les points A, B, C, D, E sur le cercle inscrit comme l'indique la figure.
Les points A, B, C, D, E sont-ils régulièrement espacés sur ce cercle ? Justifiez votre réponse.



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Indications de solutions pour l'épreuve de décembre 1997

Exercice n°1 10 points *Abracadabra !*

En notant C pour colombe et L pour lapin, on a :

Dessin de la boîte	LL	CC	CL
Contenu de la boîte	CC ou CL	LC ou LL	CC ou LL

Il suffit que David sorte un animal de la boîte comportant le dessin CL.

- S'il sort un lapin, alors cette boîte en contient deux.

- La boîte marquée CC ne peut contenir deux lapins, donc elle contient un lapin et une colombe.
- La boîte marquée LL contient donc deux colombes.

Dessin	CL	CC	LL
Contenu	LL	LC	CC

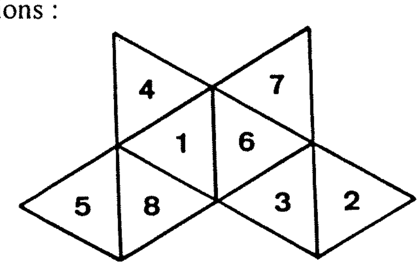
- S'il sort une colombe, alors cette boîte en contient deux.

- La boîte marquée LL contient une colombe et un lapin.
- La boîte marquée CC contient donc deux lapins.

Dessin	CL	LL	CC
Contenu	CC	CL	LL

Exercice n°2 5 points *Platonique*

Il y a plusieurs solutions. Voici le patron d'une de ces solutions :

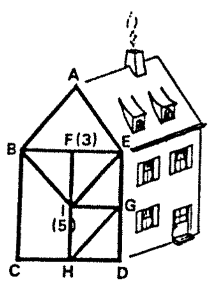


Exercice n°3 10 points *Colombages*

Appelons « degré » d'un point le nombre de segments à tracer dont ce point est une extrémité.

S'il y a des sommets de degré impair, ce sont ceux de départ et d'arrivée, tous les autres sommets étant de degré pair.

Seuls F et I, sur la figure ci-contre sont de degré impair.



On peut, par exemple, tracer le circuit FBAEGDHGIHCBIEFI.

Exercice n°4 5 points *Algèbre d'antan*

Appelons A, B, C les trois personnes. Outre les permutations possibles de ces trois personnes, il y a deux solutions :

		Tonneaux pleins	Tonneaux à moitié pleins	Tonneaux vides
1ère solution	A	3	1	3
	B	3	1	3
	C	1	5	1
2ème solution	A	3	1	3
	B	2	3	2
	C	2	3	2

Exercice n°5 10 points *Le premier à 20*

S'il arrive à 17, Thimothée est sûr de gagner, quoi que fasse Ursule :

- si Ursule ajoute 1, il rajoutera 2
- si Ursule ajoute 2, il rajoutera 1.

De même, pour arriver à 17, Thimothée repère les positions gagnantes successives :
14 - 11 - 8 - 5 - 2.

S'il commence à jouer, Thimothée est sûr de gagner la partie s'il écrit 2.

Exercice n°6 5 points

Dessine-moi un triangle

Aucune justification n'était demandée.

On trace un triangle ABC dont les angles mesurent 30°, 50° et 100°. Avec le compas, on place sur (AB), à l'extérieur de [AB], les points I et J tels que AI = AC et BJ = BC. Ainsi le périmètre du triangle ABC est égal à IJ.

Soit O le milieu de [AB] et soient I' et J' tels que OI' = 7,5 cm et OJ' = 7,5 cm, donc I'J' = 15 cm (voir figure).

L'homothétie h de centre O qui transforme I en I' (de rapport 15/IJ)

- transforme J en J'
- transforme C en C', A en A' et B en B' tels que :

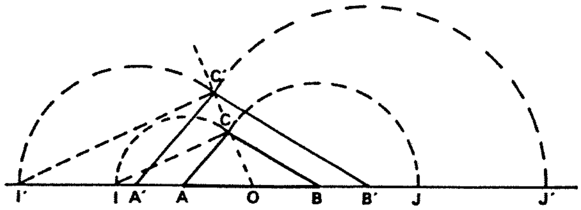
C' appartient à (OC) et à la parallèle à (IC) issue de I'
A' appartient à (OA) et à la parallèle à (AC) issue de C'
B' appartient à (OB) et à la parallèle à (BC) issue de C'.

Le triangle A'B'C' a pour périmètre I'J' = 15 cm, et il a les mêmes angles que ABC.

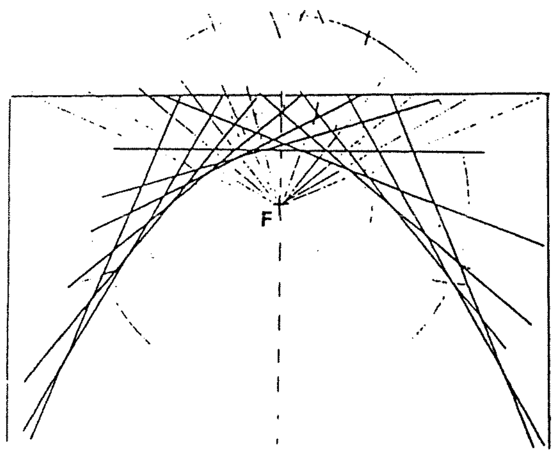
Remarque : les mesures a, b, c des côtés du triangle ABC vérifient :

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 50°} = \frac{c}{\sin 100°} = \frac{a+b+c}{\sin 30° + \sin 50° + \sin 100°}$$

où $a+b+c = 15$ cm d'où :
$a \approx 3{,}332$ cm, $b \approx 5{,}105$ cm et $c \approx 6{,}563$ cm.



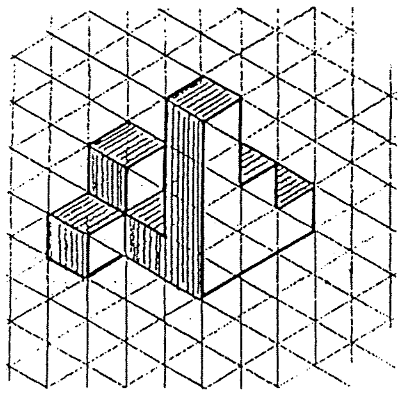
Exercice n°7 10 points *Parapli*

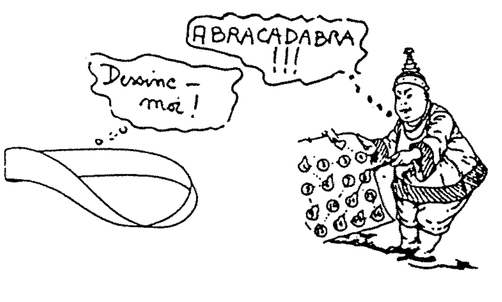


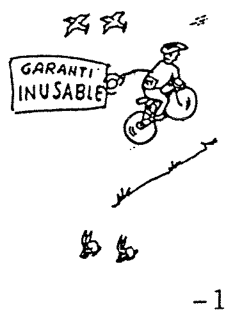
Exercice n°8 5 points *Scandaleux !*

On a : $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ et : $\frac{4999}{9998} = \frac{499}{998} = \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$.

Exercice n°9 10 points *Heli 3D*





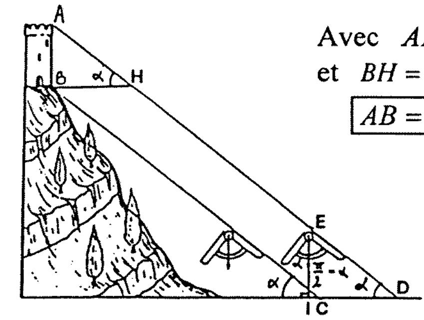


Exercice n°10 15 points

Exercice de rattrapage

Pour les 10 derniers kilomètres, Jules met 30 min, et Richard met 30 - 4 - 6 = 20 min ; donc Richard gagne 10 min sur Jules en 10 km, c'est-à-dire une minute au kilomètre.
Richard rattrape donc ses 4 minutes de retard sur Jules au bout de 4 km, à 4 km de la banderole : il dépasse Jules à 6 km de l'arrivée.

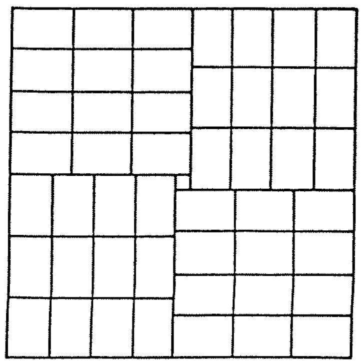
Exercice n°11 5 points *Galileo Galilei*



Avec $AB = BH \tan\alpha$ et $BH = CD$, on a : $\boxed{AB = CD \tan\alpha}$.

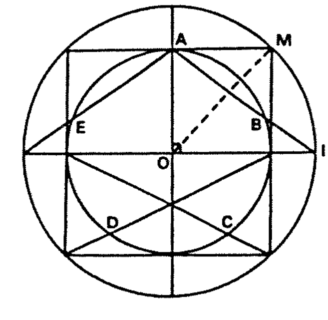
Exercice n°12 10 points *Plein format*

Surface d'une photo : 9x13 = 117 cm^2.
Surface du panneau : 75x75 = 5625 cm^2.
Or 5625 : 117 ≈ 48,07 , donc il ne peut pas y avoir plus de 48 photos.
En remarquant que 75 = 3x13 + 4x9 , on peut placer ces 48 photos selon la disposition :



Exercice n°13 15 points *Erreur de taille ?*

Dans le triangle rectangle OAT, on a : $\tan \widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} = \sqrt{2}$, car $OT = OM$ et $OM^2 = OA^2 + AM^2 = 2OA^2$ donc $OT = OA\sqrt{2}$. On en déduit $\widehat{OAT} \approx 54{,}73°$.
Dans le triangle isocèle OAB, on en déduit $\widehat{AOB} \approx 70{,}54°$, alors que, dans un pentagone régulier, l'angle $\widehat{AOB}$ devrait mesurer $\frac{360°}{5} = 72°$.
Le pentagone ABCDE n'est donc pas régulier.



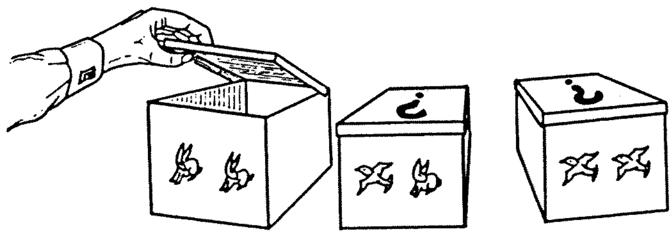
Mathematik ohne Grenzen

Ein Klassenwettbewerb für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10 und 11

Probewettbewerb 1997/98

Bei den Aufgaben 2, 4, 6, 8, 9 und 12 ist keine Erklärung verlangt. Bei allen anderen Aufgaben muß die Lösung begründet werden. Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Lösungsblatt zu verwenden.Auch Teillösungen werden bewertet.

Aufgabe 1 10 Punkte Gezaubert



Die Lösung dieser Aufgabe soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

David le magicien entre en scène et présente au public trois grosses boîtes.

Sur l'une sont dessinés deux lapins, sur une autre sont dessinées deux colombes et sur la troisième un lapin et une colombe.

Les yeux bandés, David demande à un spectateur de placer deux lapins dans une boîte, deux colombes dans une autre et enfin un lapin et une colombe dans la dernière boite de façon à ce que le contenu de chaque boîte ne corresponde pas à son dessin.

David déclare alors qu'il lui suffit de sortir un seul animal d'une seule des trois boîtes pour trouver le contenu de chaque boîte.

Expliquer son raisonnement.

★★★

David the magician is going on stage and is showing the audience tree big boxes.

There are two rabbits drawn on one of the three boxes, two doves on another one and a rabbit and a dove on the last one.

Blindfolded David asks one of the members of the audience to put two rabbits into one box, two doves into another box and finally a rabbit and a dove into the last box so that the content of each box does not correspond to the drawing on it.

Then David announces that taking a single animal out of only one of the three boxes is enough for him to find out the content of each box.

Explain his reasoning.

Il prestigiatore Davide entra in scena e presenta al pubblico tre scatoloni.

Su uno di questi sono raffigurati due conigli, su un altro sono disegnate due colombe e sul terzo un coniglio e una colomba.

Davide, con gli occi bendati, chiede ad uno spettatore di introdurre in uno scatolone due conigli, in un altro due colombe e, infine, nell'ultimo scatolone un coniglio e una colomba in modo che il contenuto di ogni scatolone non corrisponda alla figura esterna.

Davide dichiara, quindi, che gli basta levare un animale da uno solo dei tre scatoloni per scoprire il contenuto di ogni scatolone.

Si spieghi il ragionamento del prestigiatore

★★★

David el mago sale a escena y presenta al público tres cajones gruesos.

Sobre il primero ha dibujado dos conejitos, sobre el segundo dos palomas, y sobre el tercero un conejito y una paloma.

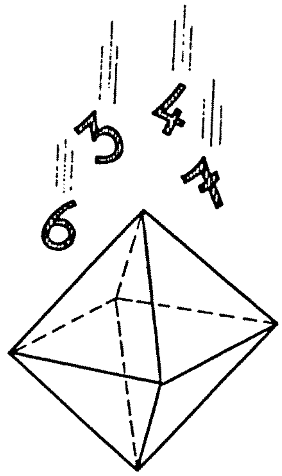
Vendatos los ojos, David le pide a un espectador que ponga dos conejitos en un cajón, dos palomas en otro y por fin un conejito y una paloma en el último cajon, de tal manera que lo que contiene cada cajón no corresponda con el dibujo.

Entonces David declara que no le hace falta sacar más de un animal de un solo cajón para saber lo que contiene cada cajón.

Explicad su razonamiento.

Aufgabe 2
5 Punkte

Gebastelt



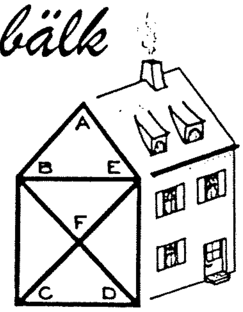
Das regelmäßige Oktaeder ist einer der fünf platonischen Körper.

Stelle das Modell eines regelmäßigen Oktaeders her.

Nummeriere seine Seitenflächen mit den Zahlen von 1 bis 8 so, dass die Summe von jeweils vier Flächen mit gemeinsamer Spitze stets 18 ergibt.

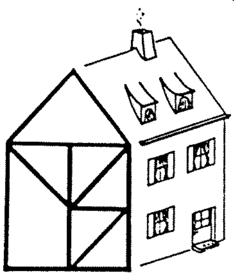
Aufgabe 3
10 Punkte

Gebälk



Anne versucht die Balken der abgebildeten Hausfassade in einem Zug nachzuzeichnen, ohne eine Strecke zweimal zu durchfahren. Dies fällt ihr ziemlich leicht.

Nachdem sie die Linien gezählt hat, die von jedem Punkt ausgehen, versteht sie, dass es nur zwei Punkte gibt, bei welchen der Zug beginnen oder enden kann.



Versuche Annes Regel herauszufinden und zeige damit, dass man auch die Balken der zweiten Hausfassade in einem Zug nachzeichnen kann.

Gib sämtliche Etappen dieses Streckenzuges an.

Aufgabe 4
5 Punkte

Gerecht

Nicolas Chuquet schrieb 1484 das erste Algebrabuch in französischer Sprache.

In einer Aufgabe des Buches sollen 21 Weinfässer unter drei Personen verteilt werden. Sieben der Fässer sind voll, weitere sieben halbvoll und die restlichen leer.

Jede der drei Personen soll die gleiche Anzahl von Fässern und die gleiche Menge Wein erhalten, ohne daß eines der Fässer geöffnet werden muß.

Gib eine mögliche Verteilung an.

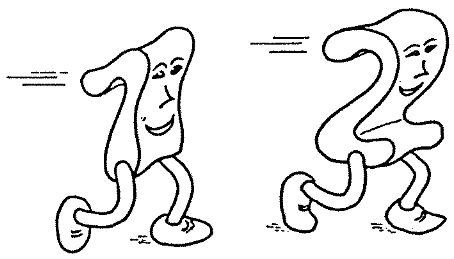
Aufgabe 5
10 Punkte

Gewonnen

Tim und Helen spielen das Zwanzigerspiel. Tim beginnt, indem er die Zahl 1 oder die Zahl 2 auf ein Blatt schreibt. Helen addiert 1 oder 2 hinzu und schreibt die Summe unter Tims Zahl. Nun ist Tim wieder an der Reihe und addiert zur Zahl von Helen 1 oder 2. Wer zuerst die Zahl 20 erreicht hat gewonnen.

Tim behauptet, dass derjenige der anfängt, stets gewinnen kann.

Erläutere Tims Strategie.

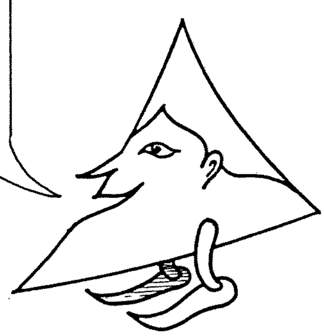


Aufgabe 6
5 Punkte

Gezeichnet

Ich bin ein Dreieck.
Einer meiner Winkel mißt 50°, ein anderer 30°. Mein Umfang beträgt 15 cm.

Zeichne mich so genau wie möglich.



Aufgabe 7 10 Punkte

Gefaltet

„Wenn ich einen Stein werfe, welche Bahn beschreibt dann dieser Stein“, fragte ein Schüler seinen Lehrer.

„Die Flugbahn ist eine Parabel, und es gibt eine recht einfache Möglichkeit, den Umriß dieser Kurve zu erhalten. Pass’ auf:

Nimm ein Blatt Papier. Den unteren Rand bezeichnen wir mit AB. Lege auf der Mittelsenkrechten von AB einen Punkt F fest, der 4 cm vom unteren Rand entfernt ist. Markiere nun auf AB einen beliebigen Punkt M und falte das Blatt so, dass M auf F zu liegen kommt. Achte darauf, daß die Faltlinie nach dem Auffalten gut sichtbar bleibt.

Führe nun mehrere Faltungen durch, wobei du die Lage von M auf AB jedesmal veränderst. Wenn du oft genug faltest, wirst du sehen, dass die Faltlinien eine Parabel einhüllen.“

Dem Jungen war’s genug, doch der Lehrer fügte hinzu: „Ein guter Schüler gibt sich damit nicht zufrieden, sondern versucht die Faltlinien mit Zirkel und Lineal zu konstruieren!“

Falte das Antwortblatt nach den Anweisungen des Lehrers und zeichne die Parabel. Beschreibe dann, wie sich die Faltlinien mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

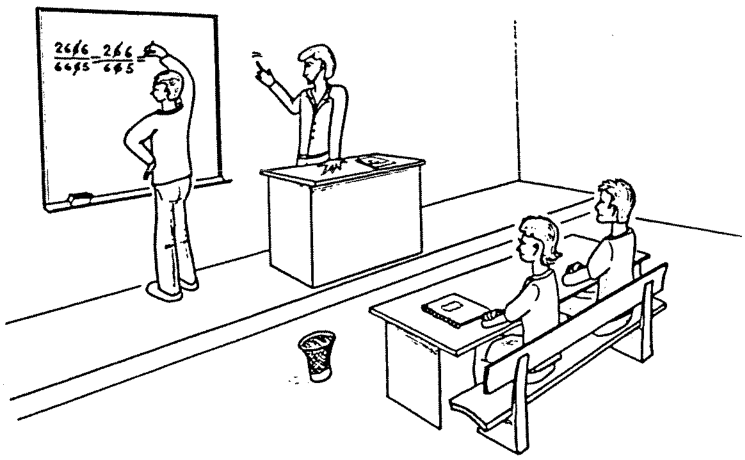
Aufgabe 8 5 Punkte

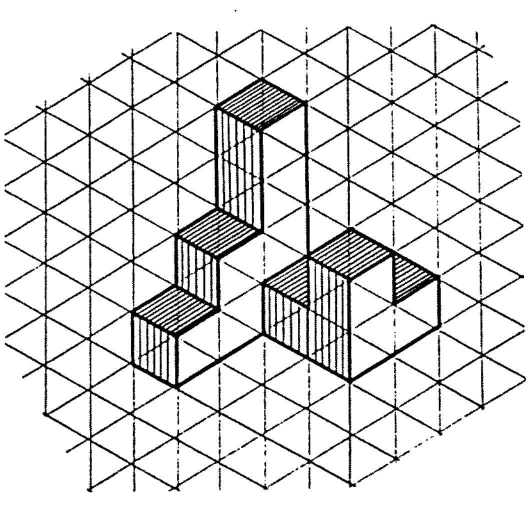
Gekürzt

Tim soll an der Tafel den Bruch $\frac{2666}{6665}$ kürzen. Er streicht in Zähler und Nenner jeweils eine Sechs und erhält so nacheinander die Brüche $\frac{266}{665}$, $\frac{26}{65}$ und $\frac{2}{5}$.

„Eine höchst eigentümliche Methode“, meint sein Lehrer, der zur großen Überraschung von Tims Mitschülern keinen Wutanfall bekommt, „aber die Brüche haben in der Tat alle den gleichen Wert.“

Bestimme einen Bruch der Form $\frac{abbb}{bbbc}$, welcher den Wert $\frac{1}{2}$ hat und sich nach Tims Methode vereinfachen läßt.

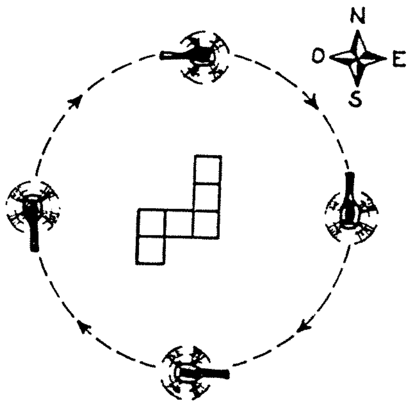




Aufgabe 9 10 Punkte

Geflogen

Ein Hubschrauber umkreist einen Gebäudekomplex, um Luftaufnahmen zu machen.



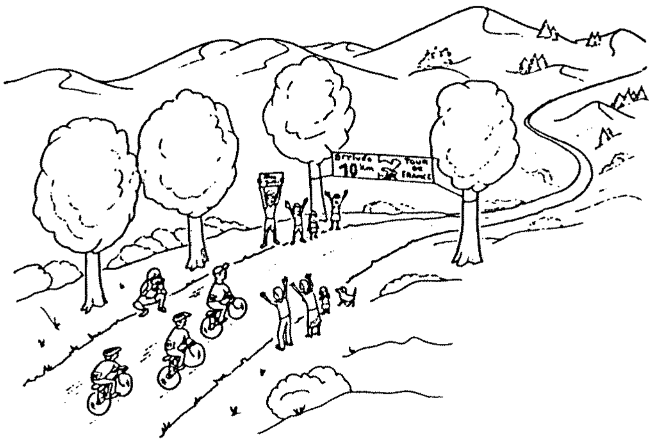
von oben

Der Baukörper besteht aus elf Würfeln. Das Schrägbild zeigt das Bauwerk aus nordwestlicher Richtung.

Zeichne in gleicher Weise ein Schrägbild, bei dem das Bauwerk aus südöstlicher Richtung zu sehen ist.

Aufgabe 10
15 Punkte

Geschlagen



Ein Etappenziel der Tour de France ist der Gipfel des Ballon d'Alsace. Jules liegt nicht schlecht im Rennen. Die Streckenmarke 10 km vor dem Ziel durchfährt er vier Minuten vor Richard.

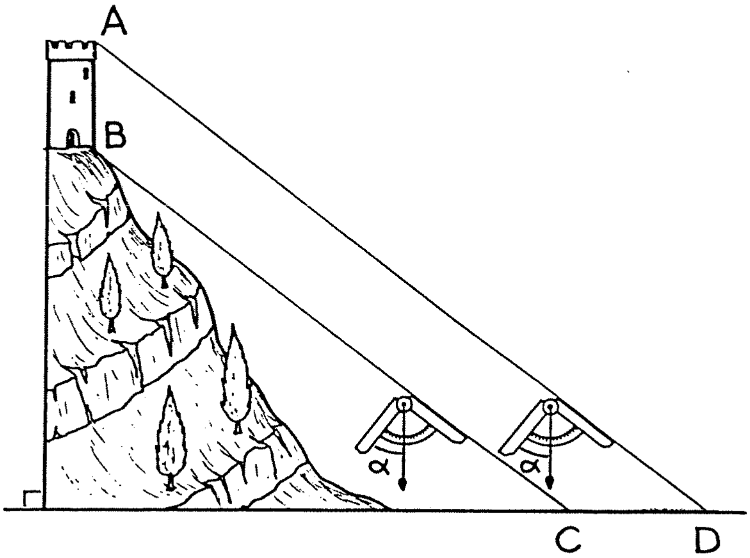
Eine halbe Stunde später hat sich das Blatt gewendet und Jules überquert die Ziellinie sechs Minuten nach Richard.

Nimm an, dass beide Fahrer mit konstanter Geschwindigkeit gefahren sind. Wie weit war Jules vom Ziel entfernt, als ihn Richard überholt hat?

Aufgabe 11, 12 und 13 nur für Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Gemessen



Mit Hilfe eines sogenannten *Proportionalzirkels* konnte Galilei Längen berechnen, welche der direkten Messung nicht zugänglich waren.

Wie man auf der Zeichnung aus Galileis Nachlaß sehen kann, bilden die Schenkel des aufgeklappten Proportionalzirkels einen rechten Winkel. Ein Lotfaden ermöglicht es, auf einer Skala die Weite des Winkels α abzulesen.

Erkläre, wie Galilei mit Hilfe der Entfernung CD und α die Höhe AB des Turmes bestimmen konnte.

Aufgabe 12
10 Punkte

Geklebt

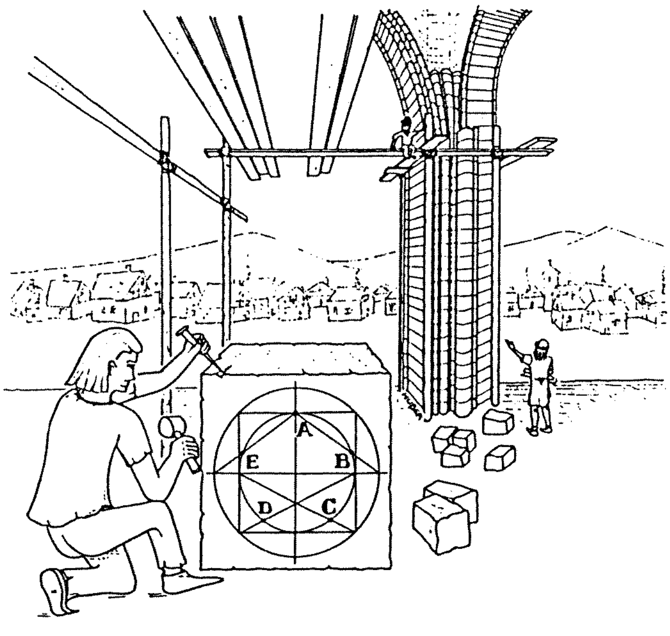
Bei der Preisverleihung von *Mathematik ohne Grenzen* hat Gaëtan fleißig fotografiert und will seine Bilder nun ausstellen.

Er hat dreißig hochformatige und dreißig querformatige Bilder, von denen er möglichst viele auf einer quadratischen Tafel mit 75 cm Seitenlänge unterbringen möchte. Alle Bilder haben das Format 9×13 cm.

Gib an, wie viele Bilder er höchstens ausstellen kann. Zeichne auf das Antwortblatt eine mögliche Anordnung der Bilder im Maßstab 1:5.

Aufgabe 13
15 Punkte

Genau?



Um ein regelmäßiges Fünfeck zu erhalten, benutzten die Bauleute des Mittelalters die folgende Konstruktion:

Man zeichnet ein Quadrat mit seinen Mittelsenkrechten, seinem Inkreis und seinem Umkreis. Die fünf Eckpunkte A, B, C, D und E liegen auf dem Inkreis. Man konstruiert diese Punkte so, wie es auf der Zeichnung zu sehen ist.

Sind diese fünf Eckpunkte in gleichen Abständen auf dem Inkreis verteilt?

Begründe die Antwort.

Lösungshinweise zum Probewettbewerb

Aufgabe 1 *Gezaubert*

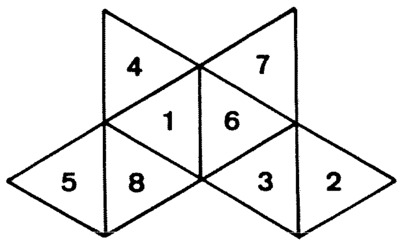
David muß der Kiste, auf der zwei verschiedene Tiere aufgemalt sind, ein Tier entnehmen.

Ist es ein Kaninchen, so muß die Kiste zwei Kaninchen enthalten, weil sonst das Bild mit dem Inhalt übereinstimmt. Aus dem gleichen Grund muß die Kiste, auf welcher zwei Tauben aufgemalt sind, eine Taube und ein Kaninchen enthalten. Die beiden Tauben sind dann in der Kiste, auf welcher zwei Kaninchen aufgemalt sind.

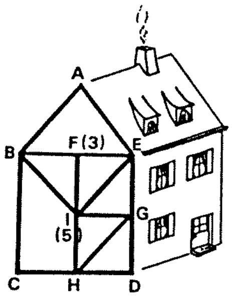
Ist das entnommene Tier eine Taube, so sind in dieser Kiste zwei Tauben. Die beiden Kaninchen befinden sich in der Kiste mit den aufgemalten Tauben während die letzte Kiste ein Kaninchen und eine Taube enthält.

Aufgabe 2 *Gebastelt*

Es gibt mehrere Lösungen. Punkte können sowohl für die Herstellung des Modells als auch für die Nummerierung der Flächen vergeben werden.



Aufgabe 3 *Gebälk*



Der Eckengrad eines Punktes sei die Anzahl der Kanten, welche von diesem Punkt ausgehen. Die Figur enthait zwei Punkte mit ungeradem Eckengrad. Der Streckenzug muß in einem dieser Punkte beginnen und im anderen enden.

Aufgabe 4 *Gerecht*

Es gibt zwei Lösungen :

a) Einer erhält ein volles, fünf halbvolle und ein leeres Fass. Die beiden anderen erhalten jeweils drei volle, ein halbvolles und drei leere Fässer.

b) Einer erhält drei volle, ein halbvolles und drei leere Fässer. Die beiden anderen erhälten jeweils zwei volle, drei halbvolle und zwei leere Fässer.

Aufgabe 5 *Gewonnen*

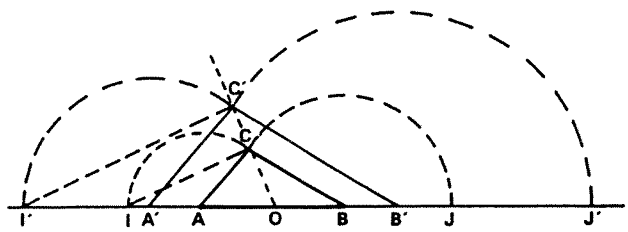
Der erste Spieler kann immer gewinnen. Gleichgültig, ob sein Gegner 1 oder 2 hinzufügt, immer kann er es so einrichten, dass seine Summe um 3 wächst. Er gewinnt mit der Zahlenfolge 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Aufgabe 6 *Gezeichnet*

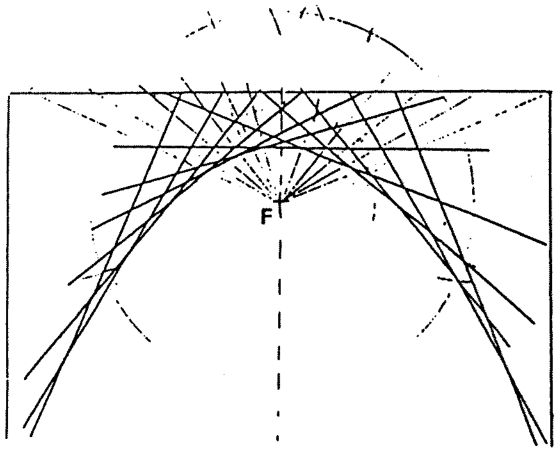
Verlangt ist eine möglichst genaue Näherungslösung (5 Punkte).

Konstruiert man exakt, so zeichnet man zunächst ein Dreieck mit $\alpha = 50°$, $\beta = 30°$ mit beliebigem Umfang. Durch zentrische Streckung läßt sich daraus ein Dreieck mit dem gesuchten Umfang konstruieren (siehe Abb.).

Dabei ist $\overline{AI} = \overline{AC}$ und $\overline{BJ} = \overline{BC}$. Das Streckzentrum O ist Mittelpunkt der Strecke IJ.



Aufgabe 7 *Gefaltet*

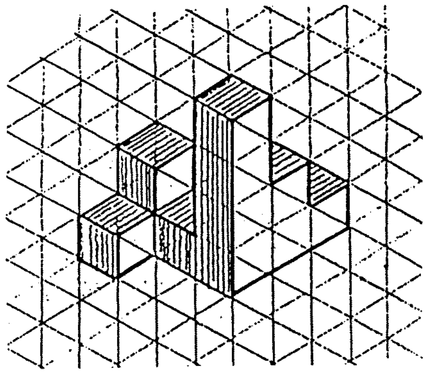


Die Faltlinien, welche die Parabel einhüllen, sind jeweils die Mittelsenkrechten der Strecken FM_i.

Aufgabe 8 *Gekürzt*

$$\frac{4999}{9998}=\frac{499}{998}=\frac{49}{98}=\frac{4}{8}\left(=\frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 9 *Geflogen*

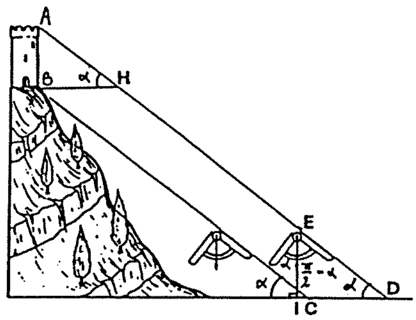


Man beachte, dass das Gitter aus gleichschenkligen Dreiecken besteht.

Aufgabe 10 *Geschlagen*

Für die letzten 10 km benötigt Jules 30 Minuten. Da Richard die 10-km-Marke vier Minuten später durchfährt, aber trotzdem 6 Minuten eher im Ziel ist, benötigt er für das letzte Stück nur 20 Minuten, also 10 Minuten weniger als Jules.

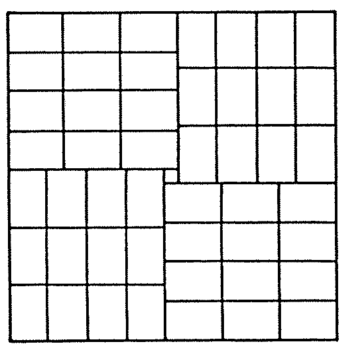
Da sich beide gleichförmig bewegen, holt Richard mit jedem Kilometer eine Minute auf. Er erreicht Jules also 4 km hinter der 10-km-Marke bzw. 6 km vor dem Ziel.



Aufgabe 11 *Gemessen*

Es gilt $\overline{AB}=\overline{BH}.\tan\alpha$ und $\overline{BH}=\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}.\tan\alpha$

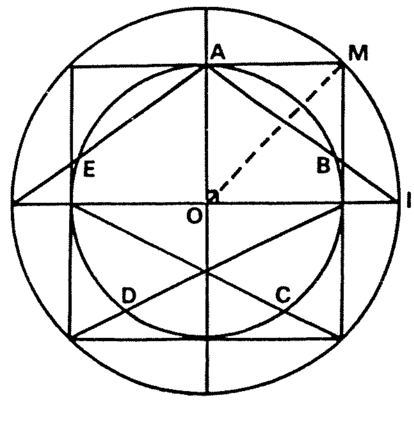
Aufgabe 12 *Geklebt*



Der Flächeninhalt eines Photos beträgt 117 cm^2, der Flächeninhalt der Tafel 5625 cm^2. Damit lassen sich maximal 48 Photos unterbringen.

Darüber hinaus ist $75 = 3.13 + 4.9$. Es ergibt sich die abgebildete Anordnung.

Aufgabe 13 *Genau ?*



Sei $\overline{OA}=1$. Dann gilt $\overline{OM}=\sqrt{2}$ und $\overline{OI}=\tan\alpha$.
Wegen $\overline{OM}=\overline{OI}$ ergibt sich $\tan\alpha=\sqrt{2}$ und damit $\alpha=54{,}73°$. Das Dreieck OBA ist gleichschenklig. Daraus erhält man $\angle BOA = 70{,}54°$. Bei einem regelmäßigen Fünfeck beträgt dieser Winkel jedoch 72°.

PROVA D'ALLENAMENTO 1998 (5-6 febbraio 1998)

- *Solo le risoluzioni degli esercizi 2, 3, 4, 6, 8, 9 e 12 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata.*
- *La cura sarà apprezzata.*
- *Ogni soluzione deve essere riportata su fogli-risposta separati.*

Ezercizio n.1 (punti 10)
Rivelatore di bugie
con risposta da redigere nella lingua scelta

David le magicien entre en scène et présente au public trois grosses boîtes.

Sur l'une sont dessinés deux lapins, sur une autre sont dessinées deux colombes et sur la troisième un lapin et une colombe.

Les yeux bandés, David demande à un spectateur de placer deux lapins dans une boîte, deux colombes dans une autre et enfin un lapin et une colombe dans la dernière boîte de façon à ce que le contenu de chaque boîte ne corresponde pas à son dessin.

David déclare alors qu'il lui suffit de sortir un seul animal d'une seule des trois boîtes pour trouver le contenu de chaque boîte.

Expliquer son raisonnement.

★★★

David el mago sale a escena y presenta al público tres cajones gruesos.

Sobre el primero ha dibujado dos conejitos, sobre el segundo dos palomas, y sobre el tercero un conejito y una paloma.

Vendados los ojos, David le pide a un espectador que ponga dos conejitos en un cajón, dos palomas en otro y por fin un conejito y una paloma en el último cajón, de tal manera que lo que contiene cada cajón no corresponda con el dibujo.

Entonces David declara que no le hace falta sacar más de un animal de un solo cajón para saber lo que contiene cada cajón.

Explicad su razonamiento.

★★★

David the magician is going on stage and is showing the audience tree big boxes.

There are two rabbits drawn on one of the three boxes, two doves on another one and a rabbit and a dove on the last one.

Blindfolded David asks one of the members of the audience to put two rabbits into one box, two doves into another box and finally a rabbit and a dove into the last box so that the content of each box does not correspond to the drawing on it.

Then David announces that taking a single animal out of only one of the three boxes is enough for him to find out the content of each box.

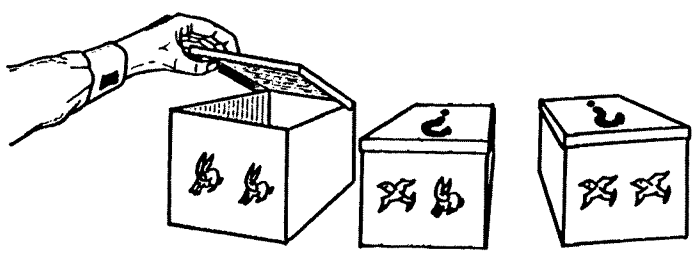
Explain his reasoning.

David, der Zauberer betritt die Bühne und zeigt dem Publikum drei Kisten. Auf eine dieser Kisten sind zwei Kaninchen gemalt, auf eine andere zwei Tauben, auf die dritte eine Taube und ein Kaninchen.

Mit verbundenen Augen bittet David einen Zuschauer, in eine Kiste zwei Tauben, in eine andere zwei Kaninchen und in die letzte ein Kaninchen und eine Taube zu setzen. Dabei soll das Bild auf der Kiste in keinem Fall mit dem Inhalt übereinstimmen.

Nun behauptet David, daß es ihm genüge, nur eine der drei Kisten ein einziges Tier zu entnehmen, um den Inhalt aller Kisten herauszufinden.

Erkläre, was sich der Zauberer dazu überlegen muß.



Ezercizio n.2 (punti 5)

Platonico

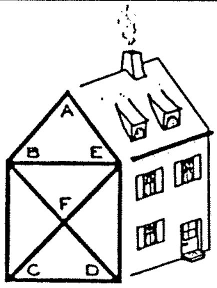
L'ottaedro regolare è uno dei cinque solidi di Platone.

Si costruisca un ottaedro regolare e si numerino le facce da 1 a 8 in modo che la somma dei numeri delle quattro facce attorno ad ogni vertice sia uguale a 18.

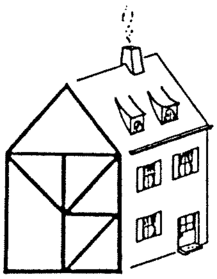
Ezercizio n.3 (punti 10)

Architettiamo un percorso

Anna cerca di disegnare le travi del fianco della sua casetta senza staccare la matita dal foglio e senza ripassare sulla stessa traccia.



Ci riesce abbastanza facilmente e dopo aver contato il numero dei segmenti tracciati da ognuno dei punti contrassegnati con la lettera sulla figura, capisce che ci sono solo due punti possibili per l'inizio o la fine del tracciato.



Rispettando le regole del gioco di Anna, si mostri che è possibile disegnare le travi del fianco della seconda casetta. Si forniscano le tappe del tracciato.

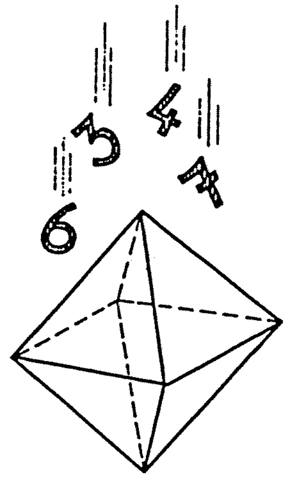
Ezercizio n.4 (punti 5)

In parti uguali

Nicola Chuquet scrisse nel 1484 il primo libro di algebra redatto in francese.

In un problema, chiede di suddividere tra tre persone 21 botti di vino di cui sette piene, sette vuote e sette mezze piene, in modo che ogni persona abbia lo stesso numero di botti e la stessa quantità di vino senza aprirne alcuna.

Si fornisca una possibile suddivisione.



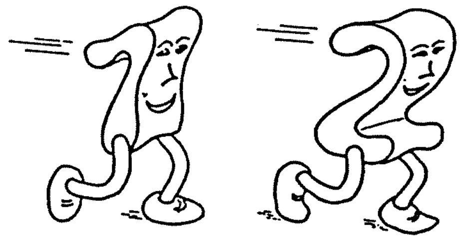
Ezercizio n.5 (punti 10)

Per primo a 20

Totò ed Elena giocano alla "corsa a 20". Totò comincia scrivendo a piacere 1 o 2, Elena aggiunge al numero di Totò 1 o 2 e scrive la somma ottenuta. Poi Totò aggiunge 1 o 2 all'ultimo numero scritto da Elena e così di seguito proseguono giocando a turno. Il primo che arriva a 20 ha vinto !

Totò afferma che vi è una strategia che permette di vincere a colpo sicuro a chi gioca per primo.

Si spieghi la strategia di Totò.



Ezercizio n.6 (punti 5)

Disegnami : sono un triangolo

Ezercizio n.7 (punti 10)

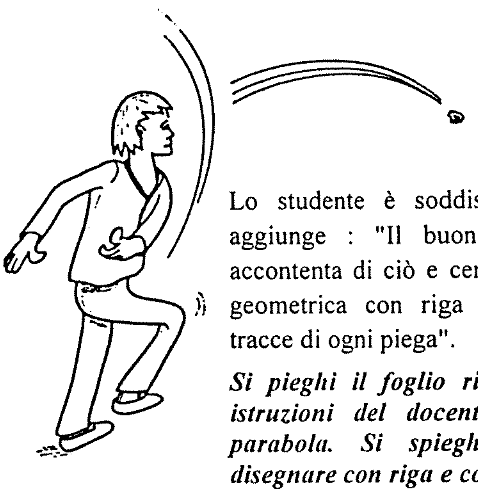
Piega e spiega

Appena il professore ha terminato la spiegazione uno studente gli domanda :

"Quale è la traiettoria descritta da un sasso che lancio davanti a me ?"

Il professore gli risponde : "Domanda intelligente. E' una parabola ed ecco un procedimento semplice per ottenerla ; fissa un punto F sull'asse principale di simmetria di un foglio a 4 cm dal bordo superiore AB. Scegli un punto M su AB e sovrapponi M a F, marca la piega e riapri il foglio, poi ricomincia spostando M su AB.

Dopo aver ottenuto un certo numero di pieghe, scoprirai che le tracce di queste pieghe inviluppano una parabola".



Lo studente è soddisfatto, ma il prof aggiunge : "Il buon studente non si accontenta di ciò e cerca una costruzione geometrica con riga e compasso delle tracce di ogni piega".

Si pieghi il foglio risposta secondo le istruzioni del docente e si tracci la parabola. Si spieghi, quindi, come disegnare con riga e compasso le pieghe.

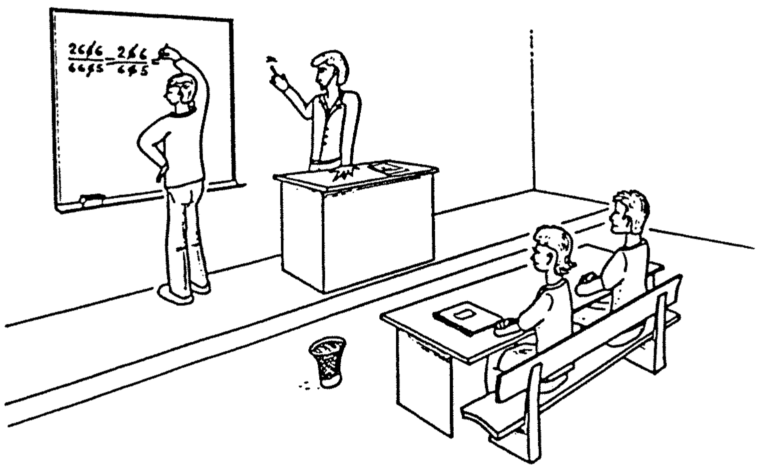
Ezercizio n.8 (punti 5)

Orrore !

Enrico è alla lavagna per semplificare la frazione $\frac{2666}{6665}$. "Facile", dice, "tolgo un 6 al numeratore e un 6 al denominatore, scrivo $\frac{266}{665}$, poi ricomincio. Ottengo $\frac{26}{65}$ e infine $\frac{2}{5}$ che è irriducibile".

Con grande stupore dei compagni Enrico non scatena le ire del suo professore che dice : "Tutte le frazioni che hai scritto sono uguali, ma che metodo strano !"

Si determini una frazione della forma $\frac{abbb}{bbbc}$, uguale a $\frac{1}{2}$ che si posa semplificare con la tecnica di Enrico.

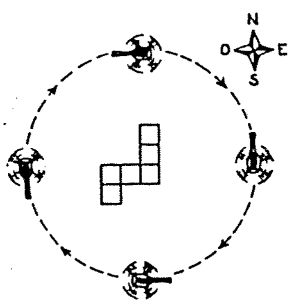


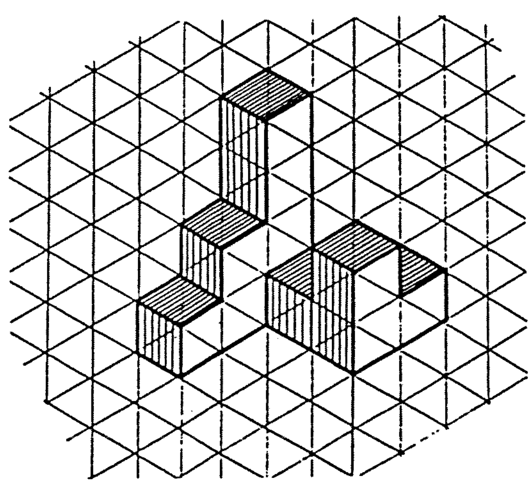
Ezercizio n.9 (punti 10)

Eli 3D

Un elicottero gira sopra un edificio per eseguire delle foto aeree. L'edificio è formato da undici cubi ; si può qui vedere una vista da Nord-Ovest.

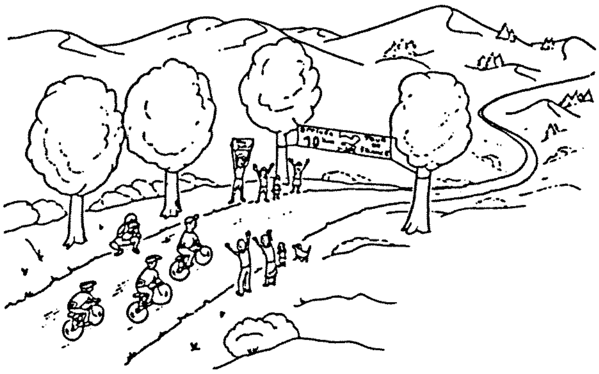
Con la stessa tecnica di rappresentazione si disegni la vista da Sud-Est.





Ezercizio n.10 (punti 15)

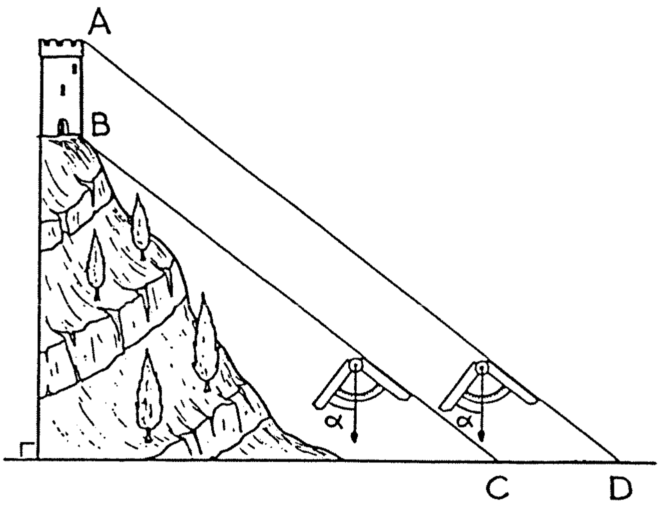
Problema di recupero



L'arrivo di una tappa del Giro di Francia è in cima al Balon d'Alsace. Giulio supera lo striscione "Traguardo a 10 km" quattro minuti prima di Riccardo.

Trenta minuti dopo, Giulio raggiunge il traguardo sei minuti dopo Riccardo.

Supponendo che in questo intervallo di tempo le velocità di Giulio e Riccardo siano costanti, a quale distanza dal traguardo Riccardo ha superato Giulio ?



Solo Classi 3°

Ezercizio n.11 (punti 5)

Galileo Galilei

Con il suo "compasso di proporzione", Galileo calcolava le lunghezze che non poteva misurare con gli strumenti classici.

Su questo schema ritrovato nei suoi archivi, il "compasso" forma un angolo retto e il suo filo a piombo permette di misurare l'angolo α.

Si spieghi come Galileo, dopo aver misurato la distanza CD, ha proceduto per calcolare l'altezza AB della torre.

Solo Classi 3°

Ezercizio n.12 (punti 10)

Spazio ben sfruttato

Gaetano espone delle foto della premiazione di Matematica senza Frontiere su un pannello quadrato di 75 cm di lato.

Ha a disposizione trenta foto da disporre in orizzontale e trenta in verticale, tutte del formato 9x13, e vuole esporne il maggior numero possibile.

Si rappresenti una possibile disposizione in scala 1/5 sul foglio risposta e si indichi il numero di foto appese.

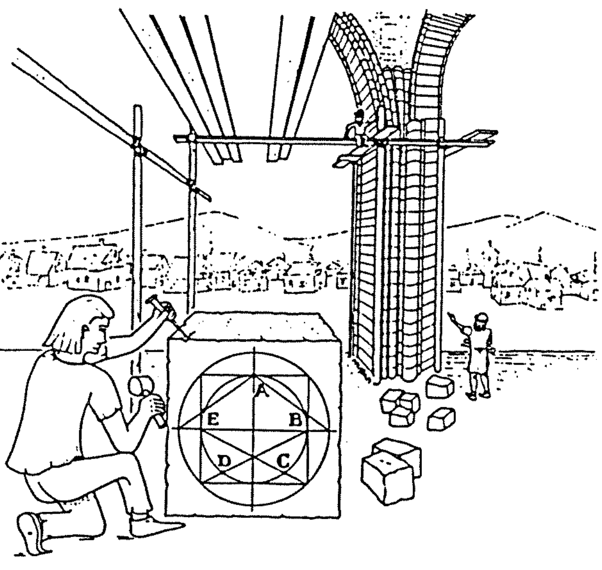
Solo Classi 3°

Ezercizio n.13 (punti 15)

Pietre maltagliate ?

Per ottenere un pentagono regolare, i costruttori del Medio Evo utilizzavano il seguente procedimento :
si tracciano un quadrato e le sue mediane, poi la circonferenza inscritta e quella circoscritta, infine i punti A, B, C, D, E sulla circonferenza inscritta come in figura.

I punti A, B, C, D, E sono ugualmente distanziati su questa circonferenza ?



Mathématiques sans frontières 1998

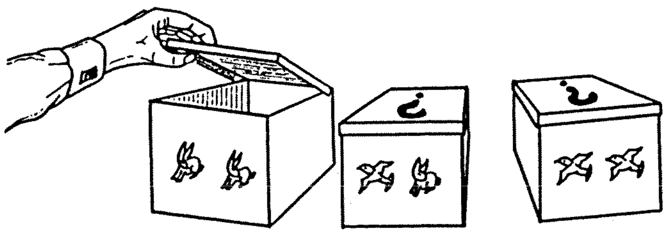
Mock competition - December 1997

- ☐ Questions 2, 3, 4, 6, 8, 9 and 12 do not require any explanation in the answer ; all of the others do.
- ☐ Careful work will be taken into account.
- ☐ Teams should submit one answer per question.
- ☐ The team name must be on every answer sheet.

QUESTION 1
10 POINTS

Abracadabra !

The answer to this exercise should be written in French, German, Italian or Spanish.



David le magicien entre en scène et présente au public trois grosses boîtes.

Sur l'une sont dessinés deux lapins, sur une autre sont dessinées deux colombes et sur la troisième un lapin et une colombe.

Les yeux bandés, David demande à un spectateur de placer deux lapins dans une boîte, deux colombes dans une autre et enfin un lapin et une colombe dans la dernière boîte de façon à ce que le contenu de chaque boîte ne corresponde pas à son dessin.

David déclare alors qu'il lui suffit de sortir un seul animal d'une seule des trois boîtes pour trouver le contenu de chaque boîte.

Expliquer son raisonnement.

★★★

David, der Zauberer betritt die Bühne und zeigt dem Publikum drei Kisten. Auf eine dieser Kisten sind zwei Kaninchen gemalt, auf eine andere zwei Tauben, auf die dritte eine Taube und ein Kaninchen.

Mit verbundenen Augen bittet David einen Zuschauer, in eine Kiste zwei Tauben, in eine andere zwei Kaninchen und in die letzte ein Kaninchen und eine Taube zu setzen. Dabei soll das Bild auf der Kiste in keinem Fall mit dem Inhalt übereinstimmen.

Nun behauptet David, daß es ihm genüge, nur eine der drei Kisten ein einziges Tier zu entnehmen, um den Inhalt aller Kisten herauszufinden.

Erkläre, was sich der Zauberer dazu überlegen muß.

David el mago sale a escena y presenta al público tres cajones gruesos.

Sobre el primero ha dibujado dos conejitos, sobre el segundo dos palomas, y sobre el tercero un conejito y una paloma.

Vendados los ojos, David le pide a un espectador que ponga dos conejitos en un cajón, dos palomas en otro y por fin un conejito y una paloma en el último cajón, de tal manera que lo que contiene cada cajón no corresponda con el dibujo.

Entonces David declara que no le hace falta sacar más de un animal de un solo cajón para saber lo que contiene cada cajón.

Explicad su razonamiento.

★★★

Il prestigiatore Davide entra in scena e presenta al pubblico tre scatoloni.

Su uno di questi sono raffigurati due conigli, su un altro sono disegnate due colombe e sul terzo un coniglio e una colomba.

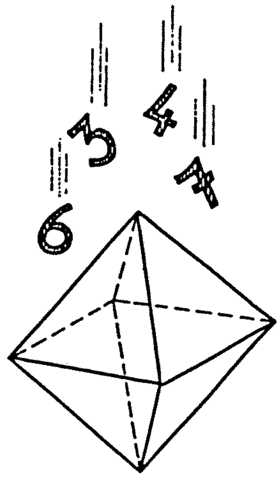
Davide, con gli occhi bendati, chiede ad uno spettatore di introdurre in uno scatolone due conigli, in un altro due colombe e, infine, nell'ultimo scatolone un coniglio e una colomba in modo che il contenuto di ogni scatolone non corrisponda alla figura esterna.

Davide dichiara, quindi, che gli basta levare un animale da uno solo dei tre scatoloni per scoprire il contenuto di ogni scatolone.

Si spieghi il ragionamento del prestigiatore

QUESTION 2
5 POINTS

Only Platonic



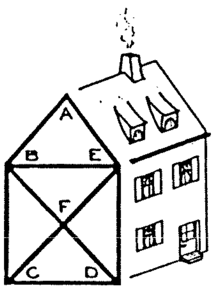
The regular octahedron is one of the 5 Platonic solids.

Make a regular octahedron.

Number its faces with the digits from 1 to 8 so that the sum of the numbers on the four faces round every vertex are equal to 18.

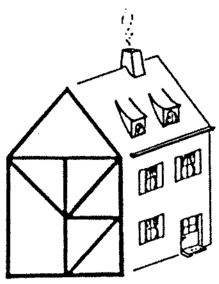
QUESTION 3
10 POINTS

Just a trace



Anne tries to trace the wooden beams of the gable end of her house without lifting her pencil off the paper and without going over a line that has already been drawn.

She quickly sees how to do it and, after counting the number of lines meeting at each named point, she realises that there are only 2 possible points for the start or finish of the tracing.



Keeping to Anne's rules show that it is possible to trace the beams of the gable of the house shown.

Show clearly the stages of the tracing.

QUESTION 4
5 POINTS

Fair shares

In 1484 Nicolas Chuquet wrote the first French algebra book.

In one problem he wanted to share 21 barrels of wine among 3 people : 7 barrels were full ; 7 were empty ; and 7 were half-full. Each person was to have the same number of barrels and the same amount of wine. None of the barrels was to be opened.

Show how this can be done.

QUESTION 5
10 POINTS

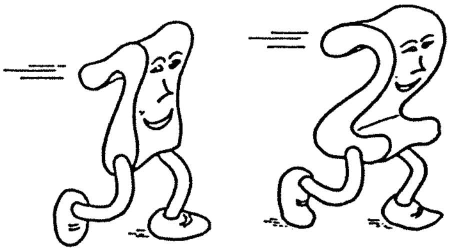
First to 20

Timothy and Helen play at "first to 20".

Timothy starts by writing down a 1 or a 2. Helen adds either a 1 or a 2 to Timothy's number and writes down the total. Then Timothy adds 1 or 2 to this figure writing down the new total. The game continues in the same way. The first to write down 20 wins.

Timothy claims he has found a strategy which ensures that the first player always wins.

Explain Timothy's strategy.

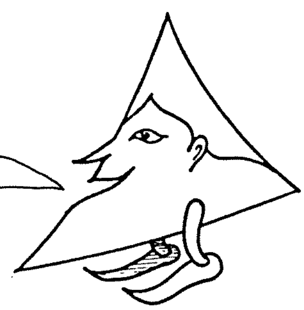


QUESTION 6
5 POINTS

Drawing

One of my angles is 50°, another 30° and my perimeter is 15 cm.

Draw me using as accurate a method as possible.



Tommy Triangle

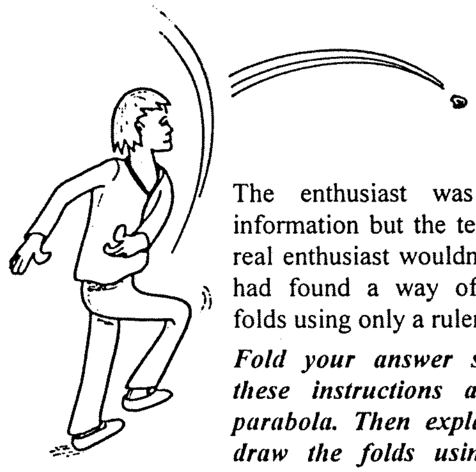
QUESTION 7
10 POINTS

Folding

When the teacher had finally stopped talking one of the enthusiastic pupils asked him : What curve is traced out by a stone thrown in the air ?

The teacher answered : Good question. It's a parabola and here's a simple method of drawing one.

Mark a point F on the long axis of symmetry of an A4 sheet of paper, 4 cm from the edge AB. Mark a point M on AB, place M on top of F and mark the fold. Start again changing the position of M on the edge AB. The folds are the envelope of a parabola and when you have made enough folds it is easily seen.



The enthusiast was stunned by this information but the teacher continued : A real enthusiast wouldn't be happy until he had found a way of constructing these folds using only a ruler and compasses.

Fold your answer sheet according to these instructions and trace out the parabola. Then explain how you could draw the folds using only ruler and compasses.

QUESTION 8
5 POINTS

Scandal

Timothy has to simplify the fraction $\frac{2666}{6665}$ on the blackboard.

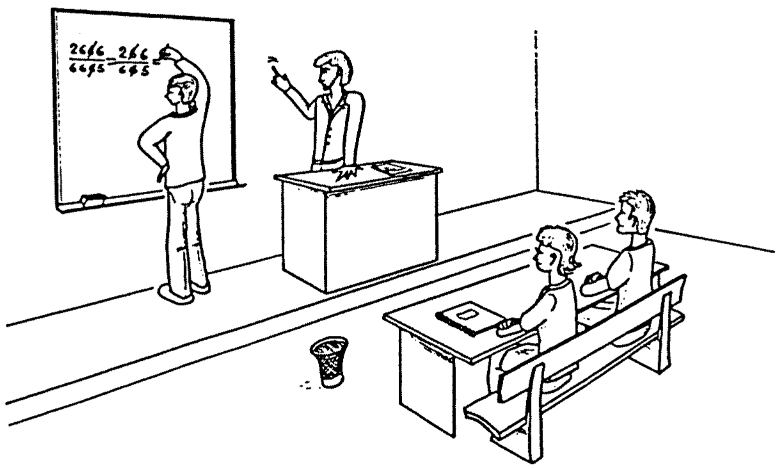
"Easy" he says. "I can take a 6 from the numerator and a 6 from the denominator. I can write down $\frac{266}{665}$ and start again.

That gives me $\frac{26}{65}$ and then $\frac{2}{5}$ which doesn't cancel."

The class were amazed that the teacher didn't go ballistic.

"All the fractions you've written are indeed equal but it's a peculiar method" he said calmly.

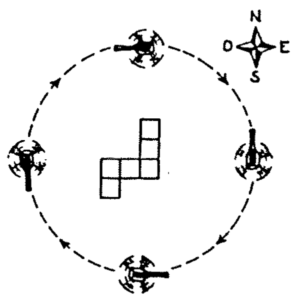
Find a fraction of the form $\frac{abbb}{bbbc}$ which is equal to $\frac{1}{2}$ and which simplifies using Timothy's method.

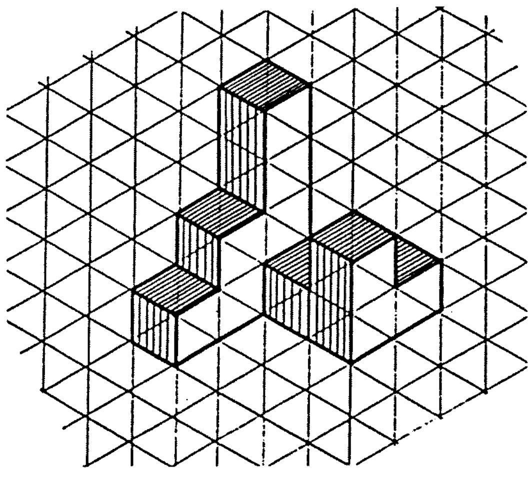


QUESTION 9
10 POINTS

From the air

A helicopter circles a building in order to take aerial photos. The building is made up of 11 cubes.



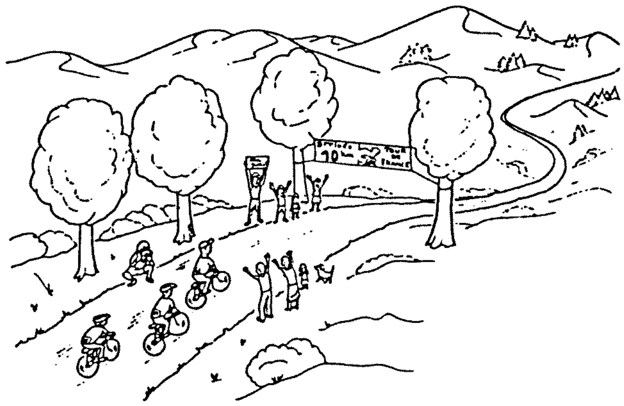


Here is a view from the north-west.

Draw a similar sketch of the view from the south-east.

QUESTION 10
15 POINTS

Catch up



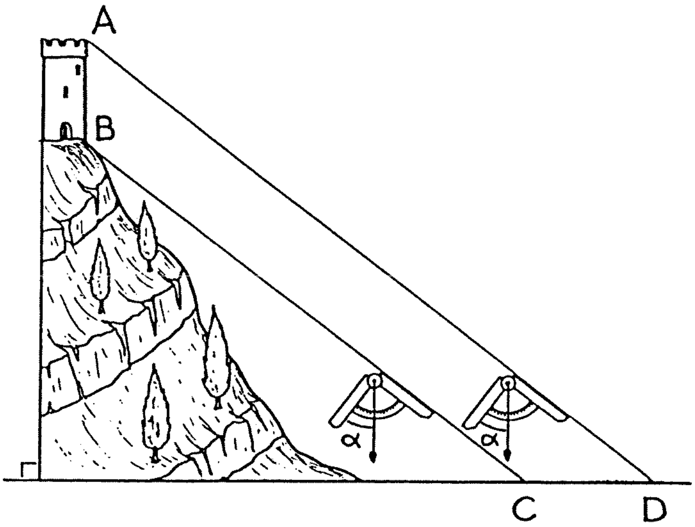
One stage of the Tour de France has its finish on the top of the Ballon d'Alsace.

Jules passes the "10 km to the Finish" marker 4 minutes before fellow competitor Richard.

30 minutes later Jules crosses the finishing line 6 minutes after Richard.

Between these two times Jules and Richard maintain a constant speed.

At what distance from the finish did Richard pass Jules ?



QUESTION 11
5 POINTS

Galileo

FIFTH YEAR AND YEAR 12 ONLY

Using his "proportional compass" Galileo was able to calculate lengths that he couldn't measure using other means.

In this diagram found in his archives, the "compass" makes a right angle and the plumb line allows the angle α to be measured.

Explain how Galileo, after measuring the distance CD, was able to calculate AB, the height of the tower.

QUESTION 12
10 POINTS

Full exposure

FIFTH YEAR AND YEAR 12 ONLY

John displays the photos of the prize-giving ceremony of Mathématiques sans Frontières on a square board of side 75 cm.

He has 30 photos that should be laid horizontally and 30 that are to be laid vertically. They are all sized at 9x13 cm. He wants to display as many as he can.

Draw a possible arrangement with a scale of 1/5 showing the number of photos used.

QUESTION 13
15 POINTS

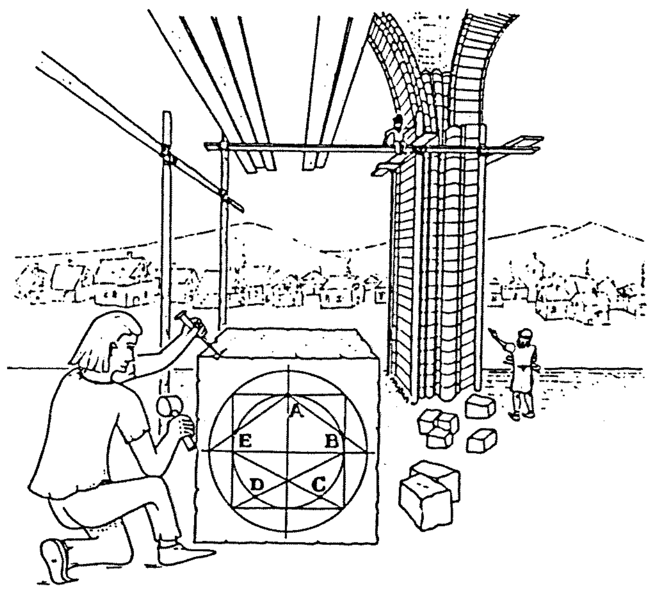
Close up

FIFTH YEAR AND YEAR 12 ONLY

To try to make a regular pentagon the medieval cathedral builders used this construction :

Draw a square and two axes of symmetry. Then draw the circle inside the square and the circle outside the square as shown. Finally mark the points on the circle A, B, C, D and E.

Are the points A, B, C, D and E evenly spaced on the circle ?



ACADÉMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Mathématiques sans frontières

Epreuve du 12 mars 1998

- Les exercices n° 2, 4, 5, 8 et 9 ne nécessitent aucune justification.
- Le soin sera pris en compte
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice

exercice n° 1
10 points

Pair et gagne !

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.

"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot. "Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."

Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot :
"Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda.
Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."

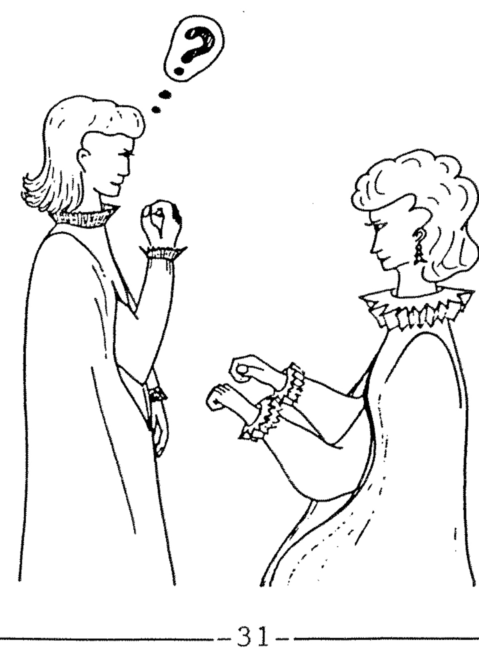
Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.

In order to find which hand the even number of coins is in, Nicolas Chuquet says :

"Multiply the number of coins of the right hand by two, add it to the number of coins of the left hand and give me the result."

Explain Nicolas Chuquet's method.



Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari.

Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma :

"Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi il numero delle monete contenute nella mano sinistra e ditemi il risultato."

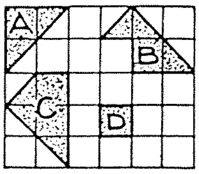
Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

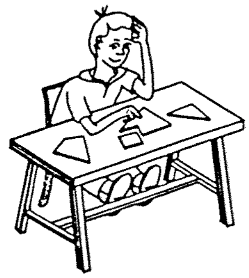
exercice n° 2 5 points

Aux carrés

Etienne découpe les quatre pièces A, B, C, D du puzzle ci-dessous.
Avec les trois pièces A, B, C il forme un carré.
Soudain il s'exclame : " Mais on peut former un autre carré avec toutes les pièces du puzzle."

Dessiner les deux carrés ainsi formés avec le détail de leur composition.



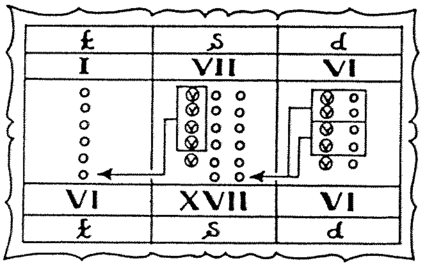


exercice n° 4 5 points

L'abaque de Sylvestre

Voici un abaque de multiplication utilisé au dixième siècle par Gerbert d'Aurillac, qui devint pape sous le nom de Sylvestre II. Il représente la multiplication de I livre VII sols VI deniers par V.
Une livre (£) valait vingt sols (ş) et un sol valait douze deniers (*d*).

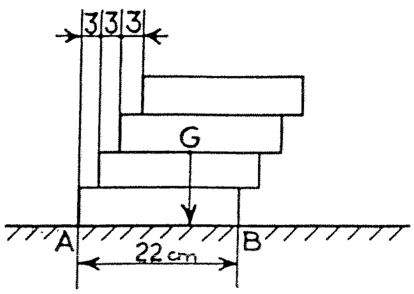
Sur le même principe, construire l'abaque de la multiplication de VII livres VII sols VII deniers par VIII.



exercice n° 6 5 points

Pour une brique de plus

Sur un sol horizontal, Thierry empile et colle des briques parallélépipédiques toutes identiques de longueur 22 cm avec un décalage constant de 3 cm dans le sens de la longueur.
Cet empilement ne tombe pas tant que le centre de symétrie G de la figure obtenue se projette orthogonalement sur le sol en un point situé entre A et B.



Quel est le nombre maximum de briques que Thierry peut ainsi empiler ? Justifier la réponse.

exercice n° 3 10 points

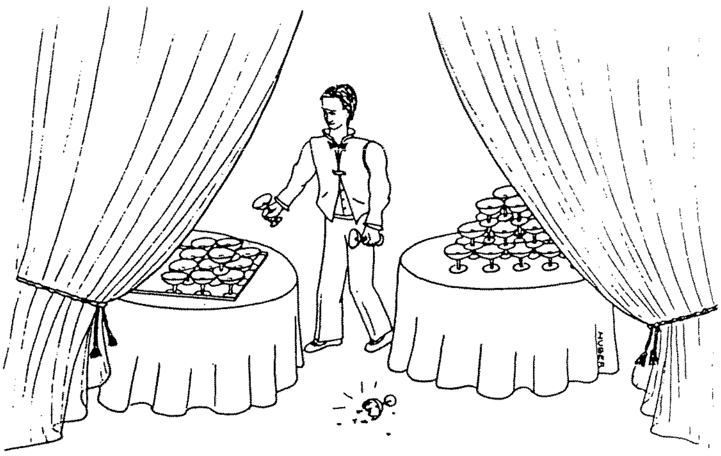
La coupe est pleine

Pour fêter son anniversaire, Lucas érige une pyramide de coupes. Il versera du champagne dans la coupe sommitale qui, en débordant, remplira toutes les coupes de la pyramide.

Il réalise une pyramide dont la base est un triangle équilatéral. Chaque coupe repose sur les bords deux à deux tangents de trois coupes de l'étage inférieur. Malencontreusement, il casse la coupe sommitale.

En disposant toutes les coupes restantes comme sur le dessin, il réussit à construire une pyramide à base carrée avec un étage de moins que la pyramide précédente.

Combien de coupes avait-il au début ?
Justifier la réponse.

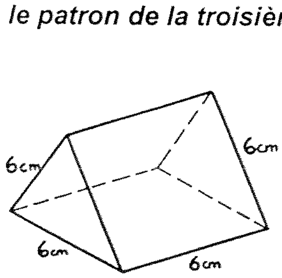


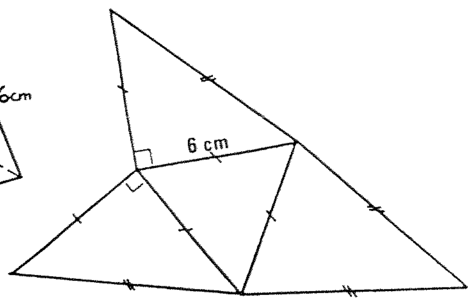
exercice n° 5 10 points

La pyramide cachée

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du volume d'un prisme de même base et de même hauteur.
Pour vérifier expérimentalement cette propriété, on considère un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces latérales sont des carrés. Toutes les arêtes mesurent 6 cm. Ce prisme se décompose en trois pyramides de volume égal.
Voici le dessin en perspective d'un tel prisme et le patron de deux des trois pyramides.

Sur la feuille-réponse, dessiner en vraie grandeur le patron de la troisième pyramide.



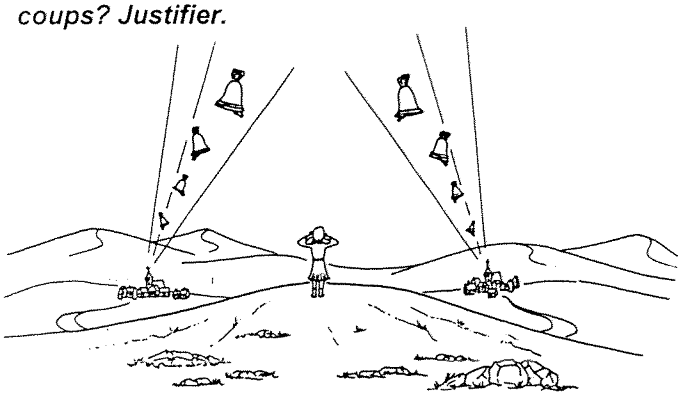


exercice n°7 10 points

Résonnement

Marie se promène à la campagne. Elle est à la même distance des clochers de deux villages lorsque les deux cloches sonnent en même temps le premier coup de la même heure.
L'une des horloges égrène les coups toutes les quatre secondes et l'autre toutes les cinq secondes.
Marie ne distingue deux coups que s'ils interviennent à plus d'une seconde d'écart.

Quelle heure est-il si Marie distingue au total treize coups? Justifier.



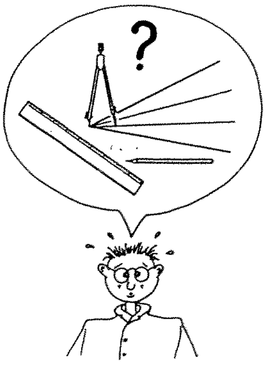
exercice n°9 10 points

Conchoïde de Nicomède

La trisection d'un angle consiste à le partager en trois angles égaux. Ce problème posé par les Grecs de l'Antiquité ne peut être résolu en général à la règle et au compas seuls. Mais Nicomède, vers 150 ans av. JC a trouvé une solution géométrique qui utilise une courbe appelée conchoïde, dont voici le programme de construction :

a) Tracer la grande médiane de la feuille réponse. Nommer cette droite *d*.
b) Sur la petite médiane, placer le point A à 2 cm à gauche de *d*.
c) Choisir un point P sur *d*, placer, si possible, les deux points M et M' de la droite (AP) qui sont situés à 6 cm de P.
M et M' sont alors deux points de la conchoïde.
d) Répéter l'étape c) en changeant la position de P sur *d*.

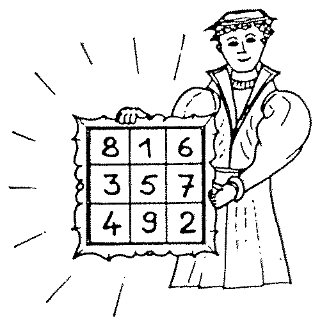
Construire point par point les deux parties aussi longues que possible de cette courbe.



exercice n°8 5 points

A sommer

Voici un carré magique : la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales est la même.



Placer ces neuf nombres dans un carré de façon à ce que les huit sommes précédentes, que l'on écrira, soient toutes différentes.

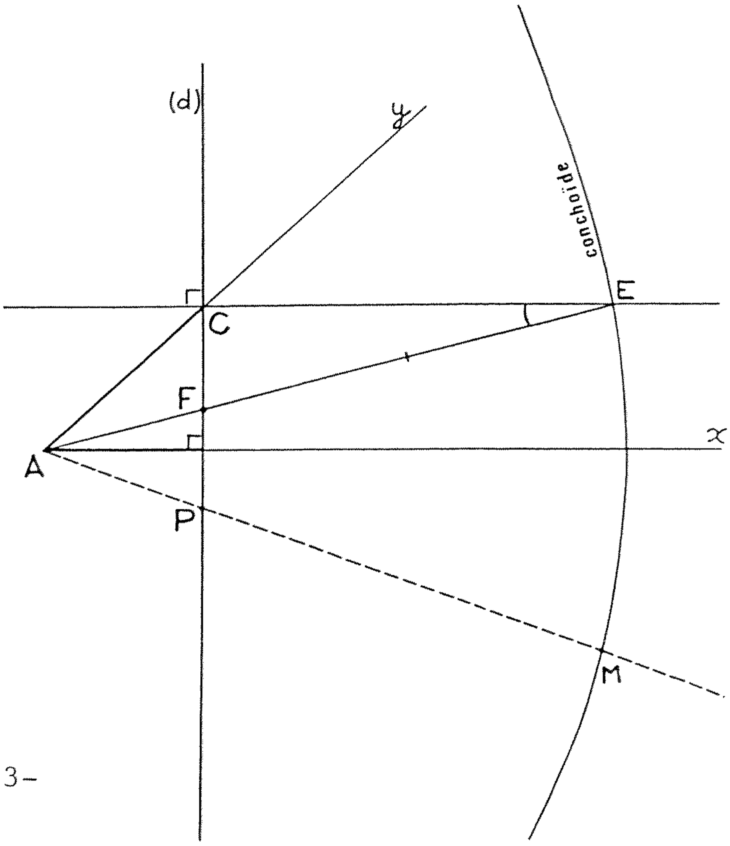
exercice n°10 15 points

Trisection d'un angle

Nicomède découvrit une construction permettant de partager un angle en trois angles égaux.

Voici son procédé : on veut faire la trisection de l'angle $\widehat{xAy}$ de la figure ci-dessous.
Pour cela on a placé un point C sur le côté [Ay), on a construit la droite (d) passant par C et perpendiculaire au côté [Ax) puis la courbe conchoïde ainsi définie: pour tout point P de (d), la demi-droite [AP) coupe la courbe en M tel que PM = 2AC.
La droite passant par C et perpendiculaire à d coupe la courbe en E.

Démontrer que l'angle $\widehat{xAE}$ est le tiers de l'angle $\widehat{xAy}$. Il est inutile de construire la conchoïde



Spécial Seconde

exercice n° 11 5 points

A vos masques

Pierre, Paul et Jean préparent le carnaval. Ils disposent de trois déguisements, un pour chacun : clown, pirate et fantôme.
Paul dit : "Si Jean se déguise en clown, alors je me mets en pirate.
Mais si Jean se déguise en pirate alors je m'habille en fantôme."
Pierre intervient alors :
"Si Paul ne se déguise pas en clown, alors c'est moi le pirate."

Quel est le déguisement de chacun? Expliquer.

exercice n° 12 10 points

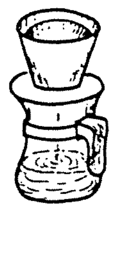
Vendanges tardives

Germain fait vendanger deux parcelles dont l'une a une aire double de l'autre.
Le premier jour, toute l'équipe des vendangeurs travaille sur la grande parcelle.
Pour le deuxième jour, l'équipe se scinde en deux groupes égaux. Un des groupes reste dans la grande parcelle tandis que l'autre entame la petite.
A la fin de ces deux jours, la grande parcelle est entièrement terminée, mais non la petite qui occupe deux des vendangeurs pendant toute la troisième journée.
On suppose que les vendangeurs travaillent au même rythme et que les durées des journées de travail sont égales.

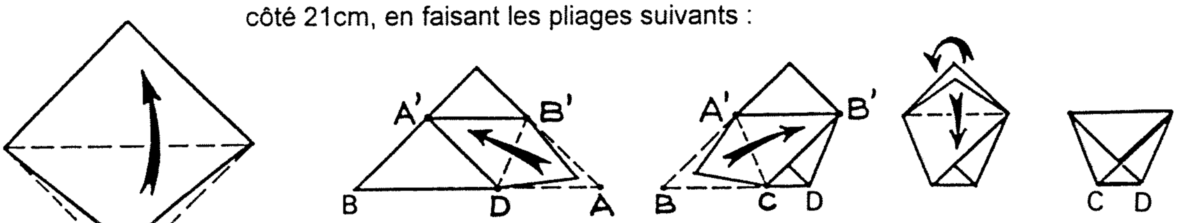
Combien l'équipe compte-t-elle de vendangeurs? Justifier la réponse.

exercice n° 13 15 points

Fort de café



Pierre confectionne un filtre à café avec une feuille de papier " essuie tout " carrée de côté 21cm, en faisant les pliages suivants :



(AB)//(A'B')

Il se demande si le filtre s'ajustera sur le porte-filtre. Pour cela il faut que la distance CD soit inférieure à 5 cm.

Réaliser et coller le filtre sur la feuille-réponse puis répondre au problème de Pierre en justifiant que A'B'AD et A'B'CB sont des losanges et en calculant CD.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Indications de solutions pour l'épreuve de mars 1998

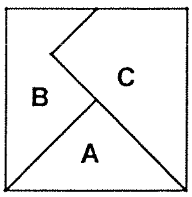
Exercice n°1 10 points

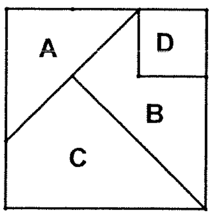
Pair et gagne !

Comme on multiplie par deux le nombre d'objets de la main droite, la parité de la somme est la même que celle du nombre d'objets de la main gauche.

Si la somme est paire, il y a un nombre pair d'objets dans la main gauche, et si la somme est impaire, il y a un nombre impair d'objets dans la main gauche et un nombre pair d'objets dans la main droite.

Exercice n°2 5 points *Aux carrés*





Exercice n°3 10 points

La coupe est pleine

Nombre d'étages	1	2	3	4	5	6
Nombre de coupes (base triangulaire)	1	4	10	20	35	***56***
Nombre de coupes (base carrée)	1	5	14	30	***55***	

Au début, Lucas avait donc 56 coupes.

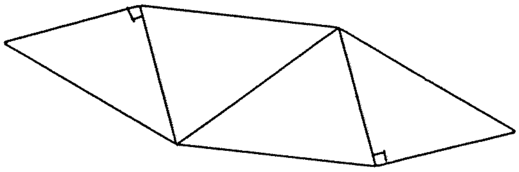
Exercice n°4 5 points

L'abaque de Sylvestre

£	S	d
VII	VII	VII
VOO	V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	Γ V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	Γ V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
●●●↵	● ●●● ↵	
LIX		VIII
£	S	d

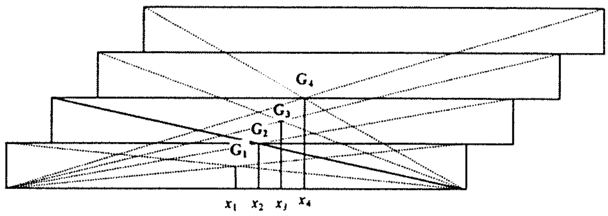
Exercice n°5 10 points

La pyramide cachée



Exercice n°6 5 points

Pour une brique de plus



Soit G_n le centre de symétrie lorsqu'il y a n briques. Dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité mesurant 1 cm, l'abscisse de G_1 est 11, celle de G_2 est $11+1{,}5$, et celle de G_n est égale à $x_n = 11 + 1{,}5(n-1)$.

Le solide est en équilibre tant que $x_n \leqslant 22$.

On a : $11 + 1{,}5(n-1) < 22$, donc $n < \dfrac{12{,}5}{1{,}5}$, et, n étant entier, $n \leqslant 8$.

Il y a au maximum 8 briques.

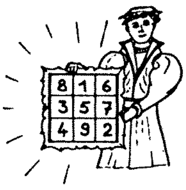
Exercice n°7 10 points

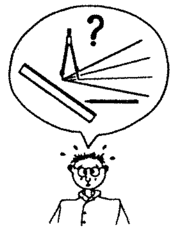
Résonnement

On note les instants (en secondes) auxquels chaque cloche sonne. Pour neuf coups, on obtient :

1ère cloche : ***0*** , ***4*** , 8 , 12 , ***16*** , ***20*** , ***24*** , 28 , 32.
2ème cloche : ***0*** , ***5*** , 10 , ***15*** , ***20*** , ***25*** , 30 , 35 , 40.

Aux instants marqués en caractères gras, on n'entend qu'un seul coup de cloche. Au total, on entend 13 coups de cloche. ***Il est donc neuf heures.***





Exercice n°8 5 points

A sommer

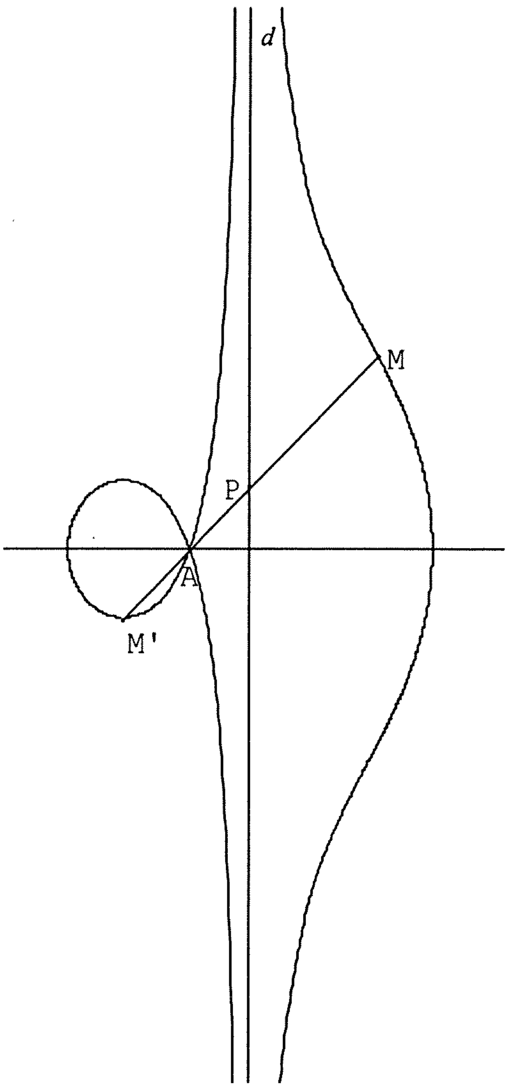
Parmi les nombreuses solutions, citons, par exemple :

	2	3	4	9
	5	1	7	13
	9	6	8	23
14	16	10	19	11

	1	2	6	9
	3	9	7	19
	5	4	8	17
20	9	15	21	18

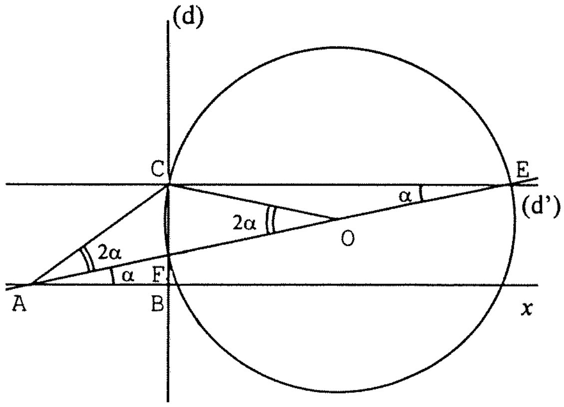
Exercice n°9 10 points

Conchoïde de Nicomède



Exercice n°10 15 points

Trisection d'un angle



Posons $\widehat{CEF} = \alpha$. Soit O le milieu de [EF] ; FO = OE = OC.

Alors $\widehat{ABE} = \alpha = \widehat{CEF}$ (angles alternes-internes) et on a $\widehat{ECO} = \alpha$ car le triangle OEC est isocèle en O.

1ère méthode : on a $\widehat{COF} = 2\,\widehat{CEF} = 2\alpha$ (angle au centre interceptant le même arc que $\widehat{CEF}$)

Donc $\widehat{ACO} = 2\alpha$, car le triangle ACO est isocèle en C.

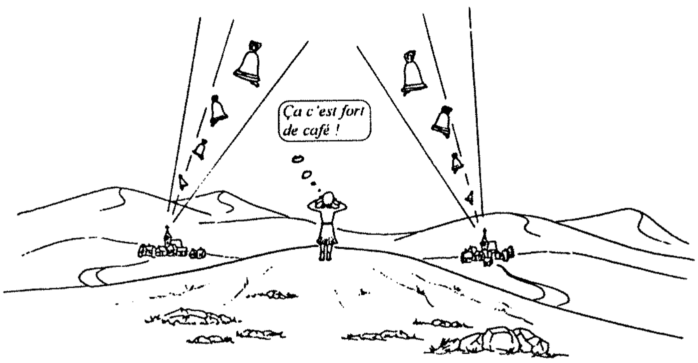
Donc : $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ et $\widehat{BAC} = 3\,\widehat{BAE}$

2ème méthode : Dans le triangle OCE,

$\widehat{COE} = 180° - \widehat{CEO} - \widehat{OCE}$ donc

$\widehat{COE} = 180° - 2\alpha$, donc $\widehat{AOC} = 2\alpha$ (angles supplémentaires).

On conclut de même : $\widehat{BAC} = 3\,\widehat{BAE}$.



Spécial Seconde

A vos masques

Il y a six déguisements possibles :

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Paul	C	F	P	F	C	P
Pierre	P	C	F	P	F	C
Jean	F	P	C	C	P	F

D'après l'énoncé, si Jean est en clown, alors Paul est en pirate, ce qui élimine la possibilité ***d***.
Si Jean est en pirate, alors Paul est en fantôme, ce qui élimine la possibilté ***e***.
Si Paul n'est pas en clown, alors Pierre est en pirate, ce qui élimine les cas ***b***, ***c*** et *f*.
Il ne reste alors que la possibilité ***a*** qui n'est en contradiction avec aucune des trois affirmations.

Donc Paul est déguisé en clown, Pierre en pirate et Jean en fantôme.

Exercice n°12 **10 points**

Vendanges tardives

Soit a l'aire vendangée en un jour par un vendangeur et x le nombre de vendangeurs dans cette équipe.

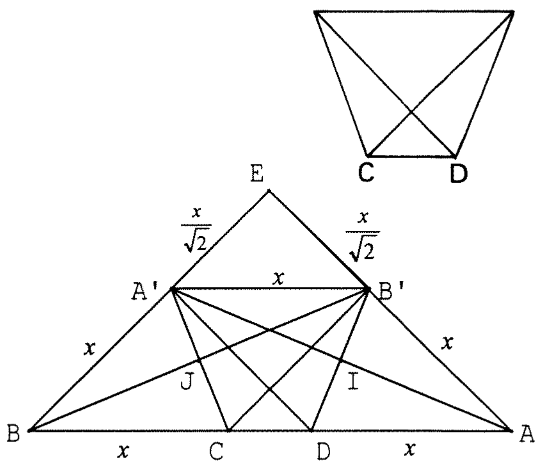
Aires vendangées	Grande parcelle	Petite parcelle
1er jour :	ax	
2ème jour :	$a\frac{x}{2}$	$a\frac{x}{2}$
3ème jour :		$2a$
En tout :	$3\frac{ax}{2}$	$a(\frac{x}{2}+2)$

L'aire de la grande parcelle étant le double de celle de la petite, on a : $3a\frac{x}{2}=2a(\frac{x}{2}+2)$ avec $a\neq 0$ donc : $\frac{3x}{2}=x+4$, et donc $x=8$.

Cette équipe compte donc 8 vendangeurs.

Exercice n°13 **15 points**

Fort de café



Après le 1er pliage, le carré de côté 21 cm devient un triangle rectangle et isocèle en E, dans lequel AE = BE = 21 cm et, d'après le théorème de Pythagore, AB = $21\sqrt{2}$ cm.
Les points A et A' sont symétriques par rapport à (B'D) par définition du 2ème pliage, donc (B'D) est la médiatrice de [AA']. De (AD)//(A'B') et du théorème de Thalès résulte que (AA') coupe aussi [B'D] en son milieu I. Donc le quadrilatère AB'A'D est un losange.

On démontre de même que le quadrilatère A'B'CB est un losange.

On pose A'B' = AB' = x.

Comme (AB)//(A'B'), on a : $\frac{EB'}{EA}=\frac{A'B'}{BA}$ donc $\frac{EB'}{21}=\frac{x}{21\sqrt{2}}$ donc $EB'=\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Or $\frac{x}{\sqrt{2}}+x=EA=21$, d'où $x=21(2-\sqrt{2})$ (en cm).

Donc : $CD=AB-2x=21\sqrt{2}-42(2-\sqrt{2})$.

$\boxed{CD=63\sqrt{2}-84\approx 5{,}095\text{ cm}}$

En tenant compte de la souplesse du papier, on peut admettre que le filtre va s'ajuster sur le porte-filtre.

ACADEMIE DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangsstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

Wettbewerb vom 12. 3. 98

- Für die Aufgaben 2, 4, 5, 8 und 9 ist keine Erklärung verlangt. Alle anderen Lösungen müssen begründet werden.
- Die Darstellung wird mitbewertet.
- Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Lösungsblatt zu verwenden.

Aufgabe 1 — 10 Punkte — *Ganz einfach*

Die Lösung dieser Aufgabe soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

Margot a dans sa main un nombre pair et dans l'autre un nombre impair de pièces.

Nicolas Chuquet dit à Margot:

„Multipliez le nombre de pièces de la main droite par deux et ajoutez y le nombre de pièces de la main gauche. Donnez moi le résultat et je vous dirai, en quelle main se trouve le nombre pair de pièces.“

Expliquer la méthode de Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot:

„Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas.“

Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.

In order to find out which hand is holding the even number of coins, Nicolas Chuquet says:

“Multiply the number of coins in your right hand by two, add the product to the number of coins in your left hand and give me the result.“

Explain the method of Nicolas Chuquet.

Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari.

Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma:

„Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi il numero delle monete contenute nella mano sinistra e ditemi il risultato.“

Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

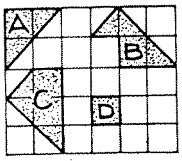
Aufgabe 2
5 Punkte

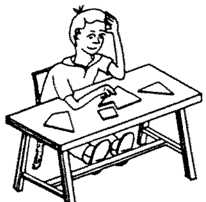
Quadratisch

Etienne schneidet die vier abgebildeten Teile A, B, C und D aus. Die drei Teile A, B und C legt er lückenlos aneinander. Er erhält ein Quadrat.

Plötzlich erkennt er, dass sich auch aus allen vier Teilen des Puzzles ein Quadrat legen läßt.

Zeichne die beiden Quadrate so, dass man ihre Zusammensetzung aus den Puzzleteilen erkennen kann.





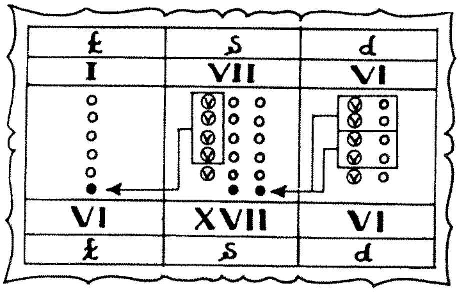
Aufgabe 4
5 Punkte

Rechenbrett

Die Abbildung zeigt ein Rechenbrett, welches auf *Gerbert d'Aurillac* zurückgeht, der später unter dem Namen *Sylvester II* Papst wurde.

Es zeigt die Multiplikation von I *Livre*(£) VII *Sols* (S) VI *Deniers* (d) mit V. Dies sind Geldeinheiten. 1 *Livre* entspricht 20 *Sols* und 1 *Sol* 12 *Deniers*.

Zeichne nach dem selben Muster ein Rechenbrett, welches die Multiplikation von VII *Livres* VII *Sols und* VII *Deniers* mit VIII darstellt.

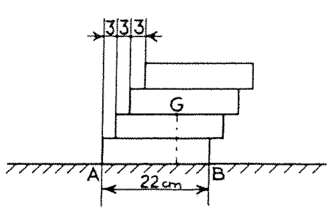


Aufgabe 6
5 Punkte

Stein auf Stein

Auf einer ebenen Unterlage schichtet Thierry quaderförmige Blöcke treppenförmig aufeinander und klebt sie zusammen. Alle Blöcke sind 22 cm lang und werden jeweils um 3 cm versetzt, so wie es auf der Abbildung zu sehen ist.

Der Körper fällt um, sobald sich der Schwerpunkt G, welcher auch gleichzeitig das Symmetriezentrum des Körpers ist, nicht mehr zwischen A und B befindet.



Wie viele Blöcke kann man höchstens aufeinander setzen, damit der Körper stehen bleibt? Begründe.

Aufgabe 3
10 Punkte

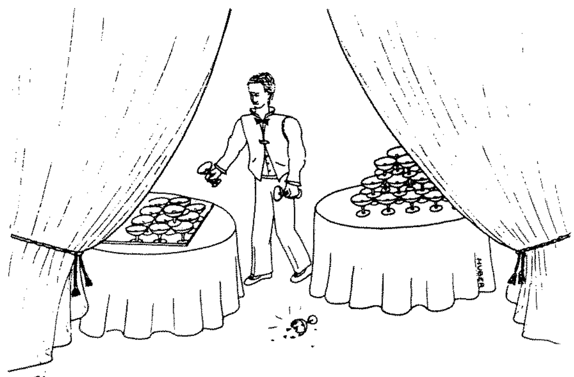
Happy Birthday

Lucas möchte seinen Geburtstag ganz groß feiern. Er will seine Gäste mit einer Pyramide aus Sektschalen überraschen. Der Champagner soll in das oberste Glas gegossen werden und sich beim Überlaufen so in die unteren Gläser ergießen, dass sie alle gefüllt werden.

Die Basis der Pyramide bildet ein gleichseitiges Dreieck, bei dem sich die benachbarten Gläser jeweils berühren. Die Gläser der nächsten Etage stehen jeweils auf dem Rand dreier Gläser der darunterliegenden Schicht. Gerade will Lucas das letze Glas auf die Spitze setzen, als dieses herunterfällt und zerbricht.

Doch Lucas weiß sich zu helfen und versucht nun eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche zu bauen, was ihm auch gelingt. Allerdings hat sie eine Etage weniger als ursprünglich vorgesehen.

Wie viele Gläser hatte Lucas zu Beginn? Begründe die Antwort.

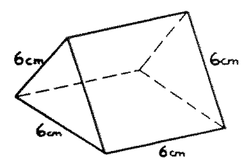


Aufgabe 5
10 Punkte

Versteckt

Der Rauminhalt einer Pyramide ist ein Drittel des Rauminhaltes eines Prismas mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe.

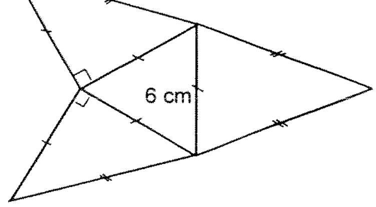
Um dies experimentell zu überprüfen, betrachten wir ein Prisma dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist und dessen Seitenflächen quadratisch sind.



Alle Kanten sind 6 cm lang.

Dieses Prisma lässt sich in drei Pyramiden zerlegen, die alle den gleichen Rauminhalt haben. Das Netz von zwei dieser Pyramiden und ein Schrägbild des Prismas sind abgebildet.

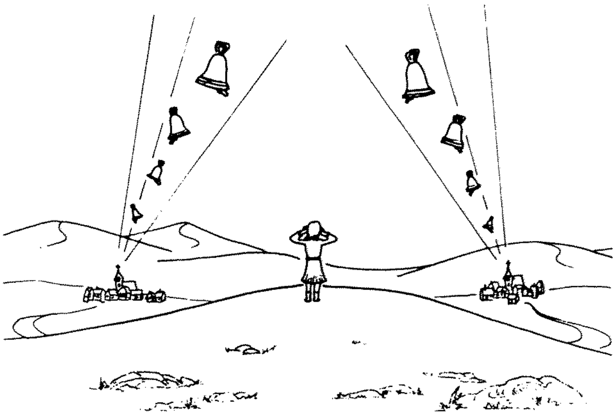
Zeichne auf das Antwortblatt das Netz der dritten Pyramide in seiner wahren Größe.



Aufgabe 7
10 Punkte

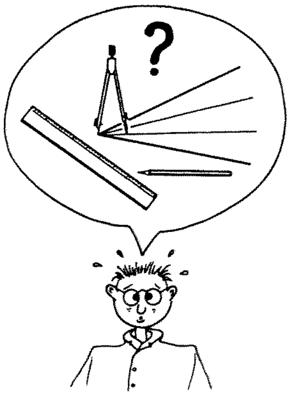
Heimatglocken

Marie geht über die Felder. Sie ist gleich weit von den Kirchtürmen zweier Dörfer entfernt, als die beiden Turmuhren gleichzeitig mit ihrem Stundenschlag einsetzen. Die Schläge der einen Uhr erfolgen im Abstand von 4 Sekunden, während die andere Uhr alle 5 Sekunden schlägt.



Marie kann zwei Schläge unterscheiden, wenn deren Abstand mehr als eine Sekunde beträgt.

Wie spät ist es, wenn Marie dreizehn unterscheidbare Schläge gehört hat? Begründe.



Aufgabe 8
5 Punkte

Antimagisch

Bei dem abgebildeten magischen Quadrat hat die Summe der Zahlen aus jeder Zeile, aus jeder Spalte und aus jeder Diagonalen stets den selben Wert.

Stelle die neun Zahlen so um, dass die Werte der genannten Summen alle voneinander verschieden sind und gib diese Werte jeweils am Rand des Quadrates an.

Aufgabe 9
10 Punkte

Nikomedes . . .

Die Zerlegung eines Winkels in drei gleich große Teile hat die Mathematiker seit der Antike beschäftigt. Allein mit Zirkel und Lineal ist diese Dreiteilung nicht möglich.

Nikomedes fand um 150 v. Chr. eine geometrische Lösung. Er benutzte dazu eine Kurve, die unter dem Namen Konchoide des Nikomedes bekannt wurde. Hier die Konstruktionsbeschreibung einer solchen Kurve:

a) Zeichne auf dem Antwortblatt die von oben nach unten verlaufende Symmetrieachse ein und nenne sie d.

b) Zeichne die zweite Symmetrieachse senkrecht zu d und auf dieser einen Punkt A, 2 cm links von d.

c) Wähle einen Punkt P beliebig auf d und (falls möglich) zwei Punkte M und M' auf der Geraden (AP), die von P 6 cm entfernt sind.
M und M' sind Punkte der Konchoide.

d) Verändere die Lage von P auf d und wiederhole den Schritt c) , um weitere Punkte der Konchoide zu erhalten.

Konstruiere die Kurve Punkt für Punkt. Die beiden Teile, aus denen die Kurve gebildet wird, sollen möglichst lang sein.

Aufgabe 10
15 Punkte

. . . und sein geteilter Winkel

Bei seiner Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe einer Konchoide hat Nikomedes den folgenden Weg beschritten (siehe Abbildung):

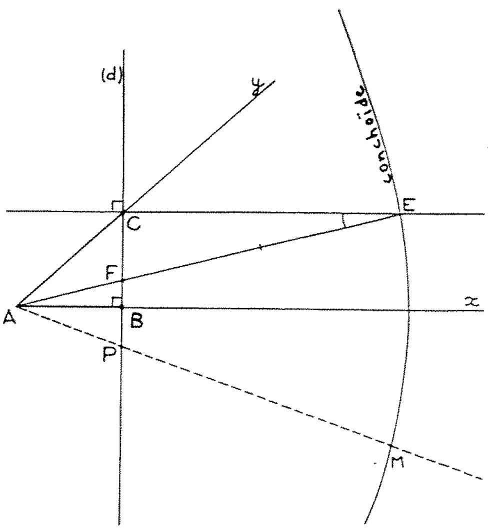
Der Winkel $\angle(xy)$ mit A als Scheitel soll in drei gleich große Teile zerlegt werden. Man wählt einen Punkt C auf y. Durch C zeichnet man die Orthogonale d zu x.

Die als Konchoide bezeichnete Kurve ist nun so festgelegt:

Ist P ein beliebiger Punkt von d und schneidet die Halbgerade [AP) die Konchoide in M, so gilt $\overline{PM} = 2\overline{AC}$.

Zeige: Schneidet die Orthogonale zu d durch C die Konchoide in E, so gilt $\angle BAE = \frac{1}{3}\angle BAC$.

Die Konstruktion der Konchoide ist nicht verlangt.



nur für Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Who is Who

Peter, Paul und Johannes wollen zum Kostümfest gehen. Für jeden gibt es ein Kostüm: Clown, Gespenst oder Pirat.

„Wenn Johannes als Clown geht, werde ich der Pirat sein!“ ruft Paul. „Aber wenn Johannes sich als Pirat verkleidet, werde ich als Gespenst gehen,“ fügt er hinzu.

„Wenn Paul nicht als Clown geht, verkleide ich mich als Pirat!“ erwidert Peter.

Alle Aussagen sind wahr. Wer geht in welchem Kostüm zum Fest. Erkläre.

Aufgabe 12
10 Punkte

Arbeitsteilung

Germain besitzt zwei Weinberge, von denen der eine doppelt so groß wie der andere ist.

Am ersten Tag der Weinlese sind alle Arbeiter im großen Weinberg beschäftigt. Am zweiten Tag teilen sie sich in zwei gleich große Gruppen. Die eine Gruppe arbeitet im großen Weinberg weiter, während die andere im kleinen beginnt.

Am Ende des zweiten Tages ist der erste Weinberg abgeerntet. Um die Lese im zweiten Weinberg abzuschließen, sind zwei Arbeiter noch einen ganzen weiteren Tag beschäftigt.

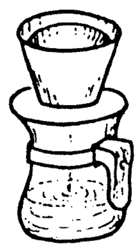
Man geht davon aus, dass die Arbeitszeit an allen drei Tagen gleich ist und alle Arbeiter im gleichen Tempo arbeiten.

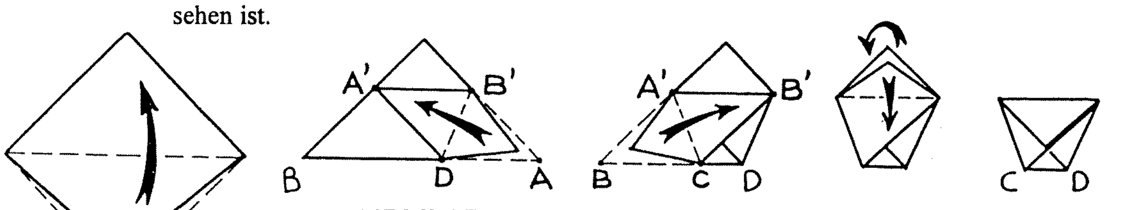
Wie viele Arbeiter waren bei der Lese beschäftigt? Begründe die Antwort.

Aufgabe 13
15 Punkte

Ohne Filter

Pierre sind die Filtertüten ausgegangen. Er nimmt ein quadratisches Küchentuch aus Papier von 21 cm Seitenlänge und faltet sich einen Ersatzfilter, so wie es auf der Abbildung zu sehen ist.





A'B' II AB

Er ist gespannt, ob seine Tüte in den Filteraufsatz passt. Dazu muß die Strecke CD kleiner als 5 cm sein.

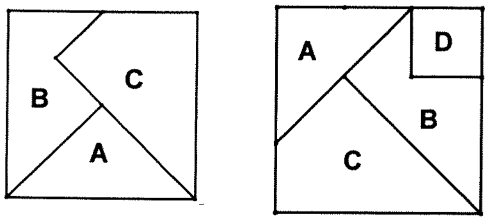
Stelle die Filtertüte her und klebe sie auf das Antwortblatt.

Prüfe rechnerisch, ob die Tüte in den Aufsatz passt. Zeige dazu zunächst, dass die Vierecke DAB'A' und BCB'A' Rauten sind.

Aufgabe 1 *Ganz einfach*

Multipliziert man die Münzen der rechten Hand mit 2 so erhält man stets eine gerade Zahl. Zählt man die Müzen der linken Hand hinzu, so ist das Ergebnis nur dann ungerade, falls die Anzahl der Münzen in der linken Hand ebenfalls ungerade ist. Im anderen Fall muß auch das Endergebnis gerade sein.

Aufgabe 2 *Quadratisch*



Aufgabe 3 *Happy Birthday*

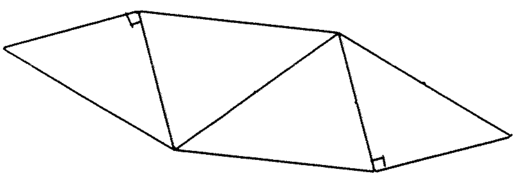
Zahl der Etagen	1	2	3	4	5	6
Zahl der Gläser (dreieckig)	1	4	10	20	35	***56***
Zahl der Gläser (quadratisch)	1	5	14	30	***55***	

Am Anfang hatte Lucas 56 Gläser.

Aufgabe 4 *Rechenbrett*

£	S	d
VII	VII	VII
VOO	V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	Γ V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
VOO	Γ V OO	VO O
VOO	V OO	Γ VO O
●●●↵	● ●●● ↵	
LIX		VIII
£	S	d

Aufgabe 5 *Versteckt*

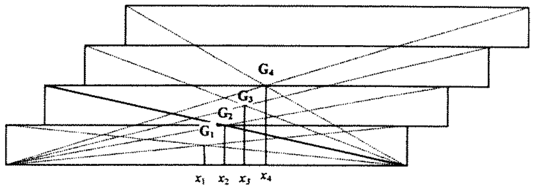


Aufgabe 6 *Stein auf Stein*

Der Schwerpunkt des ersten Quaders liegt in der Mitte von AB. Fügt man einen Quader hinzu, so bewegt sich der gemeinsame Schwerpunkt um 1,5 cm nach rechts. Sei n die Anzahl der hinzugefügten Quader.

Dann gilt $1{,}5n < 11$ und damit $n \leqslant 7$.

Zusammen mit dem ersten Quader kann man also höchstens acht Quader übereinanderlegen.

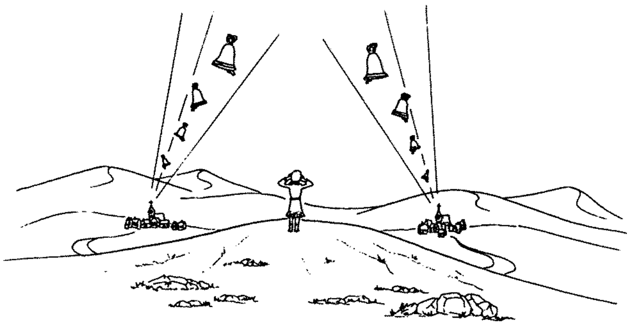


Aufgabe 7 *Heimatglocken*

Man notiert die Sekunden zu denen jeweils ein Glockenschlag ertönt. Bei neun Schlägen ergibt sich folgende Situation :

1\. Glocke : ***0*** , ***4*** , 8 , 12 , ***16*** , ***20*** , ***24*** , 28 , 32.
2\. Glocke : ***0*** , ***5*** , 10 , ***15*** , ***20*** , ***25*** , 30 , 35 , 40.

Die fett gekennzeichneten Schläge werden als ein Schlag gehört.Insgesamt hört man 13 Schläge. Es ist also neun Uhr.

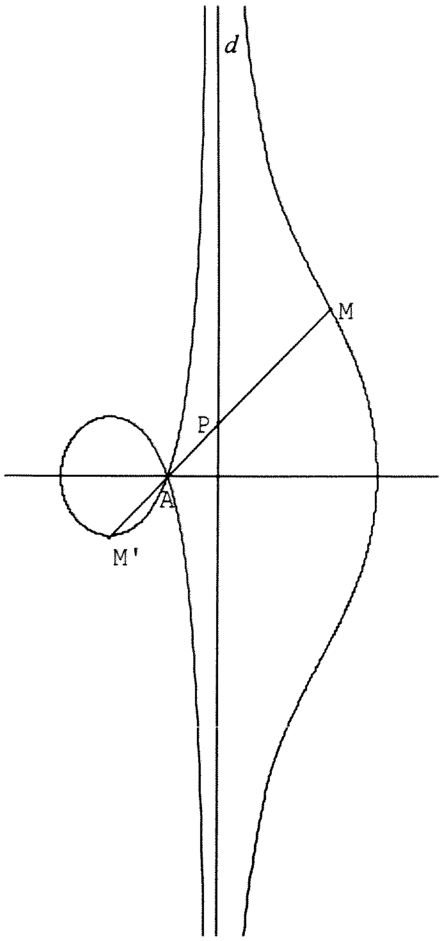


Aufgabe 8 *Antimagisch*

Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten. Hier ein Beispiel.

2	**3**	**4**	**9**
5	**1**	**7**	**13**
9	**6**	**8**	**23**
14↗ 16	**10**	**19**	**↖11**

Aufgabe 9 *Nikomedes ...*



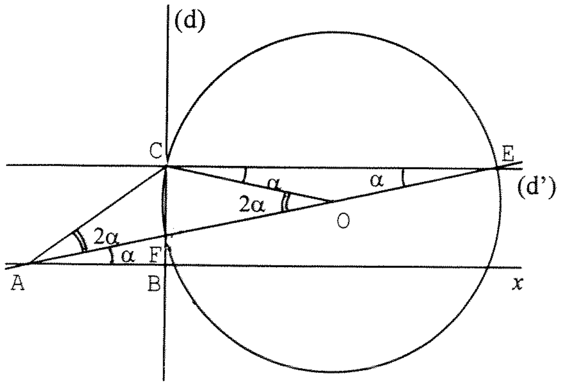
Aufgabe 10 *... und sein geteilter Winkel*

Sei $\angle$BAF = α. Wegen d'//x gilt $\angle$CEF = α.

O ist der Mittelpunkt von FE. Der Thaleskreis über FE geht wegen d $\perp$ d' durch C. Das Dreieck OEC ist also gleichschenklig und $\angle$OCE = α. Damit gilt für den Außenwilnkel dieses Dreiecks $\angle$COF = 2α.

Wegen FE = 2AC ist das Dreieck AOC ebenfalls gleichschenklig und $\angle$OAC = 2α.

Damit gilt $\angle$BAC = 3α.



Aufgabe 11 *Who is Who*

Es gibt sechs verschiedene Verkleidungsmöglichkeiten :

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Paul	C	G	P	G	C	P
Peter	P	C	G	P	G	C
Johannes	G	P	C	C	P	G

Wenn Johannes als Clown geht, geht Paul als Pirat. Damit entfällt Möglichkeit ***d***. Geht Johannes als Pirat, so geht Paul als Gespenst. Damit entfällt ***e***. Wenn Paul nicht als Clown geht, verkleidet sich Peter als Pirat. Damit entfallen ***b***, ***c***, und ***f***. Es bleibt also nur Möglichkeit ***a*** übrig, die zu keiner der drei Aussagen im Widerspruch steht.

Aufgabe 12 *Arbeitsteilung*

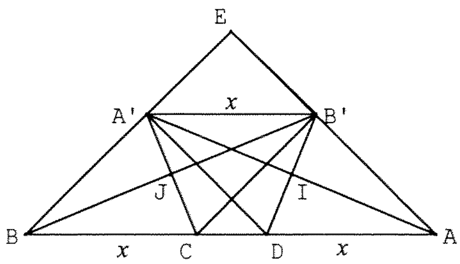
Sei x die Anzahl der Arbeiter und a die Fläche, welche pro Tag von einem Arbeiter bearbeitet wird.

Dann beträgt die Fläche A des großen und die Fläche B des kleinen Weinbergs.

$\mathrm{A} = x.a + 0{,}5x.a$ und $\mathrm{B} = 0{,}5x.a + 2a$.

$\mathrm{A} = 2\mathrm{B} \Rightarrow xa + 0{,}5xa = 2(0{,}5xa + 2a) \Rightarrow \mathrm{x} = 8$.

Aufgabe 13 *Ohne Filter*



A und A' liegen symmetrisch zu DB' weshalb AA' von DB' halbiert wird. Weil A'B' parallel zu AB verlauft, gilt $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AD}} = x$ (Strahlensatz). Wegen $\overline{\mathrm{AB'}} = x$ ist das Viereck AB'A'D eine Raute.

Den Beweis für das zweite Viereck führt man analog.

Weiter ist $\overline{\mathrm{EB'}} : \overline{\mathrm{EA}} = x : \overline{\mathrm{AB}}$ (Strahlensatz).

Mit $\overline{\mathrm{EA}} = 21$, $\overline{\mathrm{EB'}} = 21 - x$ und $\overline{\mathrm{AB}} = 21\sqrt{2}$ folgt

$\dfrac{21 - x}{21} = \dfrac{x}{21\sqrt{2}}$ und damit $x = 21(2 - \sqrt{2})$.

Nun ist $\overline{\mathrm{CD}} = 21\sqrt{2} - 2x \approx 5{,}095$.

Der Behelfsfilter ist also etwas zu groß. Aber wenn man ein wenig dückt passt er vielleicht trotzdem.

MATEMATICA SENZA FRONTIERE

Competizione Interclassi di 2° e 3° (12 Marzo 1998)

- *Solo le risoluzioni degli esercizi 2, 4, 5, 8 e 9 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata.*
- *La cura sarà apprezzata.*
- *Ogni soluzione deve essere riportata su fogli-risposta separati.*

Ezercizio n.1 (punti 10)

"Vince il pari"

Risoluzione da redigere in francese, o inglese, o spagnolo, o tedesco, in un minimo di trenta parole.

Margot a dans une main un nombre pair et dans l'autre un nombre impair de pièces.

Nicolas Chuquet dit à Margot:

« Multipliez le nombre de pièces de la main droite par deux et ajoutez y le nombre de pièces de la main gauche. Donnez moi le résultat et je vous dirai, en quelle main se trouve le nombre pair de pièces. »

Expliquer la méthode de Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot:

„Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."

Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.

In order to find out which hand is holding the even number of coins, Nicolas Chuquet says:

"Multiply the number of coins in your right hand by two, add the product to the number of coins in your left hand and give me the result."

Explain the method of Nicolas Chuquet.

Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.

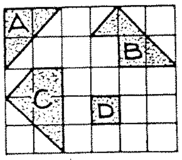
"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot. "Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."

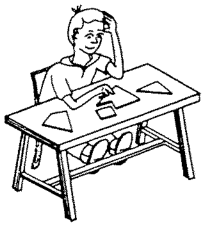
Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

Ezercizio n.2 (punti 5)
Quadrettando

Stefania ritaglia i quattro pezzi A, B, C, D del puzzle rappresentato. Con i tre pezzi A, B, C forma un quadrato.
Quindi esclama : "Ma si può formare un altro quadrato con tutti i pezzi del puzzle ! ".

Si disegnino i due quadrati cosi formati, evidenziando la disposizione dei pezzi.

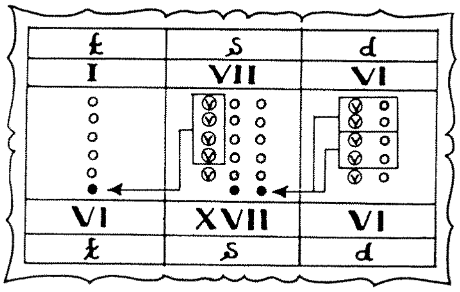




Ezercizio n.4 (punti 5)
L'abaco di Silvestro

Ecco un abaco per la moltiplicazione utilizzato nel decimo secolo da Gerbert d'Aurilac, che divenne papa col nome di Silvestro. Rappresenta la moltiplicazione per V di I libbra, VII soldi, VI denari. Una libbra (£) valeva 20 soldi *(s)* e un soldo valeva 12 denari *(d).*

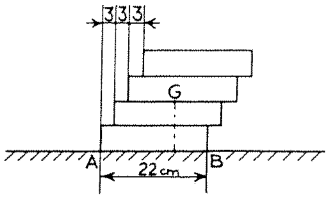
Seguendo lo stesso criterio si costruisca l'abaco del prodotto per VIII di VII libbre, VII soldi e VII denari.



Ezercizio n.6 (punti 5)
Per un mattone in più

Su un piano orizzontale Teresa impila e incolla dei mattoni uguali a forma di parallelepipedo lunghi 22 cm con uno spostamento costante di 3 cm nel senso della lunghezza.

Questa costruzione non crolla fintanto che il centro di simmetria G della figura ottenuta Si proietta ortogonalmente sulla base di appoggio in un punto interno tra A e B.

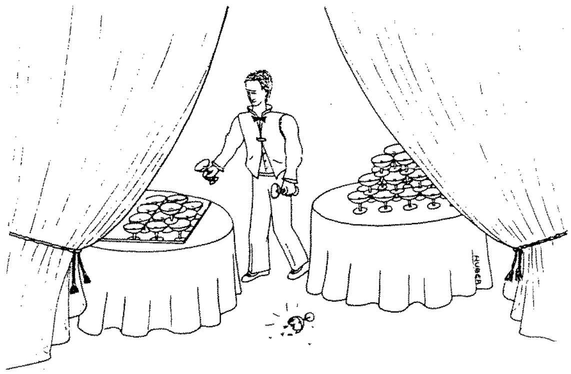


Quale è il numero massimo di mattoni che Teresa può impilare ? Si motivi la risposta.

Ezercizio n.3 (punti 10)
La coppa è colma

Luca erige una piramide di coppe per festeggiare il suo compleanno : quando versa lo spumante nella coppa alla sommità, questa tracima e riempie tutte le coppe sottostanti.
Costruisce una piramide avente per base un triangolo equilatero. Ogni coppa appoggia sui bordi tangenti a due a due ai bordi di tre coppe del piano sottostante. Sfortunatamente rompe la coppa alla sommità.
Disponendo tutte le coppe che restano come nella figura, riesce a costruire una piramide a base quadrata con un piano di meno della piramide precedente.

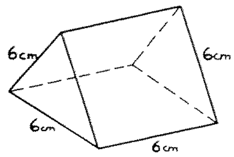
Quante coppe aveva inizialmente ? Si motivi la risposta.



Ezercizio n.5 (punti 10)
La piramide nascosta

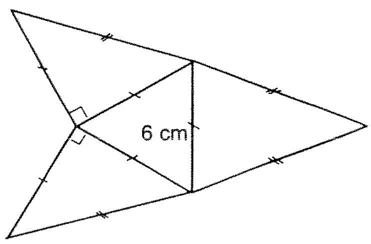
Il volume di una piramide è uguale al terzo del volume di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Per giustificare questa proprietà, si considera un prisma retto avente per base un triangolo equilatero e per facce laterali dei quadrati. Tutti gli spigoli misurano 6 cm. Questo prisma si scompone in tre piramidi di uguale volume.



Ecco il disegno in prospettiva di tale prisma e lo sviluppo di due delle tre piramidi.

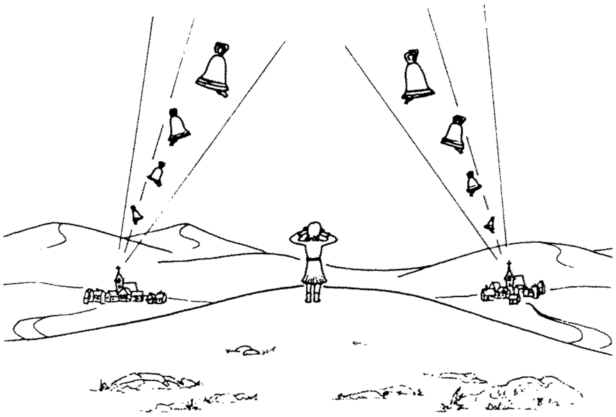
Si disegni sul foglio-risposta a grandezza reale lo sviluppo della terza piramide.



Ezercizio n.7 (punti 10)

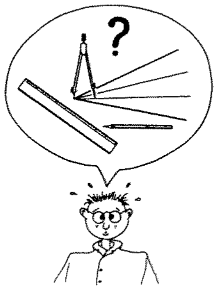
Rintocchi

Maria passeggia in campagna. Si trova alla stessa distanza tra due campanili quando ode contemporaneamente dalle due campane il primo rintocco della stessa ora.



Uno dei due orologi sgrana i rintocchi ogni quattro secondi, l'altro ogni cinque.
Maria distingue due rintocchi solo se si odono a più di un secondo di intervallo.

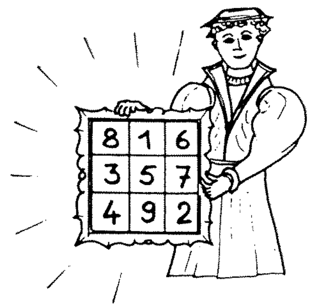
Quale ora è se Maria distingue in totale tredici rintocchi ? Si motivi la risposta.



Ezercizio n.8 (punti 5)

Quante somme !

Ecco un quadrato magico : la somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale è la stessa.



Si collochino questi nove numeri in un quadrato in modo che le otto somme precedenti, che si scriveranno, siano tutte differenti.

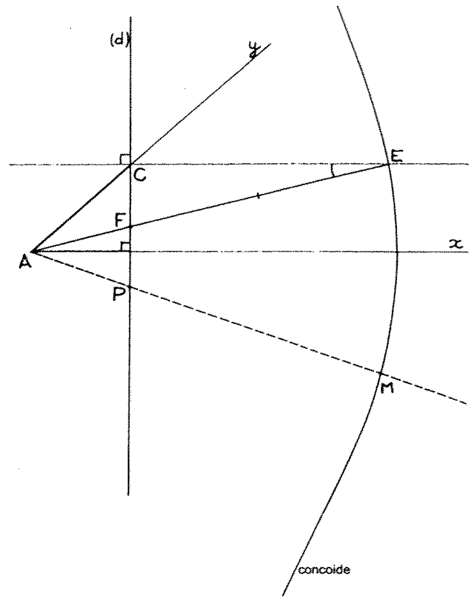
Ezercizio n.9 (punti 10)

Concoide di Nicomede

La trisezione di un angolo consiste nella sua suddivisione in tre parti uguali. Questo problema posto dai Greci non può essere risolto, in generale, solamente con riga e compasso. Ma Nicomede, circa 150 anni a.C., trovò una risoluzione geometrica che utilizza una curva denominata concoide, della quale si riporta la procedura di costruzione :

1. Tracciare la mediana principale del foglio-risposta e denominarla *d* ;
2. Segnare il punto A sulla seconda mediana a 2 cm alla sinistra di *d* ;
3. Scegliere un punto P su *d*, indicare quando è possibile, i due punti M e M' della retta (AP) situati a 6 cm da P. M e M' sono allora due punti della concoide ;
4. Ripetere la fase 3 cambiando la posizione di P su *d*.

Si costruiscano punto a punto i due rami di questa curva i più lunghi possibile.



Ezercizio n.10 (punti 15)

Trisezione di un angolo

Nicomede scoprì una costruzione che permette di suddividere un angolo in tre angoli uguali.
Ecco il suo procedimento : si vuole ottenere la trisezione dell'angolo $\widehat{xAy}$ della figura sottostante.
Per questo si fissa un punto C sul lato (A y), si costruisce la retta d passante per C e perpendicolare al lato (A x), poi Si costruisce la curva concoide così definita : per ogni punto P di d, la semiretta (AP) taglia la curva in M in modo che PM = 2AC.
La retta passante per C e perpendicolare a d taglia la curva in E.

Si dimostri che l'angolo $\widehat{xAE}$ è un terzo dell'angolo $\widehat{xAy}$. E' inutile costruire la concoide.

Solo per le classi terze

Ezercizio n.11 (punti 5)

A voi maschere

Pietro, Paolo e Giovanni preparano il carnevale. Hanno a disposizione tre costumi da clown, pirata e fantasma.

Paolo dice : "Se Giovanni si veste da clown, allora io mi travesto da pirata. Ma se Giovanni si veste da pirata, allora io mi travesto da fantasma".

Pietro allora interviene : "Se Paolo non si veste da clown, allora il pirata lo faccio io".

Quale è il travestimento che non scontenta nessuno ? Si spieghi la risposta.

Ezercizio n.12 (punti 10)

Vendemmie tardive

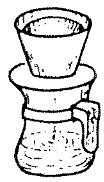
Germano fa vendemmiare due vigne, di cui una di area doppia dell'altra. Il primo giorno tutto il gruppo dei vendemmiatori lavora sulla vigna più grande. Per il giorno successivo il gruppo si suddivide in due sottogruppi uguali, di cui uno rimane nella vigna maggiore mentre l'altro lavora nella piccola.

Al termine delle due giornate, la vigna maggiore è vendemmiata, ma non la piccola che richiede ancora il lavoro di due dei vendemmiatori per tutta la terza giornata.

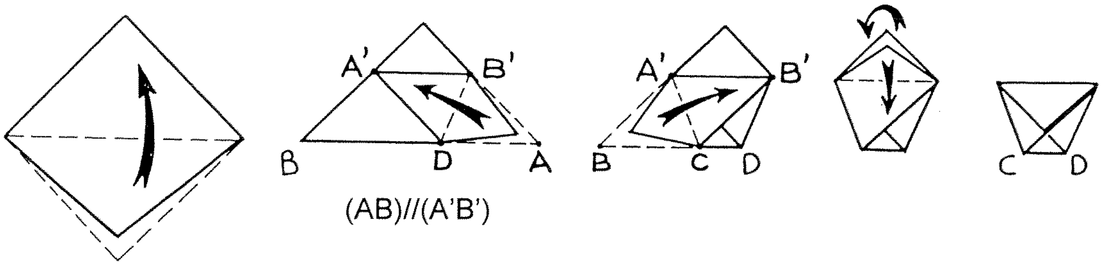
Si supponga che i vendemmiatori lavorino con lo stesso ritmo e che la durata lavorativa delle giornate sia la stessa. Quanti sono in tutto i vendemmiatori ? Si motivi la risposta.

Ezercizio n.13 (punti 15)

Per un buon caffè



Pietro confeziona un filtro da caffè con un foglio di carta assorbente quadrato di lato 21 cm, mediante delle piegature successive.



(AB)//(A'B')

Si domanda se il filtro si adatterà al portafiltro. Per garantire ciò occorre che la distanza CD sia inferiore a 5 cm.

Si realizzi il filtro e lo si incolli sul foglio-risposta ; si risponda al problema di Pietro giustificando che A'B'AD e A'B'CB sono rombi, e si calcoli CD.

ACADÉMIE
DE STRASBOURG
Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

A maths competition for pupils in years 10 and 11

Mathématiques sans frontières

March 1998

- Questions 2, 4, 5, 8 & 9 do not require any explanation in the answer ; all of the others do.
- Careful work will be taken into account.
- Teams should submit one answer sheet per question.
- The team name must be on every answer sheet.

QUESTION 1
10 POINTS

Pair et gagne

Write down your answer in French, German, Spanish or Italian using at least 30 words.

Margot a un nombre pair de pièces dans une main et un nombre impair de pièces dans l'autre main.

Pour découvrir dans quelle main se trouve le nombre pair de pièces, Nicolas Chuquet dit :

« Multipliez le nombre de pièces de la main droite par deux et ajoutez-y le nombre de pièces de la main gauche. Donnez moi le résultat et je vous dirai en quelle main se trouve le nombre pair de pièces ».

Expliquer la méthode de Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot:

„Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."

Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.

"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot. "Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."

Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari.

Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma:

„Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi il numero delle monete contenute nella mano sinistra e ditemi il risultato."

Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

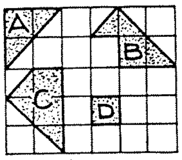
QUESTION 2
5 POINTS

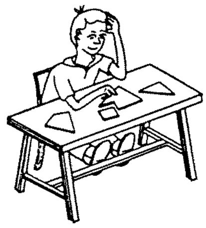
All square

Etienne cuts the four pieces A, B, C, D shown below to form a puzzle.

With 3 pieces A, B, C he can make a square. Suddenly he realises : "Another square can be made with all four pieces of the puzzle."

Draw the two squares that he can make showing how they are made up.





QUESTION 3
10 POINTS

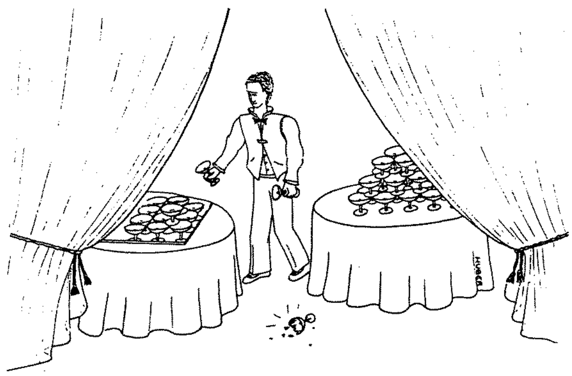
Cupful

To celebrate his birthday Lucas makes a pyramid of champagne glasses. He intends to keep pouring champagne into the glass at the top of the pyramid ; as the champagne spills over the side all the glasses will be filled.

He makes a pyramid with a base which is an equilateral triangle. Each glass rests on the rims of three glasses on the level underneath. Unfortunately he breaks the glass which was to be at the top.

Using all the remaining glasses he is able to build a pyramid whose base is a square and which has one level less than the previous one.

How many glasses did he have when he started ? Justify your answer.



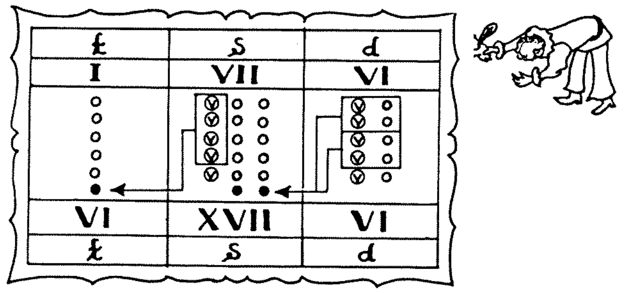
QUESTION 4
5 POINTS

Sylverser's Abacus

Here is an abacus used in the tenth century by Gerbert d'Aurillac, who later became Pope Sylvester II. It shows the multiplication of I pound VII shillings VI pence by V.

One pound (£) was worth 20 shillings (s) and one shilling was worth 12 pence (d).

Using the same principle make an abacus showing the multiplication of VII pounds VII shillings VII pence by VIII.

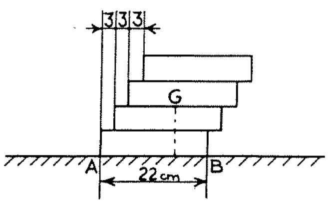


QUESTION 6
5 POINTS

A Brick too far

On a horizontal base Thierry arranges and glues together identical cuboidal bricks. The bricks have length 22 cm and are stepped forward 3 cm as shown in the diagram.

The arrangement will not fall as long as vertical line through the centre of symmetry G of the complete figure passes through the base AB.



What is the maximum number of bricks that can be arranged in this way without falling over ?

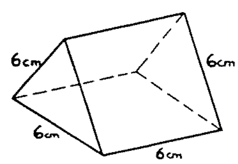
Justify your answer.

QUESTION 5
10 POINTS

Hidden Pyramid

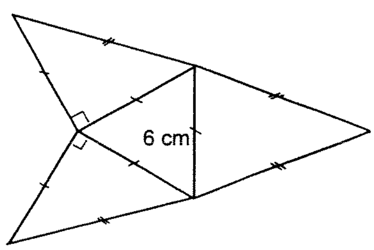
The volume of a pyramid is one third of the volume of a prism with the same base and the same height.

To show this experimentally, we can look at a right prism such that the base (and top) is an equilateral triangle and the other faces are squares. All the edges measure 6 cm. This prism can be divided into three pyramids of equal volume.



The diagram shows the prism and the net of two of the three pyramids.

Make a full-sized scale drawing of the net of the third pyramid on your answer sheet.

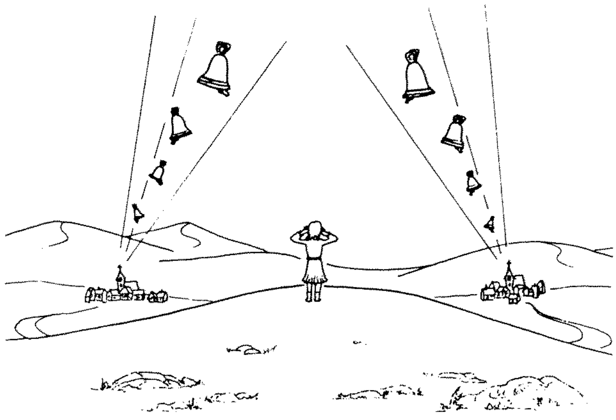


QUESTION 7
10 POINTS

Peal of Bells

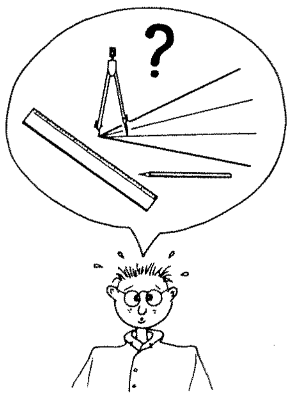
Marie is out walking in the country. She is at the same distance from the bells of two villages when both sets of bells sound the first ring of the hour.

One set of bells ring every 4 seconds ; from the other village they ring every 5 seconds.



Marie can only distinguish two peals of bells if they are more than one second apart.

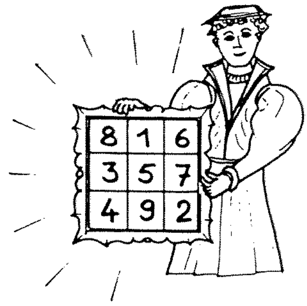
What time is it if Marie can distinguish 13 peals in total ? Justify your answer.



QUESTION 8
5 POINTS

Some Sum

The diagram shows a magic square. The sum of the numbers in each row and column and along each diagonal is the same.



Put the nine numbers back into the square so that the eight sums are now all different.

QUESTION 9
10 POINTS

Conchoid of Nicomedeus

Trisecting an angle means cutting it into 3 equal parts. This problem, which was first investigated by the ancient Greeks, cannot be solved if we use only ruler and compass. Nicomedeus in 150 A.D. found a geometrical solution using a curve called a conchoid which can be constructed as follows :

a) Draw the long axis of symmetry of your answer sheet. Call this line d.

b) Draw the short axis of symmetry, x , across the page and mark the point A 2 cm to the left of the axis d.

c) Choose any point P on the line d and mark, where possible, the two points M and M' on the line AP which are 6 cm from P.

d) Repeat step c) for different positions of P on the line d.

The points M and M' trace out the two parts of the conchoid. Draw the two parts of the curve by marking enough points. Make it as long as possible.

QUESTION 10
15 POINTS

Angle Trisection

Nicomedeus discovered a construction which divides an angle into three equal parts.

Here is his construction to trisect the angle xAy in the diagram given.

Pick a point C on the line Ay. Draw the line (d) through C and perpendicular to the line Ax.

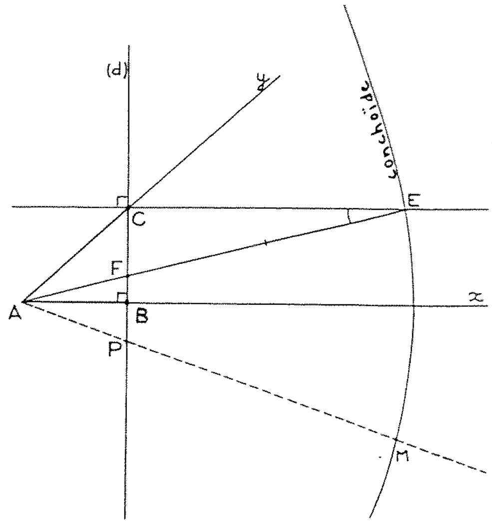
Draw the conchoid curve which has the property : for every point P on (d), the line AP cuts the curve at M such that PM = 2AC.

The line through C perpendicular to (d) cuts the conchoid at E.

Show that the angle xAE is one third of the angle xAy.

Note : You do not need to construct the conchoid or answer question 9.

Hint : Explain first why FE = 2AC.



Senior classes only

QUESTION 11
5 POINTS

The Mask

Pierre, Paul and Jean get ready for the carnival. They have three costumes : clown, pirate and ghost.

Paul says : "If Jean dresses up as a clown then I'll go as a pirate. But if Jean puts on the pirate costume then I'll dress as a ghost."

Pierre interrupted : "If Paul doesn't go as a clown, then I'll be the pirate."

Which costume does each one wear ? Explain.

QUESTION 12
10 POINTS

Harvest Home

Germain has to bring in the grape harvest in two vineyards, one of which is double the other in area. The first day the whole team of grapepickers work in the big vineyard.

The second day the team divides into two equal groups. One group keeps on working in the big field, while the other starts work in the small one.

At the end of the second day the harvest in the big field is completely in but the small field keeps two workers busy for the whole of the third day.

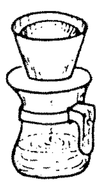
Assume that the workers always work at the same rate and that each working day is the same length.

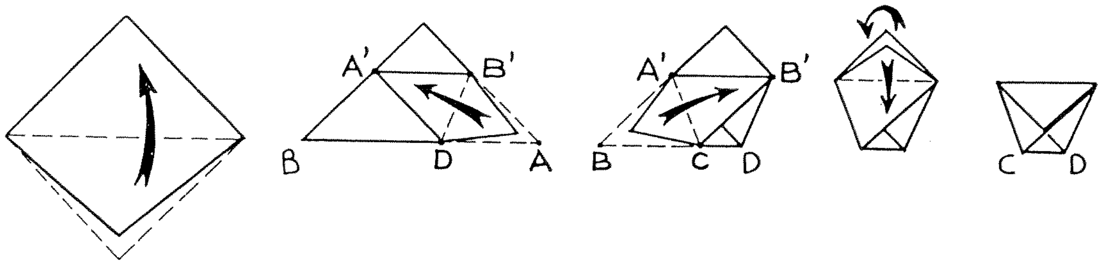
How many workers are in the team ? Justify your answer.

QUESTION 13
15 POINTS

Coffe Break

Pierre makes his own coffee filter papers from a square of paper kitchen towel of side 21 cm by making the following folds.





If the filter paper is to fit into the filter holder the distance CD has to be less than 5 cm.

Make up a filter paper and stick it to your answer paper. Show that A'B'AD and A'B'CB are parallelograms and calculate the length CD.

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

A verseny támogatói:
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.
Művelődési és Közoktatási Minisztérium
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
Merkel Economos
Graphic-A Studio
A verseny arculatát Gerendy Jenő tervezte.
Safari-Park Gänsendorf

1. feladat PÁROS ÉS NYER !

A következő feladat megoldását legalább 30 szóban angolul, franciául, németül, olaszul vagy spanyolul adjátok meg!

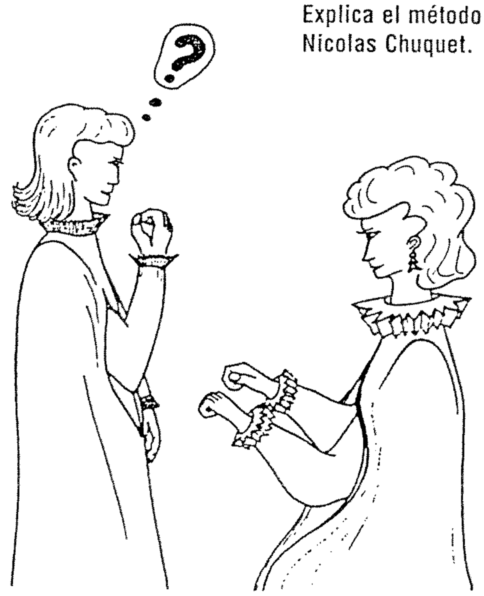
Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.
"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot.
"Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."
Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.
In order to find which hand the even number of coins is in, Nicolas Chuquet says: "Multiply the number of coins of the right hand by two, add it to the number of coins of the left hand and give me the result. "
Explain Nicolas Chuquet's method.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.
Nicolas Chuquet le dice a Margot: "Multiplique usted or por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."
Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari. Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma: "Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi vi il numero delle monete contenute nella mano sinestra e ditemi il risultato."
Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

Margot a dans une main un nombre pair de piece et dans l'autre un nombre impair de piece.
Pour deviner en quelle main est le nombre pair de piece, Nicolas Chuquet dit á Margot: "Multipliez le nombre de pieces de la main droite par 2, ajoutez-y le nombre de pieces de la main gauche et donnez-moi le resultat."
Expliquer la méthode de Nicolas Chiquet.

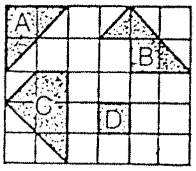


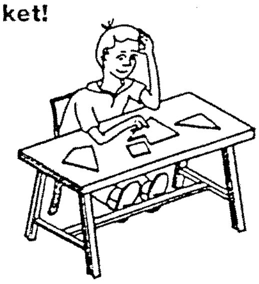
(10 pont)

2. feladat

NÉGYZETRE FEL !

Etienne kivágja az alábbi, A, B, C és D-vel jelzett puzzle darabokat. Az A, B és C elemekből egy négyzetet rak ki, majd hirtelen felkiált:
- Hiszen mind a négy elem felhasználásával is kirakható négyzet!
Rajzoljátok le a válaszlapra mindkét négyzetet, és jelöljétek meg rajta a puzzle elemeket!
(5 pont)

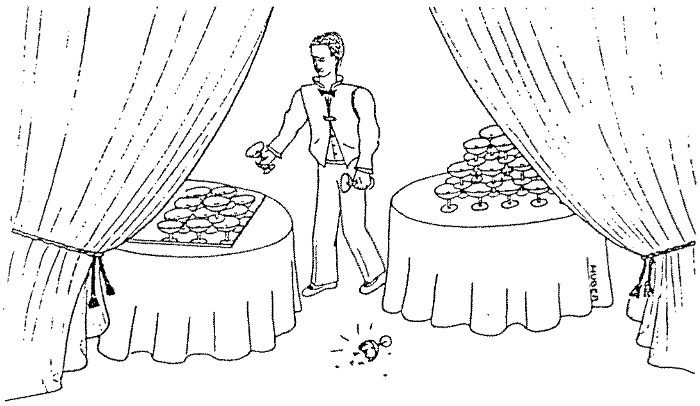




3. feladat

A KUPA MEGTELT

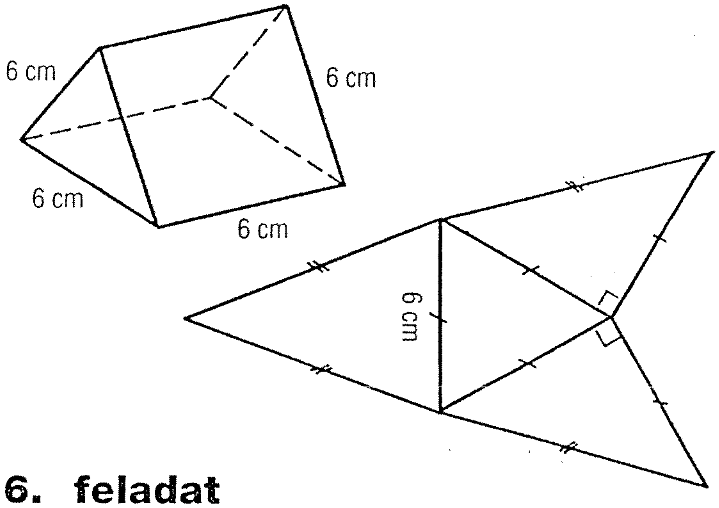
Lucas születésnapját ünnepli. Azt tervezi, hogy pezsgős kupákból egy gúlát épít, s a legfelsőbe úgy tölt majd pezsgőt, hogy az kifolyjon, s megtöltse a többi poharat.
A tervezett gúla alapja egyenlő oldalú háromszög. Mindegyik kupa az egy emelettel lejjebb lévő 3, egymást páronként érintő kupán áll.
Már majdnem kész a mű, amikor a legutolsó pohár kicsúszik a kezéből és eltörik. Szerencse a szerencsétlenségben, hogy a megmaradt poharakból azért sikerült Lucas-nak egy négyzet alapú, az eredetinél egy emelettel kisebb gúlát építeni.
Hány kupája volt eredetileg?
(10 pont)



5. feladat

A REJTETT GÚLA

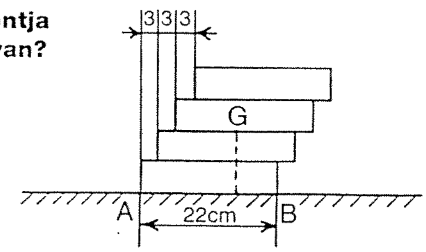
A gúla térfogata éppen harmada az azonos alapú és magasságú hasábénak. A gyakorlatban is szemléltessük az alábbi módon. Vegyünk egy szabályos háromszög alapú egyenes hasábot, amelynek oldallapjai négyzetek. Minden él 6 cm hosszú.
E hasáb három, egyenlő térfogatú gúlára bontható.
A rajzon látható egy ilyen hasáb képe, és a három gúlából kettőnek a hálózata. A harmadik gúla hálózatát rajzoljátok le a válaszlapra valódi nagyságban!
(10 pont)



6. feladat

LEHET EGY TÉGLÁVAL TÖBB?

A vízszintes talajon Thierry téglákat helyez egymásra és összeragasztja azokat. A téglák egyformák, 22 cm hosszúak. Úgy helyezi egymásra a téglákat, hogy azok 3-3 cm-rel eltolódnak hosszanti irányban.
Legfeljebb hány téglát tud így Thierry egymásra helyezni, ha az így keletkezett test mindaddig nem dől fel, ameddig a szimmetria középpontja az AB szakasz fölött van?
(5 pont)

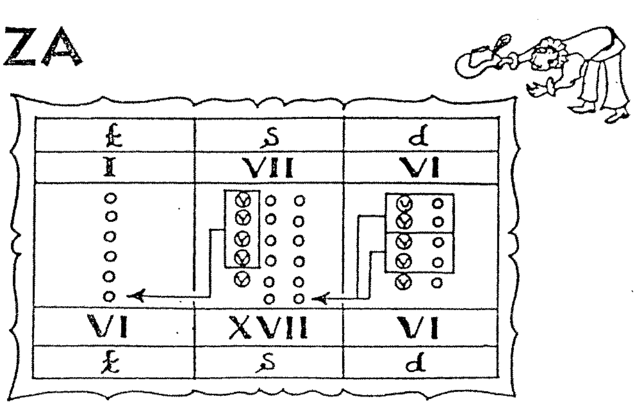


4. feladat

SZILVESZTER PÁPA ABAKUSZA

Az ábrán látható abakuszt Gerbert d'Aurillac, a X. században élt matematikus, a későbbi II. Szilveszter pápa használta szorzásra. Egy font (£) húsz sillinggel (s) volt egyenértékű, s egy silling 12 dénárt (d) ért.
Az ábra azt szemlélteti, hogyan szorozták V-tel az I font VII silling VI dénárt!

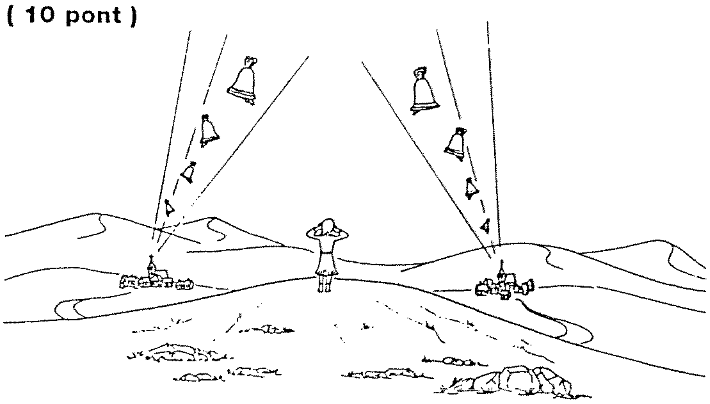
Szemléltessétek ugyanilyen ábrán, hogy miként szorozzuk meg VIII-cal a VII font VII silling VII dénárt!
(5 pont)



7. feladat

HÁNYAT ÜTÖTT AZ ÓRA ?

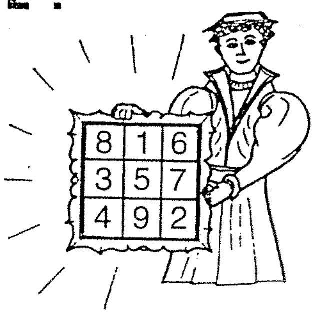
Marie kirándul. Éppen egyenlő távolságra van a két falutól, amikor pontosan egyszerre megszólal mindkettőben a harang. Mindig annyit üt a harang, ahány óra van. Az egyik falu harangja 4 másodpercenként, a másiké 5 másodpercenként kondul egyet. Marie csak akkor tudja megkülönböztetni a két harang hangját, ha legalább 1 másodperc különbséggel kondulnak meg. Hány óra van, ha Marie 13 harangütést hallott összesen?
(10 pont)



8. feladat

ADJUNK ÖSSZE !

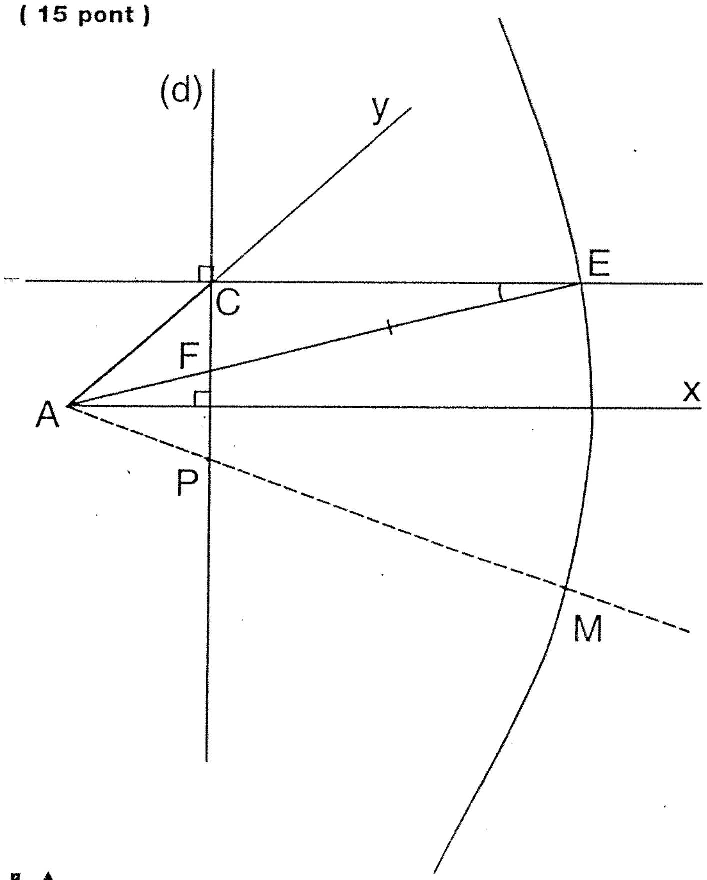
Íme egy bűvös négyzet: a sorokban, oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mindig ugyanaz. Helyezzétek el a 9 számjegyet úgy, hogy a nyolc összeg mind különböző legyen!
(5 pont)



10. feladat

ÉS MOST HARMADOLJUNK !

Nikomedész felfedezett egy eljárást, amely segítségével szöget tudunk harmadolni. Íme az eljárás: az ábrán látható xAy szöget szeretnénk harmadolni. Vegyünk fel egy C pontot az Ay szögszáron, majd állítsunk C-n keresztül merőlegest az Ax szögszárra. Legyen ez d. A d tetszőleges P pontját kijelöljük, s az AP félegyenes azon pontja lesz a conchoid M pontja, amelyre PM=2AC. A C-n átmenő, d-re merőleges egyenes E-ben metszi a conchoidot. Bizonyítsátok be, hogy az xAE szög az xAy szög harmada! A conchoid definícióját a 9. feladatban megtaláljátok.
(15 pont)

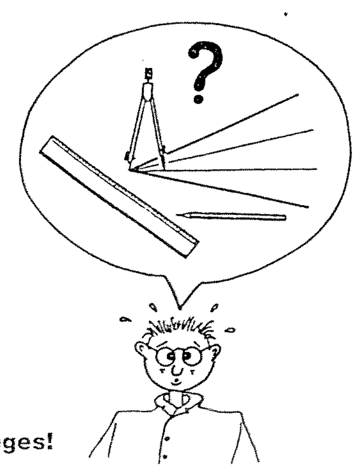


9. feladat

NIKOMEDÉSZ CONCHOIDJA

A szögharmadolás problémáját - mai tudásunk szerint - az ókori görög matematikusok vizsgálták először, s nem találtak olyan eljárást, mely bármely szög esetén körzővel és vonalzóval szerkesztette volna meg az adott szög harmadát. Nikomedész azonban i.e. 150-ben talált egy olyan geometriai eljárást, amely során felhasznál egy conchoid nevű görbét.
A conchoidot az alábbi módon tudjátok megszerkeszteni:
a) Rajzoljátok meg a válaszlap hosszabbik szimmetria tengelyét! Nevezzük d-nek ezt az egyenest.
b) A rövidebb szimmetria tengelyen vegyetek fel egy A pontot 2 cm-re a d bal oldalán!
c) Válasszatok egy P pontot a d egyenesen, és jelöljetek ki egy M és egy M' pontot az AP egyenesen 6-6 cm-re P-től, ha ez lehetséges!
Az így kapott M és M' a conchoid egy-egy pontja.
d) Ismételjétek meg a c)-ben leírtakat változtatva P helyzetét!

Szerkesszétek meg a conchoid mindkét ágát pontonként amilyen hosszan csak lehetséges!
(10 pont)



11. feladat

MASZKOT FEL !

Michel, Paul és Jean készülődnek a farsangra.
Három jelmez áll rendelkezésükre: bohóc, kalóz és szellem maszk.
Paul mondja:
- Ha Jean bohócnak öltözik, én kalóz leszek!
De ha Jean lesz a kalóz, akkor én inkább szellem leszek.
Mire Michel is megszólal:
- Ha Paul nem bohócnak öltözik be,
akkor én leszek a kalóz!
Melyik fiú milyen jelmezbe öltözött?
(5 pont)

12. feladat

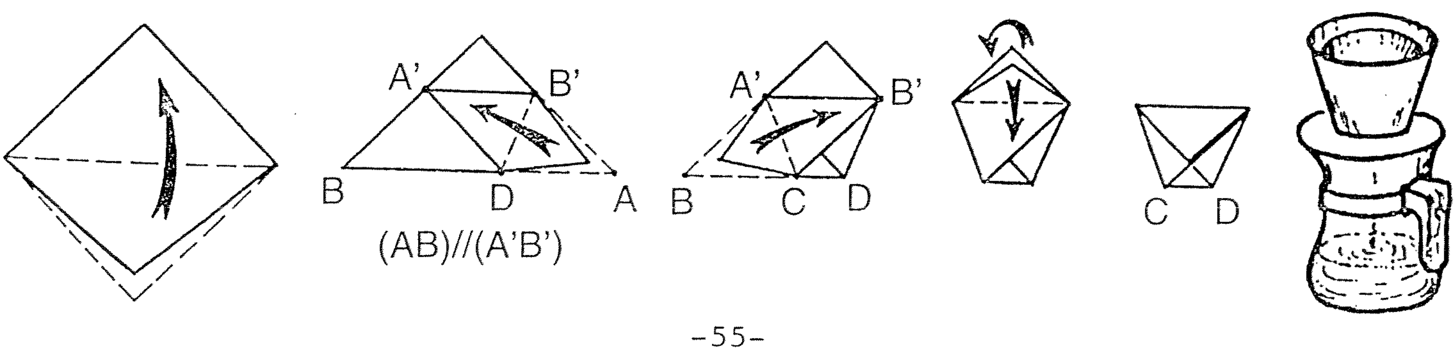
SZÜRET !

Germain gazdának két parcelláján indul a szüret. Az egyiknek a területe kétszerese a másikénak.
Az első napon a teljes szüretelő brigád a nagyobbik parcellán dolgozik.
A második napra két egyenlő létszámú munkacsoportra bomlanak, s az egyik csapat marad a nagy, míg a másik átmegy dolgozni a kisebb parcellára. A második nap végére a nagy parcellát teljesen leszüretelik, nem így a kis parcellát, amelynek teljes leszüreteléséhez két embernek egy teljes napi munkájára volt még szükség. Feltételezzük, hogy a szüretelők azonos tempóban dolgoznak, s a munkanapjuk hossza is azonos.
Hány tagja volt a szüretelő brigádnak?
(10 pont)

13. feladat

FILTERES KÁVÉ

Pierre kávéfőzőjéből kifogyott a szűrőpapír. Egy olyan négyzet alakú szalvétából hajtogat egyet, amelynek oldala 21 cm. A hajtogatást az ábra szerint végzi. Készítsétek el a hajtogatást, majd ragasszátok fel a válasz lapra! Igazoljátok, hogy az A'B'AD és A'B'CB rombusz, majd számítsátok ki a CD hosszát!
(15 pont)



ACADEMIE DE STRASBOURG
Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Konkurs matematyczny dla uczniów klas I i II szkół średnich

MATEMATYKA BEZ GRANIC

- Rozwiązania zadań 2, 4, 5, 8 i 9 nie wymagają dodatkowych objaśnień. W pozostałych zadaniach rozwiązania musza być uzasadnione.
- Dla każdego zadania przeznaczony jest osobny arkusz odpowiedzi.
- Również rozwiązania częściowe będą brane pod uwagę.

Zadanie 1
10 punktów

Pair - Impair

Rozwiązanie tego zadania proszę zredagować w jednym z następujących języków: niemiecki, angielski, francuski lub hiszpański (minimum 30 słów)

Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.

"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot. "Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."

Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.

In order to find which hand the even number of coins is in, Nicolas Chuquet says :

"Multiply the number of coins of the right hand by two, add it to the number of coins of the left hand and give me the result."

Explain Nicolas Chuquet's method.

Margot a un nombre pair de pièces dans une main et un nombre impair de pièces dans l'autre main.

Pour découvrir dans quelle main se trouve le nombre pair de pièces, Nicolas Chuquet dit :

" Multipliez le nombre de pièces de la main droite par deux, ajoutez-y le nombre de pièces de la main gauche. Donnez-moi le résultat et je vous dirai en quelle main se trouve le nombre pair de pièces".

Expliquer la méthode de Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot :

"Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda.

Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."

Explica el método de Nicolas Chuquet.

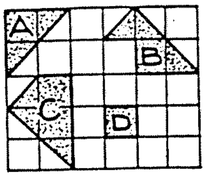
Zadanie 2
5 punktów

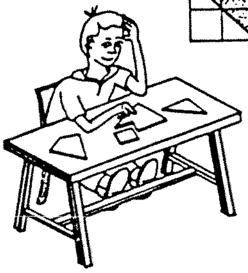
Puzzle

Stefan wyciął 4 kawałki układanki A,B,C,D o kształcie jak na rysunku.

Z trzech elementów A,B,C ułożył kwadrat. Po chwili zawołał: *„Przecież można ułożyć inny kwadrat wykorzystując wszystkie elementy układanki".*

Narysuj takie dwa kwadraty, zaznaczając ich części składowe A, B, C, D.





Zadanie 3
10 punktów

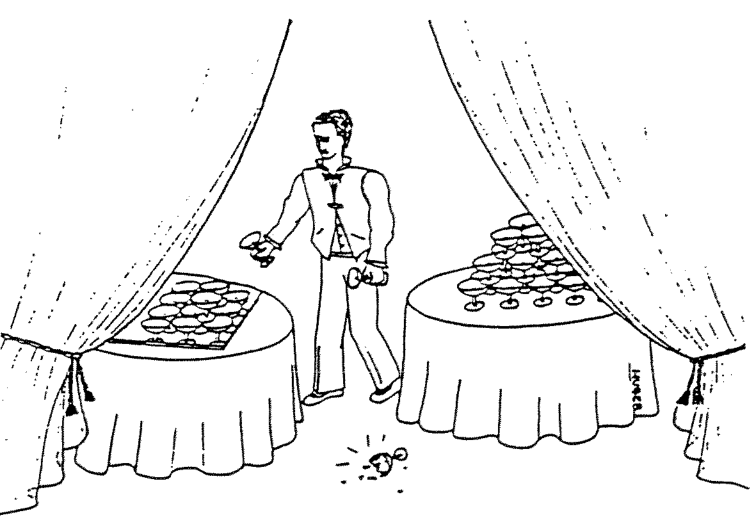
Urodziny

Przygotowując przyjęcie urodzinowe Łukasz ułożył piramidę z kieliszków. Szampan wlewany do najwyższego kieliszka przelewał się wypełniając jednocześnie wszystkie pozostałe w piramidzie.

Piramida Łukasza zbudowana była na podstawie trójkąta równobocznego. Wszystkie kieliszki stykają się ze sobą a kieliszek z wyższej warstwy stoi na brzegach trzech niższych kieliszków.

Niestety Łukasz rozbił kieliszek, który przeznaczony był na szczyt piramidy. Wykorzystując wszystkie pozostałe kieliszki rozpoczął budowę innej piramidy - na podstawie kwadratu i niższej o jeden poziom.

Ile kieliszków miał Łukasz na początku. Uzasadnij odpowiedź.



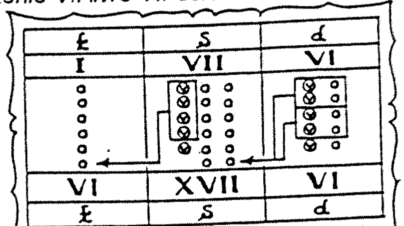
Zadanie 4
5 punktów

Tabliczka mnożenia Sylwestra II

Oto tabliczka mnożenia, której używał w X wieku Gerbert d'Aurillac , późniejszy papież Sylwester II.

Na rysunku przedstawiono mnożenie I Livre (£) VII Sols (*s*) VI Deniers (*d*) przez V. Są to średniowieczne monety francuskie; 1 livre to 20 sols, a 1 sol - 12 deniers.

Opierając się na tej zasadzie utwórz tablicę, przedstawiającą mnożenie VII livre VII sols VII deniers przez VIII.



Zadanie 5
10 punktów

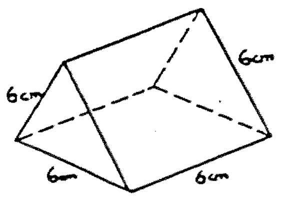
Piramida

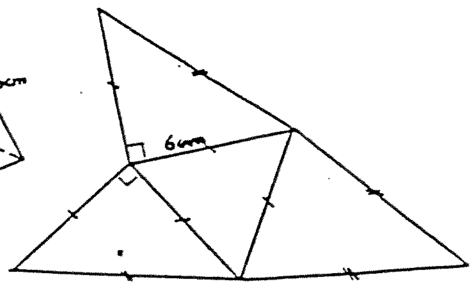
Objętość piramidy jest równa 1/3 objętości graniastosłupa o tej samej podstawie i wysokości.

Dla sprawdzenia eksperymentalnie tej właściwości rozważmy graniastosłup prosty, którego podstawa jest trójkątem równobocznym, a ściany są kwadratami. Wszystkie krawędzie mają 6 cm. Graniastosłup ten można rozłożyć na trzy piramidy o równej objętości.

Oto rysunek perspektywiczny takiego graniastosłupa oraz siatka dwóch spośród trzech piramid.

Na arkuszu odpowiedzi narysuj w skali 1:1 siatkę trzeciej piramidy.



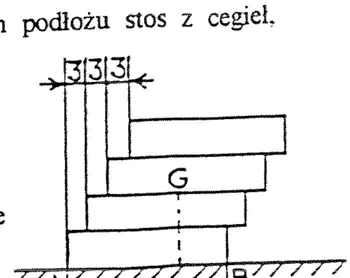


Zadanie 6
5 punktów

Jeszcze jedna cegła

Tadek ułożył na równym podłożu stos z cegieł, każda o długości 22 cm.

Każda następna warstwa jest przesunięta o 3 cm w stosunku do niższej. Konstrukcja ta będzie stabilna jeżeli środek symetrii G całej figury, rzutowany prostopadle na podłoże, będzie mieścił się pomiędzy punktami A i B.



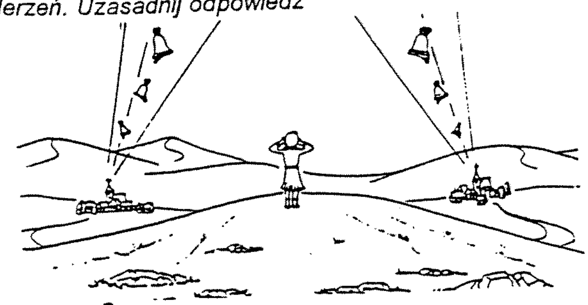
Jaka jest maksymalna liczba cegieł, jaką Tadek może ułożyć. Uzasadnij odpowiedź

Zadanie 7
10 punktów

Rezonans

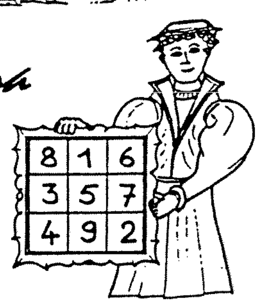
Maria spacerując po łąkach znalazła się w jednakowej odległości od dzwonnic kościelnych w dwóch sąsiadujących miasteczkach. Wówczas dzwony zaczęły jednocześnie wybijać godzinę.
Jeden z nich wybijał co 4 sekundy a drugi co 5 sekund.
Maria rozróżniała tylko te dwa uderzenia, pomiędzy którymi odstęp był większy niż 1 sekunda.

Która była godzina skoro Maria wyodrębniła w całości 13 uderzeń. Uzasadnij odpowiedź



Zadanie 8
5 punktów

Suma



Oto magiczny kwadrat. Suma liczb w każdym wierszu, kolumnie i na każdej z dwóch przekątnych jest równa.

Umieść 9 cyfr w polach kwadratu w ten sposób, aby ich sumy były wszystkie różne.

Zadanie 9
10 punktów

Konchoida

Trysekcja kąta polega na jego podziale na trzy równe kąty. Problem ten, postawiony przez antycznych Greków, nie może być rozwiązany na ogół tylko za pomocą linijki i cyrkla. Lecz Nikomed ok.150 r. p.n.e. znalazł rozwiązanie geometryczne, które wykorzystuje krzywą zwaną konchoidą.
A oto założenia konstrukcyjne:

a) wykreśl dłuższa oś symetrii arkusza odpowiedzi i oznacz ją jako d,
b) na krótszej osi symetrii zaznacz punkt A 2 cm w lewo od d,
c) obierz punkt P na d i zaznacz, jeśli to możliwe, dwa punkty M i M' na półprostej AP, które usytuowane są 6 cm od punktu A; M. i M.' sa więc dwoma punktami tworzonej konchoidy,
d) powtórz etap c) postępowania, zmieniając położenie P na d.

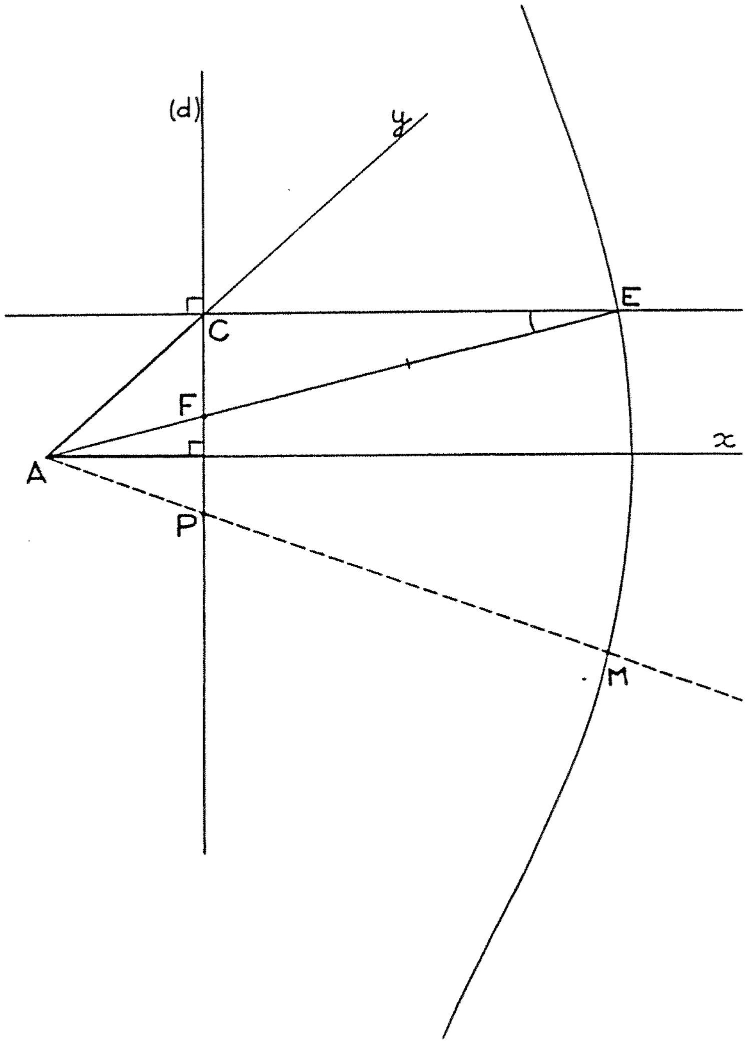
Skonstruuj, punkt po punkcie, dwie części tej krzywej, tak długie jak to tylko możliwe.

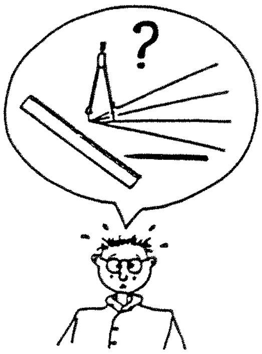
Zadanie 10
15 punktów

Trysekcja kąta

Nikomed odkrył konstrukcję pozwalającą podzielić kąt na trzy równe części.
Oto opisane przez niego postępowanie:
Chcąc dokonać trysekcji kata $\sphericalangle xAy$, figury przedstawionej na rysunku, należy obrać punkt C na ramieniu Ay, wykreślić prostą d przechodzącą przez punkt C a prostopadłą do ramienia Ax, następnie krzywą konchoidy zdefiniowaną w ten sposób: dla każdego punktu P prostej d, półprosta AP przecina krzywą w punkcie M w ten sposób, że $PM = 2AC$. Prosta prostopadła do d, przechodząca przez punkt C, przecina krzywą w punkcie E.

Udowodnij, że kąt $\sphericalangle xAE$ stanowi 1/3 kąta $\sphericalangle xAy$. Nie jest konieczne konstruowanie konchoidy.





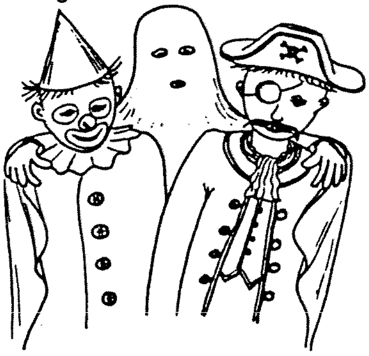
Zadania dla klas II

Zadanie 11
5 punktów

Maskarada

Piotr, Paweł i Jan przygotowują się do balu karnawałowego. Dysponują trzema strojami: pirata, ducha i clowna, po jednym dla każdego.
Paweł mówi : *„Jeśli Jan przebierze się za clowna więc ja ubiorę strój pirata, ale jeśli Janek przebierze się za pirata, wówczas ja będę duchem".*
Piotr stwierdza więc: *„Jeżeli Paweł nie przebierze się za clowna wówczas ja będę duchem".*

Jakie są przebrania każdego z nich.



Zadanie 12
10 punktów

Winobranie

Krzysztof był jednym spośród zbierających winogrona na dwóch plantacjach, z których jedna jest dwa razy większa od drugiej.

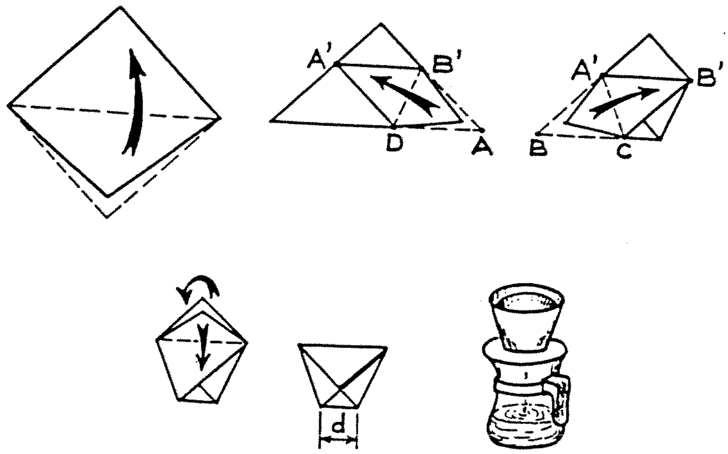
Pierwszego dnia cała grupa robotników pracowała na dużej plantacji. W drugim dniu, grupa podzieliła się na dwa zespoły - jedna z nich pozostała na dużej plantacji, podczas gdy druga pracowała na mniejszej. Pod koniec drugiego dnia, zbiory na dużej plantacji zostały zakończone. Natomiast przy pracy na małej plantacji zajętych było dwóch robotników jeszcze przez cały trzeci dzień.
Należy przypuszczać, że robotnicy pracowali w tym samym tempie, a ich dzień pracy trwał tyle samo godzin.

Ile osób liczyła grupa robotników. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 13
15 punktów

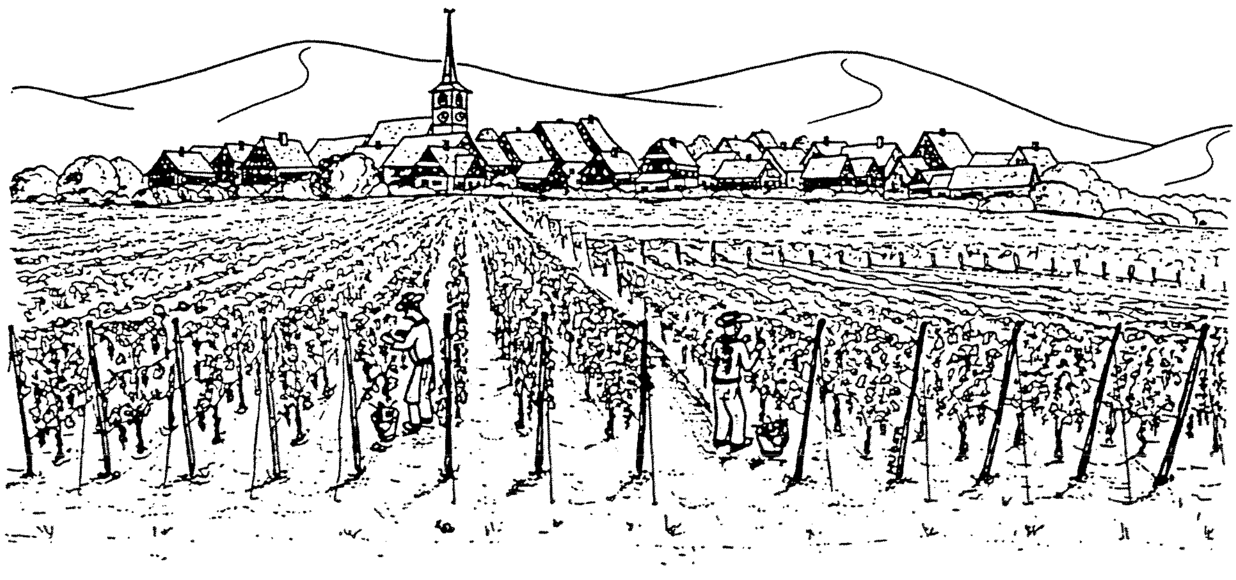
Mocna kawa

Piotr przygotowując filtr do swojego ekspresu do kawy wykorzystuje arkusz kwadratowej bibuły o boku długości 21 cm, składając ją następująco:



Zastanawia się jednocześnie czy taki filtr będzie mieścił się do ekspresu. Stanie się tak jeśli odległość AB będzie mniejsza niż 5 cm.

Wykonaj taki filtr i przyklej go na arkuszu odpowiedzi, a następnie znajdź odpowiedź na problem Piotra udowadniając jednocześnie, że A'B'AD i A'B'CB są rombami oraz obliczając CD.



МАТЕМАТИКА
без границ

MATHEMATIK
ohne Grenzen

MATHEMATIQUES
sans frontieres

Краснодар
14.03.1998

Математика без границ

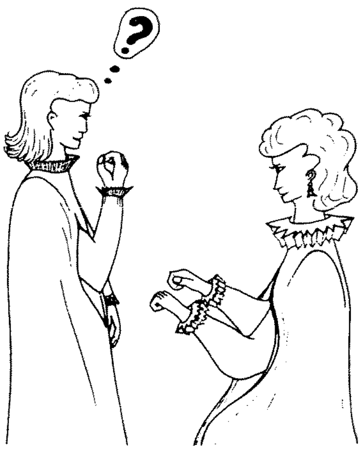
- Для 2,4,5,8 и 9 задания объяснение не требуется.
- Все остальные решения должны иметь обоснования.
- Оценивается также оформление.
- Для каждого задания используется отдельный лист.

Задание 1. (10 баллов) Очень просто

Решение этого задания даётся одном из четырёх иностранных языков и должно минимально содержать 30 слов.

Margot a dans sa main un nombre pair et dans l'autre un nombre impair de pièces.
Nicolas Chuquet dit à Margot:
«Multipliez le nombre de pièces de la main droite par deux et ajoutez y le nombre de pièces de la main gauche. Donnez moi le résultat et je vous dirai, en quelle main se trouve le nombre pair de pièces.»

Expliquer la méthode de Nicolas Chuquet.



Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.
In order to find out which hand is holding the even number of coins, Nicolas Chuquet says:
«Multiply the number of coins in your right hand by two, add the product to the number of coins in your left hand and give me the result».

Explain the method of Nicolas Chuquet.

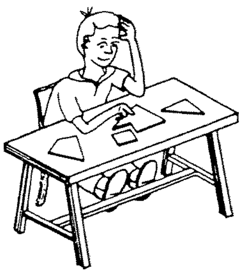
En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un numero impar de monedas.
Nicolas Chuquet le dice a Margot:
«Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene de la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dìgame cuàl es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas».

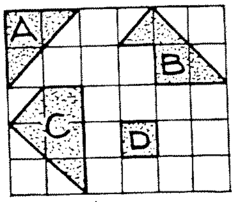
Explica el metodo de Nicolas Chuquet.

Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari.
Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma:
«Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi il numero delle monete contenute nella mano sinistra e ditemi il risultato».

Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

Задание 2. (5 баллов) Квадрат





Этине вырезал четыре фигурки ABC и D, которые показаны на рисунке. Три части ABC он сложил без промежутков вместе так, чтобы получился квадрат.

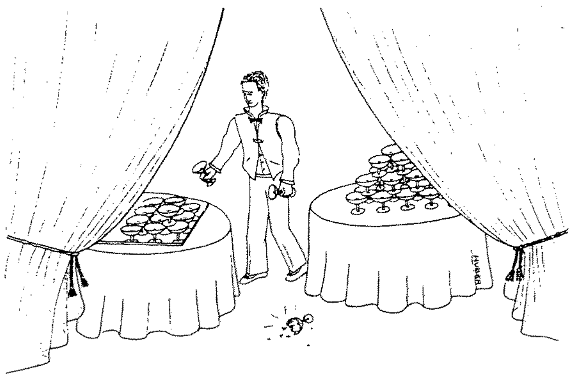
Вдруг он понял, что из всех четырёх фигурок можно сложить квадрат.

Нарисуй оба типа квадратов так, чтобы их составные части были видны на рисунке.

Задание 3. (10 баллов) С днём рождения!

Лукас решил торжественно отметить свой день рождения. Он придумал пирамиду из фужеров для шампанского. Шампанское льётся в верхний бокал, затем оттуда переливается в нижние бокалы, до тех пор, пока все бокалы не заполнятся.

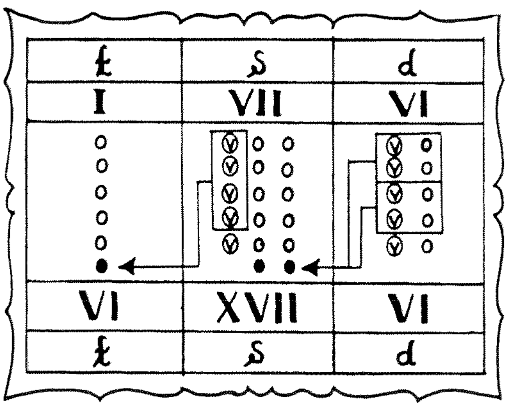
Основание пирамиды образует равносторонний треугольник, в котором соприкасаются соседние фужеры. Каждый фужер следующего уровня стоит на трёх фужерах предыдущего уровня.



Как раз когда Лукас ставил наверх последний фужер, тот упал вниз и разбился. Тогда Лукас построил пирамиду с квадратным основанием. Но в этом случае она получилась на один этаж меньше чем прежде.

Сколько фужеров было у Лукаса сначала? Обоснуй ответ.

Задание 4. (5 баллов) Доска для счёта



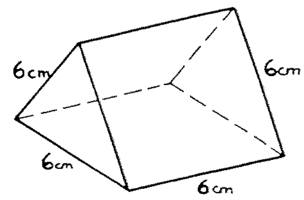
На рисунке показана доска для счёта придуманная Гербертом д'Аирилье, который позже был известен под именем Папы Сильвестра II.

На доске показано умножение 1 ливра 7 солей 6 денье на 5.Это денежные единицы: 1 ливр соответствует 20 солям и 1 соль соответствует 12 денье.

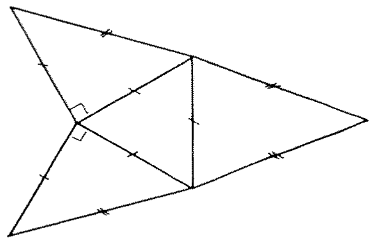
Нарисуй по этому образцу такую же доску для счёта, на которой было бы умножение 7 ливров 7 солей и 7 денье на 8.

Задание 5. (10 баллов) Спрятанная пирамида

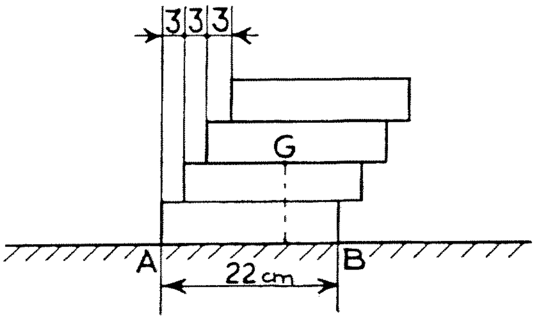
Призму с одинаковой высотой и стороной основания можно разложить на три пирамиды одинакового объёма. Чтобы проверить, так ли это на самом деле, рассмотрим призму, основанием которой является равносторонний треугольник и чьи боковые грани квадратные. Длина ребер 6 см.



Эту призму можно разложить на три пирамиды, имеющие одинаковую площадь. Развертка двух этих пирамид и проекция призмы даны на рисунках. ***Нарисуй развертку третьей пирамиды в натуральную величину.***



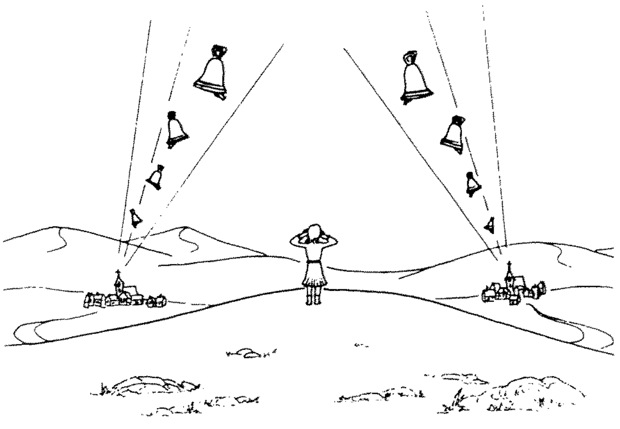
Задание 6. (5 баллов) Камень на камне



На плоской поверхности Тьерри сложил квадратные блоки друг на друга в виде лестницы и склеил их вместе. Все блоки длиной 22 см и выступают наружу на 3 см так, как показано на рисунке. Фигура опрокинулась, как только центр тяжести G, являющийся одновременно центром симметрии фигуры, перестал находится между точками A и B.

Сколько блоков можно максимально положить друг на друга до того как фигура опрокинется? Обоснуй.

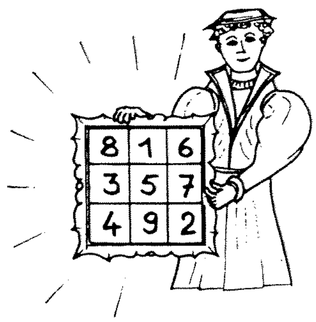
Задание 7. (10 баллов) Бой часов



Мари идет по полю. Она находилась на одинаковом расстоянии от церквей двух деревень, когда часы на их башнях начали отбивать время. Удары одних часов следовали с интервалом 4 секунды, а других - с интервалом 5 секунд. Мари может различить два удара, если интервал между ними больше секунды.

В какое время Мари услышит тринадцать различимых ударов? Обоснуй.

Задание 8. (5 баллов) Без колдовства



На магическом квадрате, показанном на рисунке, сумма чисел в каждой строке, колонке, и по диагонали одинакова.

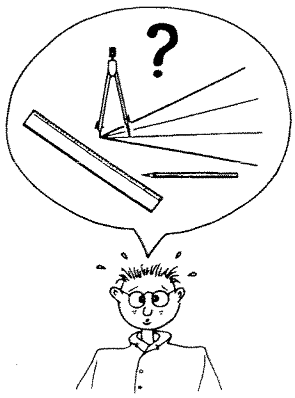
Переставь девять чисел так, чтобы значения названных сумм были отличны друг от друга и проставь их по краю квадрата.

Задание 9. (10 баллов) Никомед ...

Разложение угла на три равновеликих части занимались ещё математики с античных времен. Только циркулем и линейкой провести это деление невозможно.

За 150 лет до н.э. Никомед нашел геометрическое решение.

Он использовал кривую, которая стала известна как конхоида Никомеда. Ниже приведено описание такой кривой.



a) Начерти на листе сверху вниз ось симметрии и назови её d.

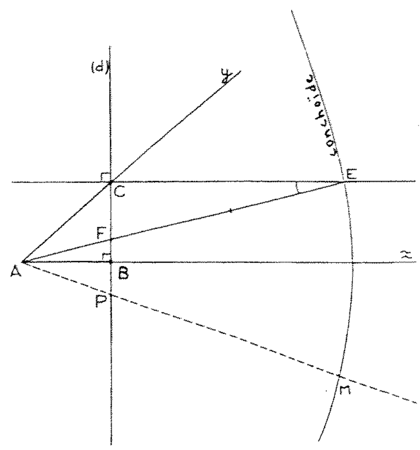
b) Начерти 2-ю ось симметрии перпендикулярно к d, на которой поставь точку A, на 2 см левее d.

c) Выбери произвольно точку P на d и (если возможно) две точки M и M' на прямой (AP), которые находятся на расстояние 6 см от P. M и M' - точки конхоиды.

d) Измени положение P на d и повтори пункт c) для получения других точек конхоиды.

Построй по точкам кривую. Обе части, из которых образуется кривая, должны быть максимально длинными.

Задание 10. (15 баллов) ... И его трисекция угла



В своем делении угла на три части с помощью конхоиды Никомед описал следующий способ (см. рис.)

Угол $\angle(xy)$ с вершиной A необходимо разложить на три равновеликие части.

Выбирают точку C на y. Через C проводят перпендикуляр к лучу x. Конхоида определяется следующим образом: если любая точка P лежит на d и луч [AP) пересекает конхоиду в M, то $PM=2\cdot AC$.

Покажи: если перпендикуляр к d через C пересекает конхоиду в точке E, то $\angle BAE = \frac{1}{3}\angle BAC$. ***Построение конхоиды не требуется.***

Только для 11-х классов

Задание 11. (5 баллов) Кто есть кто

Петер, Пауль и Йоханес решили пойти на карнавал. Для каждого есть костюм: клоун, привидение и пират.
«Если Йоханес будет клоуном, я буду пиратом!»- воскликнул Пауль . «Но если Йоханес переоденется в пирата, то я буду привидением» - добавил он.
«Но если Пауль не будет клоуном, то я переоденусь пиратом!»- возразил Петер. Все высказывания справедливы.
Кто в каком костюме пойдёт на праздник? Объясни.

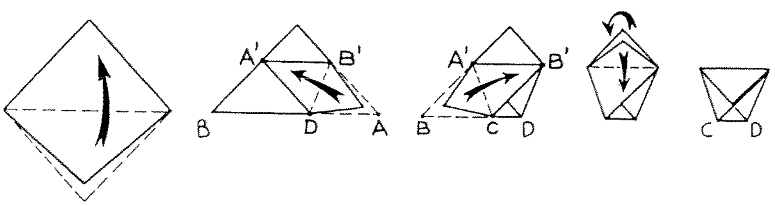
Задание 12. (10 баллов) Уборка винограда

Герман владеет двумя виноградниками, один из которых вдвое больше другого. В первый день сбора винограда все рабочие были заняты на большом винограднике. Во второй они разделились на две одинаковые группы. Первая группа продолжала работу в большом винограднике, а вторая начала работу в маленьком.
В конце второго дня большой виноградник был убран. Для того, чтобы закончить сбор во втором винограднике, двое рабочих были заняты весь следующий день.

Время работы за эти три дня было одинаково и все рабочие работали в одинаковом темпе.
Сколько рабочих было занято на сборе винограда? Ответ обоснуй.

Задание 13. (15 баллов) Без фильтра

У Пьера закончились фильтры. Он берет бумажное кухонное полотенце со стороной 21 см и складывает фильтр так, как показано на рисунке. Но подойдет ли его фильтр к отверстию? Для этого отрезок CD должен быть меньше 5 см.



Сделай такой фильтр и приклей его на лист ответа. Вычисли, действительно ли фильтр подходит к отверстию, для этого сначала покажи, что четырехугольники DAB'A' и BCB'A являются ромбами.

Ответы

Задание 1.

Умножается количество монет в правой руке на 2, таким образом получается чётное число . К этому прибавляют монеты левой руки , тогда получается нечётное число, если количество монет в левой руке нечётное. В противном случае получится чётное число.

Задание 3.

Число этажей:	1	2	3	4	5	6
Число фужеров (треугольное)	1	4	10	20	35	**56**
Число фужеров (квадратное)	1	5	14	30	**55**	

Вначале у Лукаса было 56 фужеров.

Задание 4.

Ливры	**Соли**	**Денье**
VII	VII	VII
V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O ● ● ●	V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O ● ● ● ●	V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O V O O
LIX		VIII
Ливры	**Соли**	**Денье**

Задание 6.

Центр тяжести первого блока лежит в центре AB . С Добавлением ещё одного слоя, центр тяжести отклоняется вправо на 1,5 см. Пусть n будет число добавленных блоков. Тогда $1{,}5\ n<11$ и $n<=7$

Вместе с первым блоком друг на друга можно максимально положить 8 блоков.

Задание 7 .

Отмечают секунды, когда били часы. К девятому удару складывается следующая ситуация:

Первые часы: **0**, **4**, 8, 12, **16**, **20**, **24**, 28, 32

Вторые часы: **0**, **5**, 10, **15**, **20**, **25**, 30, 35, 40

Выделенные жирным шрифтом удары слышатся вместе. Всего слышно 13 ударов, значит сейчас 9 часов.

Задача 8.

Есть несколько решений. Вот один из примеров.

	2	3	4	9
	5	1	7	13
	9	6	8	23
14	16	10	19	11

Задача 10.

Пусть $\angle$ BAF = α. Т.к. d' || x ,то $\angle$ CEF = α , O - центр FE

Пусть $\angle$BAF = α. Т.к. d' || x, то $\angle$CEF = α. O - центр FE. Окружность через FE пройдет через C (поскольку d $\perp$ d'). Треугольник OEC равнобедренный, поэтому $\angle$OCE = α. Для внешнего угла COF верно $\angle$COF = 2α.

Т.к. FE = 2AC, треугольник AOC равнобедренный и $\angle$OAC = 2α.

Следовательно, $\angle$BAC = 3α.

Задача 11.

Есть 6 различных возможностей переодевания :

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
Пауль	К	Пр	П	Пр	К	П
Петер	П	К	Пр	П	Пр	К
Йоханес	Пр	П	К	К	П	Пр

Если Йоханес переоденется клоуном , то Пауль будет пиратом. Тогда выпадает возможность d. Если Йоханес будет пиратом, то Пауль - приведением. Это возможность e. Если Пауль не переоденется клоуном ,то Петер переоденется пиратом. Это возможность b или f. Остаётся возможность a, которая не противоречит ни одному из трёх высказываний.

Задача 12.

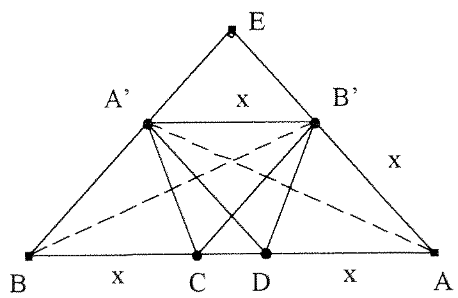
Пусть x - число рабочих , а a - площадь , которую за день обрабатывают рабочие. Тогда A - площадь большого , а B - площадь маленького виноградника.

$A = x\cdot a + 0{,}5x\cdot a$ и $B = 0{,}5x\cdot a + 2a$

$A = 2B \Rightarrow xa + 0{,}5xa = 2(0{,}5xa + 2a) \Rightarrow x = 8$

Задача 13.

A и A' лежат симметрично к DB', поэтому AA' делится DB' напополам. Т.к. A'B' параллельно AB, то $\overline{A'B'} = \overline{AD} = x$. Так как $\overline{AB'} = x$, четырехугольник AB'A'D - ромб.



Доказательство для второго четырехугольника проводится аналогично.

Имеем $\overline{EB'} : \overline{EA} = x : \overline{AB}$.

Из $\overline{EA} = 21$, $\overline{EB'} = 21 - x$ и $\overline{AB} = 21\cdot\sqrt{2}$ следует $\dfrac{21-x}{21} = \dfrac{x}{21\cdot\sqrt{2}}$ и $x = 21\cdot(2-\sqrt{2})$.

$\overline{CD} = 21\cdot\sqrt{2} - 2x \approx 5{,}095$.

Таким образом, фильтр немного велик. Но если его немного сжать, он тем не менее подойдет.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1998-1999

10ème édition

Les exercices n° 2, 5, 6, 7 et 9 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.

Langue vivante

10 points

Exercice 1
Tour de magie

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien
(en un minimum de 30 mots).

Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you :"what is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower ?"

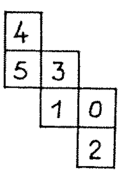
How will you go about it ? Explain your answer.

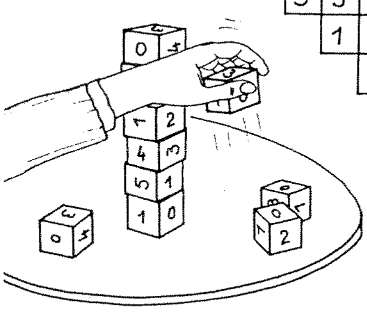
Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos.
Aquí está el modelo de uno de ellos.
Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿ Cómo lo resuelve usted ? Explicar la respuesta.

Pierre hat einen Turm aus 10 gleichen Würfeln gebaut, welche er aufeinandergelegt hat. Das Netz eines dieser Würfel ist hier zu sehen.
Pierre verrät dir die Zahl, welche auf der obersten Würfelseite des Turmes geschrieben steht und fragt dich nach der Summe der Zahlen auf allen sichtbaren Seiten des Turmes.

Wie gehst du vor ? Erkläre deine Antwort.



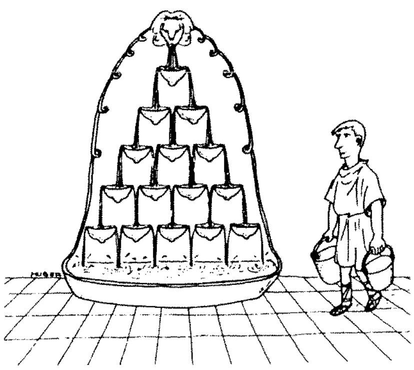


Piero ha costruito una torre impilando su un tavolo 10 cubi identici. Ecco in figura il modello esploso di uno dei cubi. Piero vi comunica il numero scritto sulla faccia superiore della torre e vi domanda la somma dei numeri scritti su tutte le facce visibili della torre.

In che modo procedete ? Giustificate la vostra soluzione.

5 points

Exercice 2
Fontaine romaine

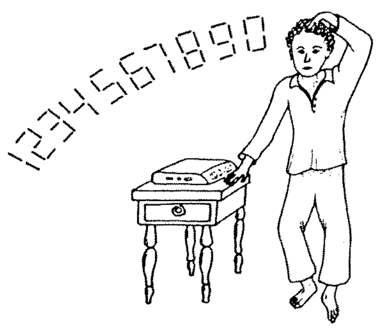


Toutes les vasques de la fontaine ci-dessus débordent. A chaque étage la moitié du volume ajouté à une vasque s'écoule dans chacune des deux vasques placées en dessous. Pendant la journée un mètre cube coule dans la vasque supérieure.

Exprimer sous forme de fraction de ce mètre cube le volume d'eau s'écoulant dans chaque vasque de la fontaine.

10 points

Exercice 3
Panne de réveil

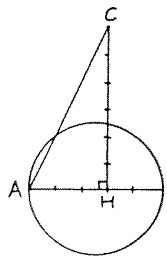


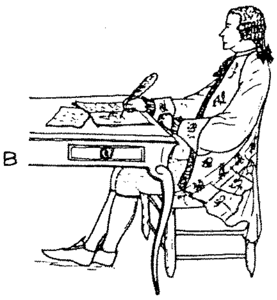
Les chiffres du réveil de Henri sont formés à partir de 7 segments dont certains sont éclairés et d'autres non. Un des segments est défectueux et ne s'allume plus. A cause de cela, après avoir regardé son réveil, il s'est levé une heure plus tôt que d'habitude.

Quel est le segment défectueux ? Justifier la réponse.

5 points

Exercice 4
To Π or not to Π





Vers 1680, Thomas Hobbes proposa les étapes de la construction suivante :

- Construire un cercle de 1 décimètre de diamètre.
- Partager un de ses diamètres en 5 parties égales.
- Enfin construire le triangle rectangle AHC tel que HC = 6/5 dm comme sur la figure ci-dessus.

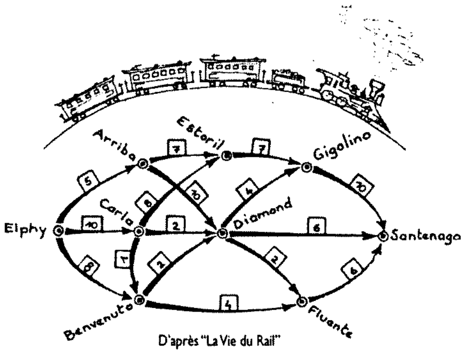
Il prétendit alors que le périmètre du triangle AHC est exactement égal à π dm.

Que pensez-vous de l'affirmation de Thomas Hobbes ? Justifiez la réponse.

Exercice 5
10 points
Train train

Sur le réseau ferroviaire on a indiqué sur chaque tronçon entre deux villes le nombre maximum de trains qui peuvent passer par jour dans le sens indiqué. Le trajet entre Elphy et Santenago se fait en moins d'un jour. Un jour, il peut partir au plus 23 trains d'Elphy.

Combien de ces trains, au maximum, peuvent parvenir dans la journée à Santenago ? Reproduire le réseau ferroviaire et, pour les trains qui arrivent à Santenago, indiquer sur chaque tronçon emprunté le nombre de ces trains qui passent.

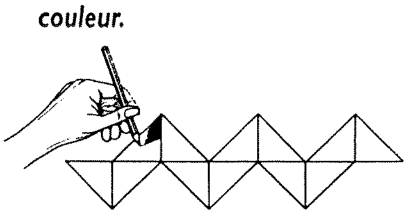


D'après "La Vie du Rail"

Exercice 6
5 points
Serpent à cube

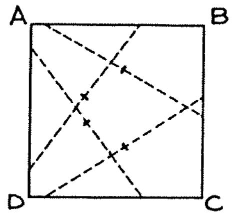
La figure ci-dessous est formée de triangles rectangles isocèles. C'est en fait une facétie de notre dessinateur qui a ainsi représenté un patron de cube.

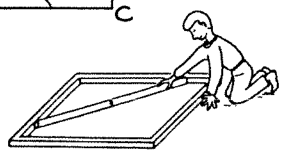
Reproduire ce patron sur la feuille réponse et, en utilisant 3 couleurs différentes, colorier les faces du cube, deux faces parallèles étant de même couleur.



Exercice 7
10 points
A tout carreau

ABCD est un carré de 13 cm de côté. Une tige de longueur 15 cm est placée à l'intérieur de ce carré de façon que ses deux extrémités appartiennent à deux côtés consécutifs du carré.





Construire la courbe décrite par le milieu de la tige quand celle-ci occupe toutes les positions possibles.

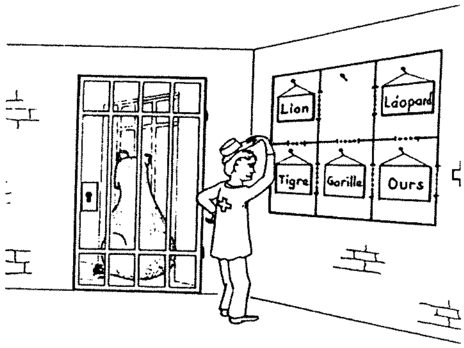
Exercice 8
5 points
Morceaux de mon moulin

Le meunier a cassé sa meule de pierre en 3 morceaux de 1 kg, 3 kg et 9 kg. Mais il constate qu'à l'aide de ces trois morceaux et d'une balance à deux plateaux, il peut maintenant peser tout objet de masse entière comprise entre 1 kg et 13 kg.

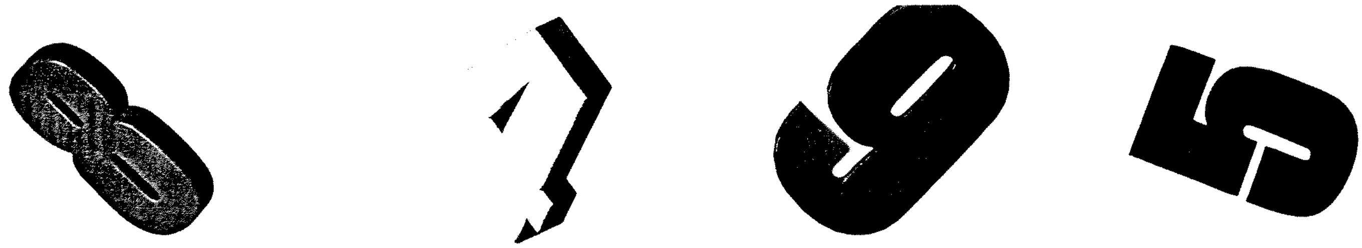
Afin de redonner une nouvelle vie aux morceaux de la meule, expliquer comment procède le meunier pour peser les 13 objets.

Exercice 9
10 points
Quel cirque !

Voici le plan d'une ménagerie un peu spéciale. Il n'y a qu'une porte d'entrée par l'infirmerie et les cages sont toutes reliées entre elles par des portes. Pour surveiller l'ours qui a été soigné à l'infirmerie, il faut qu'il aille dans la cage du léopard. Mais pour soigner le léopard, il faut l'amener face à l'infirmerie. Il est impossible de faire sortir les animaux car ils sont trop dangereux mais on peut seulement faire passer une bête de sa cage dans une cage vide.



Ecrire sur la feuille réponse la liste, dans l'ordre, des animaux qu'il faut faire passer dans la cage vide pour échanger les positions de l'ours et du léopard.



15 points

Exercice 10

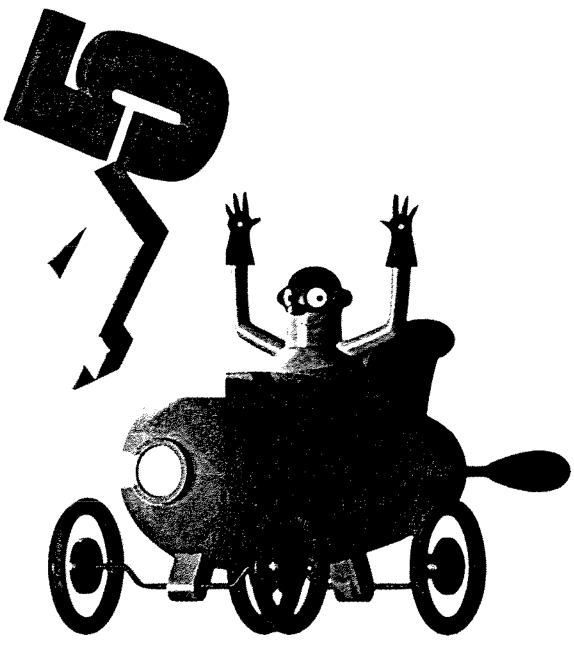
Dodécarrelages

Gontran le châtelain a une figure favorite : le dodécagone régulier qui a 12 côtés. Aussi décide-t-il de faire carreler la grande salle du château avec des dodécagones réguliers de 20 cm de côté.
Ils sont disposés de façon que leurs centres forment un réseau de carrés.

Il subsiste alors une figure entre quatre dodécagones voisins.

Construire quatre dodécagones ainsi placés, chacun étant en contact avec 2 autres par un de ses côtés.

Calculer l'aire réelle de la figure entourée par 4 dodécagones de 20 cm de côté, voisins du carrelage.



Seconde

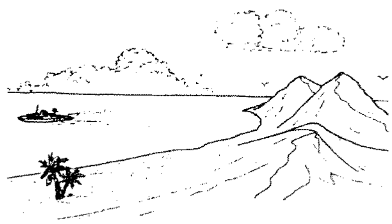
5 points

Exercice 11

Corvette en tête

Quelque part en mer une flottille navigue à cap constant à la vitesse de 12 nœuds, c'est-à-dire 12 milles par heure. Une corvette part en avant pour reconnaître le secteur ; sa vitesse passe alors à 24 nœuds. Après avoir parcouru 60 milles, la corvette fait demi-tour pour rejoindre le reste de la flottille.

Quel temps, en heures et en minutes, s'est-il écoulé entre le départ et le retour de la corvette, en supposant les vitesses constantes entre ces deux instants ?

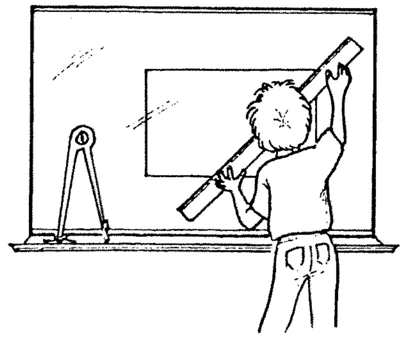


10 points

Exercice 12

Was ist das ?

Pierre, Paul et Jacques s'entraînent pour le concours de Mathématiques Sans Frontières.
Ils tracent chacun les quatre bissectrices des angles d'un rectangle. Celles-ci se coupent deux à deux en quatre points qui semblent former un quadrilatère particulier.
- C'est un rectangle, dit Pierre.
- Moi je pense que c'est un losange, dit Paul.
- Et si c'était un carré ? dit Jacques.



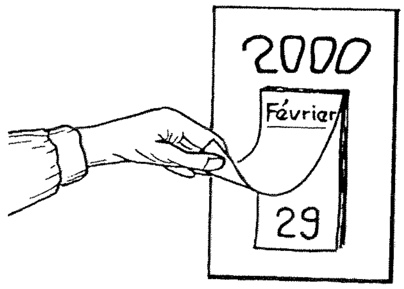
Faire la figure et dire qui a raison. Justifier la réponse.

15 points

Exercice 13

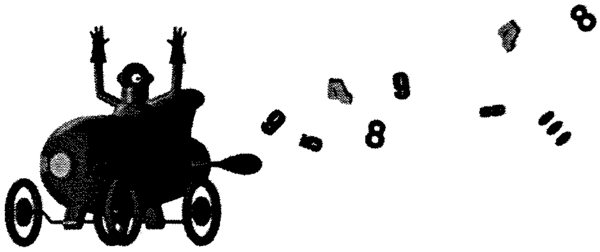
Révolution de calendrier

Le temps moyen de révolution de la terre autour du soleil est environ égal à 365,2422 jours.
Puisque le nombre de jours par an est un nombre entier, Jules César a introduit les années bissextiles.
Plus tard, le Pape Grégoire a instauré la règle suivante ;
Les années bissextiles sont celles dont le numéro est multiple de 4 avec une exception pour les années multiples de 100 ; parmi celles-ci, seules celles dont le nombre de centaines est multiple de 4 sont bissextiles.
Ainsi 1900 n'était pas bissextile, mais 2000 le sera.



Expliquez cette particularité en calculant le nombre d'années bissextiles nécessaires en 400 ans.

Cette règle vous paraît-elle immuable ?



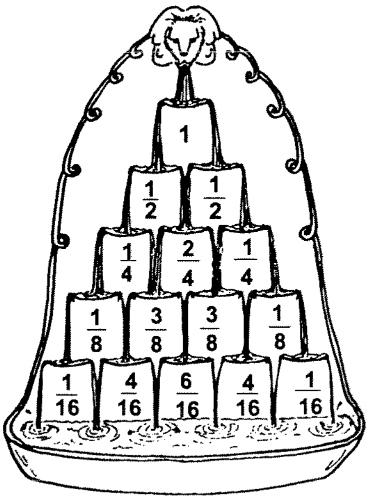
MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES
Indications de solutions pour l'épreuve d'entraînement de décembre 1998

Exercice n°1 **10 points** *Tour de magie*

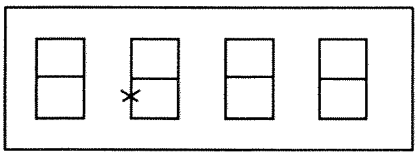
La somme des nombres de deux faces parallèles est 5 ; celle de quatre faces latérales d'un cube est 2x5 = 10, donc la somme des nombres de toutes les faces latérales des 10 cubes de la tour est 100.

Si n est le numéro inscrit sur la face supérieure, la somme des nombres des faces visibles est : $\mathbf{100 + n}$.

Exercice n°2 **5 points** *Fontaine romaine*

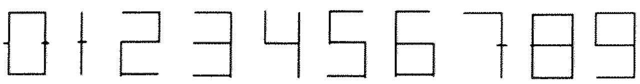


Exercice n°3 **10 points** *Panne de réveil*



a b c d

Le segment défectueux est en ***b***, à cause du décalage d'une heure. Ci-dessus, la croix indique le segment défectueux : lorsqu'il est ***8 heures***, le réveil affiche ***9 heures***. C'est la **seule** solution :

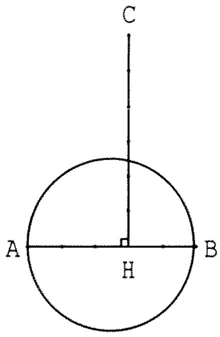


6 2 5 <u>5</u> 4 <u>4</u> 5 6 3 <u>7</u> <u>6</u>

Ci-dessus, figure le nombre de segments utilisés pour chaque chiffre. Il est nécessaire d'avoir, pour qu'il y ait une solution, un segment de moins quand on passe d'une heure à la suivante. Or 3 et 4 ne conviennent pas, et seulement avec 8 h et 9 h cela est réalisé.

Attention, quand on passe de 5 h à 6 h, le réveil continue d'afficher 5 h, et cela ne correspond évidemment pas à la situation où on se lève plus tôt !

Exercice n°4 **5 points** *To π or not to π*



D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHC rectangle en H,

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{45}{25}$$

d'où $AC = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ dm$.

Le périmètre du triangle AHC est

$$P = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5}\ dm$$

$P \approx 3{,}141640786$. Or $\pi \approx 3{,}1415926535$

(« Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages »).

Thomas Hobbes a tort, mais sa construction donne une approximation de π à 5×10^{-4} près par excès.

Exercice n°5 **10 points** *Train-train*

Dans la journée, il ne peut arriver plus de 22 trains (= 10 + 6 + 6) à Santenago.

Peuvent passer par Diamond : 5 trains au plus d'Arriba (car 5 au plus d'Elphy à Arriba), 2 au plus venant de Carla et 2 au plus venant de Benvenuto, donc 9 trains.

Peuvent passer par Gigolino sans passer par Diamond : au maximum 7 trains.

Peuvent passer par Fluente sans passer par Diamond : au maximum 4 trains.

En un jour, il ne peut donc y avoir plus de 20 trains de Elphy à Santenago.

Par exemple, 20 trains peuvent passer de la façon suivante :

$E \xrightarrow{5} A \xrightarrow{5} D \xrightarrow{3} G \xrightarrow{3} S$
$\qquad\qquad\qquad\quad \xrightarrow{2} F \xrightarrow{2} S$

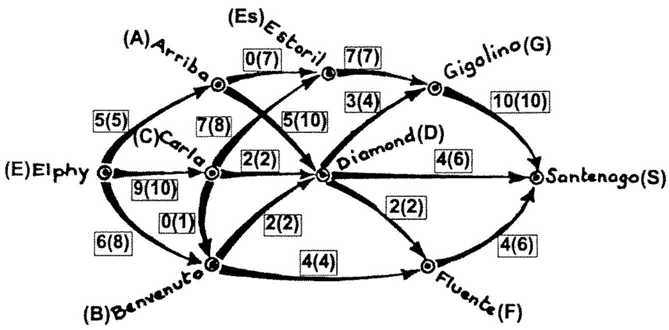
$E \xrightarrow{7} C \xrightarrow{7} Es \xrightarrow{7} G \xrightarrow{7} S$

$E \xrightarrow{2} C \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} S$

$E \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} S$

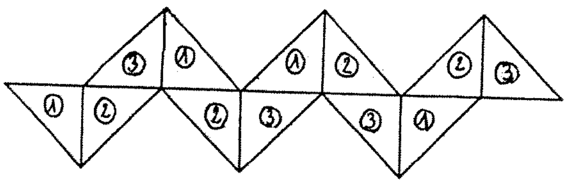
$E \xrightarrow{4} B \xrightarrow{4} F \xrightarrow{4} S$

Ci-dessous le nombre de trains, dans ce cas, sur chaque tronçon (entre parenthèses, le nombre maximal possible sur le tronçon correspondant).

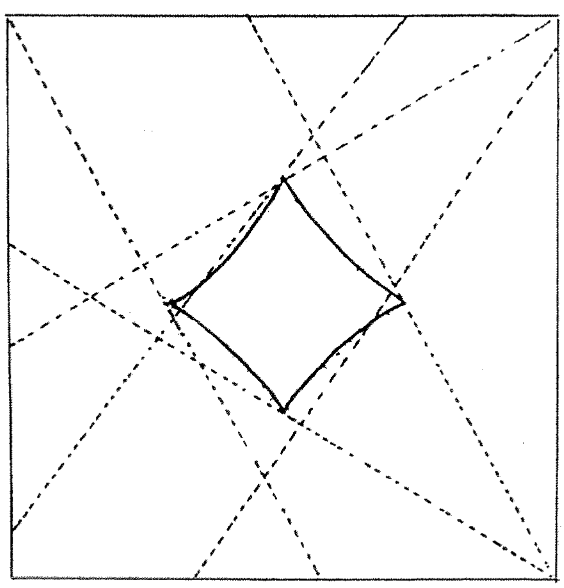


Exercice n°6 5 points *Serpent à cube*

①, ② et ③ désignent les trois couleurs.



Exercice n°7 10 points *A tout carreau*



Exercice n°8 5 points

Morceaux de mon moulin

1kg	=	1kg
2kg + 1kg	=	3kg
3kg	=	3kg
4kg	=	3kg + 1kg
5kg + 1kg + 3kg	=	9 kg
6kg + 3 kg	=	9kg
7kg + 3kg	=	9kg + 1kg
8kg + 1 kg	=	9kg
9kg	=	9kg
10kg	=	9kg + 1kg
11kg + 1kg	=	9kg + 3kg
12kg	=	9kg + 3kg
13kg	=	9kg + 1kg + 3kg

Remarque : avec les masses marquées 1 kg, 3 kg, 9 kg et 27 kg (les puissances successives de 3), on peut peser tous les objets de masse entière comprise entre 1 kg et 40 kg car :

$40 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$.

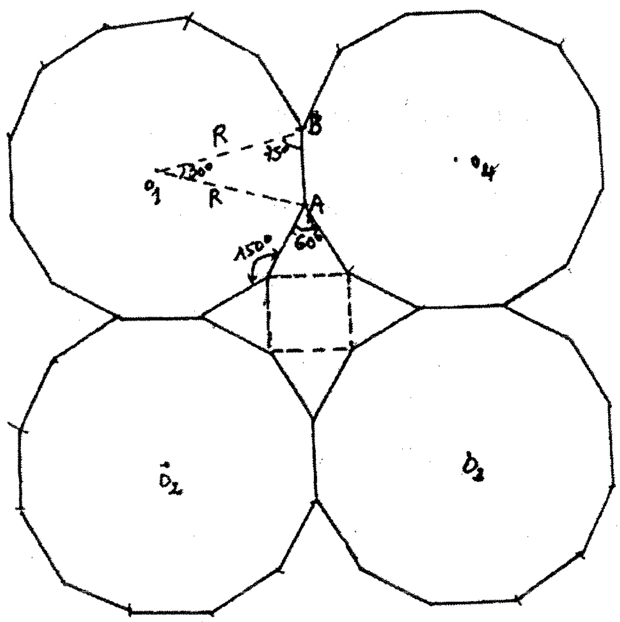
Exercice n°9 10 points *Quel cirque !*

4	3	2
5	6	1

Au début :
Ou (ours) → 1, Léo (léopard) → 2, vide : 3, Li (lion) → 4, Ti (tigre) → 5, Go (gorille) → 6.

Par exemple, faire : Léo → 3, Ou → 2, Go → 1, Ti → 6, Li → 5, Léo → 4, Ou → 3, Go → 2, Ti → 1, Ou → 6, Go → 3, Ti → 2, Ou → 1, Li → 6, Léo → 5, Go → 4, Li → 3, Léo → 6, Go → 5, Li → 4, Ti → 3, Ou → 2, Léo → 1.

Exercice n°10 15 points *Dodécarrelages*



Remarque : pour la figure, utiliser $AB = 2R\cos 75°$

donc $R = \dfrac{AB}{2\cos 75°}$ où $AB = 20$ cm.

La figure entourée de 4 dodécagones voisins est formée d'un carré de côté $c = AB$ et de 4 triangles équilatéraux de même côté $c = AB$.

Son aire est $A = c^2 + 4\left(\dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

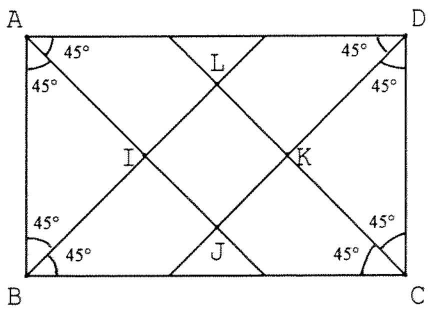
$\boxed{A = c^2(1+\sqrt{3}) = 400\,(1+\sqrt{3})\,cm^2}$

Exercice n°11 5 points *Corvette en tête*

Au moment où la corvette fait demi-tour, elle a parcouru 60 milles ; donc le reste de la flottille, qui va deux fois moins vite, a parcouru 30 milles (et se trouve à 30 milles de la corvette).

Donc la corvette est de retour après avoir fait 20 milles en sens inverse (le reste de la flottille, qui va deux fois moins vite, fera 10 milles). En tout, la corvette aura fait 80 milles en $\dfrac{80}{24} = 3\text{ h}\,\dfrac{1}{3} = 3\text{ h }20\text{ min}$.

Exercice n°12 10 points *Was ist das ?*



Dans chacun des triangles AIB, DKC, BCL et AJD, il y a deux angles de 45°, donc les angles $\widehat{LIJ}$ (= $\widehat{AIB}$), $\widehat{LKJ}$ (= $\widehat{DKC}$), ainsi que $\widehat{BLC}$ et $\widehat{AJD}$ sont droits, donc le quadrilatère IJKL est un rectangle.

De plus les triangles AIB, BCL, AJD et DKC sont isocèles, donc I appartient à la médiatrice de [AB], de même K, J, L appartiennent respectivement aux médiatrices de [CD], [AD] et [BC] ; en particulier, [AB] et [CD] ayant même médiatrice, (IK) est perpendiculaire à (AB). De même, (LJ) est perpendiculaire à (IK). **Donc IJKL est un carré.**

Exercice n°13 15 points

Révolution de calendrier

Le temps moyen de révolution de la terre autour du soleil dépasse 365 jours de $0{,}2422\text{ j} = \dfrac{x}{400}$ d'où $x = 96{,}88$.

Il faut donc environ 97 années bissextiles en 400 ans, donc une année bissextile tous les 4 ans, en retirant 3 années en 400 ans (d'où la règle que pour les multiples de 100, seules les années multiples de 400 sont bissextiles).

Mais, de la sorte, on aura environ 0,12 (= 97 − 96,88) année bissextile de trop en 400 ans, donc environ 3 années bissextiles de trop en 10 000 ans, ce qui va nécessiter un nouvel ajustement du calendrier.

Mathematik ohne Grenzen

Probewettbewerb 1998/99

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben.

Bei den Aufgaben 2, 5, 6, 7 und 9 ist keine Erklärung verlangt.
Bei allen anderen Aufgaben muss die Lösung begründet werden.

Aufgabe 1 10 Punkte Kubismus

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Pierre a construit une tour en empilant sur une table dix cubes identiques. Voici le patron de l'un d'eux. Pierre vous annonce le nombre inscrit sur la face supérieure de la tour et vous demande la somme des nombres inscrits sur toutes les faces visibles de la tour.

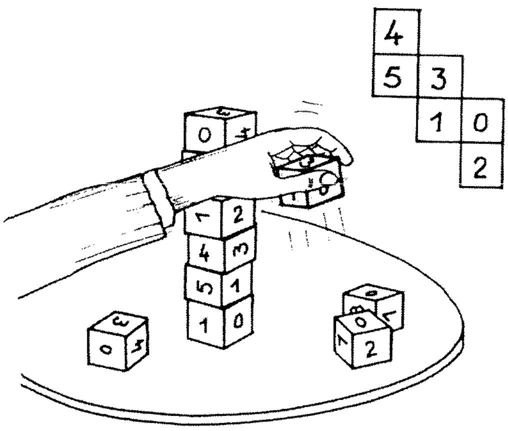
Comment procédez vous? Justifiez votre réponse.

Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you: "What is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower?"

How will you go about it? Explain your answer.

Piero ha costruito una torre impizando su un tavolo 10 cubi identici. Ecco in figura il modello esploso di uno dei cubi. Piero vi comunica il numero scritto sulla faccia superiore della torre e vi domanda la somma dei numeri scritti su tutte le facce visibili della torre.

In che modo procedete? Giustificate la vostra soluzione.



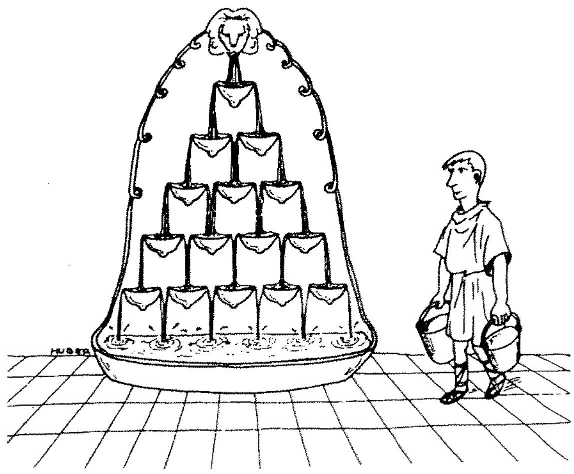
Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos. Aquí está el modelo de uno de ellos. Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿Cómo lo resuelve usted? Explicar la respuesta.

Aufgabe 2 5 Punkte Fontana Romana

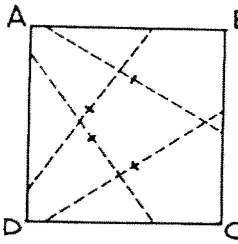
Alle Schalen des abgebildeten Brunnens sind gefüllt und laufen über. Aus jeder Schale ergießt sich die hinzukommende Wassermenge zu gleichen Teilen über den linken und rechten Rand in die darunterliegenden Schalen. Im Verlauf eines Tages fließt in die oberste Schale ein Kubikmeter Wasser.

Gib die Wassermenge, die sich in jede der Brunnenschalen ergießt, als Bruchteil eines Kubikmeters an.



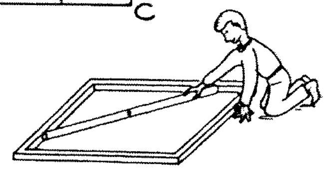
Aufgabe 7
10 Punkte

Alles im Rahmen



Die Innenfläche ABCD eines Rahmens ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von 13 cm. Im Inneren dieses Rahmens befindet sich ein 15 cm langer Stab, dessen Enden stets die Innenkanten des Rahmens berühren sollen.

Konstruiere punktweise die Kurve, auf welcher die Mittelpunkte des Stabes liegen, wenn dieser alle möglichen Positionen einnimmt.



Aufgabe 8
5 Punkte

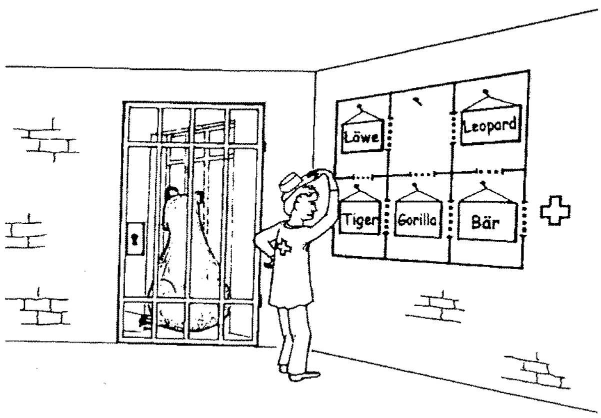
Steinbruch

Dem armen Müller ist ein Mühlstein zerbrochen. Aber drei der Bruchstücke kann der Müller noch gut gebrauchen. Sie wiegen 1 kg, 3 kg und 9 kg. Auf einer Balkenwaage lassen sich damit alle ganzzahligen Massen von 1 kg bis 13 kg abwiegen.

Erkläre, wie der Müller beim Abwiegen jeweils vorgehen muß.

Aufgabe 9
10 Punkte

Nicht artgerecht



Der Wärter des Tierhospitals hat ein Problem. Wie man auf dem Plan sieht, gelangt man zu den Käfigen der Tiere nur durch einen einzigen Zugang, der im Behandlungsraum liegt. Benachbarte Käfige sind jeweils durch eine Gittertür untereinander verbunden.

Der Bär wurde soeben behandelt und soll zur weiteren Beobachtung in den Käfig, in welchem sich der Leopard befindet. Um den Leoparden zu behandeln, muß dieser in den Käfig, wo jetzt noch der Bär untergebracht ist. Da man die Tiere wegen ihrer Gefährlichkeit nicht freilassen kann, ist ein Käfigwechsel nur über einen freien Nachbarkäfig möglich.

Gib in Form einer geordneten Liste an, wie die einzelnen Tiere ihre Plätze wechseln müssen, damit Bär und Leopard ihre Käfige tauschen können.

Aufgabe 10
15 Punkte

...und dazwischen Zwischenräume

Herr Kachelmann, hat eine Lieblingsfigur: das regelmäßige Zwölfeck. So wundert es nicht, daß er den Boden seines Wohnzimmers mit Fliesen dieser Form belegen möchte.

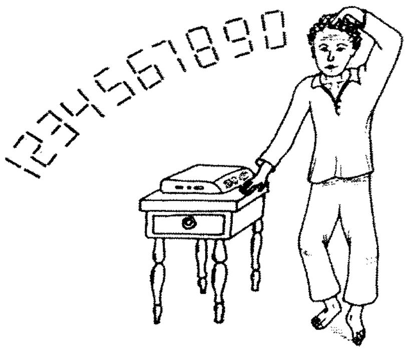
Die Fliesen haben eine Seitenlänge von 20 cm und sollen so angeordnet werden, daß sie sich an einer Seite berühren und ihre Mittelpunkte ein Quadratgitter bilden. Zwischen jeweils vier Fliesen bleibt ein Zwischenraum frei.

Konstruiere vier regelmäßige Zwölfecke, welche in der beschriebenen Weise angeordnet sind.

Berechne den Flächeninhalt der Figur, die von jeweils vier Fliesen mit 20 cm Seitenlänge umrahmt wird.

Aufgabe 3
10 Punkte

Uhr kaputt



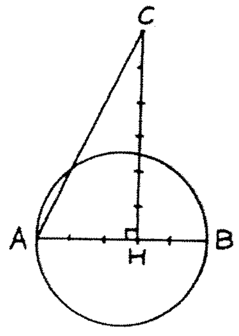
Die Leuchtziffern auf Henris Wecker sind jeweils aus sieben Segmenten zusammengesetzt. Entsprechend der dargestellten Ziffer sind bestimmte Segmente hell, während die anderen dunkel bleiben.

Eines der Segmente der Anzeige ist ausgefallen und leuchtet nicht mehr. Aus diesem Grund ist Henri heute nach einem Blick auf den Wecker eine ganze Stunde zu früh aufgestanden.

Welches der Segmente funktioniert nicht mehr? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4
5 Punkte

To π or not to π



Aus der Zeit um 1680 ist folgende Konstruktionsbeschreibung von Thomas Hobbes überliefert:

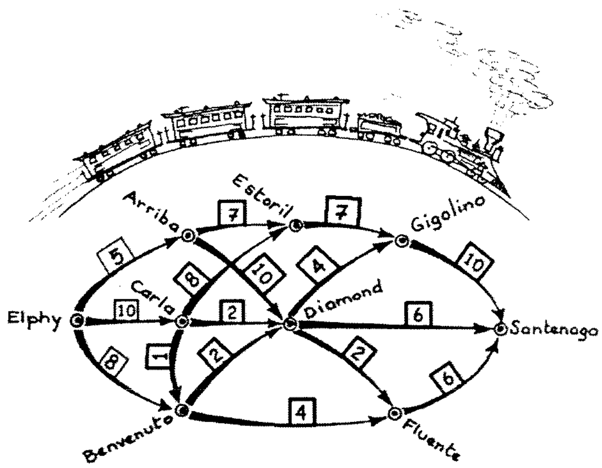
- Zeichne einen Kreis mit einem Durchmesser von einem Dezimeter.
- Unterteile einen der Kreisdurchmesser mit den Endpunkten AB in fünf gleich lange Teile.
- Konstruiere das rechtwinklige Dreieck AHC wie in der Abbildung angegeben, wobei die Länge von HC 6/5 dm beträgt.

Hobbes behauptete, der Umfang dieses Dreiecks betrage π dm.

Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 5
10 Punkte

Nach Fahrplan



Die Abbildung zeigt ein Eisenbahnnetz. Für jeden Streckenabschnitt zwischen zwei Städten ist die Maximalzahl der Züge angegeben, die dort täglich in der angegebenen Richtung verkehren können. Die Strecke von Elphy nach Santenago bewältigt man in weniger als einem Tag. Wie man sieht, können täglich höchstens 23 Züge in Elphy losfahren.

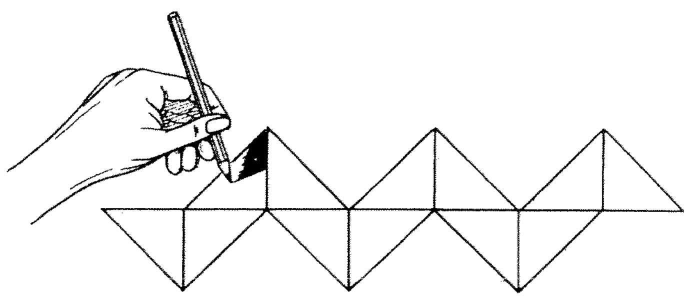
Wie viele Züge können im Verlauf eines Tages von Elphy nach Santenago gelangen?

Zeichne das Streckennetz ab und gib für jeden der benutzten Streckenabschnitte an, von wie vielen dieser Züge er befahren wird.

Aufgabe 6
5 Punkte

Würfelschlange

Unser Zeichner hatte die verrückte Idee, das Netz eines Würfels so darzustellen, dass es aus lauter rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken besteht.



Übertrage dieses Netz auf das Antworblatt.

Male die Flächen mit drei verschiedenen Farben so an, dass Flächen, welche sich bei diesem Würfel gegenüberliegen, die gleiche Farbe erhalten.

nur für Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Schiff ahoi

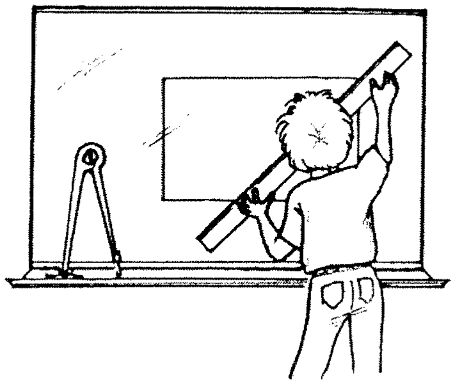
Irgendwo im Meer bewegt sich ein Schiffsgeschwader auf konstantem Kurs mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten, das sind 12 Seemeilen pro Stunde.

Ein Aufklärer verlässt das Geschwader mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24 Knoten, ohne seinen Kurs zu verändern. Nach einer Strecke von 60 Seemeilen wendet er und kehrt auf direktem Weg zu den anderen Schiffen zurück.

Berechne in Stunden und Minuten die Zeit, welche der Aufklärer für seine Erkundungsfahrt benötigt, wenn man von konstanten Geschwindigkeiten ausgeht.

Aufgabe 12
10 Punkte

Qu'est-ce?



Pierre, Paul und Jacques brüten über einer Aufgabe von *Mathematik ohne Grenzen*.

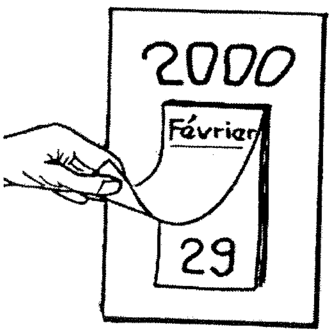
Bei einem Rechteck haben sie die Winkelhalbierenden der vier Innenwinkel eingezeichnet, welche sich in vier Punkten schneiden. Diese Punkte sind die Ecken eines neuen Vierecks.

– „Das ist wieder ein Rechteck", sagt Pierre.
– „Ich denke es ist eine Raute", bemerkt Paul.
– „Und wenn es nun ein Quadrat ist?", meint Jacques.

Wer hat Recht? Zeichne die Figur und begründe deine Antwort.

Aufgabe 13
15 Punkte

Kalenderreform



Die mittlere Umlaufzeit der Erde um die Sonne beträgt ungefähr 365,2422 Tage. Da die Anzahl der Tage eines Jahres ganzzahlig ist, führte Julius Cäsar die Schaltjahre ein.

Später, unter Papst Gregor XIII, wurde folgende Schaltjahresregelung eingeführt:

- Ist die Jahreszahl ein Vielfaches von vier und kein Vielfaches von Hundert, so ist das Jahr ein Schaltjahr.
- Ist die Jahreszahl ein Vielfaches von 100, so liegt nur dann ein Schaltjahr vor, wenn die Jahreszahl durch 400 teilbar ist.

Berechne die Anzahl der Schaltjahre für einen Zeitraum von 400 Jahren und erläutere diese Regel.

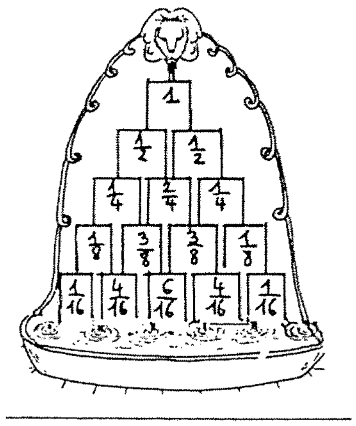
Ist es sinnvoll, diese Regelung ein für alle Mal beizubehalten?

Mathematik ohne Grenzen 98/99
Lösungsvorschläge zum Probewettbewerb

1. Kubismus:

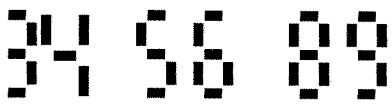
Die Summe gegenüberliegender Würfelseiten ist 5. Damit ist die Summe der Augenzahlen auf den sichtbaren Seitenwänden stets 10. Bei 10 Würfeln erhält man als Gesamtsumme 100. Hinzu kommt noch die Augenzahl auf der Deckfläche des oberen Würfels.

2. Fontana Romana

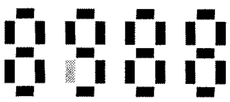


3. Uhr kaputt:

Die Anzahl der Segmente unterscheidet sich bei folgenden aufeinanderfolgenden Ziffern um 1:



Bei 3 und vier ist keine Verwechslung möglich, bei 5 und 6 würde Henri zu spät aufstehen. Also muß das grau gefärbte Element ist defekt sein. Obwohl es erst acht Uhr ist, zeigt der Wecker neun Uhr an und Henri steht auf.



4. To π ...:

Nach Pythagoras erhält man

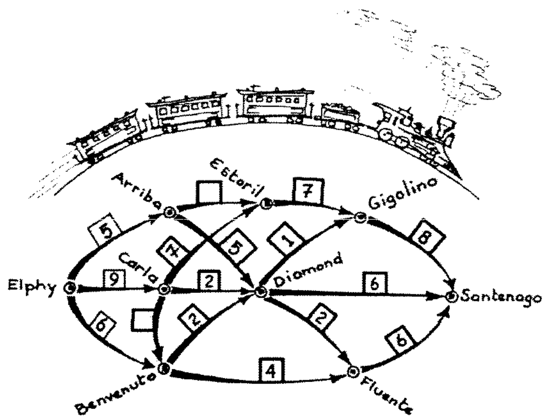
$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{45}{25}$$

Damit ist $U = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} \approx 3{,}141640$

Für π liefert der Taschenrechner $3{,}141593$. Hobbes hat also Unrecht, obgleich sein Wert eine ausgezeichnete Näherung darstellt.

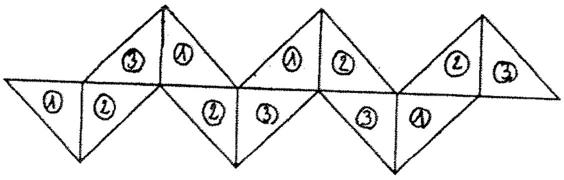
5. Nach Fahrplan:

Von den 23 Zügen, die in Elphy starten, können maximal 6 über Benvenuto hinaus fahren. Von den 10 Zügen, die in Carla ankommen können, gelangen maximal 7 über Estoril hinaus. Zwei können weiter nach Diamond. Da jedoch die Kapazität über Benvenuto schon ausgeschöpft ist, können nur 9 Züge Carla verlassen. Die Strecke über Arriba kann voll genutzt werden, da alle Züge weiterfahren können. Insgesamt können also nicht mehr als 20 Züge von Elphy nach Santenago fahren.
Die Abbildung zeigt eine mögliche Verteilung der 20 Züge.

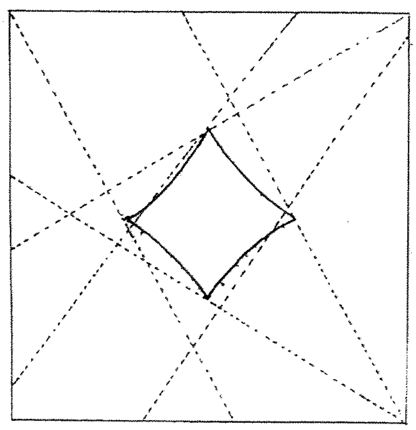


6. Würfelschlange:

Gleiche Zahlen entsprechen der gleichen Farbe.



7. Alles im Rahmen:



8. **Steinbruch**:

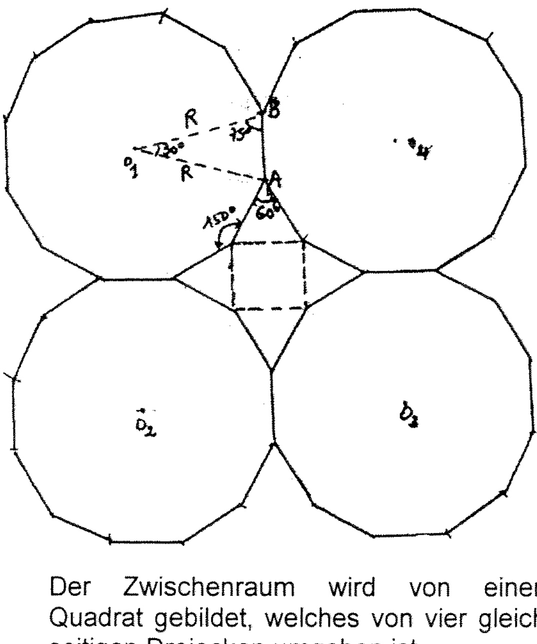
1kg	=	1kg
2kg + 1kg	=	3kg
3kg	=	3kg
4kg	=	3kg + 1kg
5kg + 1kg + 3kg	=	9 kg
6kg + 3 kg	=	9kg
7kg + 3kg	=	9kg + 1kg
8kg + 1 kg	=	9kg
9kg	=	9kg
10kg	=	9kg + 1kg
11kg + 1kg	=	9kg + 3kg
12kg	=	9kg + 3kg
13kg	=	9kg + 1kg + 3kg

9. **Nicht artgerecht**:

4	3	2
5	6	1

Beispiel:
Leopard → 3, Bär → 2, Gorilla → 1,
Tiger → 6, Löwe → 5, Leopard → 4,
Bär → 3, Gorilla → 2, Tiger → 1, Bär → 6,
Gorilla → 3,Tiger → 2, Bär → 1, Löwe → 6,
Leopard → 5, Gorilla → 4, Löwe → 3,
Leopard → 6, Gorilla → 5, Löwe → 4,
Tiger → 3, Bär → 2, Leopard → 1.

10. **... und dazwischen**



Der Zwischenraum wird von einem Quadrat gebildet, welches von vier gleichseitigen Dreiecken umgeben ist.
Für den Flächeninhalt gilt

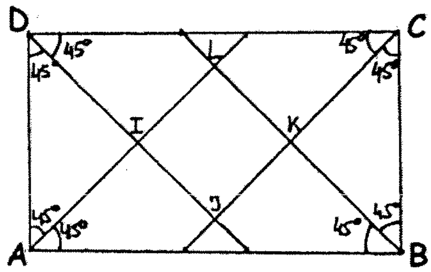
$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = a^2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$a = 20\,cm \Rightarrow A = 1092{,}8\,cm^2$$

11. **Schiff ahoi**:

Wenn der Aufklärer wendet, hat er 60 sm und das Geschwader wegen der halben Geschwindigkeit 30 sm zurückgelegt. Der gegenseitige Abstand beträgt 30 sm.
Nach 20 sm trifft er wieder auf das Geschwader, da dieses in der Zwischenzeit 10 sm zurückgelegt hat.
Insgesamt hat der Aufklärer eine Strecke von 80 sm zurückgelegt.
Bei einer Geschwindigkeit von 24 sm/h benötigt er dafür 3h 20min.

12. **Qu'est-ce?**



Die Dreiecke ALB, BCK, CDJ und DAI besitzen jeweils zwei Innenwinkel von 45°. Sie sind also rechtwinklig. Somit ist das Viereck IJKL ein Rechteck.
Da die Dreiecke überdies gleichschenklig sind, sind die Diagonalen von IJKL gleichzeitig Symmetrieachsen von ABCD und somit orthogonal. Damit ist das Viereck IJKL eine Raute.
Eine Raute, die gleichzeitig ein Rechteck ist, ist aber ein Quadrat.

12. **Kalenderreform**:

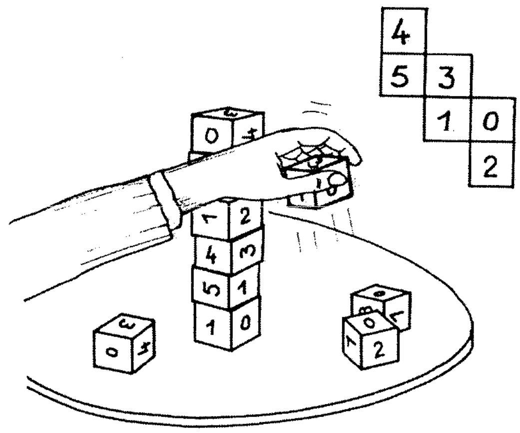
Der zeitliche Überhang, der sich bei 365 Tagen pro Jahr ergibt, summiert sich im Lauf von vierhundert Jahren auf
$400 \cdot 0{,}2422 = 96{,}88$ Tage.
Dies gleicht man aus durch 97 Schalttage, die alle vier Jahre stattfinden. Von den vier Säkularjahren in diesem Zeitraum ist nur eines ein Schaltjahr.
Dennoch ergibt ein zeitlicher Überhang von 0,12 Tagen in einem Zeitraum von 400 Jahren. In 3200 Jahren macht dies einen Tag aus. In ferner Zukunft wird man also gezwungen sein, den Kalender erneut zu korrigieren.

PROVA D'ALLENAMENTO 1999 (8-13 febbraio 1999)

- *Solo le risoluzioni degli esercizi 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10 e 11 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata.*
- *La cura sarà apprezzata.*
- *Ogni soluzione deve essere riportata su fogli-risposta separati.*

Ezercizio n.1 (punti 10)
Giochi di società

Risoluzione da communicare con un minimo di 30 parole in francese, inglese, spagnolo o tedesco.



Pierre a construit une tour en empilant sur une table dix cubes identiques. Voici le patron de l'un d'eux. Pierre vous annonce le nombre inscrit sur la face supérieure de la tour et vous demande la somme des nombres inscrits sur toutes les faces visibles de la tour.

Comment procédez vous ? Justifiez votre réponse.

Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you: "What is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower?"

How will you go about it ? Explain your answer.

Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos. Aquí está el modelo de uno de ellos. Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿Cómo lo resuelve usted? Explicar la respuesta.

Pierre hat einen Turm aus 10 gleichen Würfeln gebaut, welche er aufeinandergelegt hat. Das Netz eines dieser Würfel ist hier zu sehen.
Pierre verrät dir die Zahl, welche auf der obersten Würfelseite des Turmes geschrieben steht und fragt dich nach der Summe der Zahlen auf allen sichtbaren Seiten des Turmes.

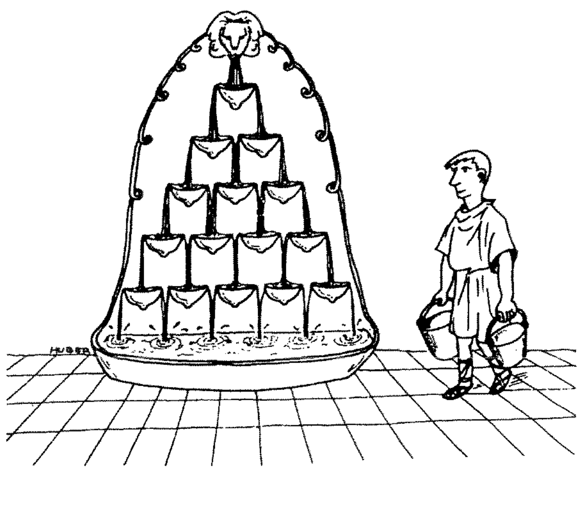
Wie gehst du vor ? Erkläre deine Antwort.

Ezercizio n.2 (punti 5)
Fontane di Roma

Da ogni vasca di questa fontana cola acqua. Ogni vasca della fontana cede esattamente metà dell'acqua ricevuta ad ognuna delle due vasche sottostanti.

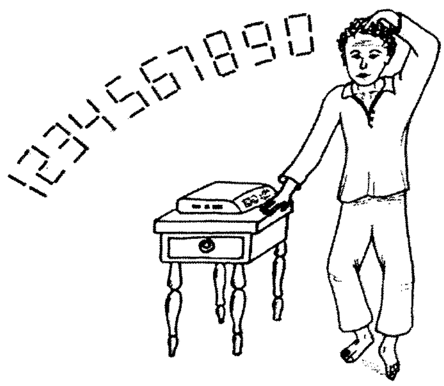
Durante la giornata la vasca superiore riceve un metro cubo d'acqua.

Esprimete in frazioni di questo metro cubo la quantità d'acqua che cola in ogni vasca.



Ezercizio n.3 (punti 10)

Orologio in panne



Le cifre dell'orologio di Enrico sono formate a partire da 7 trattini, alcuni accesi e altri spenti. Uno dei trattini si è guastato e non si accende più. È per questo che, dopo aver guardato l'orologio, oggi Enrico si è alzato un'ora prima del solito.

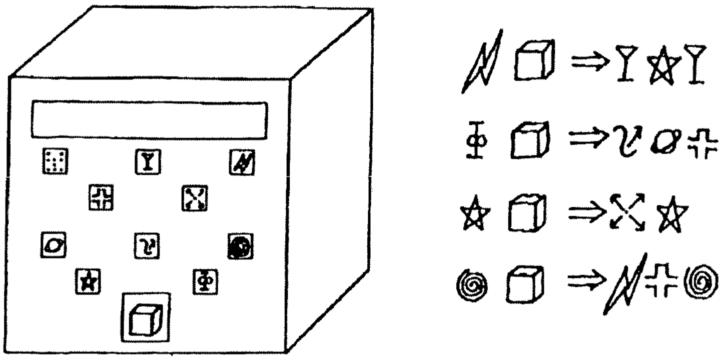
Qual è il segmento difettoso ? Giustificate la risposta.

Ezercizio n.4 (punti 5)

La Cubatrice

Oggi, entrati nella galassia Xcyzq siamo stati attratti nell'orbita di un pianeta di forma cubica.

Il signor Spock ha guidato la spedizione ed è rimasto stupito dall'esclusiva presenza di forme cubiche nel paesaggio. Gli abitanti stessi risultano avere testa cubica e persino arti cubici. Non stupisce quindi che questo popolo, pur adottando un sistema di calcolo in base 10 ma con simboli diversi dai nostri, conosca un'unica operazione, l'elevazione al cubo.



Ci hanno regalato una loro calcolatrice, propriamente detta "Cubatrice", che ha 11 tasti : 10 corrispondono alle nostre cifre, mentre 1, su cui è rappresentato un cubetto, svolge l'operazione.

Con sole quattro operazioni sono riuscito ad assegnare ad ogni simbolo il corrispondente valore da 0 a 9 dei nostri numeri.

Come il capitano Kirk, sapresti trovare anche tu il valore dei simboli della "Cubatrice" ?

(Concorso "Angela Bernasconi" 1998 - proponente Andrea Marchi, 4E LS Arezzo).

Ezercizio n.5 (punti 10)

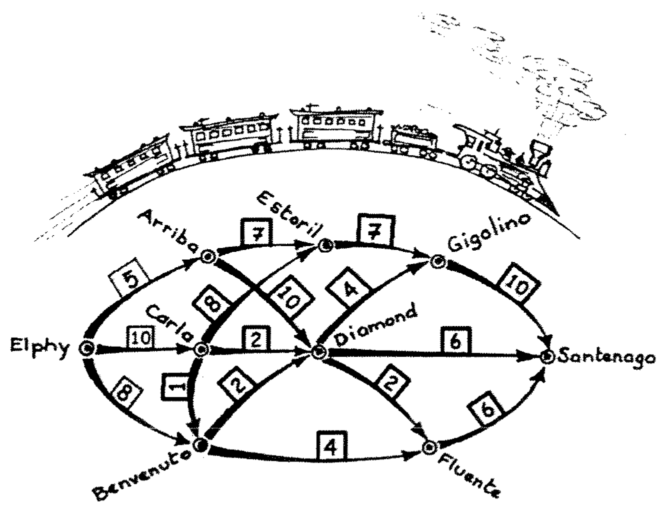
Treno dopo treno

Su ogni tronco della rete ferroviaria tra due città è indicato il numero massimo di treni che possono transitare ogni giorno nel senso indicato.

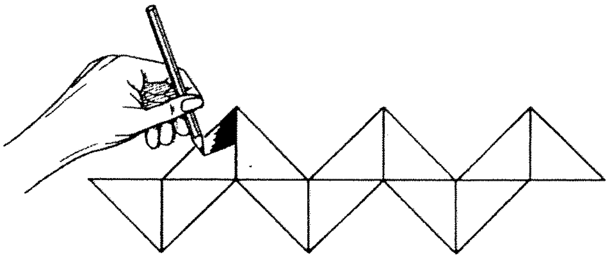
Il tragitto tra Elphy e Santenago si compie in meno di una giornata.

Poiché al giorno da Elphy possono partire al massimo 23 treni, quanti di questi, al massimo, possono giungere nella giornata a Santenago ?

Riprodurre la rete ferroviaria sul foglio risposta e, per i treni che arrivano fino a Santenago, indicare su ogni tronco il numero di quelli che lo percorrono.



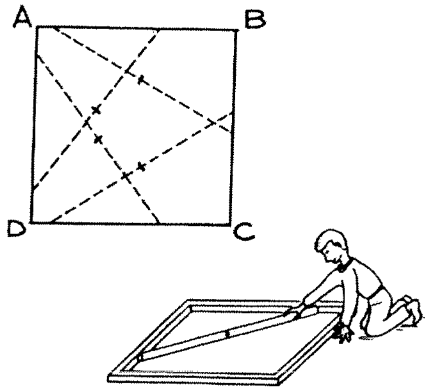
Ezercizio n.6 (punti 5)
Biscia da cubo



La figura qui riportata è formata da triangoli rettangoli isosceli. E' uno scherzo del nostro disegnatore, che ha disegnato così lo sviluppo di un cubo.

Riprodurre questo sviluppo sul foglio risposta e colorare le facce del cubo con tre colori diversi, in modo che due facce parallele siano dello stesso colore.

Ezercizio n.7 (punti 10)
Biscola a quadri



ABCD è un quadrato di 13 cm di lato. Una barretta di lunghezza 15 cm è posta all'interno del quadrato in modo che i suoi due estremi stiano su due lati consecutivi del quadrato.

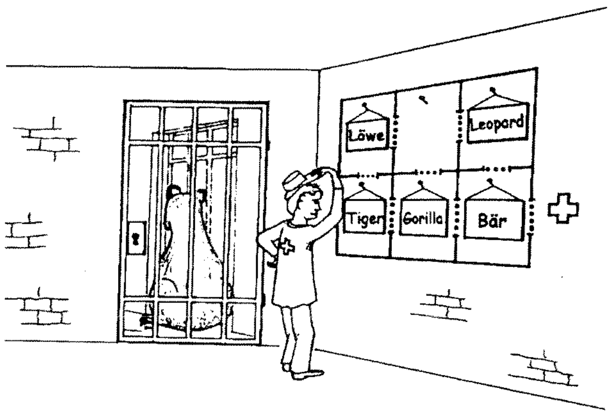
Costruire la curva descritta dal punto medio della barretta quando questa occupa tutte le posizioni possibili.

Ezercizio n.8 (punti 5)
Salviamo i cocci

Ahimè, il mugnaio ha rotto la sua mola di pietra in 3 pezzi, rispettivamente di 1 kg, 3 kg, 9 kg.
Constata, però, che con i tre pezzi e con una bilancia a due piatti, può pesare qualsiasi oggetto di massa intera da 1 kg a 13 kg.

Al fine di valorizzare i pezzi della mola, spiegare come può procedere il mugnaio per pesare i 13 oggetti.

Ezercizio n.9 (punti 10)
Che circo !



Ecco la pianta di un serraglio un po' particolare. Ha una sola porta d'ingresso dall'infermeria e le gabbie sono tutte comunicanti fra di loro per mezzo di porte. Per tener d'occhio l'orso, ferito, bisogna metterlo nella gabbia del leopardo. Ma per medicare il leopardo bisogna portarlo vicino all'infermeria. E' impossibile far uscire le belve (sono troppo pericolose) ma si può sempre far passare un animale dalla sua gabbia in una vuota.

Scrivete sul foglio risposta l'elenco, nell'ordine, degli animali che si devono spostare nella gabbia vuota per scambiare di posto l'orso e il leopardo.

Ezercizio n.10 (punti 15)
Dodecagoni all'attacco

Lorenzo, il castellano ha una figura favorita : il poligono regolare a 12 lati, cioè il dodecagono. Pertanto decide di fare piastrellare la sala principale del castello con dei dodecagoni regolari di 20 cm di lato.
Questi sono disposti in modo che i loro centri formino una rete di quadrati. Si forma allora una figura compresa fra quattro dodecagoni.
Si disegni sul foglio risposta un modellino dei quattro dodecagoni cosi disposi : ognuno a contatto, tramite uno dei lati, con altri due.
Calcolare l'area deila superficie reale della figura compressa fra i quattro dodecagoni aventi 20 cm di lato.

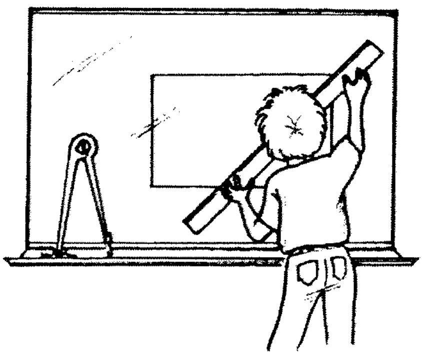
Solo Classi 3°

Ezercizio n.11 (punti 5)
Ricognitore in testa

In alto mare una flottiglia di navi procede (con direzione costante) alla velocità di 12 nodi, cioè di 12 miglia all'ora. Un ricognitore parte in avanti : la sua velocità sale allora a 24 nodi. Dopo aver percorso 60 miglia inverte la rotta per raggiungere il resto della flotta.
Quanto tempo, in ore e minuti, è passato fra la partenza e il ritorno del ricognitore in testa alla flotta, supponendo le velocità sempre costanti fra questi due istanti ?

Solo Classi 3°

Ezercizio n.12 (punti 10)
Che cos'è ?

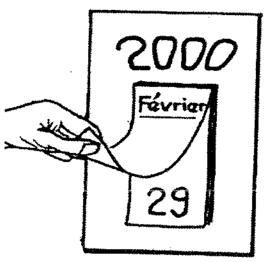


Pietro, Paolo e Giacomo si allenano per il concorso di *Matematica senza Frontiere.* Ognuno di loro traccia le quattro bisettrici degli angoli di un rettangolo. Queste si intersecano a due a due in quattro punti che sembrano formare un quadrilatero particolare.
«E' un rettangolo», dice Pietro.
«Io penso che sia un rombo» dice Paolo.
«E se fosse un quadrato ?» dice Giacomo.
Disegnate la figura e dite chi ha ragione motivando la risposta.

Solo Classi 3°

Ezercizio n.13 (punti 15)
Calendario in subbuglio

Il tempo medio di rivoluzione della terra intorno al sole è uguale a circa 365,2422 giorni. Poiché il numero di giorni di un anno deve essere intero, Giulio Cesare ha introdotto gli anni bisestili.
In seguito Papa Gregorio ha stabilito la seguente regola : sono bisestili tutti gli anni il cui numero è multiplo di 4, eccettuati gli anni multipli di 100 ; tra questi sono bisestili solo quelli in cui il numero delle centinaia è multiplo di 4. Cosi il 1900 non è stato bisestile, mentre il 2000 lo sarà.
Spiegate questa regola calcolando il numero di anni bisestili che sono necessari in 400 anni.
Questa regola vi sembra valida per sempre ?



Mathématiques sans frontières 1999

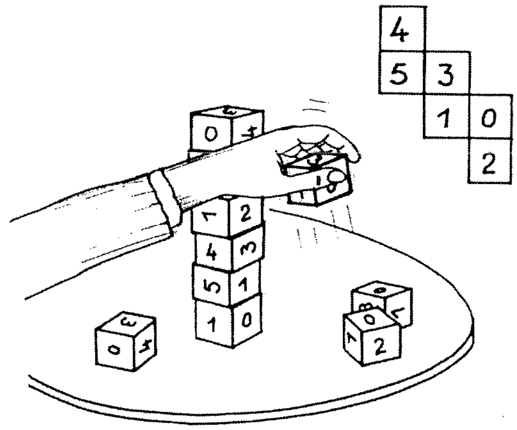
Mock competition - December 1998

- **Questions 2, 5, 6, 7 and 9 do not require any explanation in the answer ; all of the others do.**
- **Careful work will be taken into account.**
- **Teams should submit one answer per question.**
- **The team name must be on every answer sheet.**

QUESTION 1
10 POINTS

Tour de magie

Write down your answer in French, German, Italian or Spanish using at least 30 words.



Pierre a construit une tour en empilant sur une table dix cubes identiques. Voici le patron de l'un d'eux. Pierre vous annonce le nombre inscrit sur la face supérieure de la tour et vous demande la somme des nombres inscrits sur toutes les faces visibles de la tour.

Comment procédez vous? Justifiez votre réponse.

Pierre hat einen Turm aus 10 gleichen Würfeln gebaut, welche er aufeinandergelegt hat. Das Netz eines dieser Würfel ist hier zu sehen.
Pierre verrät dir die Zahl, welche auf der obersten Würfelseite des Turmes geschrieben steht und fragt dich nach der Summe der Zahlen auf allen sichtbaren Seiten des Turmes.

Wie gehst du vor ? Erkläre deine Antwort.

Piero ha costruito una torre impizando su un tavolo 10 cubi identici. Ecco in figura il modello esploso di uno dei cubi. Piero vi comunica il numero scritto sulla faccia superiore della torre e vi domanda la somma dei numeri scritti su tutte le facce visibili della torre.

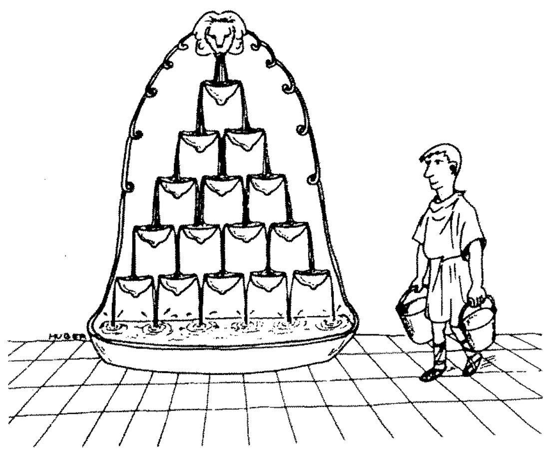
In che modo procedete? Giustificate la vostra soluzione.

Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos. Aquí está el modelo de uno de ellos. Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿Cómo lo resuelve usted? Explicar la respuesta.

QUESTION 2
5 POINTS

Roman Fountain

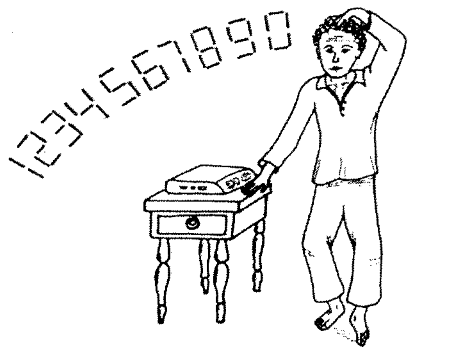


All the basins in the fountain shown here are running over. At each level half of the water running into a basin runs out into the two basins directly underneath.
During the course of one day a cubic metre of water runs out of the top basin.

Express as a fraction of this cubic metre of water the volume of water running out of each basin of the fountain.

QUESTION 3
10 POINTS

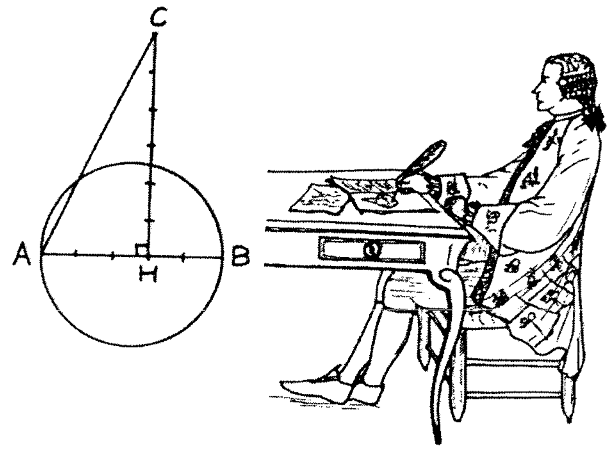
Broken Alarm



The numerals on Henri's alarm clock are formed by 7 straight line segments which can be either illuminated or not. One of the segments is broken and can never light up.
Because of this when Henri looked at his alarm clock he got up one hour earlier than usual.
Which is the broken segment ? Justify your answer.

QUESTION 4
5 POINTS

Top or not top

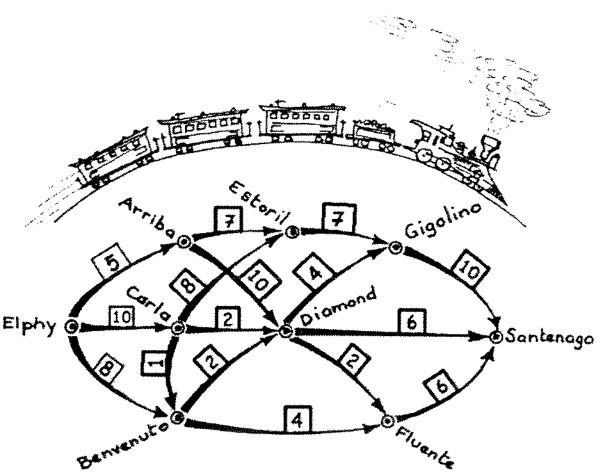


Around 1680, Thomas Hobbes described the following construction:
- Construct a circle 1 decimetre in diameter
- Divide a diameter in 5 equal parts
- Then construct the right-angled triangle AHC such that HC = 6/5 dm, as shown in the figure.

He claimed that the perimeter of the triangle AHC was exactly equal to pi dm.
What do you think of this claim ? Justify your answer.

QUESTION 5
10 POINTS

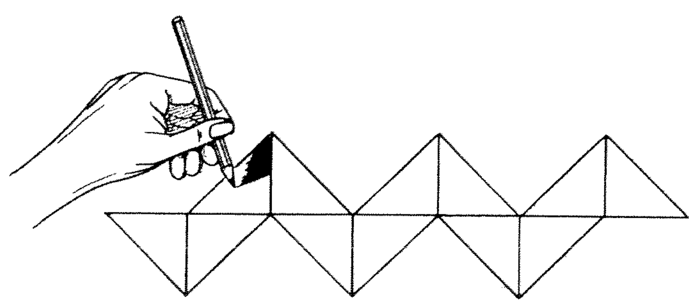
Training Test



For a railway network, the maximum number of trains that can travel each day in the direction shown, has been indicated.
The journey between Elphy and Santenago takes less than a day.
One day at least 23 trains leave Elphy.
What is the maximum number of these trains that can arrive the same day at Santenago ?
Make a copy of the railway system and show, for the trains that get to Santenago, the number that use each section of the system.

QUESTION 6
5 POINTS

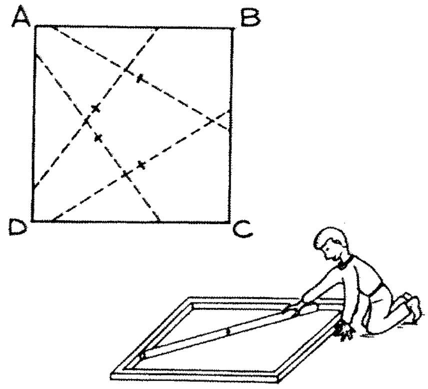
Net the cube



The figure shown is made up of isosceles right-angled triangles. Because our graphics artist is so clever, it is also the net of a cube.
Copy the net onto your answer sheet and using three different colours, colour the faces of the cube, giving parallel faces the same colour.

QUESTION 7
10 POINTS

All square



ABCD is a square of side 13 cm. A stick of length 15 cm is placed inside the square so that the ends are touching two adjacent sides.

Draw the curve traced out by the mid-point of the stick as it takes up all possible positions.

QUESTION 8
5 POINTS

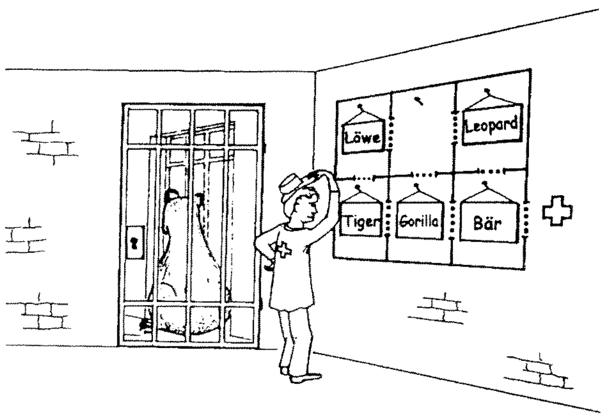
Miller's Tale

The miller has broken his mill-stone into 3 pieces: 1kg, 3kg and 9 kg. He notices that with these three pieces and a simple balance with two scale pans he can weigh every whole number of kilograms between 1 and 13.

Explain how the miller would weigh the 13 weights.

QUESTION 9
10 POINTS

What a show !



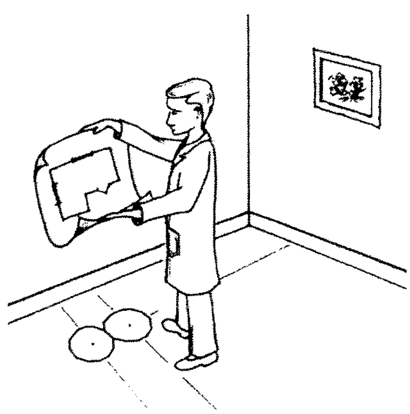
Here is the plan of a very special zoo. There is only one entry point for the vet and the cages are all linked by gates.

The vet has just examined the bear (ours) and now wants to move him into the leopard's cage. He also wants the leopard in the bear's cage for examination. The animals can't be taken out of the cage because they are too dangerous but they can be moved into the empty cage.

On your answer sheet write down the order of the animals that have to be moved into the empty cage in order to change the positions of the bear and the leopard.

QUESTION 10
15 POINTS

Dodecago-go



Baron Gontrand has a favourite geometrical shape - the regular dodecagon. He decides to try to tile the great hall of his chateau with regular dodecagons of side 20 cm.

He arranges them so that their centres lie at the corners of squares. An interesting shape appears between every four dodecagons.

Draw 4 dodecagons arranged in this way each one having two sides touching the sides of 2 others.

Work out the area of the shape enclosed by 4 dodecagons of side 20 cm. when the are arranged in this way.

QUESTION 11
5 POINTS

Speed boat

Senior classes only

A naval flotilla is steaming at a constant 12 knots, that is 12 miles per hour. A speed boat leaves the flotilla going ahead to reconnoitre. It travels at 24 knots.

After covering 60 miles the speed boat turns round to go back and rejoin the flotilla.

How long does it take from the speed boat leaving to it rejoining the flotilla, assuming both travel at constant speeds ?

QUESTION 12
10 POINTS

What is it ?

Senior classes only

Pierre, Paul and Jacques are in serious training for the Mathématiques sans Frontières competition.

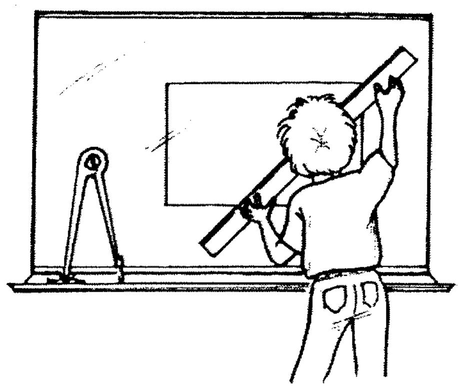
They each draw the 4 angle bisectors of a rectangle. These bisectors cut each other twice and seem to make a special shape.

It's a rectangle, says Pierre.

No it's a rhombus, says Paul.

Look's more like a square, says Jacques.

Draw the figure and say who is right. Justify your answer.



QUESTION 13
15 POINTS

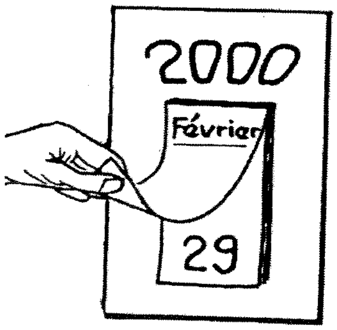
Quantum Leap

Senior classes only

The average time for the earth to go round the sun is 365.2422 days. Since the number of days in a year has to be a whole number, Julius Caesar introduced leap years. Later Pope Gregory put into place the rule we use today : Leap years are those which can be divided by 4 with an exception for years divisible by 100. Then they must be divisible by 400 to be leap years. So 1900 isn't a leap year but 2000 is.

Explain this peculiarity by calculating the number of leap years needed in a 400 year period.

Will we ever need to change this rule ?



MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIERES

PRÓBA-FORDULÓ 1998-1999

1. FELADAT:

CSODATORONY

Ezt a feladatot angolul, németül, franciául, olaszul vagy spanyolul oldjátok meg, legalább 30 szóban! (10 pont)

Pierre a construit une tour en empilant sur une table dix cubes identiques. Voici le patron de l'un d'eux. Pierre vous annonce le nombre inscrit sur la face supérieure de la tour et vous demande la somme des nombres inscrits sur toutes les faces visibles de la tour.

Comment procédez-vous ? Justifiez votre réponse.

★★★

Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you : "what is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower ?"

How will you go about it ? Explain your answer.

★★★

Pierre hat einen Turm aus 10 gleichen Würfeln gebaut, welche er aufeinandergelegt hat. Das Netz eines dieser Würfel ist hier zu sehen.
Pierre verrät dir die Zahl, welche auf der obersten Würfelseite des Turmes geschrieben steht und fragt dich nach der Summe der Zahlen auf allen sichtbaren Seiten des Turmes.

Wie gehst du vor ? Erkläre deine Antwort.

★★★

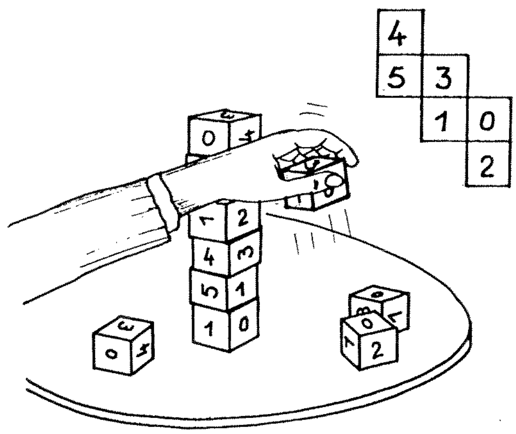
Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos. Aquí está el modelo de uno de ellos.
Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿ Cómo lo resuelve usted ? Explicar la respuesta.

★★★

Piero ha costruito una torre impilando su un tavolo 10 cubi identici. Ecco in figura il modello esploso di uno dei cubi. Piero vi comunica il numero scritto sulla faccia superiore della torre e vi domanda la somma dei numeri scritti su tutte le facce visibili della torre.

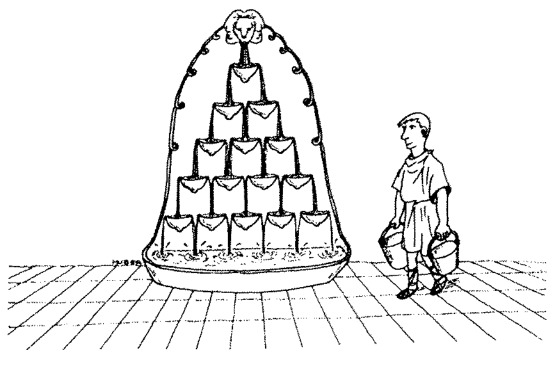
In che modo procedete ? Giustificate la vostra soluzione.



A versenyt Magyarországon a MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL ALAPÍTVÁNY rendezi.
Az alapívány bankszámla száma: OTP 11707024-20362078. A támogatásokat, személyi jövedelemadó 1%-át ide lehet utalni.

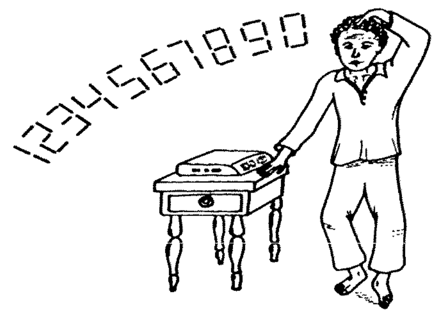
2. FELADAT: **RÓMAI KÚT**

Az ábrán látható kút minden tartálya megtelt vízzel. Egy-egy tartályból kicsorduló víznek fele-fele folyik az alatta elhelyezett két tartályba.
Egy nap alatt 1 m^3 víz ömlik a legfölső tartályba.
Írjátok le, hogy ennek hányad része folyt át az egyes tartályokon!
(5 pont)



3. FELADAT:

ELROMLOTT A VEKKER!



Henri ébresztőórája a számjegyeket 7 vonalka segítségével jelzi, amelyek közül egyesek világítanak, mások nem. Az egyik vonalka meghibásodott, nem képes kigyulladni. Henri ránézett az órájára, a hiba miatt a szokásosnál egy órával hamarabb kelt fel.
Melyik vonalka romlott el? Indokoljátok a választ!
(10 pont)

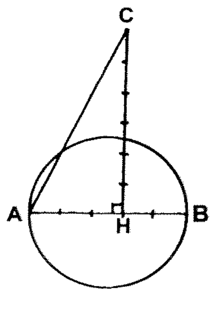
4. FELADAT:

TO π OR NOT TO π

1680 körül Thomas HOBBES a következő szerkesztési lépéseket írta le:

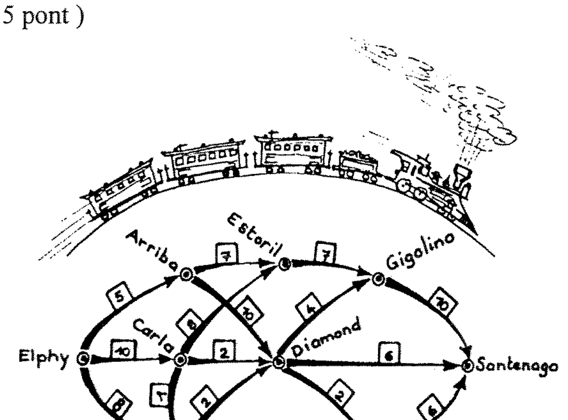
- Szerkesszünk egy 1 dm átmérőjű kört!
- Az egyik átmérőjét osszuk fel 5 egyenlő részre!
- Végül szerkesszük meg az AHC derékszögű háromszöget az ábrán látható módon úgy, hogy HC=1,2 dm

Ekkor az AHC háromszög kerülete éppen π lesz.
Mit gondoltok Thomas HOBBES kijelentéséről? A választ indokoljátok!
(5 pont)



5. FELADAT:

MEGY A GŐZÖS ...

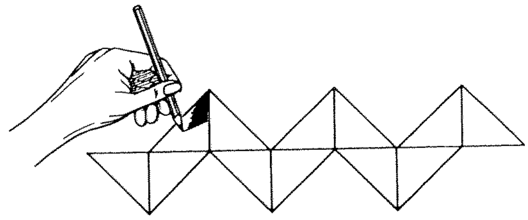


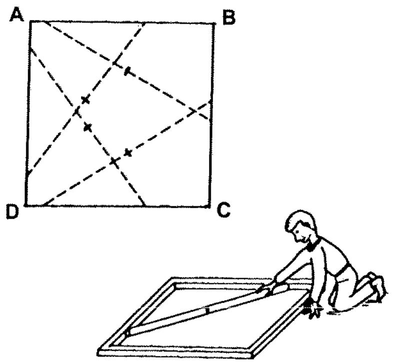
A vasúti hálózati térképen bejelölték, hogy a szomszédos városok közötti vonalszakaszon naponta legfeljebb hány vonat közlekedhet a jelzett irányban. Egy nap alatt kell Elphy-ből Santenagoba érni . Naponta legfeljebb 23 vonat indulhat Elphyből.
Ezek közül maximum hány érkezhet meg Santenagoba a nap folyamán?
Másoljátok le a vasúti térképet, és jelöljétek be rajta, hogy a Santenagoba érkező vonatok közül az egyes vonalszakaszon hány ment át a megadott irányban.
(10 pont)

6. FELADAT:

KOCKA-KÍGYÓ

A mellékelt ábrán látható kígyó egyenlő szárú derékszögű háromszögekből áll. A rajzoló tréfája, hogy egy kocka hálózatát így ábrázolta.
Szerkesszétek meg a válaszlapra a hálózatot, s színezzétek be három színnel úgy, hogy a kocka szemköztes lapjai azonos színűek legyenek.
(5 pont)





7. FELADAT:

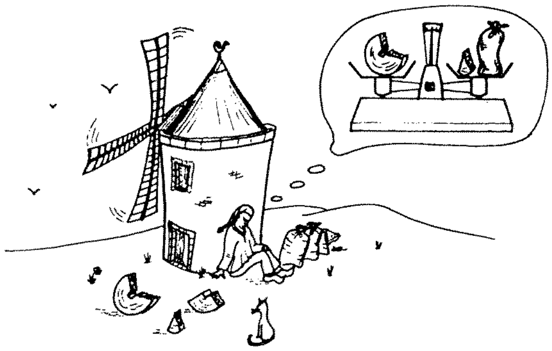
NÉGYZET

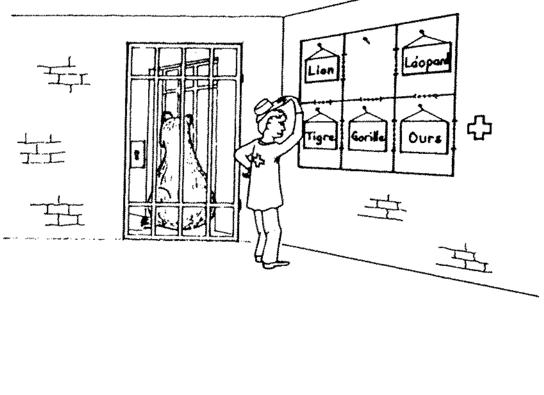
ABCD négyzet oldalai 13 cm hosszúak. Egy 15 cm hosszú vonalzót úgy helyezünk el, hogy végpontjai a négyzet egy-egy szomszédos oldalára essenek.
Szerkesszétek meg a vonalzó középpontja által leírt görbét, ha a vonalzó az összes lehetséges helyzetet felveszi!
(10 pont)

8. FELADAT:

A MALMOM DARABJAI

A molnár véletlenül eltörte a malomkövet három részre egy 1kg-os, egy 3 kg-os és egy 9 kg-os darabra.
„Talán még jó lesz valamire!" - gondolta.
Megállapította, a három kõdarab alkalmas arra, hogy egy kétkarú mérleggel minden 1 és 13 kg közötti egész tömegû tárgyat lemérjen.
Magyarázzátok meg, hogyan lehetséges ez!
(5 pont)





9. FELADAT:

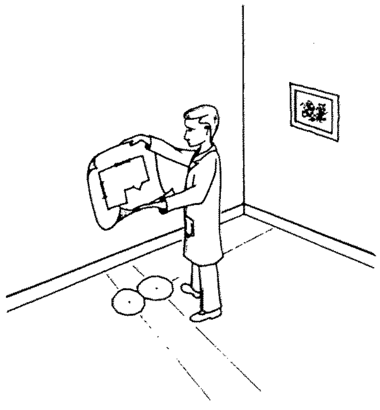
JÓ KIS CIRKUSZ !

Az ábrán egy „speciális" állatkert alaprajza látható. Csak egy bejárata van a gyengélkedõszobán keresztül, a ketrecek ajtóval vannak összekötve. A medvét, akit nemrég ápoltak a gyengélkedõn, ezért még felügyeletre szorul, át kell vinni a leopárd ketrecébe. De a leopárd is gyógyításra vár, ezért õt a gyengélkedõvel szemben kell elhelyezni. Mivel az állatok nagyon veszélyesek, nem szabad kiengedni õket a ketrecükbõl. Bármelyik állatot csak az üres ketrecbe lehet átengedni.
Írjátok le a válaszlapra, milyen sorrendben kell az állatokat az üres ketrecbe átterelni ahhoz, hogy a medve és a leopárd helyet cseréljen!
(10 pont)

10. FELADAT:

BURKOLJUNK

Gontran, a várúr kedvenc alakzata a szabályos 12-szög. Ezért elhatározta, hogy a kastély nagytermét szabályos 12 szög alakú csempékkel fogja burkoltatni, amelyeknek egy-egy oldala 20 cm hosszú. Úgy akarja lerakatni, hogy az egyes csempék középpontja négyzetrácsot alkosson. Így azonban üres rész marad négy szomszédos csempe között.
Szerkesszetek ilyen módon elhelyezett négy csempét, melyek közül mindegyik érintkezik két másikkal! Számítsátok ki a csempék által közrefogott alakzat területét!
(15 pont)



11. FELADAT:

CIRKÁLÓ AZ ÉLEN

Egy flotta valahol a tengeren egyenletesen, 12 csomó, azaz 12 mérföldes sebességgel halad célja felé. Egy cirkáló előremegy 24 csomó sebességgel felderíteni a szektort. 60 mérföld megtétele után a cirkáló megfordul, s visszatér a flotta többi hajójához.
Hány perc telt el a cirkáló indulása és érkezése között, ha a cirkáló is végig egyenletes sebességgel haladt?
(5 pont)

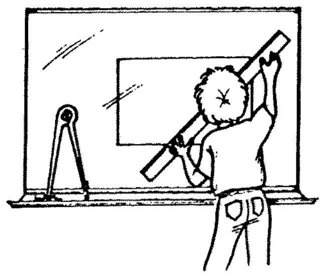
12. FELADAT:

WAS IST DAS?

Pierre, Paul és Jacques edzenek a „Matematika Határok Nélkül" versenyre. Megrajzolják egy téglalap négy szögfelezőjét. Ezek közül kettő-kettő metszi egymást, s a metszéspontok egy speciális négyszöget alkotnak.

- Ez egy téglalap! - mondja Pierre.
- Szerintem inkább rombusz! - felel Paul.
- Ez nem inkább egy négyzet? - kérdi Jacques.

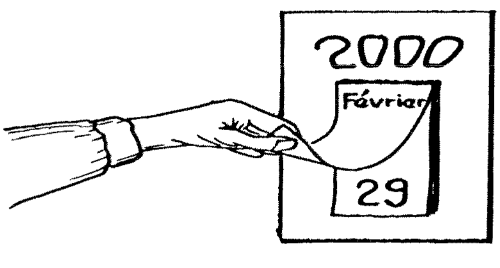
Készítsetek ábrát! Kinek van igaza? Válaszotokat indokoljátok!
(10 pont)



13. FELADAT:

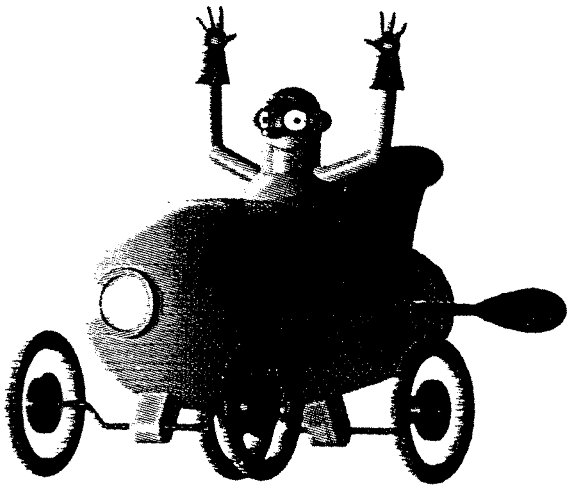
NAPTÁRREFORM

A Föld átlagosan 365,242 nap alatt tesz meg egy fordulatot a Nap körül. Mivel egy év egész számú napból áll, Julius Caesar bevezette a szökőévet. Néhány évszázaddal később Gergely pápa a következő szabályt hozta:
A szökőévek a néggyel osztható évek, kivéve a 100-zal is oszthatókat. Ezek közül azonban a 400-zal is oszthatók mégis szökőévek lesznek. Ezért pl. 1900 nem volt szökőév, de 2000 az lesz.
Magyarázzátok meg ezt a naptári szabályt kiszámítva a 400 év alatt hány szökőév van!
(15 pont)



ACADÉMIE
DE STRASBOURG
Institut de Recherche de l'enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Mathématiques sans frontières



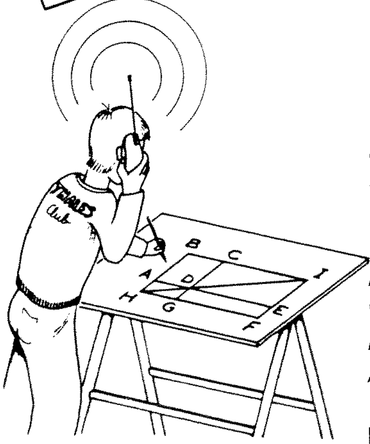
EPREUVE DU 11 MARS 1999

- Les exercices n° 6, 7 et 10 ne nécessitent aucune justification.
- Le soin et toute solution même partielle seront pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

exercice n° 1 10 points

Fax similé

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots



Gaston hat Schwierigkeiten mit seinen Hausaufgaben in Mathematik :

« Gegeben sind ein Rechteck ABCD und eine Strecke DE in der Verlängerung von AD.

Konstruiere, ohne zu messen, das Rechteck DEFG, welches den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD besitzt. »

Gaston telefoniert mit Etienne, der die Lösung bereits gefunden hat.

Welche Konstruktionsbeschreibung muß Etienne Gaston übermitteln?

Wie kann er ihm erklären, daß die beiden Rechtecke ABCD und DEFG flächengleich sind?

* * * * * * * * * *

Gaston can't do his maths homework. Here it is :

« Let ABCD be a rectangle and [DE] a segment which is the prolongation of [AD]. Without taking any measurements, construct a second rectangle DEFG whose area is the same as ABCD's. »

Then Gaston calls Etienne who has had no trouble finding a solution.

Say what instructions for constructing the second rectangle Etienne should give Gaston and how he should go about explaining to his friend that the areas of ABCD and DEFG are equal.

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente :

« Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongación de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie que ABCD sin que sea necesario medir. »

Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

¿Qué método de construcción debe Etienne transmitir a Gaston y cómo debe explicarle que los rectángulos ABCD y DEFG tienen la misma superficie?

* * * * * * * * * *

Gaston trova difficoltá nel compito di matematica :

« Dato un rettangolo ABCD e il segmento DE quale prolungamento di AD, si chiede di costruire un rettangolo DEFG di superficie equivalente a quella di ABCD senza effettuare misure. »

Telefona, pertanto, a Etienne che ha già risolto il problema.

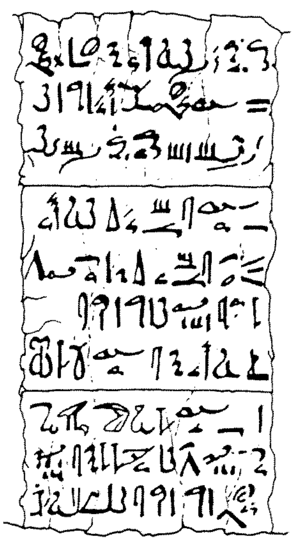
Quale procedura di costruzione deve trasmettere Etienne a Gaston e come può spiegargli che i due rettangoli ABCD e DEFG hanno la stessa area?

exercice n° 2 — 5 points

A l'inverse

Au temps des pharaons les Égyptiens n'écrivaient en général que des fractions unitaires, c'est-à-dire de numérateur égal à 1.

Voici une règle du papyrus Rhind pour calculer les deux tiers de toute fraction unitaire de dénominateur impair :



« Calculer les deux tiers d'une fraction impaire. Si l'on te dit "Quel est deux tiers de ? ", tu fais 2 fois son dénominateur et 6 fois son dénominateur. Le résultat est la somme des deux fractions unitaires obtenues. Par exemple « deux tiers de 1/9 c'est : 1/18 + 1/54 .»

La règle énoncée est-elle exacte pour toutes les fractions unitaires impaires? Expliquer votre réponse. Inventer une règle plus simple pour toutes les fractions unitaires paires.

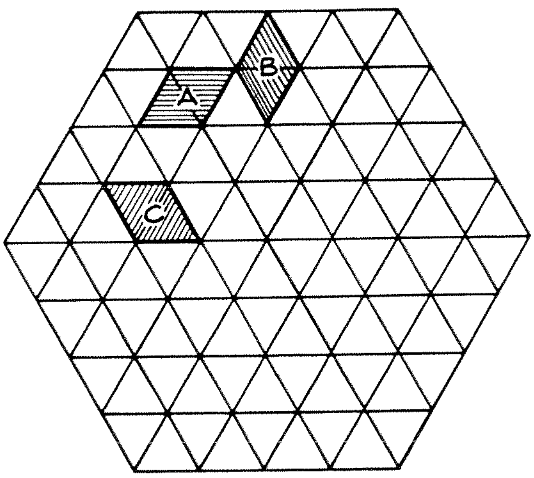
exercice n° 3 — 10 points

Calissons

Rémy remplit l'hexagone ci-dessous par des losanges identiques à A, B ou C qu'il colorie ainsi : en rouge le losange A et ceux qui sont orientés comme A, en jaune B et ceux qui sont orientés comme B et en vert C et ceux qui sont orientés comme C.

A la fin il est surpris de constater qu'il y a autant de losanges de chaque couleur. Il trouve alors une explication à cela en regardant son dessin comme la représentation en perspective de petits cubes placés dans un grand cube.

Reproduire l'hexagone, le paver de losanges selon les règles de Rémy et détailler son explication.



exercice n° 4 — 5 points

Ne pas avoir le jeton

Nathalie et Coralie disposent de 9 jetons numérotés de 1 à 9.

- Tiens, c'est curieux, dit Coralie. Si j'enlève un jeton, je peux faire avec tous les jetons qui restent trois tas tels que, dans chaque tas, la somme des chiffres est la même.

- Je dirais même plus, dit Nathalie. Avec les 8 jetons restants, je peux faire quatre tas ayant la même propriété.

Déterminer le jeton que Nathalie et Coralie ont écarté. Justifier.

exercice n° 5 — 10 points

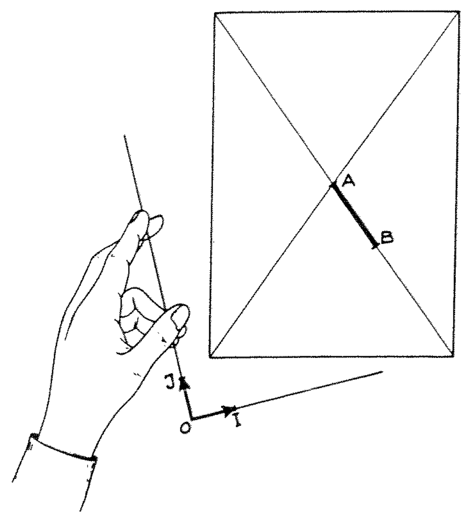
Manque de repère

Placer le point A à l'intersection des diagonales de la feuille réponse, le point B sur une diagonale, à 5 cm du point A.

Dans le repère orthonormé (O, I, J) où l'unité de longueur est le centimètre, les points A et B ont pour coordonnées (3; 2) et (7; 5).

Mais ce repère a disparu !

Sans utiliser de papier calque, construire le repère. Expliquer la construction.



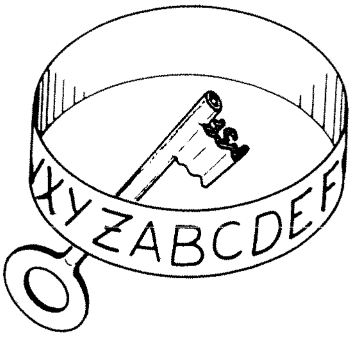
exercice n° 6 — 5 points
Code Enigma

Voici un message codé :
« QBDVXSRTTABBRKYNBXR ».

Pour faire le codage, on a utilisé la « clé » M.S.F. qui donne la suite (13; 19; 6) où chaque nombre est la position de la lettre correspondante dans l'alphabet. Dans le message initial, on a remplacé la première lettre par celle située 13 positions après elle dans l'alphabet, la seconde par celle située 19 positions après elle dans l'alphabet, la troisième lettre par celle située 6 positions après elle dans l'alphabet et ainsi de suite en répétant la clé.

A la 27ème position on retrouve la lettre A, à la 28ème position on retrouve la lettre B, etc...

Retrouver le message initial.



exercice n° 7 — 10 points
Tout est relatif

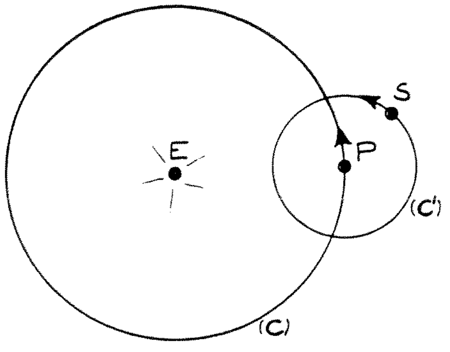
Une planète P décrit d'un mouvement régulier un cercle (C) autour d'une étoile E en 360 jours.

Cette planète a un satellite S qui gravite autour d'elle dans le même sens. Vu depuis P, le satellite décrit d'un mouvement régulier un cercle (C') situé dans le plan de C. Tous les 30 jours, les points E, P et S se retrouvent alignés dans cet ordre.

On donne les distances de centre à centre :
EP = 70 000 000 km
PS = 10 000 000 km

On demande de construire la trajectoire de S par rapport à cette étoile E.

Pour cela placer E au centre de la feuille réponse, le cercle (C) a 7 cm de rayon et (C') a 1 cm de rayon. Commencer la construction en plaçant E, S et P alignés dans cet ordre. Sachant qu'au bout de 15 jours ils sont alignés dans l'ordre E, P et S, construire suffisamment de positions de S puis tracer la trajectoire de S.



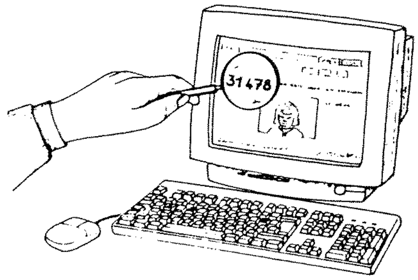
exercice n° 8 — 5 points
Retrospective

Lorsque Rémy tape sur son ordinateur la date d'aujourd'hui, 11 mars 1999, il voit s'afficher 34768.

Lorsqu'il tape la date à laquelle s'est déroulée la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières, il voit s'afficher 31478.

Cet ordinateur transforme chaque date en un nombre qui augmente de 1 unité par jour écoulé.

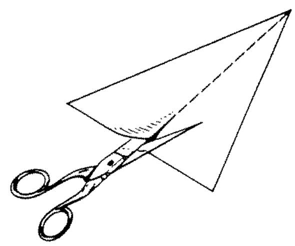
A l'aide de ces données, retrouver la date et le jour de la semaine de la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières.
Expliquer la réponse.



exercice n° 9 — 10 points
Couper Coller

Le triangle ci-dessous est partagé en deux triangles par une médiane.

Il est possible de vérifier expérimentalement que ces deux triangles ont la même aire en découpant l'un d'eux et en recomposant l'autre avec les morceaux obtenus.

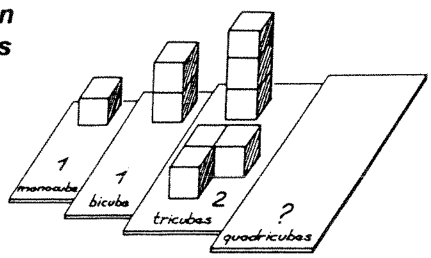


Sur la feuille réponse reproduire le triangle de départ, faire le découpage et par collage mettre en évidence l'égalité des aires. En précisant les lignes de coupe, justifier cette égalité.

exercice n° 10 — 15 points
Quadricubes

Il y a un seul monocube et un seul bicube, mais il y a deux tricubes possibles.

Dessiner en perspective tous les quadricubes possibles différents.



Spécial seconde

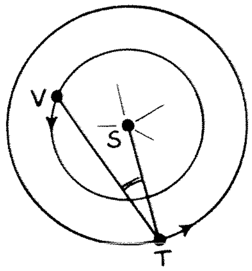
exercice n° 11 5 points

Grand angle

La planète Vénus, appelée Etoile du Berger est souvent visible au petit matin ou après le coucher du Soleil.

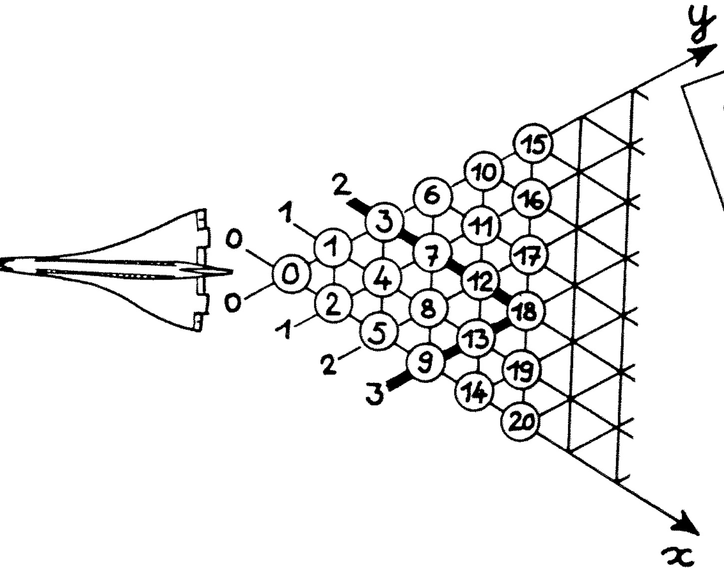
Comme la Terre, Vénus tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire, mais à une vitesse différente. Les orbites de la Terre et de Vénus sont à peu près coplanaires.

Les astronomes ont ainsi observé que l'angle $\widehat{STV}$ varie au cours du temps, mais que sa valeur ne dépasse jamais une certaine valeur maximale.



Représenter l'orbite de la Terre par un cercle de 5 cm de rayon et de centre S. Placer la terre en un point T de son orbite. Construire l'orbite de Vénus, sachant que la valeur maximale de l'angle $\widehat{STV}$ est égale à 46°.

Calculer le rayon de l'orbite de Vénus, sachant que $ST \approx 150 \times 10^6$ km.



exercice n° 12 10 points

Sur le réseau

On numérote les noeuds du réseau en suivant les diagonales, comme sur le dessin ci-contre.

Chaque noeud a des coordonnées, par exemple le noeud numéroté 18 a pour coordonnées (3 ; 2).

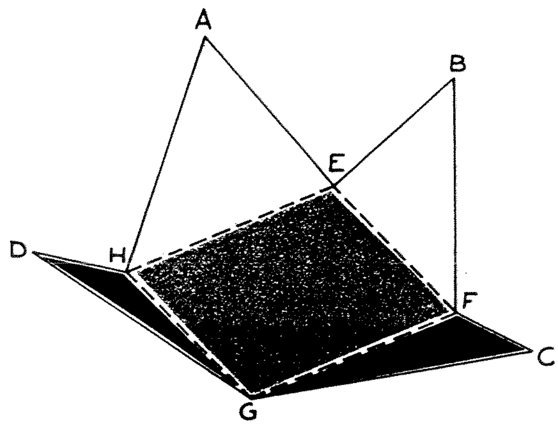
Quelles sont les coordonnées du noeud numéroté 1999? Justifier votre réponse.

---

exercice n° 13 15 points

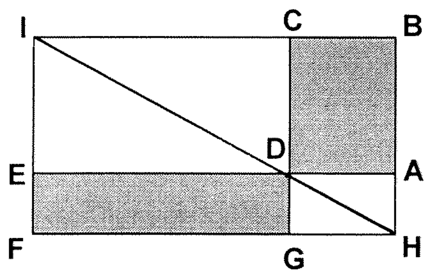
Mystère pour une pyramide

Mercredi, Petit Pierre a décidé de s'amuser avec sa règle et son compas. Il trace sur un carton un carré ABCD de 10 cm de côté. Puis il trace les quatre quarts de cercle dont les centres sont les sommets du carré et qui relient des points diagonalement opposés du carré. Les arcs de cercles se coupent aux points E, F, G et H. Petit Pierre se demande alors si le polygone AEBFCGDH n'est pas le patron d'une pyramide.



Répondre à Petit Pierre en expliquant votre réponse. Si le polygone est un patron de pyramide, calculer sa hauteur.

Exercice n°1 10 points *Fax similé*



Construction :

- [DE] est dans le prolongement de [AD] ; en particulier (CD) $\perp$ (DE), donc on peut construire le point I tel que EDCI soit un rectangle.
- Puis on construit le point H d'intersection de (DI) et (AB).
- La perpendiculaire en H à (AB) coupe (CD) en G et (IE) en F.

Comme (AB) // (CD) // (IE) et (HF) // (AD) // (BC) et (AB) $\perp$ (AD), les quadrilatères ADGH, BIFH et DEFG sont des rectangles.

Comparaison des aires des rectangles ABCD et DEFG :

Une diagonale partage un rectangle en deux triangles de même aire. Ainsi :

- Les triangles BHI et FHI ont même aire $\mathcal{A}_1$.
- Les triangles HAD et HGD ont même aire $\mathcal{A}_2$.
- Les triangles CDI et EDI ont même aire $\mathcal{A}_3$.

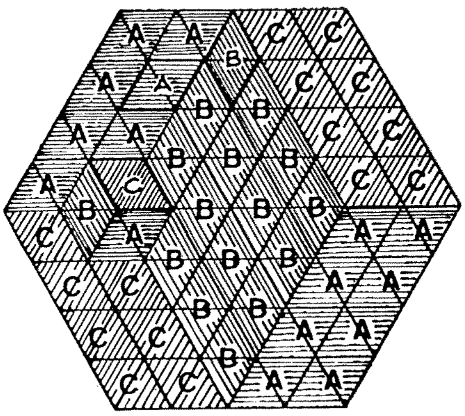
Donc les rectangles ABCD et DEFG ont même aire :
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$

Exercice n°2 5 points *A l'inverse*

La règle énoncée est exacte pour toutes les fractions unitaires, paires ou impaires, car : $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2d} + \frac{1}{6d}$.

Mais pour les fractions unitaires paires, on remarque que : $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3n}$ (unitaire).

Exercice n°3 10 points *Calissons*



Le dessin, une fois colorié et orienté correctement, peut représenter des piles verticales de petits cubes de même taille placées dans un grand cube. Ces piles sont contiguës et forment un bloc sans trou.

- Les faces de dessus des petits cubes supérieurs de ces piles sont orientées de la même façon et sont donc de la même couleur.
- Par ailleurs, on peut éventuellement avoir sur la face de dessous du grand cube des losanges de cette couleur : ils correspondent à des piles absentes ou de hauteur nulle.
  En projetant tous ces losanges sur la face de dessous du grand cube, on obtient donc toute cette face, donc un total de 16 losanges.
- Même explication pour les deux autres couleurs, en tournant la feuille convenablement.

Exercice n°4 5 points *Ne pas avoir le jeton*

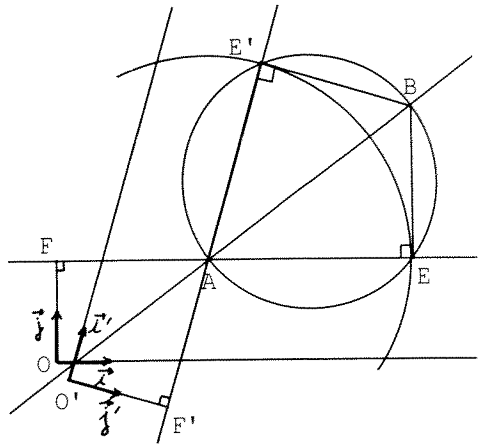
Après avoir enlevé un jeton, la somme S des chiffres des 8 autres jetons est divisible par 3 et par 4, donc par 12.
Or $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, donc $S \leqslant 45$.
Et $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, donc $S \geqslant 36$.

La seule possibilité est donc **<u>S = 36</u>**, c'est à dire qu'il faut ***enlever le jeton marqué du numéro 9***.

Effectivement : $9=1+8=2+7=3+6=4+5$ (quatre tas)
$12=4+8=1+5+6=2+3+7$ (trois tas) (ou $12=4+8=1+2+3+6=5+7$).

Exercice n°5 10 points *Manque de repère*

Avec A (3 ; 2) et B (7 ; 5), on vérifie que $\overrightarrow{AB}$ (4 ; 3) et que AB = 5 cm. Le cercle de centre A et de rayon 4 cm coupe le cercle de diamètre [AB] en deux points E et E'. Alors il y a deux solutions, correspondant à des repères de sens contraires :



A partir de E, avec $\overrightarrow{AE}$ (4 ; 0), on construit F tel que $\overrightarrow{FA}$ (3 ; 0) : F, A, E alignés dans cet ordre, et AF = 3 cm. Puis on construit le point O sur la perpendiculaire en F à (EF), tel que OF = 2 cm :

alors $\overrightarrow{OF}$ (0 ; 2) et $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AE}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{EB}$ complètent le repère orthonormal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) cherché, l'unité mesurant 1 cm.

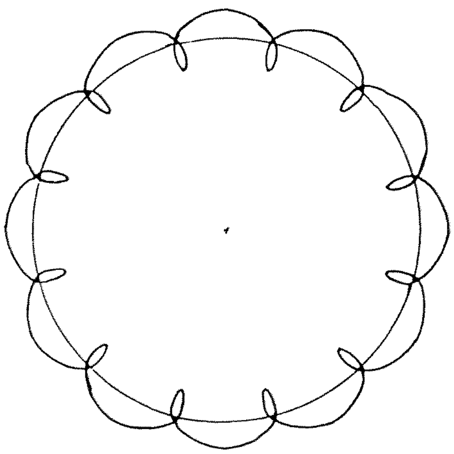
On fait la même construction à partir de E'.

On observe que E, E' puis F, F' puis O et O' sont symétriques par rapport à (AB).

Si (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est direct, alors (O', $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$) est rétrograde.

Exercice n°6 5 points *Code Enigma* DIXIEME ANNIVERSAIRE

Exercice n°7 10 points *Tout est relatif*



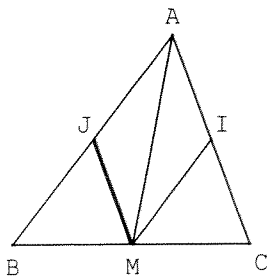
Exercice n°8 5 points *Rétrospective*

Entre la date de la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières et le 11 mars 1999, le nombre de jours écoulés est : 34768 – 31478 = 3290.

Entre le 11 mars 1990 et le 11 mars 1999, il y a eu deux années bissextiles, 1992 et 1996, il s'est donc écoulé 9x365 + 2 = 3287 jours. On en déduit que la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières a eu lieu le 8 mars 1990.

Et comme 3290 est divisible par 7, c'était, comme en 1999, un jeudi : ***le jeudi 8 mars 1990.***

Exercice n°9 10 points *Couper Coller*



Soit M le milieu de [BC], J celui de [AB] et I celui de [AC].

On découpe le triangle ABM suivant la médiane [MJ].

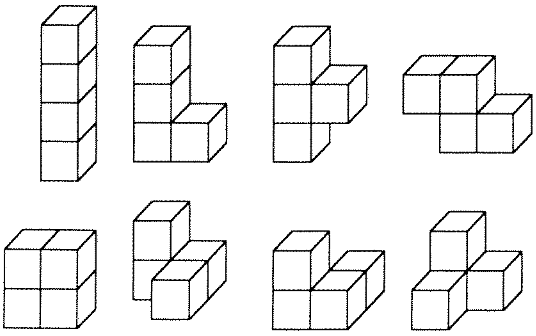
Justification :

D'après le théorème des milieux dans ABC, $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{BM}$ transforme B en M, M en C et J en I, donc le triangle BMJ en le triangle MCI. Ces deux triangles sont superposables.

D'après le théorème des milieux dans ABC, $\overrightarrow{JM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$ donc MIAJ est un parallélogramme, et AI = MJ et JA = MI. Donc les triangles AJM et AIM sont superposables (par retournement).

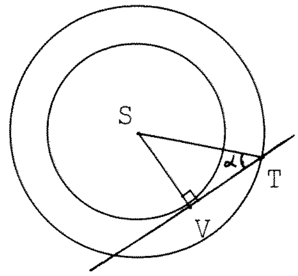
Exercice n°10 15 points *Quadricubes*



Il y a 8 quadricubes

Exercice n°11 5 points *Grand angle*

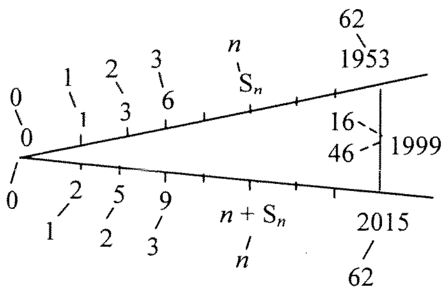
La valeur maximale de $\alpha = \widehat{STV}$ est obtenue lorsque (SV) $\perp$ (VT), c'est à dire lorsque (TV) est tangente à la trajectoire de V.



Le rayon de l'orbite de Vénus est $SV = ST \sin \alpha$ $(\alpha \approx 46°)$ $\boxed{SV \approx 107\,900\,970 \text{ km}}$.

N.B. Sur la figure, si ST est représenté par 5 cm, SV est représenté par environ 3,597 cm.

Exercice n°12 10 points *Sur le réseau*



$$S_n = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sur la « diagonale » n figurent les entiers x tels que

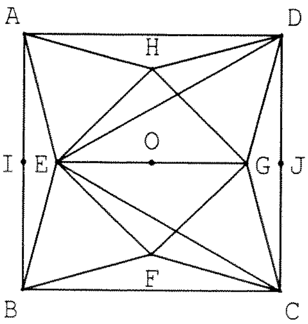
$S_n \leqslant x \leqslant n + S_n$.

On a : $S_{62} = 1953$, donc 1999 est sur la diagonale 62 ; or

$1999 - 1953 = 46$ qui est l'abscisse de 1999. La diagonale 62 aboutit à $S_{62} + 62 = 2015$; or $2015 - 1999 = 16$, qui est l'ordonnée de 1999.

On obtient : $\boxed{(46 ; 16)}$

Exercice n°13 15 points *Mystère pour une pyramide*



Soit O le centre du carré ABCD et I et J les milieux de [AB] et [CD].

Le triangle CDE est équilatéral de côté 10 cm, donc $EJ = 5\sqrt{3}$ cm et $EI = 10 - 5\sqrt{3}$ cm.

D'après le théorème de Pythagore,

$$AE^2 = AI^2 + IE^2 = 25 + (10 - 5\sqrt{3})^2 = 200 - 100\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\boxed{AE = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}}$. De même : $AH = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm.

On a : $OE = OI - IE = 5 - (10 - 5\sqrt{3})$. $\boxed{OE = OH = 5\sqrt{3} - 5 \text{ cm}}$.

D'après le théorème de Pythagore, $EH^2 = EO^2 + OH^2$, donc : $EH^2 = 2\,(5\sqrt{3} - 5)^2$

et $EH^2 = 200 - 100\sqrt{3} = AE^2$. <u>Le triangle AEH est équilatéral de côté $10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm</u>.

Il en est de même des triangles DHG, CGF et EBF : la pyramide considérée existe car AE > OE. Elle est régulière et son sommet S se projette en O. Sa hauteur est h telle que : $h^2 = SE^2 - OE^2$; $SE = AE = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

On a : $h^2 = (200 - 100\sqrt{3}) - (100 - 50\sqrt{3}) = 100 - 50\sqrt{3} = 25(4 - 2\sqrt{3})$. $\boxed{h = 5\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \text{ cm} \approx 3{,}66 \text{ cm}.}$

2ème méthode

Le triangle ABG est équilatéral donc $\widehat{BAG} = 60°$ donc $\widehat{DAG} = 30°$, puis $\widehat{ADG} = 75°$ et $\widehat{GDC} = 15°$; de même $\widehat{ADH} = 15°$, puis $\widehat{HDG} = 60°$: le triangle HDG est équilatéral, de même que les triangles AHE, BEF et CFG ; Le quadrilatère EFGH est un losange ayant un angle droit, c'est un carré. On a : $EO = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} < EA$, donc on obtient une pyramide.

ACADÉMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

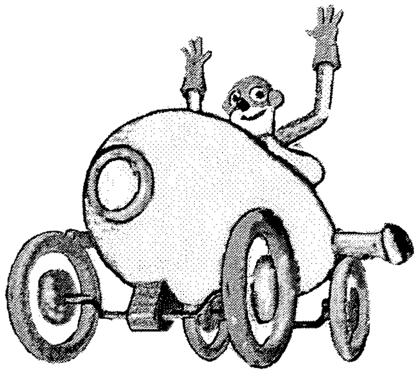
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangssstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

Wettbewerb vom11. 3. 99

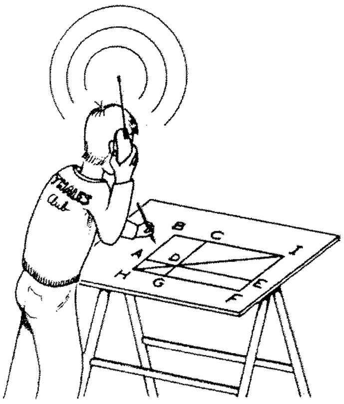


- ***Für die Aufgaben 6, 7 und 10 ist keine Erklärung notwendig.***
- ***Die Darstellung wird mitbewertet.***
- ***Für jede Aufgabe, auch für ungelöste, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben.***

Aufgabe 1
10 Punkte

Konstruktive Zusammenarbeit

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.



Gaston a des difficultés avec le devoir de mathématiques suivant:

«On donne un rectangle ABCD et un segment [DE] dans le prolongement de [AD].

Construire un rectangle DEFG de même aire que ABCD sans faire de mesures.»

Il téléphone à Etienne qui a trouvé la solution.

Quel programme de construction Etienne doit-il transmettre à Gaston et comment doit-il lui expliquer que les rectangles ABCD et DEFG ont la même aire?

* * * * *

Gaston can't do his maths homework. Here it is:

«Let ABCD be a rectangle and [DE] a segment which is the prolongation of [AD]. Without taking any mesurements construct a second rectangle DEFG whose area is the same as ABCD's.»

Then Gaston calls Etienne who has had no trouble finding a solution.

Say what instructions for constructing the second rectangle Etienne should give Gaston and how he should go about explaining to his friend that the areas of ABCD and DEFG are equal.

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente:

«Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongatión de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie qué ABCD sin que sea necesario medir.»

Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

¿Qué método de construcción debe Etienne transmitir an Gaston y como debe explicarle que los réctangulos ABCD y DEFG tienen la misma superficicie?

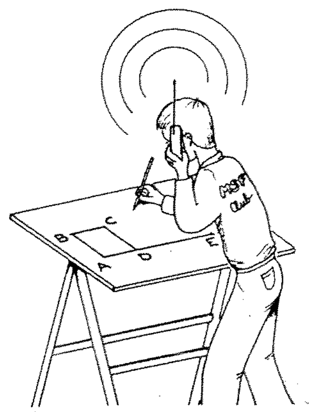
* * * * *

Gaston trova difficoltá nel compito di matematica:

«Dato un rettangolo ABCD e il sgmento DE quale prolungamento di AD, si chiede di costruire un rettangolo DEFG di superficie equivalente a quella di ABCD senza effettuare misure.»

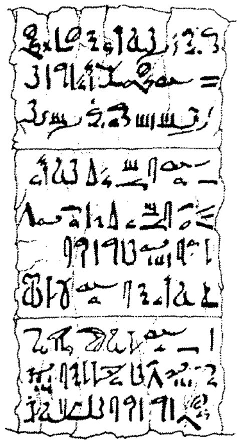
Telefona, pertanto, a Etienne que ha già risolto il problema.

Quale procedura di costruzione deve trasmettere Etienne a Gaston e come può spiegargli che i due rettangoli ABCD e DEFG hanno la stessa area?



Aufgabe 2
5 Punkte

Es geht so, o Pharao!



Zur Zeit der Pharaonen benutzen die Ägypter beim Bruchrechnen in der Regel Stammbrüche. Das sind Brüche, deren Zähler 1 ist.

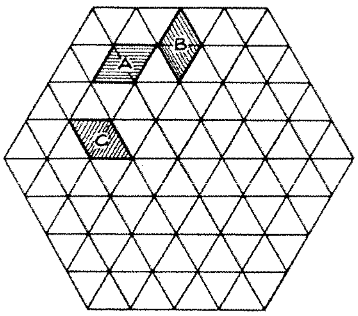
Mit der folgenden Regel aus dem Papyrus Rhind kann man zwei Drittel eines beliebigen Stammbruchs berechnen, dessen Nenner ungerade ist : „*Fragt man dich, was zwei Drittel sind, so nimm zweimal den Nenner und sechsmal den Nenner. Das Ergebnis ist die Summe der so erhaltenen Stammbrüche. Zwei Drittel von 1/9 sind zum Beispiel 1/18 + 1/54*“.

Trifft diese Regel für alle Stammbrüche mit ungeradem Nenner zu ? Erkläre deine Antwort!

Erfinde eine einfachere Regel für Stammbrüche mit geradem Nenner !

Aufgabe 3
10 Punkte

Puzzle 3D



Rémy hat ein regelmäßiges Sechseck vollständig mit Rauten ausgefüllt, die alle kongruent sind und die gleiche Ausrichtung wie Raute A, Raute B oder Raute C haben. Raute A und Rauten mit der gleichen Orientierung wie A färbt er rot, Raute B und Rauten mit der gleichen Orientierung färbt er gelb, Raute C und Rauten mit der gleichen Orientierung färbt er grün.

Am Ende stellt er überrascht fest, dass er von jeder Farbe gleich viele Rauten erhält. Er findet eine Erklärung, als er erkennt, dass seine Figur als perspektivische Darstellung kleiner Würfel aufgefasst werden kann, die in einen großen Würfel eingebettet sind.

Zeichne das Sechseck mit den Rauten und färbe es wie oben beschrieben! Präzisiere die Erklärung von Rémy.

Aufgabe 4
5 Punkte

Drei oder vier

Vor Nathalie und Coralie liegen neun Spielsteine, nummeriert von 1 bis 9.

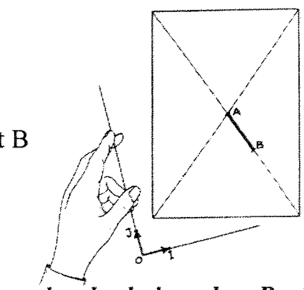
„Wenn ich einen bestimmten Spielstein wegnehme“, meint Coralie, „kann ich die restlichen Steine so in drei Gruppen aufteilen, dass die Summe der Zahlen auf den Steinen bei allen Gruppen die gleiche ist.“

„Mit den 8 Steinen, die du jetzt gerade übrig hast, kannst du sogar vier Gruppen mit dieser Eigenschaft bilden“, entgegnet Nathalie.

Welche Nummer trägt der Spielstein, den Coralie weggenommen hat?

Aufgabe 5
10 Punkte

Ohne System



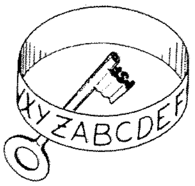
Markiere auf dem Antwortblatt den Punkt A im Schnittpunkt der Diagonalen. Der Punkt B liegt auf einer der Diagonalen und ist 5 cm von A entfernt.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm hat A die Koordinaten (3/2) und B die Koordinaten (7/5). Aber das Koordinatensystem ist verschwunden.

Konstruiere das Koordinatensystem und erkläre die Konstruktion! Die Verwendung von durchscheinendem Papier oder das Durchdrücken von Punkten ist nicht erlaubt.

Aufgabe 6 – 5 Punkte

MTOAYHUGLJTAGQLJTYO



Der Titel dieser Aufgabe ist verschlüsselt.

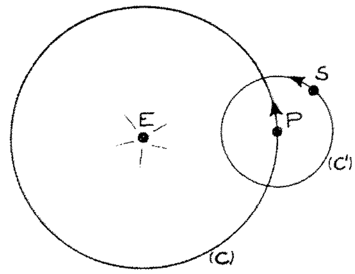
Zur Verschlüsselung wurde das Codewort MOG verwendet, welches nach der Position der Buchstaben im Alphabet die Zahlenfolge (13; 15; 7) liefert. Im unverschlüsselten Text hat man den ersten Buchstaben durch den ersetzt, welcher im Alphabet an dreizehnter Stelle nach diesem Buchstaben folgt. Um den zweiten Buchstaben des Textes zu ersetzen, muss im Alphabet um 15 Positionen weitergegangen werden. Beim dritten Buchstaben geht man um sieben Positionen weiter. Danach wiederholt sich der Schlüssel.

An der 27. Position steht wieder der Buchstabe A , danach B, und so weiter.

Rekonstruiere den ursprünglichen Text!

Aufgabe 7 – 10 Punkte

Himmelskarussell



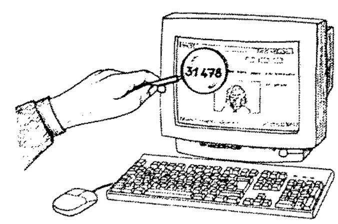
Ein Planet P bewegt sich auf einer Kreisbahn C, in deren Mittelpunkt sich der Stern E befindet. Für einen Umlauf benötigt P 360 Tage, der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, der Bahnradius beträgt 70 000 000 km.

Im Abstand von 10 000 000 km wird der Planet im gleichen Umlaufsinn von einem Satelliten S umrundet. Bezüglich P bewegt sich S gleichförmig auf einem Kreis C‘, der in der selben Ebene wie C liegt. Alle 30 Tage liegen E, P und S in dieser Reihenfolge auf einer geraden Linie.

Zeichne die Bahn, welche S bezüglich E beschreibt! Der Radius von C soll 7 cm und der von C‘ 1 cm betragen. Konstruiere ausreichend viele Positionen von S und zeichne dann die Bahn ein! Beginne mit einer Position bei der E, P und S in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 8 – 5 Punkte

Nostalgie



Als Rémy in seinen Computer das heutige Datum, den 11. März 1999 eingibt, zeigt dieser auf dem Bildschirm die Zahl 34768 an.

Als er das Datum eingibt, an welchem der Wettbewerb *Mathematik ohne Grenzen* zum ersten Mal durchgeführt wurde, erscheint auf dem Bildschirm die Zahl 31478.

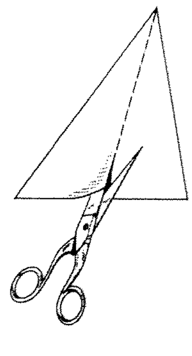
Der Computer ordnet jedem Datum eine natürliche Zahl zu, wobei die Zahl für den unmittelbar darauffolgenden Tag jeweils um 1 größer ist.

Finde mit Hilfe dieser Angaben das Datum und den Wochentag heraus, an dem Mathematik ohne Grenzen zum ersten Mal stattgefunden hat! Erkläre, wie du vorgegangen bist!

Aufgabe 9 – 10 Punkte

Kollage

Ein beliebiges Dreieck wird durch eine Seitenhalbierende in zwei Teildreiecke zerlegt. Um zu veranschaulichen, dass diese Dreiecke flächengleich sind, kann man eines davon durch gerade Schnitte zerschneiden und das andere aus den so erhaltenen Stücken zusammensetzen.



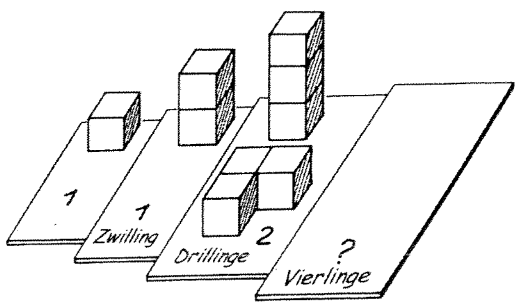
Zeichne das Ausgangsdreieck und eine Seitenhalbierende auf das Anwortblatt. Zeichne bei einem der beiden Teildreiecke ein, wie du es zerschneidest, und begründe diese Zerlegung. Stelle die Teilstücke her und klebe sie auf die zweite Hälfte des Ausgangsdreiecks.

Aufgabe 10 – 15 Punkte

How much?

Aus gleichen Würfeln kann man einen „Zwilling“ und zwei „Drillinge“ zusammensetzen.

Zeichen jeweils ein Schrägbild von allen „Vierlingen“, die man bilden kann.

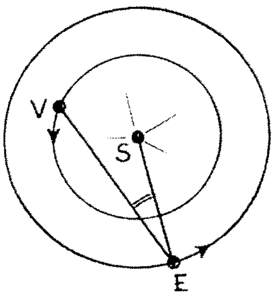


nur für Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Planetenzauber

Der Planet Venus ist manchmal als Morgenstern und manchmal als Abendstern zu sehen. Wie die Erde beschreibt Venus eine fast kreisförmige Bahn um die Sonne, allerdings mit anderer Umlaufzeit. Die Bahnen liegen auch annähernd in der selben Ebene.



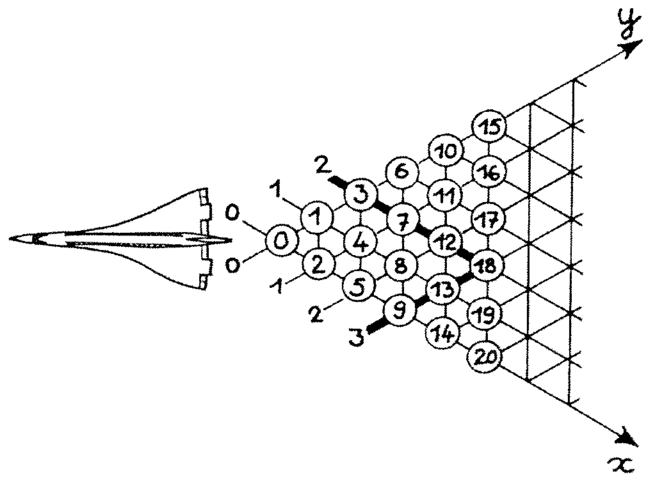
Die Astronomen haben beobachtet , dass sich die Größe des Winkels SEV zwar verändert, dabei aber über einen bestimmten Wert nie hinausgeht.

Stelle die Erdbahn durch einen Kreis um S mit dem Radius 5 cm dar! Markiere die Position der Erde durch den Punkt E auf der Kreislinie! Konstruiere die Bahn der Venus unter der Voraussetzung, dass der Maximalwert des Winkels SEV 46° beträgt! Der Bahnradius SE der Erde misst rund $150 \cdot 10^6$ km. Berechne damit den Bahnradius der Venus!

Aufgabe 12
10 Punkte

Systematisch

Die Knoten eines Netzes werden gemäß der Abbildung durchnummeriert. Außerdem besitzt jeder Knoten zwei Koordinaten. Zum Beispiel hat der Punkt mit der Nummer 18 die Koordinaten (3/2).

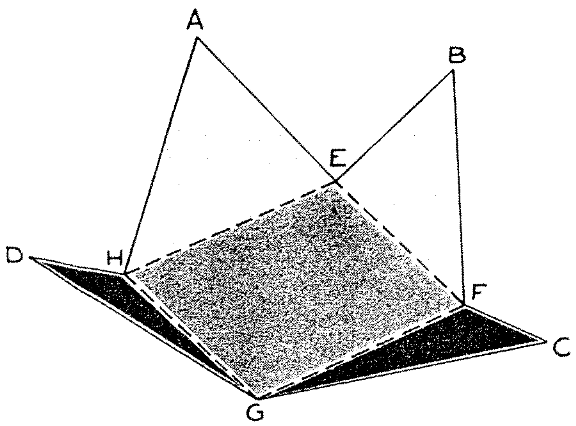


Welche Koordinaten hat der Punkt mit der Nummer 1999?

Begründe deine Antwort!

Aufgabe 13
15 Punkte

Das Geheimnis der Pyramide



An einen freien Nachmittag vertreibt sich Peter die Zeit mit Zirkel und Lineal.

Auf ein Stück Karton zeichnet er ein Quadrat ABCD mit 10 cm langen Seiten. Dann zeichnet er um jeden der vier Eckpunkte einen Viertelkreis durch die sich diagonal gegenüberliegenden Nachbarpunkte der jeweiligen Ecke.

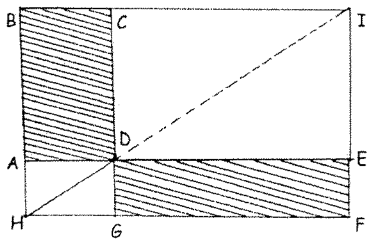
Die Kreisbögen schneiden sich in den Punkten E, F, G und H.

Peter fragt sich, ob das Vieleck AEBFCGDH nicht das Netz einer Pyramide sein könnte.

Prüfe, ob dies der Fall ist, und begründe deine Antwort! Berechne gegebenenfalls die Höhe der Pyramide!

Mathematik ohne Grenzen 1999
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 11.3.1999

1. Konstruktive Zusammenarbeit



Ergänze die Seiten DE und DC zu einem Rechteck mit dem Eckpunkt I. Die Gerade (ID) schneidet die Gerade (AB) in H.
Ergänze die Strecken BH und BI zu einem Rechteck mit dem Eckpunkt F. Die Gerade (CD) schneidet die Strecke HF in G.
Dadurch erhält man das gesuchte Rechteck GFED.
Δ HFI und Δ HIB sind flächengleich (Punktsymmetrie).
Beide Dreiecke lassen sich zerlegen in ein Rechteck und zwei Teildreiecke.
Δ HGD und Δ HDA sowie Δ DEI und Δ DIC sind flächengleich. Damit müssen auch beide Rechtecke flächengleich sein. □

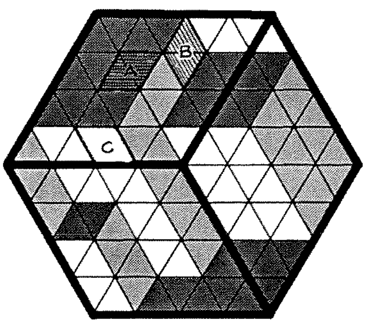
2. Es geht so, o Pharao

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a}=\frac{4}{6a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}$$

Die Regel gilt also für alle Stammbrüche.
Ist a allerdings gerade, kann man kürzen und es gilt die einfachere Regel:
Teile den Nenner durch 2 und multipliziere das Ergebnis mit 3. So ergibt sich der neue Nenner.

3. Puzzle 3D

Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung.



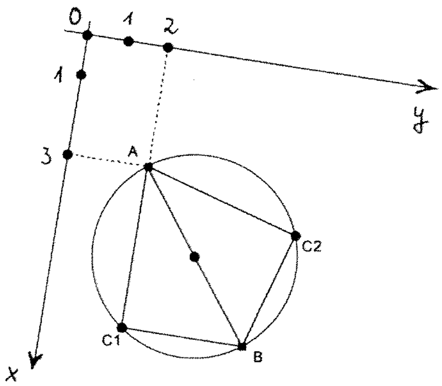
Folgt man der Interpretation von Rémy, so besitzen parallel verlaufende Seitenflächen der kleinen Würfel alle die gleiche Farbe. Die hier dunkelgrau gefärbten Flächen kann man zum Teil als Oberseite der kleinen Würfel und zum Teil als Boden des großen Würfels ansehen.
Verschiebt man diese Flächen parallel zu den Seitenkanten nach oben, so wird die Oberseite des großen Würfels vollständig durch 16 dunkelgraue Rauten ausgefüllt. Dreht man die Zeichnung, so läßt sich die analoge Überlegung für die Flächen der beiden anderen Farben anstellen. Es gibt also von jeder Farbe stets 16 Rauten.

4. Drei oder vier

Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 hat den Wert hat den Wert 45. Entfernt man einen Spielstein, so muß die Summe der verbliebenen Zahlen durch 3 und 4 und damit auch durch 12 teilbar sein. Die Zahl mit dieser Eigenschaft, welche 45 am nächsten liegt, ist 36. Dies ist auch die einzige Zahl die möglich ist, weil die Differenz zu 45 höchstens 9 betragen darf. Der entfernte Spielstein trägt also die Nummer 9.

5. Ohne System

Man konstruiert das Steigungsdreieick zu AB mit AB als Hypotenuse (Thaleskreis).
Die Kathetenlängen sind $|x_B - x_A| = 4\,cm$ und $|y_B - y_A| = 3\,cm$.



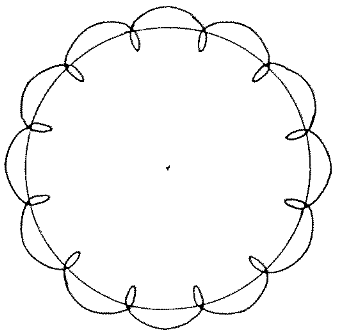
Die x-Achse ist parallel zu AC1 und hat von A den Abstand 2 cm. Senkrecht dazu, im Abstand 3 cm von A verläuft die y-Achse. Der Punkt C2 liefert ein zweites Koordinatensysten, das allerdings im Uhrzeigersinn orientiert ist.

6. MTOAYHUGLJTAGQLJTYO

Der unverschüsselte Text lautet *„ZEHN JAHRE WETTBEWERB“.*

Mathematik ohne Grenzen 1999
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 11.3.1999

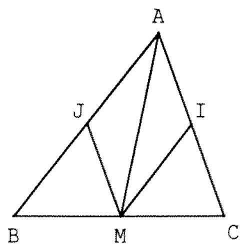
7. Himmelskarussell



8. Nostalgie

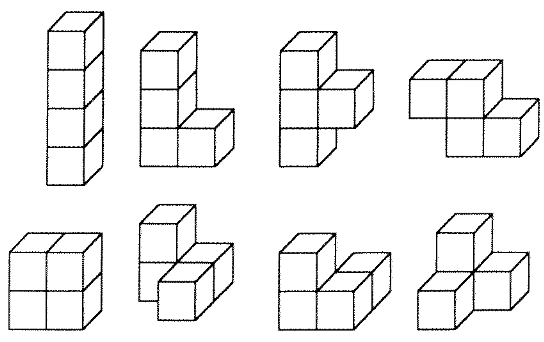
Vom Tag des ersten Wettbewerbs bis zum 11.3.1999 sind 34768 -31478 = 3290 Tage vergangen. 3290 ist durch 7 teilbar, damit war der fragliche Tag ein Donnerstag.
3290 = 9 · 365 + 5. Die Jahre 1996 und 1992 waren Schaltjahre. Also hat der erste Wettbewerb vor 9 Jahren und 3 Tagen stattgefunden. Das gesuchte Datum ist Donnerstag, der 8. März 1990.

9. Kollage



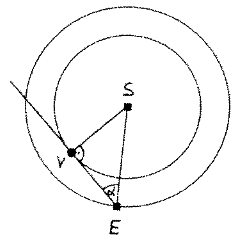
M, I und J sind Seitenmittelpunkte im Dreieck ABC. MI ist Mittelparallele bzgl. AB und MJ ist Mittelparallele bzgl. AC. Damit gilt
$\overline{MI} = \overline{JA} = \overline{BJ}$ und $\overline{MJ} = \overline{AI} = \overline{IC}$.
Weiter gilt $\overline{BM} = \overline{MC}$.
Die Dreiecke BMI und MCI sowie die Dreiecke MAJ und MIA sind also jeweils kongruent.

10. How much ?



Es gibt 8 „Vierlinge". Man beachte, dass die beiden Körper in der Mitte der zweiten Reihe nicht identisch sind.

11. Planetenzauber

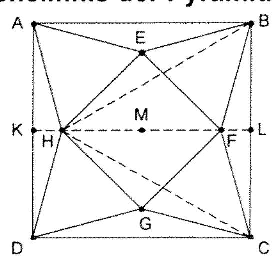


Der freie Schenkel von α ist Tangente an die Umlaufbahn der Venus.
Für den Bahnradius der Venus gilt
$\overline{VS} = \overline{ES} \cdot \sin\alpha \approx 107\,900\,970\ km$.

12. Systematisch

Die Nummerierung der Knoten auf der y-Achse entspricht der Summe S_n der Zahlen von 0 bis n, wobei n die y-Koordinate des Knotens (0/n) ist.
Da von oben nach unten nummeriert wird, muss $S_n < 1999$ gelten. Mit Hilfe der Summenformel oder durch Probieren erhält man $S_{62} = 1953$ und $S_{63} = 2016$.
Erhöht man die Nummerierung eines Knotens um 1, so nimmt die x-Koordinate des Knotens um 1 zu, wogegen die y-Koordinate um 1 abnimmt.
1999 - 1953 = 46. Für den Knoten mit der Nummer 1999 gilt also x = 46 und y = 62-46 = 16.

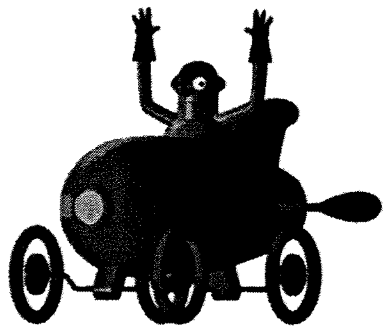
12. Das Geheimnis der Pyramide



HL und KF sind Höhen der gleichseitigen Dreiecke CBH und DFA.
Also gilt $\overline{HL} = \overline{KF} = 5 \cdot \sqrt{3}\ cm.$
$\overline{KL} = \overline{KF} + \overline{HL} - \overline{HF} \Rightarrow \overline{HF} = 10 \cdot (1 - \sqrt{3})cm$.
Analog zeigt man $\overline{EG} = 10 \cdot (1 - \sqrt{3})cm$.
E, F, G und H liegen auf den Mittelsenkrechten der Quadratseiten und sind vom Mittelpunkt M des Quadrates gleich weit entfernt. Damit ist das Viereck EFGH ebenfalls ein Quadrat und die Dreiecke über den Seiten von EFGH gleichschenklig und untereinander kongruent. Die Länge s einer Dreiecksseite erhält man z.B. aus Δ DHK. Es gilt
$s = \overline{DH} = 10 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}\ cm.$. Eine Pyramide läßt sich bilden, weil $\overline{HF} < 2s$ ist. Für die Höhe gilt $h^2 = s^2 - \overline{MH}^2 \Rightarrow h \approx 3{,}66\ cm$.

MATEMATICA SENZA FRONTIERE

Competizione Interclassi di 2° e 3° (11 Marzo 1999)

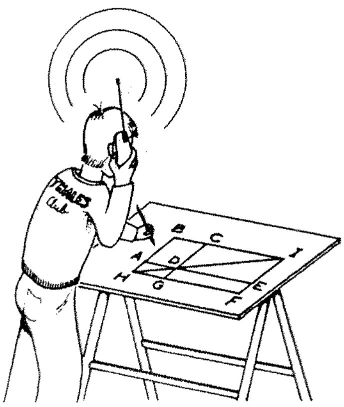


- *Solo le risoluzioni degli esercizi 6, 7, e 10 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata.*
- *La cura sarà apprezzata.*
- *Ogni soluzione deve essere riportata su fogli-risposta separati.*

Ezercizio n.1 (punti 10)

Fac-simile

Soluzione da redigere in francese, o inglese, o spagnolo, o tedesco, con un minimo di trenta parole.



Gaston a des difficultés avec le devoir de mathématiques suivant:

«On donne un rectangle ABCD et un segment [DE] dans le prolongement de [AD].

Construire un rectangle DEFG de même aire que ABCD sans faire de mesures.»

Il téléphone à Etienne qui a trouvé la solution.

Quel programme de construction Etienne doit-il transmettre à Gaston et comment doit-il lui expliquer que les rectangles ABCD et DEFG ont la même aire ?

* * * * *

Gaston can't do his maths homework. Here it is:

«Let ABCD be a rectangle and [DE] a segment which is the prolongation of [AD]. Without taking any mesurements construct a second rectangle DEFG whose area is the same as ABCD's.»

Then Gaston calls Etienne who has had no trouble finding a solution.

Say what instructions for constructing the second rectangle Etienne should give Gaston and how he should go about explaining to his friend that the areas of ABCD and DEFG are equal.

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente:

«Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongatión de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie qué ABCD sin que sea necesario medir.»

Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

¿Qué método de construcción debe Etienne transmitir an Gaston y como debe explicarle que los réctangulos ABCD y DEFG tienen la misma superficicie?

* * * * *

Gaston hat Schwierigkeiten mit seinen Hausaufgaben in Mathematik :

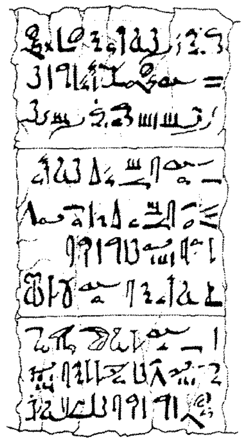
« Gegeben sind ein Rechteck ABCD und eine Strecke DE in der Verlängerung von AD.

Konstruiere, ohne zu messen, das Rechteck DEFG, welches den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD besitzt».

Gaston telefoniert mit Etienne, der die Lösung bereits gefunden hat.

Welche Konstruktionsbeschreibung muß Etienne Gaston übermitteln ? Wie kann er ihm erklären, daß die beiden Rechtecke ABCD und DEFG flächengleich sind ?

Ezercizio n.2 (punti 5)
Tutto all'inverso



Al tempo dei Faraoni gli Egiziani si servivano in generale solo di frazioni unitarie, cioè con numeratore uguale a 1.

Ecco una regola del Papiro Rhind per calcolare i due terzi di ogni frazione con denominatore dispari :

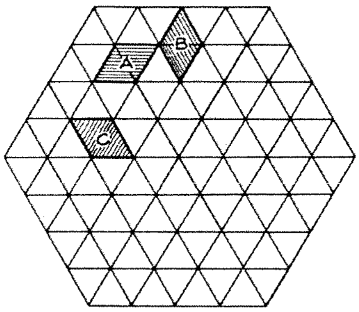
"Calcolare i 2/3 di una frazione dispari. Se ti chiedono : «quanto fanno i due terzi di ... ?» tu moltiplica il denominatore della frazione per 2 e moltiplica il denominatore per 6. Il risultato è la somma delle due frazioni unitarie così ottenute".

Per esempio «due terzi di 1/9 fanno 1/18 + 1/54 »".

La regola enunciata è vera per tutte le frazioni unitarie dispari ? Giustificate la vostra risposta.

Trovate una regola più semplice per le frazioni unitarie pari.

Ezercizio n.3 (punti 10)
Con una dimensione in più



Renzo riempie l'esagono qui disegnato con rombi uguali ad A, B o C che colora in questo modo : in rosso il rombo A e quelli che sono orientati come A, in giallo B e quelli orientati come B e in verde C e quelli orientati come C.

Alla fine è sorpreso di vedere che ci sono quantità uguali di rombi dello stesso colore. Trova allora una spiegazione a ciò, interpretando il suo disegno come la rappresentazione in prospettiva di tanti cubetti che formano un cubo più grande.

Riprodurre l'esagono, riempirlo di rombi seguendo il criterio di Renzo esplicitando la sua spiegazione.

Ezercizio n.4 (punti 5)
Per un gettone in meno

Natalina e Carolina hanno davanti nove gettoni numeroti da 1 a 9.

- Toh, è buffo - dice Natalina - Se tolgo uno dei gettoni, posso suddividere i rimanenti in tre gruppi in modo che in ciascuno di essi la somma delle cifre sia uguale -.

- Ti dico anche di più - dice Carolina - con i gettoni rimasti posso anche fare quattro gruppi aventi la stessa proprietà -.

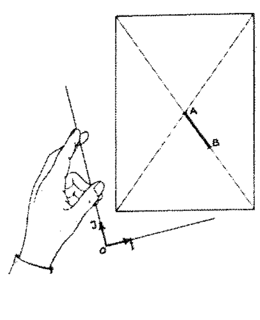
Stabilire quale gettone è stato scartato da Natalina e Carolina, giustificando la risposta.

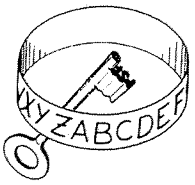
Ezercizio n.5 (punti 10)
Ritrovate il riferimento !

Chiamate A il punto di intersezione delle diagonali del foglio risposta, B il punto di una diagonale a 5 cm da A. Nel sistema di riferimento ortogonale (O; x; y), in cui l'unità di misura è il centimetro, i punti A e B hanno coordinate (3;2) e (7;5).

Ma il sistema di riferimento è sparito !

Senza fare ricalchi costruire il sistema di riferimento, spiegandone la costruzione.





Ezercizio n.6 (punti 5)
Codice mistero

Ecco un messaggio cifrato : $\boxed{\text{Q X I V F U N G T V O K E L G E B U}}$

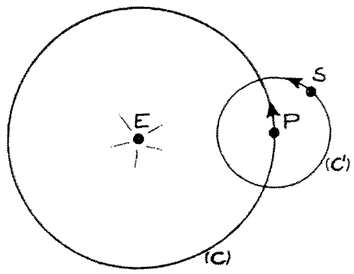
Per decodificarlo si utilizza la "chiave" M.S.F. che si basa sulla successione (13 ;19 ; 6).

Il numero che corrisponde ad una lettera è quello del suo posto nell'alfabeto intemazionale (a 26 lettere).

Nel cifrare Il messaggio si sostituisce alla 1° lettera del messaggio quella che la segue di 13 posti nell'alfabeto, alla 2° lettera del messaggio quella che la segue di 19 posti, alla terza quella che la segue di 6 posti, e così via, ripetendo la chiave. Al 27° posto si ritrova la lettera A, al 28° posto la lettera B, ecc.

Decifrate il messaggio.

Ezercizio n.7 (punti 10)
Tutto è relativo



Un pianeta P descrive in 360 giomi con moto regolare una circonferenza (C) intorno ad una stella E.

Questo pianeta ha un satellite S che gli ruota intorno nello stesso senso. Visto da P il satellite descrive con moto regolare una circonferenza (C') posta nel piano di C. Ogni 30 giorni i punti E, P, S si ritrovano allineati nell'ordine.

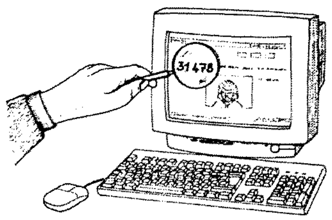
Sono date le distanze da centro a centro : EP = 70 000 000 km ; PS = 10 000 000 km.

Si chiede di costruire la traiettoria di S rispetto alla stella E.

Porre E al centro del foglio risposta, la circonferenza C abbia raggio 7 cm e C' abbia raggio 1 cm.

Iniziare la costruzione ponendo allineati nell'ordine E, S, P. Sapendo che dopo 15 giorni sono allineati nell'ordine E, P, S, costruire un numero di posizioni sufficiente per tracciare la traiettoria di S.

Ezercizio n.8 (punti 5)
Retrospettiva



Quando Rémy digita sul suo elaboratore la data di oggi, 11 marzo 1999, vede comparire sullo schermo 34768.

Quando digita la data in cui si è svolta la prima prova di M.S.F. in Francia, vede comparire 31478.

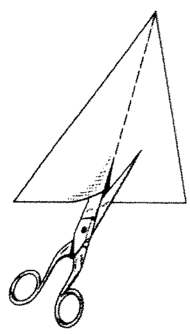
Questo elaboratore trasforma ogni data in un numero che aumenta di uno ogni giomo che passa.

Servendovi di questi dati ritrovate la data e il giorno della settimana della prima prova di M.S.F. Motivate la risposta.

Ezercizio n.9 (punti 10)
Taglia e cuci

Ogni triangolo è diviso da una sua mediana in due triangoli.

Si può verificare sperimentalmente che questi due triangoli hanno la stessa area tagliando uno dei due e ricostruendo l'altro con i pezzi ottenuti.



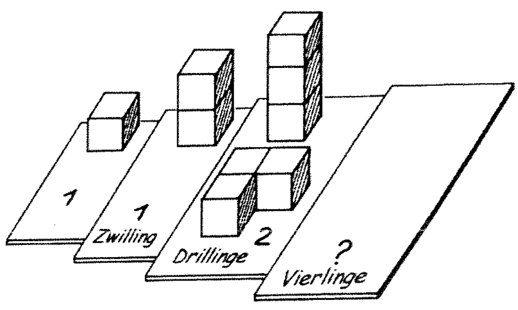
Sul foglio risposta riprodurre il triangolo di partenza, fare i tagli e incollando mettere in evidenza l'uguaglianza delle aree.

Giustificare questa uguaglianza precisando le linee di tagilo.

Ezercizio n.10 (punti 15)
Quadricubi

Esiste un solo monocubo e un solo bicubo, ma esistono due possibili tricubi.

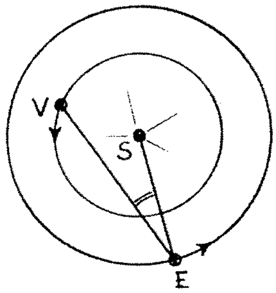
Disegnate in prospettiva tutti i possibili quadricubi.



Solo Classi 3ª

Ezercizio n.11 (punti 5)
Grandangolare

Il pianeta Venere, detto anche Stella del Pastore, è spesso visibile di primo mattino e dopo il tramonto del Sole.
Come la Terra, Venere ruota intorno al Sole su un'orbita quasi circolare, ma con velocità diversa. Le orbite della Terra e di Venere sono circa complanari.
Gli astronomi hanno osservato che l'angolo STV varia nel tempo, ma che la sua ampiezza non supera mai un oerto valore (massimo).

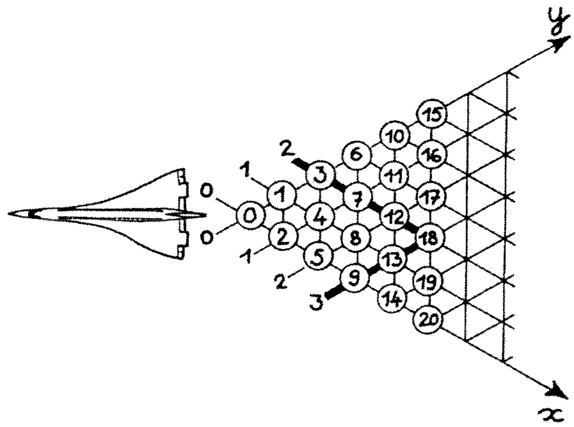


Rappresentate l'orbita della Terra con una circonferenza di centro S e raggio 5 cm. Situate la Terra in un punto T della sua orbita.
Costruite l'orbita di Venere, sapendo che il valore massimo dell'angolo STV è uguale a 46°. Calcolate il raggio dell'orbita di Venere, sapendo che ST è circa **150.10^6 km.**

Solo Classi 3ª

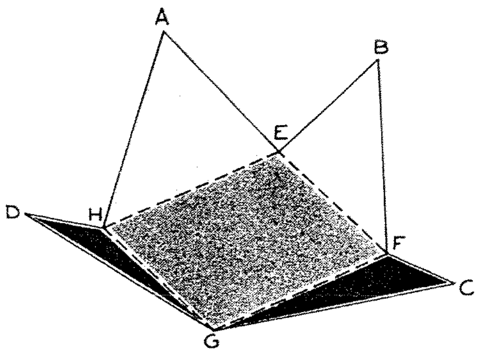
Ezercizio n.12 (punti 10)
Sulla rete

Si numerano i nodi della rete seguendo le "diagonali" come nel disegno qui riprodotto. Ogni nodo ha due coordinate, per esempio il nodo numero 18 ha coordinate (3;2).
Quali sono le coordinate del nodo numero 1999 ? Giustificate la vostra risposta.



Solo Classi 3ª

Ezercizio n.13 (punti 15)
Il problema della piramide



Mercoledì Pierino ha deciso di divertirsi con riga e compasso. Su un cartoncino traccia un quadrato ABCD di 10 cm di lato. Poi traccia i quattro archi di circonferenza con centro in un vertice e passanti per gli estremi di una diagonale del quadrato. Gli archi si intersecano nei punti E, F, G, e H.
Pierino si chiede a questo punto se il poligono AEBFCGDH non possa essere lo sviluppo di una piramide.
Rispondete a Pierino, spiegando la vostra risposta. Se il poligono è lo sviluppo di una piramide calcolate l'altezza di questa.

ACADÉMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

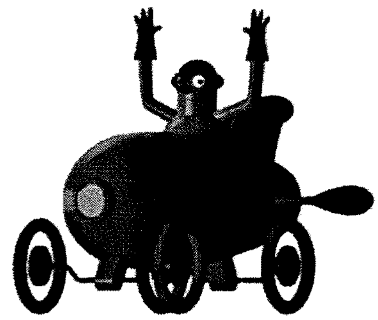
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

A maths competition for pupils in years 10 and 11

Mathématiques sans frontières

March 1999

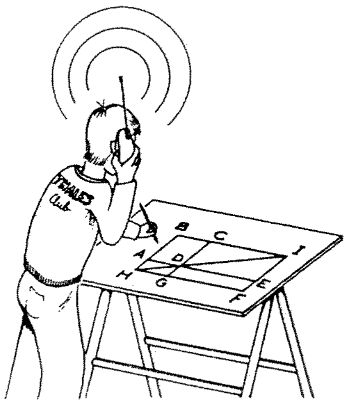


- Questions 6, 7 & 10 do not require any explanation in the answer ; all of the others do.
- Careful work will be taken into account.
- Teams should submit one answer sheet per question.
- The team name must be on every answer sheet.

QUESTION 1
10 POINTS

Fac-simile

Write down your answer in French, German, Spanish or Italian using at least 30 words.



Gaston a des difficultés avec le devoir de mathématiques suivant:

«On donne un rectangle ABCD et un segment [DE] dans le prolongement de [AD].

Construire un rectangle DEFG de même aire que ABCD sans faire de mesures.»

Il téléphone à Etienne qui a trouvé la solution.

Quel programme de construction Etienne doit-il transmettre à Gaston et comment doit-il lui expliquer que les rectangles ABCD et DEFG ont la même aire ?

* * * * *

Gaston hat Schwierigkeiten mit seinen Hausaufgaben in Mathematik :
« Gegeben sind ein Rechteck ABCD und eine Strecke DE in der Verlängerung von AD. Konstruiere, ohne zu messen, das Rechteck DEFG, welches den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD besitzt».
Gaston telefoniert mit Etienne, der die Lösung bereits gefunden hat.
Welche Konstruktionsbeschreibung muß Etienne Gaston übermitteln ?
Wie kann er ihm erklären, daß die beiden Rechtecke ABCD und DEFG flächengleich sind ?

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente:

«Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongatión de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie qué ABCD sin que sea necesario medir.»

Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

¿Qué método de construcción debe Etienne transmitir an Gaston y como debe explicarle que los réctangulos ABCD y DEFG tienen la misma superficicie?

* * * * *

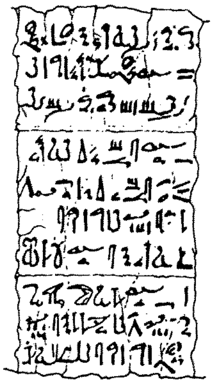
Gaston trova difficoltá nel compito di matematica : « Dato un rettangolo ABCD e il segmento DE quale prolungamento di AD, si chiede di costruire un rettangolo DEFG di superficie equivalente a quella di ABCD senza effettuare misure. ».

Telefona, pertanto, a Etienne che ha già risolto il problema.

Quale procedura di costruzione deve trasmettere Etienne a Gaston e come può spiegargli che i due rettangoli ABCD e DEFG hanno la stessa area ?

QUESTION 2
5 POINTS

Topsy-turvy

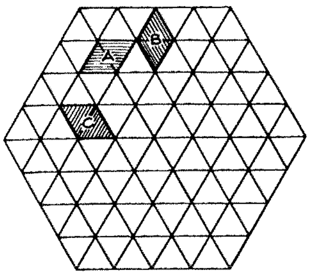


As a general rule, the ancient Egyptians only used unit fractions, by which is meant fractions with the numerator 1. The diagram shows an extract from the Rhind papyrus which gives a rule for finding two thirds of every unit fraction with an odd number denominator. "To calculate two thirds of an odd fraction, if someone asks you : what is two thirds of it ?, you make 2 times the denominator and 6 times the denominator. The result is the sum of the two unit fractions thisrgives." For example, two thirds of 1/9 is 1/18 +1/54.

Is this rule true for all odd unit fractions ? Explain your answer Find a simpler rule all even unit fractions.

QUESTION 3
10 POINTS

In Perspective



Rémy covers the hexagon shown by rhombuses like A,B and C. He colours them in : red for rhombus A and all others with the same orientation; yellow for B and all others with the same orientation; green for C and the others with the same orientation. When he finishes he is surprised to find that there are the same number of rhombuses of each colour He is able to explain this by looking on the design as the perspective drawing of small cubes inside a larger cube.

Make a drawing of the hexagon, colour in the rhombuses in the way that Rémy did and set out clearly his explanation.

QUESTION 4
5 POINTS

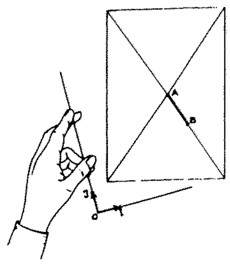
Tokenism

Natalie and Coralie have 9 tokens numbered 1 to 9. Strange, says Coralie - If I remove one token I can put the rest into three piles and in each pile the sum of the numbers is the same, I can go further, says Natalie, with the same 8 tokens I can put them into 4 piles and again the sum of the numbers in each pile is the same.

Find out which token Natalie and Coralie removed. Justify your answer

QUESTION 5
10 POINTS

Missing axes

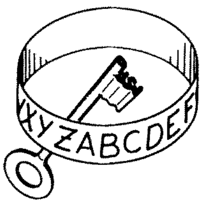


Mark point A the intersection of the diagonals of your answer sheet (use A4 paper). Mark B on a diagonal at 5 cm from point A. For rectangular coordinate axes with the scale of I cm to each unit the points A and B have coordinates (3,2) and (7,5). But the coordinate axes are missing,

Without using square paper draw the axes. Explain how they were found.

QUESTION 6
5 POINTS

Enigma variations



Here is a message in code :
QBDVXSRTTABBRKYNBXR
To put the message into code the "key" MSF was used. This led to (13,19,6) by replacing each letter with its number in the alphabet. In the original message the first letter was replaced by the letter 13 places after it, the second letter by the letter 19 places after it and the third letter by the letter 6 places after it. This pattern was then repeated. The alphabet can be written in a circle so that A is the first and twenty-seventh letter, B is the second and twenty-eight etc.

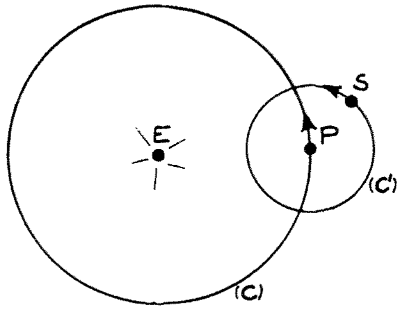
Find the original message, translate it into English and explain its significance.

QUESTION 7
10 POINTS

Everything is relative

A planet P has a regular motion on a perfect circular path C round a star E, completing an orbit in 360 days. The planet has a moon S which circles it in a regular motion in the same, anti-clockwise, sense. Seen from P the moon follows a perfect circular path C' in the same plane as the circle C, Every 30 days the points E, P and S lie once again in that order on a straight line.

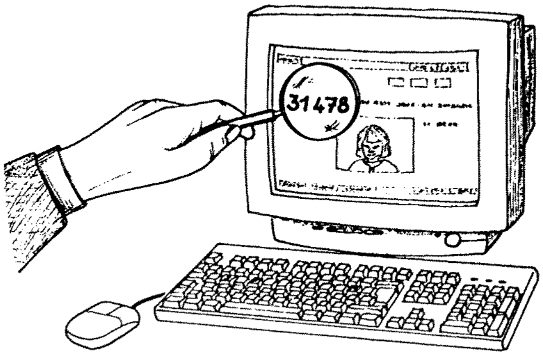
The distances are known :
EP = 70,000,000 km   PS = 10,000,000 km .



Draw the path traced out by S as it moves round the star E. Put E at the centre of your answer paper, with circle C radius 7 cm and circle C' radius 1 cm. Start with E,S, and P on a straight line in that order, 15 days later they will be on a straight line in the order E,P and S. Knowing this draw enough positions of S to be able to draw the trajectory of the moon.

QUESTION 8
5 POINTS

Don't look back

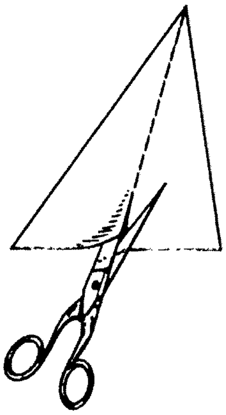


When Rémy types in today's date, 11 March 1999, he sees it come up on the screen as 34768. When he types in the date of the first Mathématiques sans Frontières competition it appears as 31478. The computer is changing each date into a number but the numbers still increase by 1 to count the days passing.

Knowing this, find out the date of the first Mathématiques sans Frontières competition and what day of the week it was.

QUESTION 9
10 POINTS

Cut and Paste

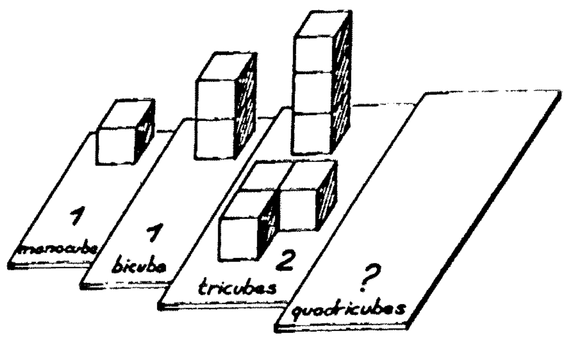


The triangle shown has been divided into two triangles by a median. It is possible to show experimentally that the two resulting triangles have the same area by cutting one of them up and fitting the pieces together to make the other.

On your answer sheet draw a triangle, cut it along a median and with one more cut illustrate that the triangles have equal areas. By stating precisely where the line of the cut lies, prove this equality.

QUESTION 10
15 POINTS

Quadricubes



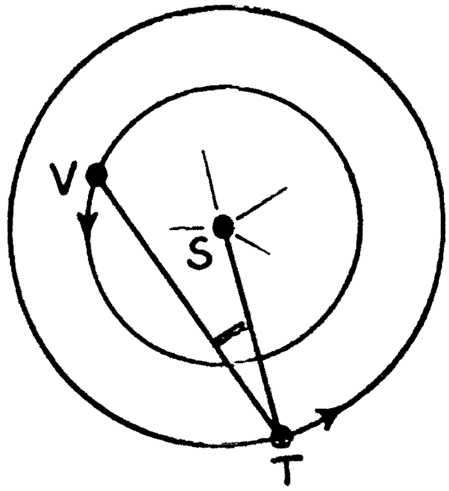
The diagram shows the only possible monocube and the only possible bicube. It also shows the two possible tricubes. A quadricube is an arrangement on the same pattern of 4 identical cubes.

Make a perspective drawing of all quadricubes.

QUESTION 11
5 POINTS

Angle

Senior classes only



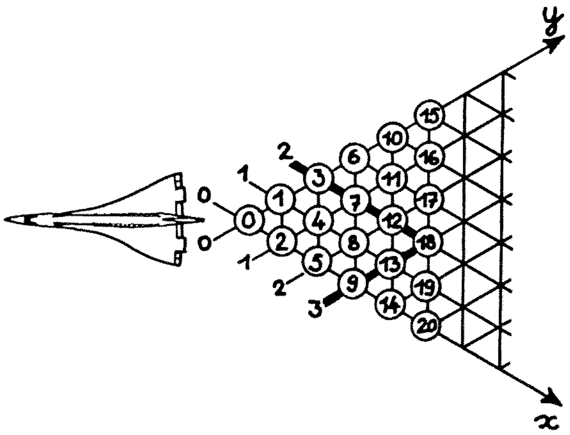
Earth, Venus goes round the sun in a nearly circular orbit, but with a different speed. The orbits of Earth and Venus are practically coplanar. Astronomers have observed that the angle STV varies over time but it is never bigger than a certain maximum size.

***Represent the orbit of the Earth by a circle of radius 5 cm, centre S. Put the Earth at a point T on its orbit. Construct the orbit of Venus given that the maximum size of angle S is 46°. Calculate the radius of the orbit of Venus given that* ST=150x10^6 km.**

QUESTION 12
10 POINTS

Surfing the net

Senior classes only



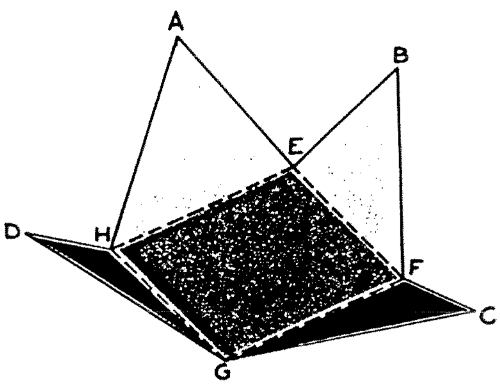
The intersections on a network are numbered as shown in the diagram, Each intersection has (x,y) coordinates. For example the intersection 18 has coordinates (3,2).

What are the coordinates of the intersection numbered 1999 ? Justify your answer.

QUESTION 13
15 POINTS

Pyramystery

Senior classes only



On Wednesday Pierre decided to mess about with his ruler and compass. He drew on cardboard a square ABCD of side 10 cm. Then he drew the arcs of the circles centred at the vertices of the square and joining diagonally opposite vertices. The arcs of the circle cut each other at the points E,F,G and H. Pierre asks himself whether the polygon AEBFCGDH is the net of a pyramid.

Answer Pierre's query, explaining your response. If it is the net of a pyramid find the height of the pyramid.

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

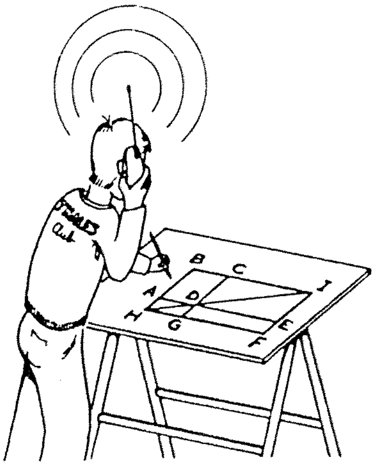
MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

A verseny megszervezését a **SOROS Alapítvány** tette lehetővé.
További támogatóink:
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.
Művelődési és Közoktatási Minisztérium
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
Merkel Economos
Graphic-A Studio
Safari-Park Gänserndorf

1. FELADAT:

FAX SIMILÉ

E feladat megoldását angolul, németül, franciául olaszul vagy spanyolul adjátok meg!
(10 PONT)



Gaston a des difficultés avec le devoir de mathématiques suivant:
"On donne un rectangle ABCD et un segment [DE] dans le prolongement de [AD]. Construire un rectangle DEFG de meme aire que ABCD sans faire de mesures."
Il téléphone á Etienne qui a trouvé une solution.

Quelle programme de construction Etienne doit-il transmettre á Gaston et comment doit-il lui expliquer que les rectangles ABCD et DEFG ont la meme aire?

Gaston hat Schwierigkeiten mit seinen Hausaufgaben in Mathematik:
"Gegeben sind ein Rechteck ABCD und eine Strecke DE in der Verlangerung von AD. Konstruiere, ohne zu messen, das Rechteck DEFG, welches den selben Flacheninhalt wie das Rechteck ABCD besitzt."
Gaston telefoniert mit Etienne, der die Lösung bereits gefunden hat.

Welche Konstruktionbeschreibung muss Etienne Gaston übermitteln? Wie kann er ihm erklaren, dass die belden Rechtecke ABCD und DEFG flachengleich sind?

Gaston can' t do his maths homework.
Here it is:
"Let ABCD be a rectangle and [DE] a segment which is the prolongation of [AD]. Without taking any measurements, construct a second rectangle DEFG whose area is the same as ABCD' s."
Then Gaston calls Etienne who has had no trouble finding a solution.

Say what instructions for constructing the second rectangle Etienne should give Gaston and how he should go about explaining to his friend that the areas of ABCD and DEFG are equal.

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente:
"Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongacíon de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie que ABCD sin que sea necesario medir."
Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

? Que método de construcción debe Etienne transmitir a Gaston y cómo debe explicarle que los rectángulos ABCD y DEFG tienen la misma superficie?

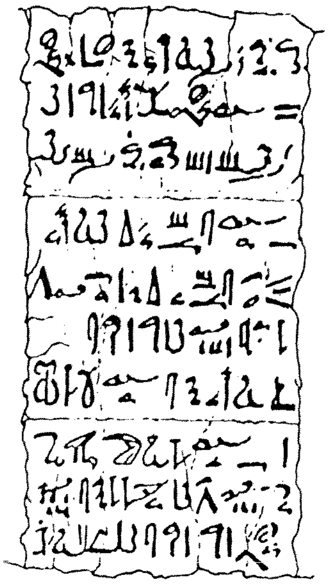
Gaston trova difficoltá nel compito di matematica:
"Dato un rettangolo ABCD e il segmento DE quale prolungamento di AD, si chiede di construire un rettangolo DEFG di superficie equivalente a quella di ABCD senza effettuare misure."
Telefona, pertanto, a Etienne che ha giá risolto il problema.

Quale procedura di contuzione deve transmettere Etienne a Gaston e come puó spiegargli che i due rettangoli ABCD e DEFG hanno la stessa area?

2. FELADAT:

FÁRAÓ SZÁMTAN

A fáraók idejében az egyiptomiak csak az 1 számlálójú törtekkel számoltak.
A híres Rhind-papiruszon a következő eljárást írták le ilyen törtekkel való művelet végrehajtására: " Számoljuk ki a kétharmadát egy páratlan nevezőjű törtnek. Ha megkérdezik tőled: Mennyi a kétharmada a ...? Te veszed a nevező kétszeresét illetve a hatszorosát. Az eredmény a két ilyen nevezőjű tört összege lesz. Például 1/9 az 1/18 + 1/54."



A leírt eljárás jó eredményt ad-e bármely 1 számlálójú és páratlan nevezőjű tört esetében?

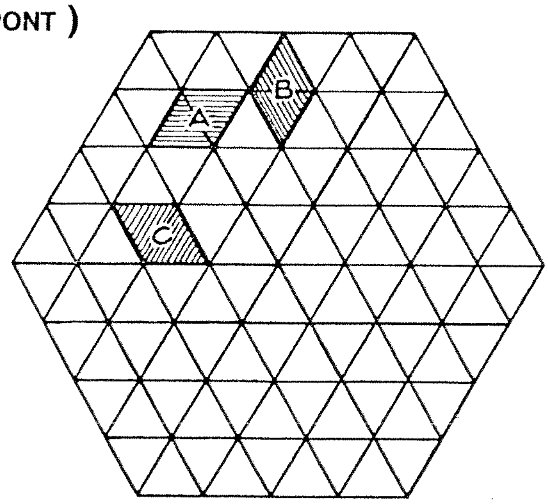
(5 PONT)

3. FELADAT:

OP-ART

Rémy a mellékelt hatszöget piros, sárga és zöld egybevágó rombuszokkal egyszeresen és hézagmentesen fedi le úgy, hogy az A jelű rombusszal azonos állású rombuszok pirosak, a B-vel azonos állásúak sárgák és a C-vel azonos állásúak zöldek legyenek. Végül meglepetésére a lefedett hatszögre ugyanannyi piros, sárga és zöld rombusz került. Rémy-nek sikerült magyarázatot találnia e jelenségre, mégpedig úgy, hogy a hatszöget egy kocka képének fogta fel, amelybe kis kockákat helyeztek el.
Fejtsétek ki részletesen Rémy indoklását, és másoljátok le a hatszöget a válaszlapra, színezzétek ki egy lehetséges módon a megadott szabály szerint!

(10 PONT)

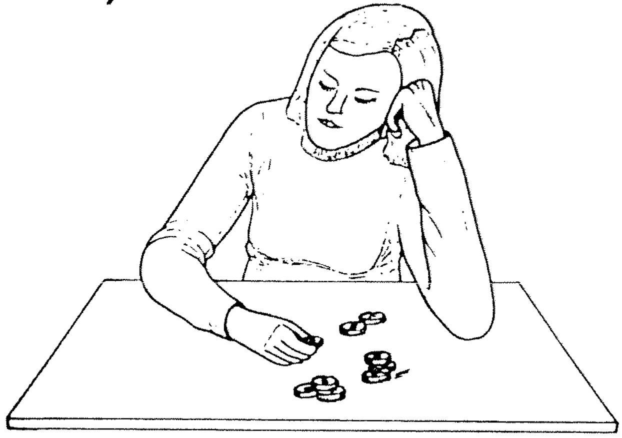


4. FELADAT:

ZSETON-HIÁNY

Nathalie és Coralie 9 zsetonnal játszanak, melyeket 1-től 9-ig megszámoztak.
-"Érdekes! Ha elveszem ezt a zsetont, a maradék nyolcat három kupacba tudjuk rakni úgy, hogy az egyes kupacokban lévő zsetonokon a számok összege ugyanaz legyen. " – mondta Coralie.
-"Én azt mondom, hogy négy kupacba is lehet a maradék nyolc zsetont osztani, s akkor is igaz az állításod!" – válaszolta Nathalie.
Hányas számú zsetont vette ki a többi közül Coralie? Válaszotokat indokoljátok!

(5 PONT)

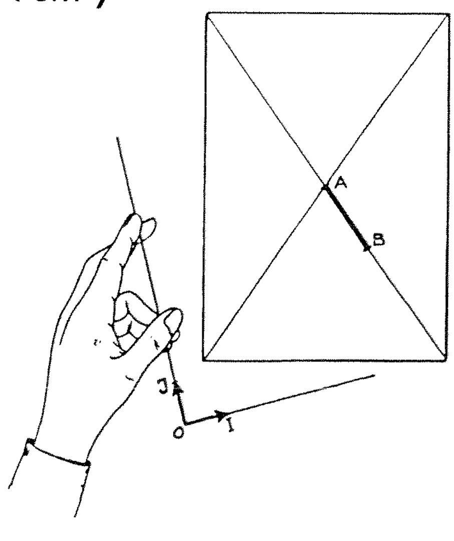


5. FELADAT:

KOORDINÁTA RENDSZER-HIÁNY

Az A4-es válaszlap átlóinak metszéspontja legyen A, s a B pont az egyik átlón 5 cm távolságra van A-tól. Egy derékszögű koordinátarendszerben, melyben az egység a két tengelyen egyenlõ, a két pont koordinátái: A(3;2) és B(7;5)
Csakhogy a koordinátarendszer eltűnt!
Körzővel és vonalzóval szerkesszétek meg a koordinátarendszert, s eljárásotokat indokoljátok!
Adjatok egy-egy példát a kupacba rendezésre!

(10 PONT)



6. FELADAT:

BOLDOG SZÜLETÉSNAPOT!

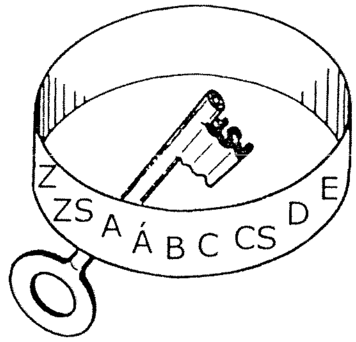
Íme egy rejtjeles üzenet:

Á-U-CS NY-Í-I-Ü N Ő-Í-É-I-TY-N-X-P-Ü-E Ő-N-X-J-CS-R-S X-Í-SZ-Ü-Z-SZ

Az üzenet kódolására a "Matematika Határok Nélkül" elnevezésű kulcsot alkalmazták. Ennek a lényege a következő. Megnézzük az üzenet minden betűjének sorszámát az ABC-ben. Az első sorszámához 13-at, a másodikéhoz 19-et, a harmadikéhoz 6-ot, a negyedikéhez megint 13-at, majd 19-et és 6-ot adunk hozzá, és így tovább. A leírt rejtjeles szöveg az így kapott sorszámoknak megfelelő betű. (A "zs" a 42., majd újra kezdve az "a" 43., "á" 44., "b" 45., és így tovább.)

Fejtsétek meg az üzenetet!

(5 PONT)



7. FELADAT:

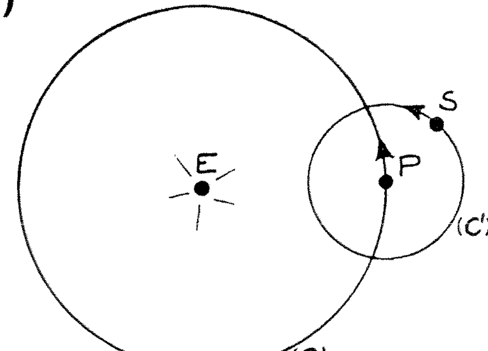
MINDEN VISZONYLAGOS

Egy P bolygó (C) kört ír le az E csillag körül. Keringési ideje 360 nap.
A bolygó körül egy S mesterséges hold kering ugyanabban a körüljárási irányban. P-ből nézve a mesterséges hold (C') körpályán kering a (C) –vel azonos síkban, állandó nagyságú sebességgel.
30 naponta az E, P és S pontok ilyen sorrendben egy egyenesbe esnek.

Tudjuk, hogy: EP= 70 000 000 km
PS= 10 000 000 km.

Rajzoljátok meg S által befutott pályát E-ből nézve! Ehhez helyezzétek E-t a válaszlap középpontjába, (C) kör sugarát 7 cm-nek, (C') kör sugarát 1 cm-nek vegyétek.

(10 PONT)



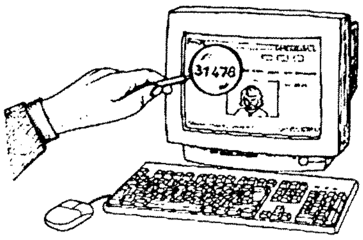
8. FELADAT:

RETROSPEKTÍV

Rémy a számítógépébe beüti a mai dátumot : 1999. március 11. A képernyőn a következő szám jelenik meg: 34768.
Amikor a legelső Matematika Határok Nélkül verseny dátumát írja be, a képernyőn a felirat: 31478 lesz.
Tudni kell Rémy számítógépéről, hogy a dátum helyett egy számot ír ki, amely minden nap 1-gyel növekszik.

Milyen napon volt az első Matematika Határok Nélkül verseny? Számítsátok ki a pontos dátumot, és azt is, hogy a hét melyik napjára esett!

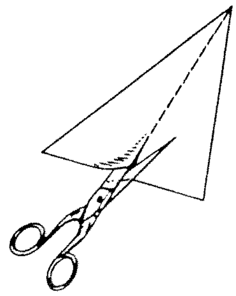
(5 PONT)



9. FELADAT:

VÁGD ÉS RAGASZD!

A mellékelt háromszöget az egyik súlyvonala mentén kettévágták. Átdarabolással is belátható, hogy a kapott két rész területe megegyezik. Ehhez elegendő az egyik részt újból ketté vágni, és más módon összeilleszteni az így keletkezett két darabot.



Rajzoljátok le a kiinduló háromszöget, majd a megfelelően kivágott, és újra összeillesztett darabokat ragasszátok a válaszlapra úgy, hogy a területek egyenlősége nyilvánvaló legyen. Indokoljátok is a területek egyenlőségét munkátok alapján!

(10 PONT)

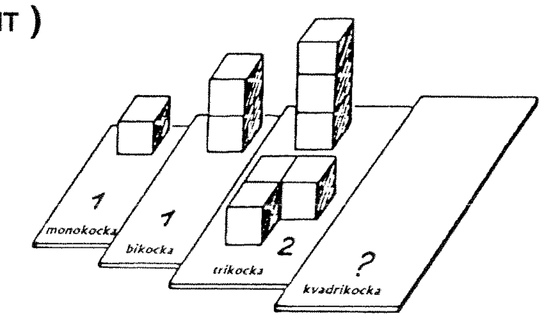
10. FELADAT:

KUBIZMUS

Csak egyféle "monokocka" és "bikocka" van. "Trikocká"-ból kétféle lehetséges. Hányféle, nem egybevágó "kvadrikocka" építhető?

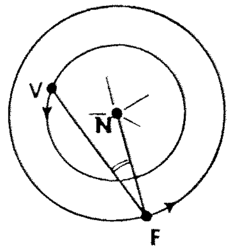
Rajzoljátok le az összes "kvadrikocka" képét az ábrán látható ábrázolási módon!

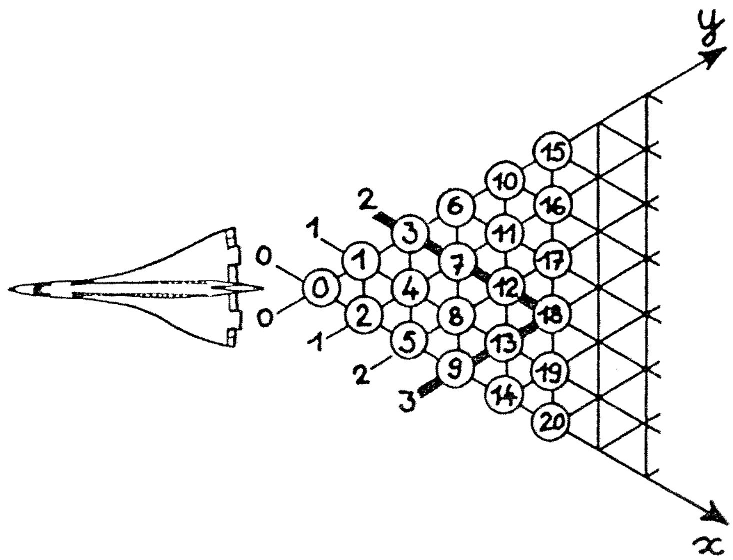
(15 PONT)



11. FELADAT:
LÁTÓSZÖG

A Vénuszt Esthajnal csillagnak is nevezik, mert gyakran hajnalban, vagy nem sokkal a naplemente után látható az égbolton.
Ahogyan a Föld, úgy a Vénusz is hozzávetőleg körpályán kering a Nap körül, de más sebességgel. A Föld és Vénusz pályája nagyjából egy síkban vannak.
A csillagászok megfigyelték, hogy az NFV∢ az idő függvényében változik, de sosem lesz nagyobb egy adott értéknél.
Ábrázoljátok a Föld pályáját egy N középpontú, 5 cm sugarú körrel. Jelöljétek F-fel a Földet a körön! Rajzoljátok meg a Vénusz pályáját, ha tudjuk, hogy az NFV∢ nem haladja meg a 46°-ot!
Mekkora a Vénusz pályájának sugara, ha NF≈150 000 000 km!
(5 PONT)



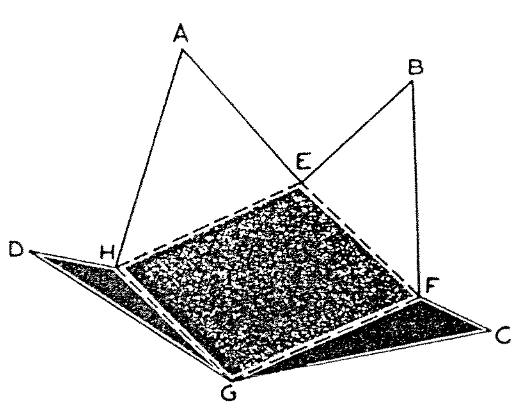


12. FELADAT:
ÚTON, ÚTFÉLEN ...

A mellékelt úthálózat csomópontjait az ábrán látható módon megszámozzuk.
Minden csomópontnak koordinátái vannak, például a 18-as csomóponté (3;2).
Mik lesznek az 1999-es csomópont koordinátái? Indokoljátok válaszotokat!
(10 PONT)

13. FELADAT:
PIRAMIS-REJTÉLY

Petit Pierre a körzőjével és vonalzójával játszadozik. Először egy 10 cm oldalélű ABCD négyzetet rajzol egy kartonra. Majd mind a négy csúcs köré rajzol egy-egy olyan negyedkört, amelyik összeköti egy átló két végpontját. Az ívek E, F, G és H pontban metszik egymást.
Petit Pierre elgondolkodik azon, az AEBFCGDH sokszög nem lehet-e egy gúla hálózata?
Válaszoljatok Petit Pierre kérdésére, és indokoljátok is a választ! Amennyiben valóban egy gúla hálózatáról van szó, mennyi e testnek a magassága?
(15 PONT)



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1999-2000

11ème édition

Les exercices n°2, 3, 4, 6 et 8 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

EXERCICE N°1

10 points

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots)

DEUX POIDS, DEUX MESURES

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa mas o menos que los demas. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demas en solo dos pesadas.

¿Como tiene que proceder ?

Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A, B, C e D. Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa differente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più leggera delle altre.
Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve determinare la biglia che è differente delle altre in due pesate al massimo.

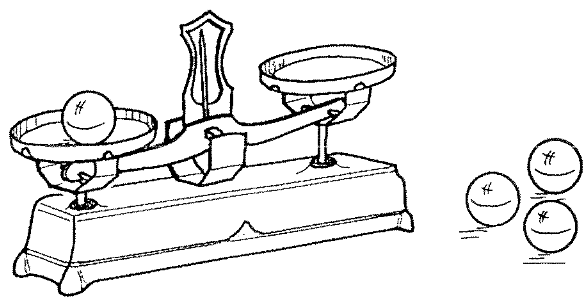
Come deve procedere ?

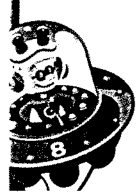
Antoine has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. 3 of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He doesn't know if this marble is heavier or lighter than the others.
Antoine has only got scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of 2 weighings.

How does he have to proceed ?

Antoine hat vier Murmeln, die mit A, B, C und D bezeichnet sind, sonst aber völlig gleich aussehen.
Drei dieser Murmeln haben die gleiche Masse. Die Masse der vierten Murmel unterscheidet sich von der Masse der anderen. Er weiß jedoch nicht, ob diese Murmel leichter oder schwerer als die anderen ist.
Antoine besitzt eine Balkenwaage, mit deren Hilfe er nur die Massen vergleichen kann. Mit höchstens zwei Wägungen kann er feststellen, welche der vier Murmeln sich von den anderen unterscheidet.

Wie muss er dabei vorgehen ?

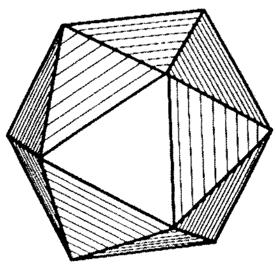


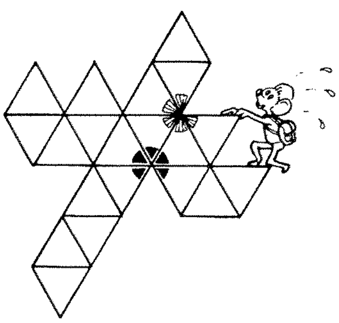


EXERCICE N°2

5 points

RÉUNION AU SOMMET





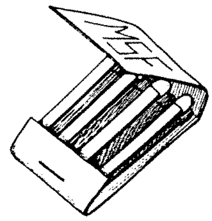
L'icosaèdre est un polyèdre régulier à 12 sommets et 20 faces qui sont des triangles équilatéraux.

Reproduire le patron ci-dessus sur la feuille-réponse, puis, comme sur le patron, marquer de la même façon (couleur,...) les angles des triangles dont les sommets se confondent avec l'un des sommets de l'icosaèdre.

EXERCICE N°3

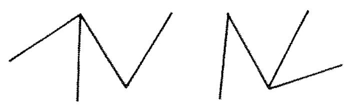
10 points

TOPO LOGIQUE



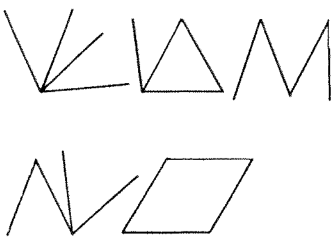
Avec un nombre donné d'allumettes on réalise sur une table des assemblages avec les règles suivantes :
- Chaque allumette en touche au moins une autre par une extrémité.
- Les contacts ne peuvent se faire qu'aux extrémités.

Deux assemblages sont considérés comme identiques si on peut passer de l'un à l'autre en déplaçant des allumettes sans les soulever et en gardant les contacts.
Par exemple, voici deux assemblages identiques :



Ainsi, il n'y a que 3 façons d'assembler 3 allumettes :

Et 5 façons d'en assembler 4 :



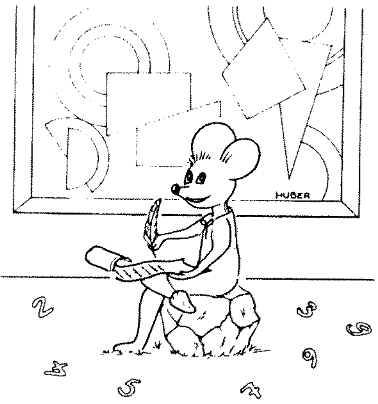
De combien de façons peut-on assembler 5 allumettes ? Réaliser les figures correspondantes.

EXERCICE N°4

5 points

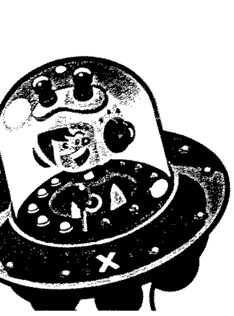
ODI-MATH

On lui doit qu'il n'y a pas
De fraction de carré égal
à deux,
Pour multiplier une table
Plusieurs fois formidable
Et un théorème par trop
fameux
Pour son nom vous
n'hésiterez pas.



Par $(16/9)^2$
en Egypte on m'approcha
Puis la course des siècles fut
Aussi celle à mes décimales :
Plus d'un milliard au
compteur aujourd'hui !
Par bonheur vous m'écrirez
autrement
Moi l'aire du disque
de rayon 1.

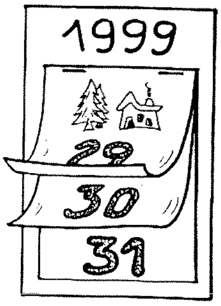
De qui ou de quoi parle chacun de ces deux textes ? Ecrire sur le même principe un texte poétique enrapport avec les mathématiques.



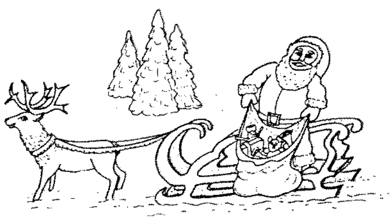
EXERCICE N°5

10 points

COURSE AUX ÉTRENNES



Grégoire et Juliette jouent avec les dates d'une même année. Celui qui commence donne le numéro d'un jour de janvier, par exemple le 6 janvier. Ensuite, chaque joueur à son tour donne une date ultérieure mais en conservant soit le numéro du jour, soit le mois de la date



que vient de donner l'autre joueur.
Par exemple, après le 6 janvier, il est possible de dire 10 janvier, 20 janvier ou 6 février, 6 avril, 6 septembre...
Le vainqueur est le premier qui dit «31 décembre».

Après quelques parties, Juliette affirme qu'il existe une stratégie qui permet de gagner à coup sûr. Expliquer cette stratégie.

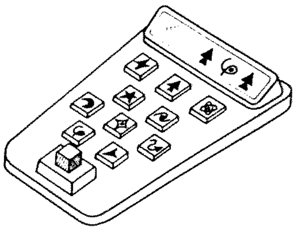
EXERCICE N°6

5 points

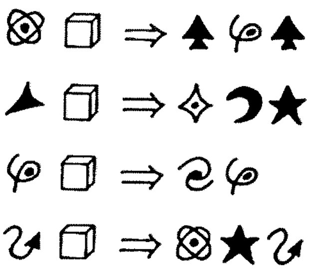
CALCUBATRICE

Sur la planète Xcyzq tout est de forme cubique.
Les habitants utilisent le même système décimal que nous mais avec 10 symboles différents des nôtres.
Ils ne connaissent que l'opération d'élévation au cube.

Ci-dessous est dessinée une de leurs calculatrices appelée calcubatrice.
Elle a 10 touches pour leurs chiffres et une onzième pour l'élévation au cube.



Voici 4 opérations faites avec cette calcubatrice :

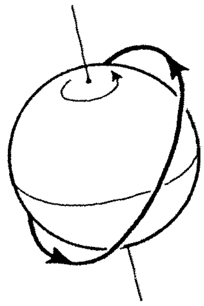


Faire correspondre les symboles avec nos chiffres de 0 à 9.

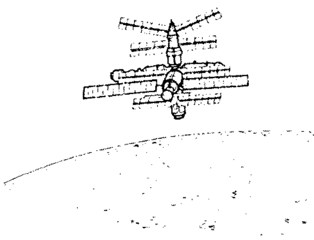
EXERCICE N°7

10 points

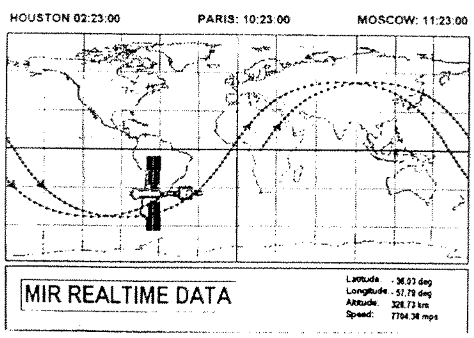
МИР



La station MIR tourne autour de la Terre sur une orbite quasi circulaire inclinée par rapport au plan de l'équateur.



Boris est surpris de découvrir en temps réel la trace de ce mouvement sur l'écran de son ordinateur : il est 10h23min à Paris et MIR se trouve au-dessus de Buenos Aires. MIR fait le tour de la Terre en 91minutes : elle survole l'équateur toutes les 45 minutes et demie. Les traces de ses passages successifs



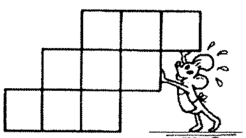
sont décalées à cause du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

Dessiner sur la feuille-réponse (carte ci-jointe) la suite de la trace de MIR jusqu'à ce qu'elle survole la France, puis donner une estimation de l'heure de passage au-dessus de Paris.

EXERCICE N°8

5 points

NOMBRES GRILLÉS



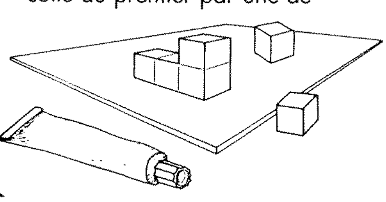
Numéroter les neuf cases de 1 à 9 de façon que dansn'importe quelle ligne, colonne et diagonale, on n'ait jamais deux entiers consécutifs.

EXERCICE N°9

10 points

LES COLLES DES CUBES

Wczxop, habitant de la planète Xcyzq, dispose de cubes de 1 cm d'arête. Il colle le premier cube sur une planche par une de ses faces puis il prend un deuxième cube qu'il colle au premier par une de ses faces, ce cube pouvant éventuellement être aussi collé sur la planche, et ainsi de suite : chaque nouveau cube est collé par une seule de ses faces à une face de l'un des cubes précédents, avec éventuellement une autre de ses faces collée sur la planche.



A la fin, Wczxop trouve 30 cm² pour l'aire extérieure de l'assemblage.

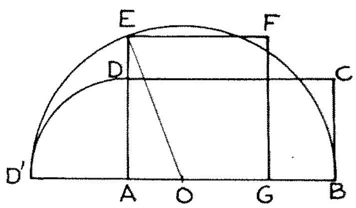
De combien de cubes l'assemblage est-il formé ? Dessiner un tel assemblage sur la feuille-réponse. Justifier la réponse.

EXERCICE N°10

15 points

QUADRATURE

«Quarrer un rectangle», c'est construire à la règle et au compas un carré de même aire.



Voici la méthode d'Euclide pour carrer le rectangle ABCD de longueur AB égale à x et de largeur AD égale à y.
On rabat le segment [AD] sur la droite (AB) pour obtenir le segment [AD'].
On construit le demi-cercle de diamètre [D'B] situé du côté de D.
On construit le carré AGFE, E appartenant au demi-cercle.

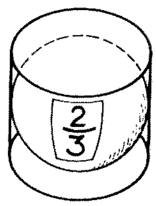
Justifier que ABCD et AGFE ont la même aire.

EXERCICE N°11

SPÉCIAL SECONDE

5 points

ARCHI-CONNU



Gravée sur la tombe d'Archimède, la figure ci-dessus illustre une propriété démontrée par lui.

Enoncer cette propriété et la démontrer.

(D'après le roman <*"Le Théorème du Perroquet"* de Denis Guedj)

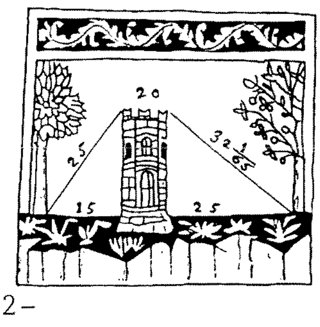
EXERCICE N°12

SPÉCIAL SECONDE

10 points

À UN POIL PRÈS

Le document ci-dessous est extrait de *"Compendion Del Abaquos"*, écrit en langue occitane par Frances Pelos en 1492.
Camille et David qui n'ont pas de calculatrice essayent de comprendre la valeur 32 1/65 proposée par Frances Pelos.



Camille : "C'est facile. Je sais calculer l'hypoténuse du triangle de droite."
David : "32^2=1024 et 33^2 =1089 et il reste à passer de 1024 à 1025."

Justifier l'affirmation de Camille et terminer la méthode commencée par David pour retrouver 32 1/65.

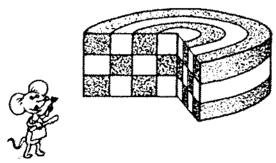
EXERCICE N°13

SPÉCIAL SECONDE

15 points

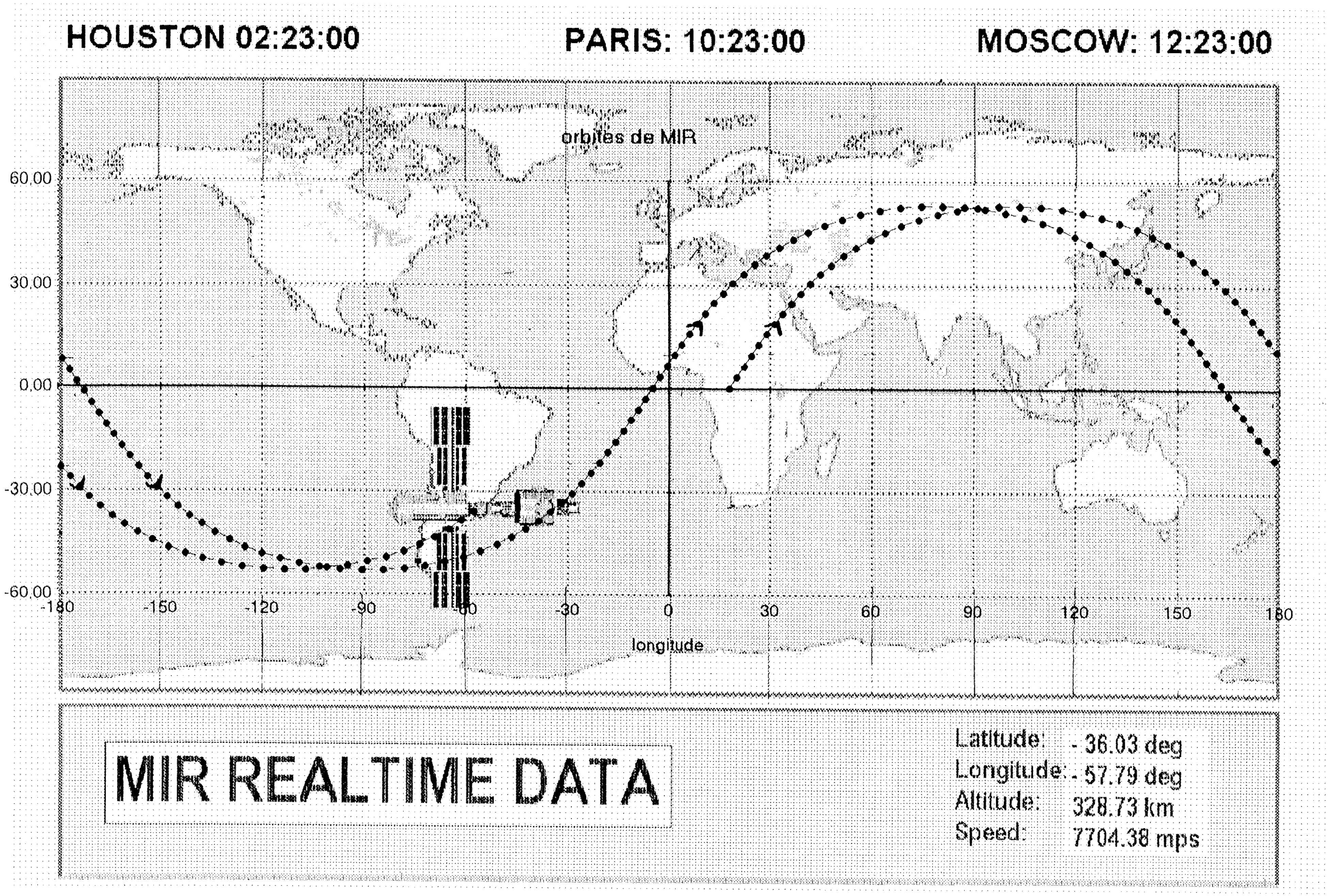
UN DESSERT POUR FINIR

Le gâteau de Mamie est superbe et plein de surprises. Quand on le coupe, on découvre qu'elle s'est donné bien du mal à le faire !



Il est formé de deux pâtes différentes : l'une est à la vanille et l'autre au chocolat. Il comprend trois étages de même hauteur. Le moule qui a permis de le faire est circulaire. Le damier qu'on obtient sur la tranche est constitué de 12 rectangles de mêmes dimensions. Il suffit de le regarder pour en avoir un avant-goût !
En comptant les rectangles blancs et les rectangles noirs, un de ses petits-fils, Gaston, s'exclame : "Tiens, on dirait que dans le gâteau il y a autant de vanille que de chocolat."

Gaston a-t-il raison ? Justifier la réponse.

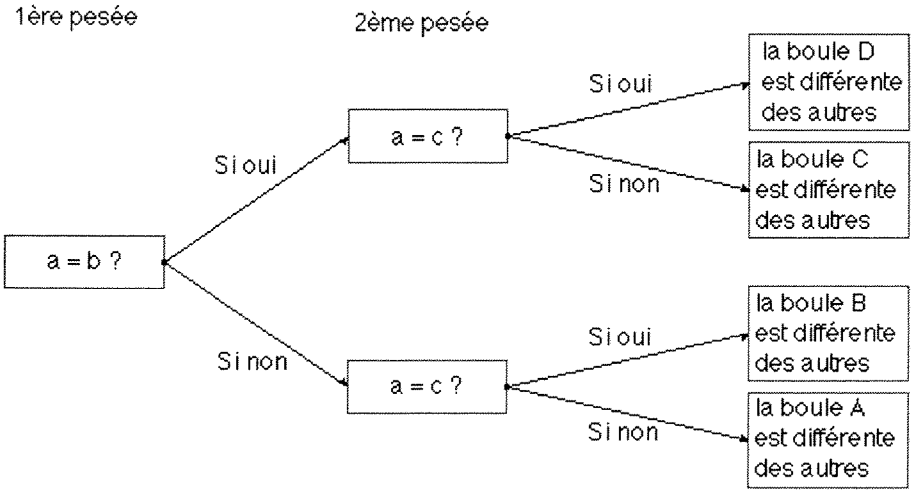


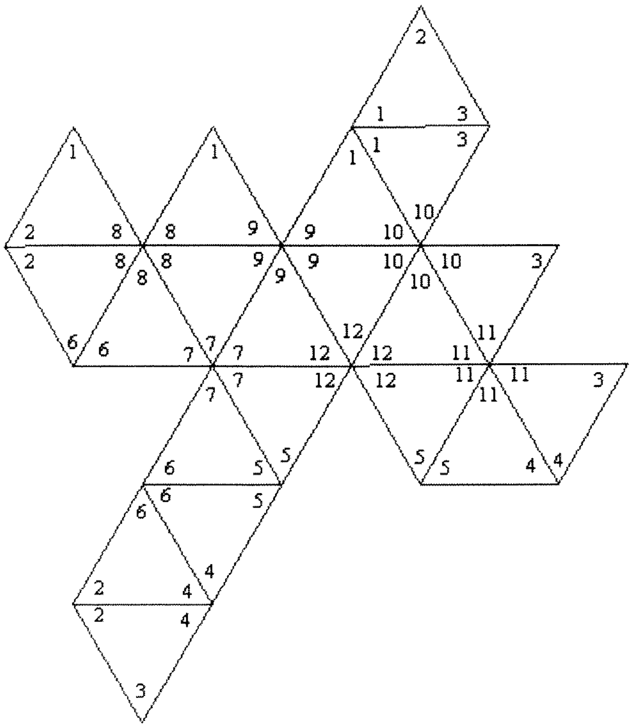
Les points de la trajectoire donnent la position de MIR minute par minute.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES 2000
Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 1999

Exercice 1

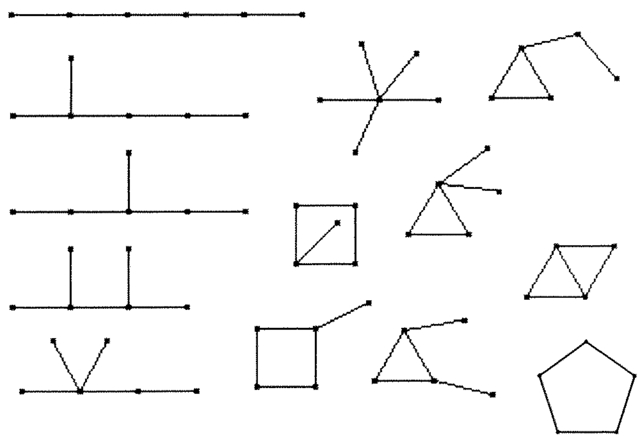
Notons a, b, c et d les masses des boules A, B, C et D. Les deux pesées peuvent se résumer ainsi :





Exercice 3

On peut réaliser 13 figures différentes :



Exercice 4

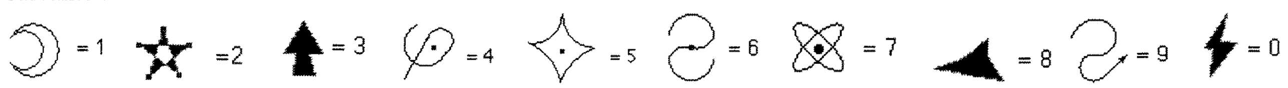
Le premier texte parle de **Pythagore** et le deuxième texte parle du nombre π **(pi)**.

Exercice 5

Il faut jouer en commençant par le **20 janvier** puis passer au 21 février, 22 mars, 23 avril, 24 mai, 25 juin, 26 juillet, 27 août, 28 septembre, 29 octobre, 30 novembre et enfin 31 décembre.

Exercice 6

La première opération correspond à $7^3 = 343$, la deuxième opération correspond à $8^3 = 512$, la troisième opération correspond à $4^3 = 64$ et la quatrième et dernière opération correspond à $9^3 = 729$. La correspondance des symboles est donc la suivante :



Exercice 7

En partant de Buenos Aires, pour arriver à la latitude de Paris, il faut environ 30 minutes (on compte 45 points entre 2 passages successifs à l'équateur d'où 90-91 points pour 91 minutes soit 1 point par minute). Ensuite Mir doit faire encore un tour complet autour de la terre pour arriver sur le méridien de Paris. En tout Mir mettra donc 30 + 91 = 121 minutes soit environ 2 heures.

Mir survolera donc la France vers 12h 23 min – 12h 24 min. (Remarque : « Mir » signifie « paix » en russe.)

Exercice 9

Le premier cube collé présente 5 faces visibles. Si le cube suivant est aussi collé à la table, le nombre de faces visible augmente de 3. S'il n'est pas collé à la table, le nombre de faces visibles augmente de 4. Et ainsi de suite.
Notons x le nombre de cubes du premier type et y celui du second type; on doit avoir $5 + 3x + 4y = 30$ soit $3x + 4y = 25$.
On trouve les **deux solutions** :

$x = 7$ et $y = 1$ ce qui correspond à **un total de 9 cubes** dont 8 (= 7 + 1) collés sur la table (figure 1)
et $x = 3$ et $y = 4$ ce qui correspond à **un total de 8 cubes** dont 4 (= 3 + 1) collés sur la table (figure 2).

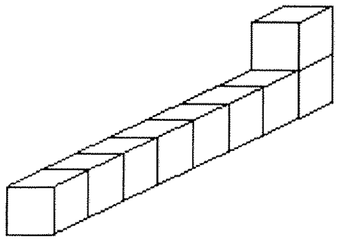


figure 1

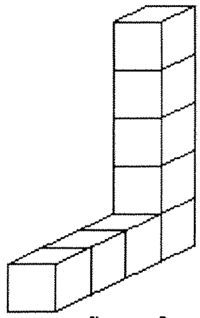


figure 2

Exercice 8

		1	8	6
	7	5	3	
4	2	9		

Exercice 10

On a BD' $= x + y$ (diamètre) donc OE $= \dfrac{x+y}{2}$ (rayon). OA = OD' – AD' $= \dfrac{x+y}{2} - y = \dfrac{x-y}{2}$.

Dans le triangle OAE rectangle en A, $AE^2 = OE^2 - OA^2 = \dfrac{(x+y)^2}{4} - \dfrac{(x-y)^2}{4} = \dfrac{4xy}{4} = xy$

Comme AE^2 est l'aire du carré AGFE et xy est celle du rectangle ABCD, on a bien $\mathcal{A}ire_{\mathbf{ABCD}} = \mathcal{A}ire_{\mathbf{AGFE}}$.

Exercice 11

Le volume d'une boule inscrite dans un cylindre (boule tangente aux bases du cylindre et à la surface latérale) est égal aux $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre. Volume cylindre = aire de la base × hauteur $= \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$; Volume boule $= \dfrac{4\pi R^3}{3}$

On a bien *Volume boule* $= \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times$ Volume cylindre en effet $\frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \dfrac{4\pi R^3}{3}$. (Propriété découverte par Archimède)

Il existe une autre solution : L'aire de la boule est égale $\frac{2}{3}$ de l'aire totale du cylindre. En effet : Aire boule $= 4\pi R^2$

Aire totale du cylindre = aire des 2 bases + aire de la surface latérale $= 2 \times \pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

On a bien *Aire boule* $= \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times$ Aire cylindre en effet $\frac{2}{3} \times 6\pi R^2 = 4\pi R^2$.

Anecdote : Cette propriété découverte et démontrée par Archimède sur les volumes lui plut tellement qu'il a demandé que la figure correspondante soit gravée sur sa tombe, ce qui a été fait en 212 avant J.-C. sur ordre du général Marcellus. Et c'est ce qui permit au grand Cicéron, plus d'un siècle plus tard, de retrouver cette tombe oubliée de tous.

Exercice 12

Affirmation de Camille : L'hypoténuse du triangle de droite mesure $\sqrt{(25^2 + 20^2)} = \sqrt{1025}$.
Méthode de David : On admet que les accroissements de x et x^2 sont proportionnels (cf. interpolation linéaire)

÷65

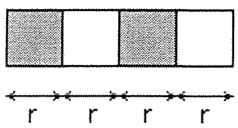
accroissement de x	$33 - 32 = 1$	$1/65$
accroissement de x^2	$1089 - 1024 = 65$	$1025 - 1024 = 1$

÷65

Comme $\sqrt{1024} = 32$, on a donc $\sqrt{1025} \approx 32\ 1/65$.

Exercice 13

* En échangeant les parts de vanille et de chocolat des 2 couches supérieures on se ramène à une couche de vanille et à une de chocolat : il y a donc autant de vanille que de chocolat sur les 2 couches supérieures.
* Il reste à comparer les volumes de pâte à la vanille et au chocolat sur la couche inférieure.



Il suffit de comparer les aires des bases des parties chocolat et vanille.
Pour la vanille : $\pi r^2 + \pi(9r^2 - 4r^2) = 6\pi r^2$
Pour le chocolat : $\pi(4r^2 - r^2) + \pi(16r^2 - 9r^2) = 10\pi r^2$
Le gâteau comporte donc plus de chocolat que de vanille : **Gaston a tort.**

Mathematik ohne Grenzen

Ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 1999/2000

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben. Bei den Aufgaben 2, 3, 4, 6 und 8 ist keine Erklärung verlangt. Bei allen anderen Aufgaben muss die Lösung begründet werden.

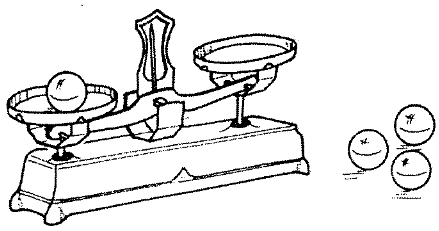
Aufgabe 1
10 Punkte

Zweimal ist genug

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Antoine dispose de 4 billes identiques, appelées A, B C et D. Parmi elles, 3 ont la même masse et la quatrième a une masse différente. Il ne sait pas si cette bille est plus lourde ou plus légère que les autres. Antoine ne possède qu'une balance permettant de comparer des masses et il doit déterminer la bille différente des autres en deux pesées maximum.

Comment doit-il procéder?



Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A,B,C e D. Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa differente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più legera delle altre. Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve determinare la biglia que è differente delle altre in due pesate al massimo.

Come deve procedere?

Antony has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. Three of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He does not know if the marble is heavier or not as heavy as the others. Antony has got only scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of two weightings.

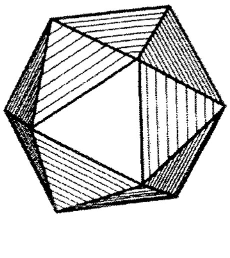
How does he have to proceed?

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa más o menos que las demás. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demás en solo dos pesadas.

¿Cómo tiene que proceder?

Aufgabe 2
5 Punkte

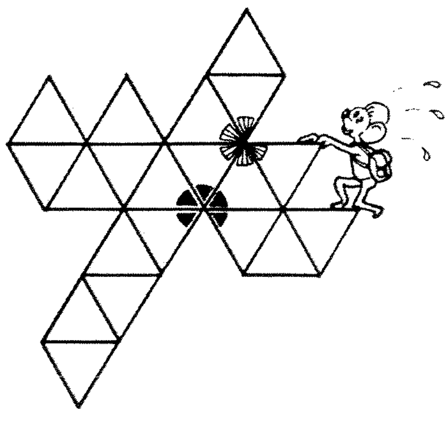
Spitzfindigkeiten



Das Ikosaeder ist ein regelmäßiger Körper mit 12 Ecken und 20 Seitenflächen in Form gleichseitiger Dreiecke.

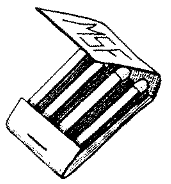
Zeichne das abgebildete Netz dieses Körpers auf das Antwortblatt!

Kennzeichne durch eine gemeinsame Farbe oder ein Symbol jeweils alle Dreieckswinkel, welche zum selben Eckpunkt des Ikosaeders gehören!



Aufgabe 3
10 Punkte

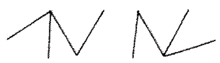
Streichholzspiele



Eine bestimmte Anzahl Streichhölzer soll auf dem Tisch nach folgenden Regeln angeordnet werden:

- Jedes Streichholz berührt mindestens ein anderes.
- Die Streichhölzer dürfen sich nur an den Enden berühren.

Zwei Anordnungen werden als gleichartig angesehen, wenn die eine ohne Hochheben der Hölzchen in die andere überführt werden kann und der Kontakt der Hölzchen an den Enden erhalten bleibt.



Hier sind zum Beispiel zwei gleichartige Anordnungen zu sehen.

Mit drei Streichhölzern kann man auf diese Weise nur drei verschiedenartige Anordnungen legen.

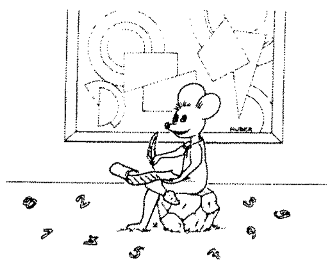
Vier Streichhölzer lassen sich auf fünf verschiedene Arten anordnen

Auf wie viele Arten lassen sich fünf Streichhölzer anordnen? Zeichne die Anordnungen auf das Antwortblatt!

Aufgabe 4
5 Punkte

Noch'n Gedicht

Das Viereck ist mein Heimatland.
Mein Name ist dir wohl bekannt.
Verbindest du zwei Nachbarecken,
So wirst du nimmer mich entdecken.
Doch lässt du eine Ecke aus,
Dann hast du's raus.

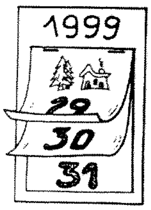


Mit Kind und Kegel übern Pregel,
Stets nur einmal, Brück' um Brück' –
Und doch zum selben Punkt zurück.
Er zeigte, dass man dies nicht kann.
Wie hieß der Mann?

Wer oder was verbirgt sich hinter den beiden Texten? Schreibe selbst ein kleines Gedicht mit mathematischem Inhalt!

Aufgabe 5
10 Punkte

Jahrtausendwende



Gregor und Julia machen ein Wettspiel mit den Daten eines Kalenderjahres. Der Spieler, der beginnt, nennt zunächst ein Datum im Januar, z.B. den 6. Januar. Nun nennen die Spieler abwechselnd ein späteres Datum, bei dem entweder die Tageszahl oder der Monat mit dem zuvor vom Gegner genannten Datum übereinstimmen muss.

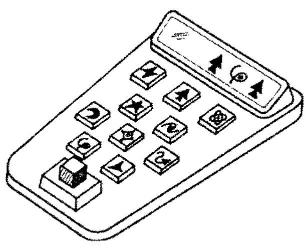
So kann zum Beispiel nach dem 6. Januar der 10. oder der 25. Januar, aber auch der 6. Februar oder der 6. September genannt werden. Sieger ist, wer zuerst den 31. Dezember nennt.

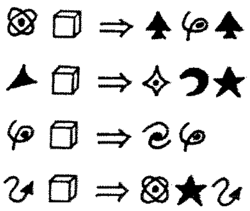
Nach einigen Spielrunden behauptet Julia, es gäbe eine Strategie, mit deren Hilfe man mit Sicherheit gewinnt.

Erkläre diese Strategie!

Aufgabe 6
5 Punkte

Kubikator





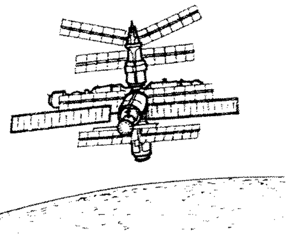
Auf dem Planeten XCYZQ ist fast alles würfelförmig. Zwar benutzen die Bewohner wie wir das Dezimalsystem, aber die Ziffern werden durch andere Symbole dargestellt. Die wichtigste Rechenoperation ist das sogenannte *Kubizieren,* bei der zu einer Zahl die Kubikzahl gebildet wird.

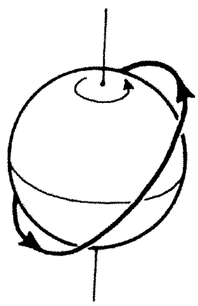
Dazu verwendet man eine Art Taschenrechner, der Kubikator genannt wird. Er besitzt zehn Tasten für die Ziffern und eine Taste (❒), um zu kubizieren. Oben stehen vier Operationen, die mit dem Kubikator ausgeführt wurden.

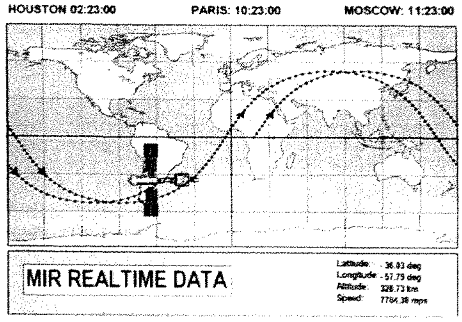
Übersetze die Symbole in unsere Ziffern von 0 bis 9!

Aufgabe 7
10 Punkte

★ МИР ★







Die Raumstation MIR umrundet die Erde auf einer annähernd kreisförmigen Bahn, die in Bezug auf die Äquatorebene geneigt ist.

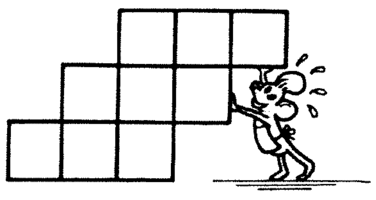
Boris staunt nicht schlecht, als er entdeckt, dass er auf dem Monitor seines Computers die Position von MIR minutenweise verfolgen kann. In Paris ist es 10.23 Uhr, als sich MIR über Buenos Aires befindet.

Für eine Erdumrundung benötigt MIR 91 Minuten, was bedeutet, dass die Station alle 45,5 Minuten den Äquator überfliegt. Wegen der Drehung der Erde um ihre Achse sind die Spuren der Bewegung nach jedem Umlauf verschoben.

Zeichne auf der beigefügten Karte die Fortsetzung der Bahn ein, bis die Station Frankreich überfliegt! Schätze den Zeitpunkt ab, zu dem sich MIR über Paris befindet!

Aufgabe 8
5 Punkte

Durcheinander



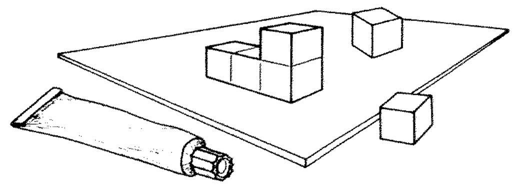
Trage die Zahlen von 1 bis 9 so in das Gitter ein, dass in keiner Zeile, in keiner Spalte und auch in keiner Diagonalen zwei aufeinanderfolgende Ziffern stehen.

Aufgabe 9
10 Punkte

Kubokollage

WCZXOP, ein Bewohner des Planeten XCYZQ, den wir bereits aus Aufgabe 6 kennen, vertreibt sich die Zeit mit kleinen Würfeln der Kantenlänge 1 cm. Er klebt den ersten Würfel auf eine Grundplatte und dann einen zweiten Würfel an den ersten, so dass zwei Seitenflächen zur Deckung kommen. Dabei kann eine Seitenfläche des zweiten Würfels auch auf der Grundplatte liegen.

Auf diese Weise klebt er weitere Würfel an, wobei stets nur eine Seitenfläche des neuen Würfels mit nur einer Seitenfläche aller vorherigen Würfel zur Deckung kommt. Es ist nach wie vor erlaubt, dass eine andere Fläche des Würfels auf der Platte liegt.



Schließlich haben die sichtbaren Seiten von WCZXOPs Bauwerk insgesamt einen Flächeninhalt von 30 cm².

Aus wie vielen Würfeln besteht das Gebilde? Begründe deine Antwort! Zeichne das Schrägbild einer solchen Anordnung.

Aufgabe 10
15 Punkte

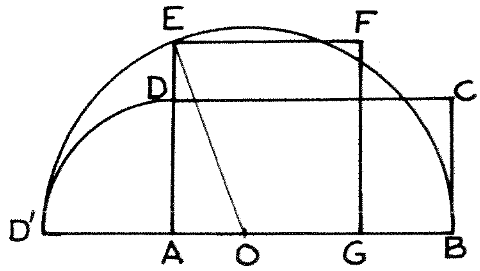
Quadratur

Bei der Quadratur eines Rechtecks verwandelt man ein Rechteck allein mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat.

Hier ist ein Verfahren von Euklid zur Quadratur des Rechtecks ABCD mit den Seiten AB = x und AD = y:

- Trage die Strecke AD auf der Geraden (AB) ab, um die Strecke AD' zu erhalten.
- Der Punkt E liegt auf dem Halbkreis mit dem Durchmesser D'B und auf der Geraden (AD).
- Konstruiere das Quadrat AGFE.

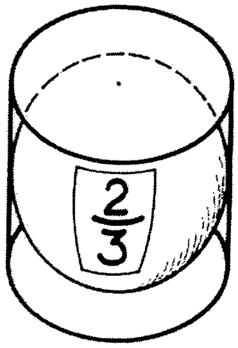
Zeige, dass in der nebenstehenden Figur das Rechteck ABCD und das Quadrat AGFE den gleichen Flächeninhalt haben!



Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Archimetrisch



In dem Roman *„Das Theorem des Papageis"* von Denis Guedj findet sich die nebenstehende Abbildung, die in ähnlicher Form auch in das Grabmal des Archimedes eingemeißelt ist.

Sie zeigt einen Zusammenhang, der von Archimedes bewiesen wurde.

Nenne diesen Zusammenhang und weise ihn mit Hilfe bekannter Formeln nach!

Aufgabe 12
10 Punkte

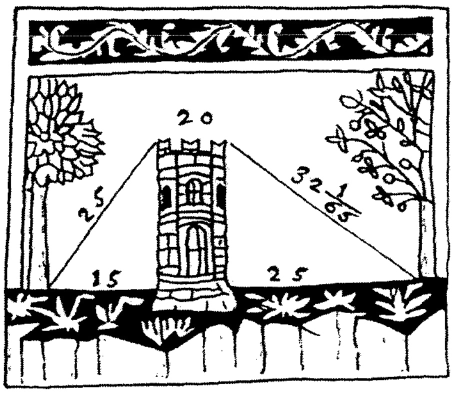
Ziemlich genau

Die nebenstehende Abbildung entstammt dem Werk *„Compendion Del Abaquos"*, das im Jahre 1492 von Frances Pelos in okzitanischer Sprache verfasst wurde.
Camille und David, die keinen Taschenrechner zur Hand haben, versuchen herauszufinden, wie Pelos auf den Wert $32\frac{1}{65}$ gekommen ist.

„Das ist einfach", meint Camille. „Wie man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet wissen wir ja."

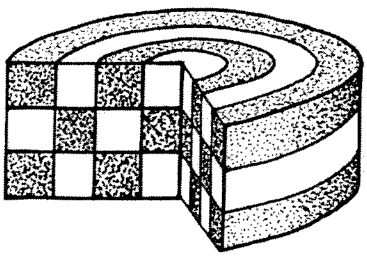
„$32^2 = 1024$ und $33^2 = 1089$", ergänzt David. „Jetzt fehlt nur noch der Schritt von 1024 zu 1025."

Erläutere die Überlegung der beiden und setze sie fort, um auf das Ergebnis $32\frac{1}{65}$ zu kommen!



Aufgabe 13
15 Punkte

Omis Kuchen



Omis Kuchen steckt voller Überraschungen. Wenn man ihn anschneidet, sieht man, wie viel Mühe sie sich gegeben hat. Sie hat zwei Teigsorten verwendet, eine aus Vanille und eine aus Schokolade.
Der Kuchen besteht aus drei gleich hohen Schichten, die kreisförmig unterteilt sind. Beim Anschnitt bis zur Mitte werden 12 gleich große Rechtecke sichtbar.

Nachdem der kleine Gaston die schwarzen und weißen Rechtecke gezählt hat, bemerkt er: „Omi, ich glaube, du hast genau so viel Vanilleteig wie Schokoladenteig verwendet."

Hat Gaston Recht? Begründe deine Antwort!

Mathematik ohne Grenzen

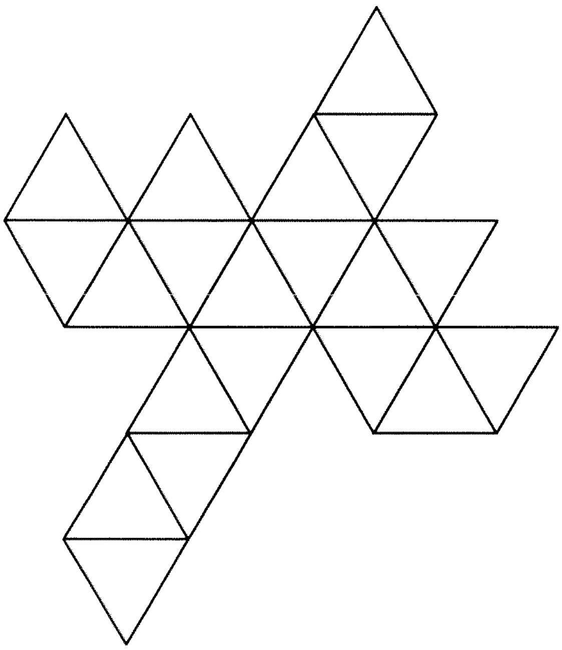
Probewettbewerb 1999/2000

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 Punkte):

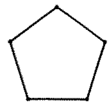
Seien a, b, c und d die Massen der entsprechenden Murmeln. Ist a = b (1. Wägung), so vergleicht man a und c (2.Wägung). Ist a ≠ c, so ist C die gesuchte Murmel, ist a = c , so unterscheidet sich d von den anderen Massen. Ist bei der ersten Wägung a ≠ b, so vergleicht wieder a und c. Ist a = c so ist B die gesuchte Murmel, andernfalls ist es A..

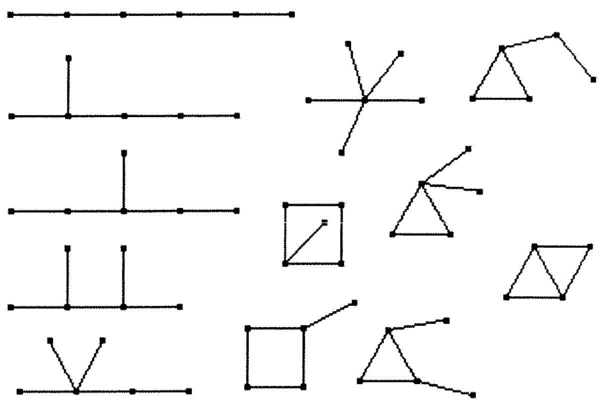
Aufgabe 2 (5 Punkte) :



Aufgabe 3 (10 Punkte) :

Es gibt 13 verschiedene Anordnungen :





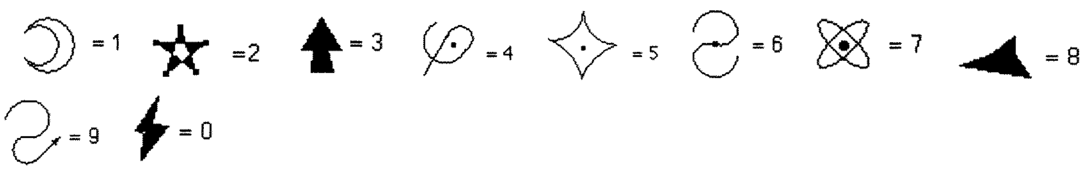
Aufgabe 4 (5 Punkte) :

Im ersten Gedicht ist von der Diagonalen, im zweiten von Euler die Rede.
Bitte senden Sie das Gedicht der Schüler an die Meldeschule!

Aufgabe 5 (10 Punkte):

Man gewinnt, wenn man eines der folgenden Daten nennt : 20.Januar, 21. Februar, 22. März, 23, April, 24. Mai, 25. Juni, 26. Juli , 27. August, 28. September, 29. Oktober, 30. November, 31. Dezember. Ausgehend von einem dieser Daten, ist es stets möglich, eines der nachfolgenden Daten zu nennen.

Aufgabe 6 (5 Punkte):



Aufgabe 7 (10 Punkte):

Um die geografische Breite von Paris zu erreichen, benötigt MIR rund 30 Minuten (Abzählen der Punkte). Danach muss MIR noch einmal die Erde umrunden um die geografische Länge von Paris zu erreichen. Insgesamt vergehen also etwa zwei Stunden, bis MIR gegen 12.23 Uhr Paris überfliegt.

Aufgabe 8 (5 Punkte) :

		1	8	6
	7	5	3	
4	2	9		

Aufgabe 9 (10 Punkte):

Klebt man einen Würfel auf, so sind 5 Seitenflächen sichtbar. Wird auch der nächste Würfel auf die Grundplatte geklebt (a), nimmt die Anzahl der sichtbaren Flächen um 3 zu. Klebt man ihn nicht auf Grundplatte (b), so erhöht sich die Anzahl der sichtbaren Flächen um 4.
Sei x die Anzahl der angeklebten Würfel nach Methode(a) und y die Anzahl nach Methode (b).
Dann gilt: $5cm^2 + 3cm^2 \cdot x + 4cm^2 \cdot y = 30cm^2$ und

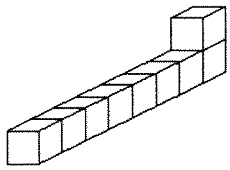


figure 1

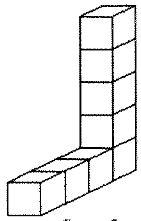


figure 2

damit $3cm^2 \cdot x + 4cm^2 \cdot y = 25cm^2$.
Man erhält (x/y) = (7/1) und (x/y) = (3/4). Zusammen mit dem ersten Würfel ergeben sich im ersten Fall 9 Würfel, von denen 8 auf die Grundplatte geklebt sind und im zweiten Fall 8 Würfel mit 4 Würfeln auf der Grundplatte. In der Aufgabe wird nur eine der beiden Lösungen verlangt, die Abbildung zeigt zwei mögliche Anordnungen.

Aufgabe 10 (15 Punkte):

Nach Einzeichnen der Strecken D'E und BE erhält man das Dreieck D'BE, das nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist. Seine Höhe ist AE, die Hypotenusenabschnitte sind D'A und AB.

Nach dem Höhensatz gilt für der Flächeninhalt des Quadrats $\overline{AE}^2 = \overline{D'A} \cdot \overline{AB}$. Wegen $\overline{D'A} = \overline{AD}$ stimmt dieses Produkt mit dem Flächeninhalt des Rechtecks überein.

Aufgabe 11 (5 Punkte):

Haben Kugel und Zylinder den gleichen Durchmesser und berührt die Kugel die beiden Grundflächen, so gilt $V_{Kugel} = \frac{2}{3} V_{Zylinder}$.

$h_{Zylinder} = 2r \Rightarrow V_{Zylinder} = r^2\pi \cdot 2r = 2\pi r^3$. $\frac{2}{3} V_{Zylinder} = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{Kugel}$.

Aufgabe 12 (10 Punkte):

Nach Pythagoras beträgt die Länge der Hypotenuse $\sqrt{1025}$. Der Zuwachs von $\sqrt{1024}$ zu $\sqrt{1089}$ beträgt 65. Nähert man die Wurzelfunktion zwischen 1025 und 1089 durch eine Gerade an, so ergibt sich zwischen $\sqrt{1024}$ und $\sqrt{1025}$ ein Zuwachs von $\frac{1}{65}$.

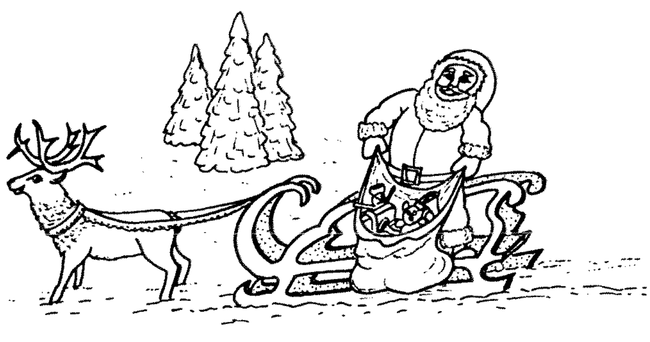
Es ist also $\sqrt{1025} \approx \sqrt{1024} + \frac{1}{65} = 32\frac{1}{65}$.

Aufgabe 13 (15 Punkte):

Vertauscht man bei zwei übereinanderliegenden Schichten Vanille und Schokolade, so ergibt sich eine Schicht, die nur aus Vanille und eine, die nur aus Schokolade besteht. In der dritten Schicht überwiegt der Anteil der Schokolade. Ist nämlich r der Radius des Kuchens, so gilt für diese Schicht

$V_{Van} = \pi \cdot (\frac{r}{4})^2 \cdot h + \pi \cdot [(\frac{3}{4}r)^2 - (\frac{1}{2}r)^2] \cdot h = \frac{3}{8}\pi r^2 h = \frac{3}{8} V_{Schicht}$

Der Schokoladenanteil ist also größer



PROVA D'ALLENAMENTO 2000 (8-11 febbraio 2000)

- *Solo le risoluzioni degli esercizi 2, 3, 4, 6 e 8 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata.*
- *Si terrà conto dell'accuratezza delle risposte.*
- *Ogni soluzione deve essere riportata su fogli-risposta separati.*

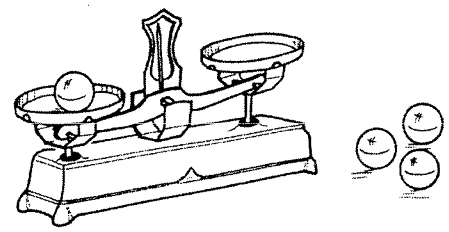
Ezerczio n.1 (punti 10)

Due pesi, due misure

con risposta da redigere nella lingua scelta con non meno di 30 parole

Antoine dispose de 4 billes identiques, appelées A, B C et D. Parmi elles, 3 ont la même masse et la quatrième a une masse différente. Il ne sait pas si cette bille est plus lourde ou plus légère que les autres. Antoine ne possède qu'une balance permettant de comparer des masses et il doit déterminer la bille différente des autres en deux pesées maximum.

Comment doit-il procéder ?



Antony has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. Three of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He does not know if the marble is heavier or not as heavy as the others. Antony has got only scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of two weightings.

How does he have to proceed ?

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa más o menos que las demás. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demás en solo dos pesadas.

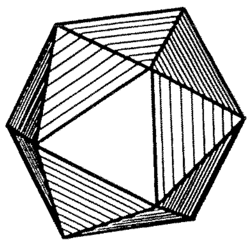
¿Cómo tiene que proceder?

Antoine hat vier Murmeln, die mit A, B, C und D bezeichnet sind, sonst aber völlig gleich aussehen. Drei dieser Murmeln haben die gleiche Masse. Die Masse der vierten Murmel unterscheidet sich von der Masse der anderen. Er weiß jedoch nicht, ob diese Murmel leichter oder schwerer als die anderen ist.
Antoine besitzt eine Balkenwaage, mit deren Hilfe er nur die Massen vergleichen kann. Mit höchstens zwei Wägungen kann er feststellen, welche der vier Murmeln sich von den anderen unterscheidet.

Wie muss er dabei vorgehen ?

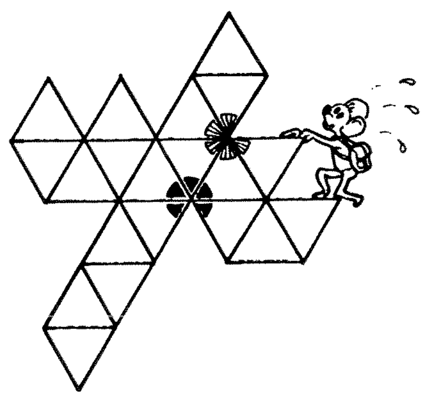
Ezercizio n.2 (punti 5)

Riunione al vertice

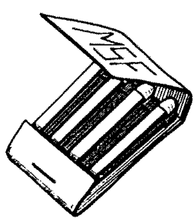


L'icosaedro è un poliedro regolare con 12 vertici e 20 facce che sono triangoli equilateri.

Riprodurre sul foglio-risposta la figura dello sviluppo qui riportato, poi, come sul modello, evidenziare nello stesso modo (con il colore o con altri contrassegni) gli angoli dei triangoli i cui vertici si inseriscono nello stesso vertice dell'icosaedro.



Ezercizio n.3 (punti 10)
Topo-logico



Con un dato numero di fiammiferi si formano sul tavolo deile figure che soddisfano aile seguenti regole :

- ogni fiammifero ne tocca almeno un altro ad una delle estremità ;
- i contatti possono avvenire solo alle estremità.

Due configurazioni si considerano uguali se si può passare dall'una all'altra spostando dei fiammiferi senza sollevarli e conservando i contatti.

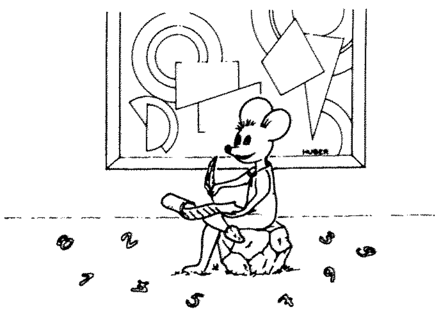
Per esempio ecco due configurazioni uguali :

Cosi ci sono solo tre modi di combinare tre fiammiferi :

E cinque modi di combinare quattro :

In quanti modi si possono combinare 5 fiammiferi ? Disegnare le figure corrispondenti.

Ezercizio n.4 (punti 5)
Matemati-carmi



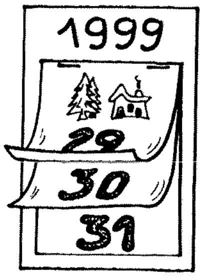
Da lui sappiamo che
frazioni che ai quadrato dan due
non ce n'è ;
per moltiplicare ci ha dato una tavola
che per noi è davvero una favola.

C'è anche un teorema molto usato
Certamente l'avrete individuato !

Per l'Egitto io fui $\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Dei secoli nel corso
Ogni mio decimale fu rincorso :
più d'un miliardo al computer oggidì.
Voi mi scrivete in modo più opportuno :
Son l'area del cerchio a ragio uno.

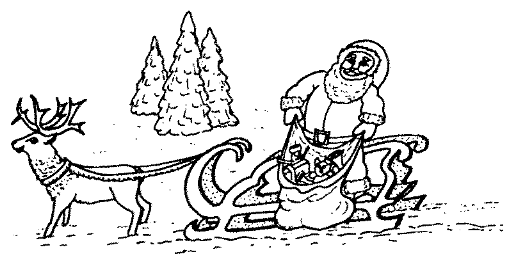
Di chi o di che cosa parla ognuno di questi due testi ? Con lo stesso criterio scrivete anche voi un testo poetico legato alla matematica.

Ezercizio n.5 (punti 10)
Corsa al 2000



Alberto e Giulia giocano con le date di quest'anno : chi dei due comincia per primo sceglie il numero di un giomo di gennaio, ad es. il 6/1, poi, a turno, ognuno propone un'altra data con il vincolo di conservare o il numero del giorno o il mese della data proposta per ultima. Per esempio, dopo il 6/1 si possono proporre date come 10/1, 20/1, oppure 6/2, 6/4, 6/9 ... Vince il primo che arriva al 31/12.

Dopo qualche partita Giulia afferma che c'è una strategia vincente. Spiegare questa strategia.



Ezercizio n.6 (punti 5)
Il commissario B.

Topolino deve aiutare il commissario Basettoni a risolvere il primo quesito del 2000. Si deve riuscire ad aprire una porta dotata di combinazione ; la combinazione è costituita da una parola chiave che è la risposta ad un indovinello e da ? cifre che Topolino deve trovare, legate da alcune condizioni alla parola soluzione dell'indovinello.

Indovinello

La vita è bella,
spesso quel mostro del destino
ci infilza come uno stecchino.
Qual è il mio cognome?

Le condizioni

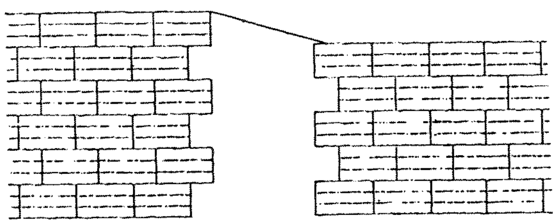
- Il valore corrispondente alla terza lettera è due volte quello corrispondente alla prima.
- Il valore corrispondente alla quarta lettera differisce dal valore corrispondente alla quinta di 2.
- Il valore corrispondente alla terza lettera è dato dalla differenza dei valori corrispondenti alla seconda e alla prima.
- Il valore corrispondente alla settima lettera è dato dal prodotto tra i valori corrispondenti alla quarta e alla quinta.
- Il valore corrispondente alla seconda lettera è dato dal quadrato del valore della prima lettera sommato al valore corrispondente alla prima.

(Concorso "A. Bernasconi" 1999 ; Fabio Galbiati e Mirko Maino - IPIA Monza)

Ezercizio n.7 (punti 10)
La grande muraglia

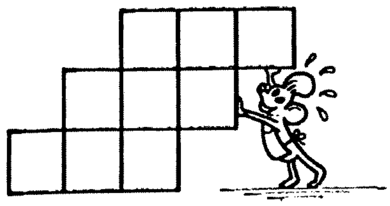
2500 anni fa un imperatore cinese Vin-Ci-Gioc decise di far realizzare la più grande opera difensiva di tutti i tempi. I lavori furono affidati ai due famosi costruttori del tempo : Ar-Chi-Tet e In-Gegn-Er. Uno cominciò a realizzare la muraglia dall'Ovest della Cina dirigendosi verso Est, l'altro dall'Oriente in direzione opposta. I due procedettero fino ad incontrarsi, ma quando si dovettero unire le due parti si presentò un incoveniente : per un errore di misura l'altezza delle due parti risultò diversa. Fortunatamente Ar-Chi-Tet e In-Gegn-Er riuscirono a realizzare un raccordo, ancora oggi osservabile.

Sapendo che i due utilizzarono, senza che rimanesse alcuno scarto, 12 massi identici agli altri, sapreste dire il minimo di tagli che dovettero effettuare ?



(Concorso "A. Bemasconi" 1999 – Andrea March - L.s. "Redi" Arezzo)

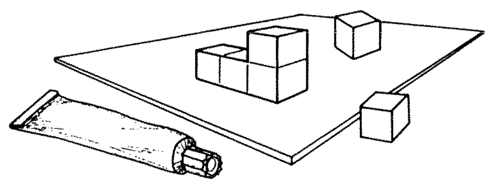
Ezercizio n.8 (punti 5)
Numeri in gabbia



Numerare le nove caselle da 1 a 9 in modo che non ci siano mai né nella stessa riga né nella stessa colonna né nella stessa diagonale due numeri interi consecutivi.

Ezercizio n.9 (punti 10)
Costruzione di cubi

Wcyo, abitante del pianeta Xjaz, ha a disposizione dei cubetti di spigolo uguale ad un centimetro. Incolla una faccia del primo cubo su una tavoletta, poi prende un secondo cubo e lo incolla al primo per una delle sue facce ; questo secondo cubo può eventualmente essere incollato anche al piano e così via : ogni nuovo cubo è attaccato per una sola delle sue facce ad una faccia di uno dei cubi precedenti e può avere eventualmente un'altra faccia attaccata alla tavoletta. Alla fine Wcyo trova che la superficie estema della costruzione misura 30 cm^2.

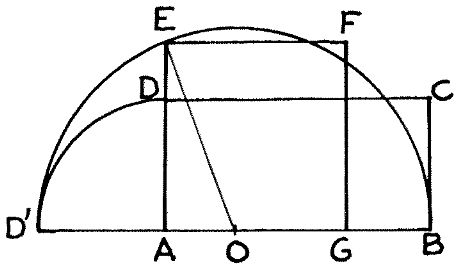


Da quanti cubi può essere formata la costruzione ? Disegna sul foglio-risposta una di queste costruzioni, spiegando perché soddisfa alla richiesta.

Ezercizio n.10 (punti 15)
Quadratura

"Quadrare un rettangolo" vuol dire costruire con riga e compasso un quadrato equivalente.

Ecco il metodo usato da Euclide per quadrare il rettangolo ABCD di lunghezza AB e larghezza AD. Sulla retta AB si riporti il segmento AD' = AD in modo che A sia compreso tra D' e B. Si costruisca la semicirconferenza di diametro D'B posta nel semipiano di D che incontra in E la retta AD.



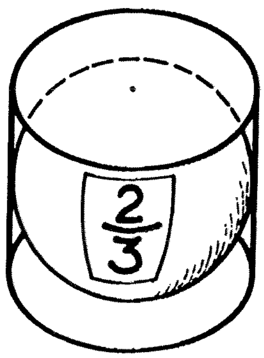
Si costruisca il quadrato AGFE e si dimostri che è equivalente a ABCD.

classe terza

Ezercizio n.11 (punti 5)
Archi-nota

Scolpita sulla tomba di Archimede, questa figura illustra una proprietà da lui dimostrata.

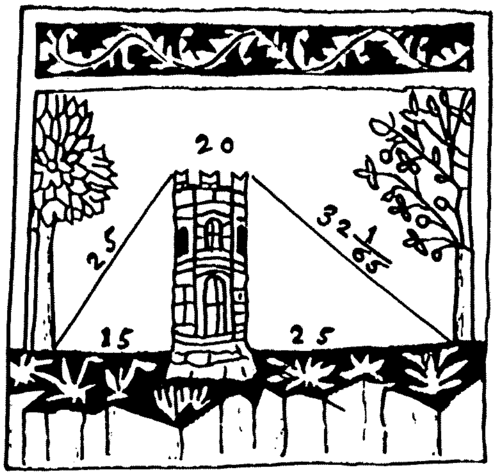
Enunciare questa proprietà e dimostrarla.



classe terza

Ezercizio n.12 (punti 10)
Per un pelo

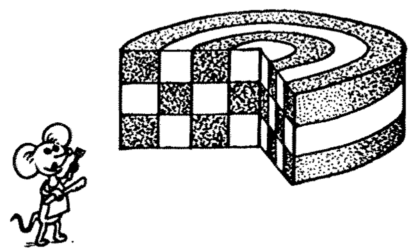
Il documento riprodotto è tratto dal "Compendion Del Abaquos", scritto in lingua occitana da Francesco Pelos nel 1492. Camilla e Davide, privi di calcolatrice, cercano di capire il valore 32 1/65 proposto da Pelos. Camilla : "E' facile ; so calcolare l'ipotenusa del triangolo di destra." Davide : "$32^2 = 1024$ e $33^2 = 1089$. Bisogna passare da 1024 a 1025."



Giustificare l'affermazione di Camilla e completare il metodo iniziato da Davide per ritrovare 32 1/65.

classe terza

Ezercizio n.13 (punti 15)
e per finire ... il dolce



La torta di zia Susanna è magnifica e piena di sorprese. Quando la si taglia si scopre che la zia ha avuto un bel daffare a prepararla ! E' fatta di due impasti diversi : uno è alla vaniglia e l'altro al cioccolato. Ci sono tre strati della medesima altezza. Lo stampo in cui è stata cotta è circolare. La scacchiera che si ottiene sulla fetta è fatta di 12 rettangoli aventi le stesse dimensioni. Basta guardarla per avere l'acquolina in bocca ! Contando i rettangoli bianchi e quelli scuri Gastone, uno dei nipotini, esclama : "Guarda, sembra che nella torta ci sia tanta vaniglia quanto cioccolato."

Gastone ha ragione ? Giustificare la risposta.

Mathématiques sans frontières 2000

Training test - December 1999

- ❐ **Questions 2, 3, 4, 6 and 8 do not require any explanation in the answer ; all of the others do.**
- ❐ **Careful work will be taken into account.**
- ❐ **Teams should submit one answer per question.**
- ❐ **The team name must be on every answer sheet.**

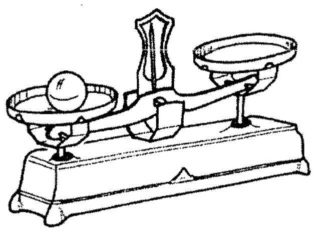
QUESTION 1
10 POINTS

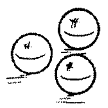
Deux poids, deux mesures

Write down your answer in French, German, Italian or Spanish using at least 30 words.

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa más o menos que las demás. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demás en solo dos pesadas.

¿Cómo tiene que proceder?





Antoine hat vier Murmeln, die mit A, B, C und D bezeichnet sind, sonst aber völlig gleich aussehen. Drei dieser Murmeln haben die gleiche Masse. Die Masse der vierten Murmel unterscheidet sich von der Masse der anderen. Er weiß jedoch nicht, ob diese Murmel leichter oder schwerer als die anderen ist.

Antoine besitzt eine Balkenwaage, mit deren Hilfe er nur die Massen vergleichen kann. Mit höchstens zwei Wägungen kann er feststellen, welche der vier Murmeln sich von den anderen unterscheidet.

Wie muss er dabei vorgehen ?

Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A,B,C e D. Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa differente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più legera delle altre. Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve deter-minare la biglia que è diffe-rente delle altre in due pesate al massimo.

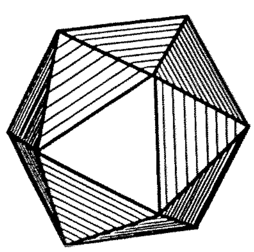
Come deve procedere?

Antoine dispose de 4 billes identiques, appelées A, B C et D. Parmi elles, 3 ont la même masse et la quatrième a une masse différente. Il ne sait pas si cette bille est plus lourde ou plus légère que les autres. Antoine ne possède qu'une balance permettant de comparer des masses et il doit déterminer la bille différente des autres en deux pesées maximum.

Comment doit-il procéder?

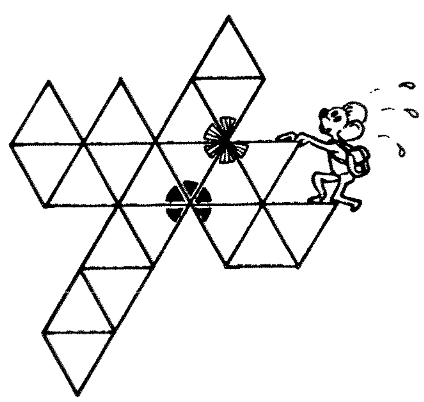
QUESTION 2
5 POINTS

Summit Conference



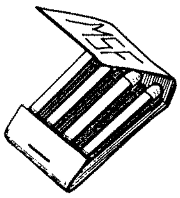
The icosihedron is a regular solid with 12 vertices and 20 faces which are equilateral triangles.

Copy the net of the icosihedron onto your answer sheet and then show with colour or shading those angles of the triangles whose vertices line up to be vertices of the icosihedron. The first two are done for you. (The easy ones.)



QUESTION 3
5 POINTS

Topo logic



Given a number of matches you are asked to put them together following the rules :

- each match touches the end of at least one other,
- matches only touch each other at the ends.

Two resulting patterns are considered identical if you can go from one to the other by moving the matches without lifting them or breaking the contact. For example here are two identical patterns :

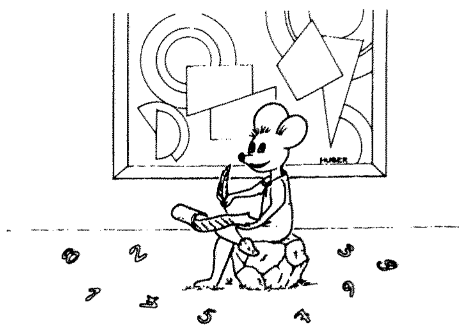
It follows there are only 3 patterns with 3 matches :

and 5 patterns with 4 :

How many patterns are there with 5 matches ? Draw the set of patterns.

QUESTION 4
5 POINTS

Mathode



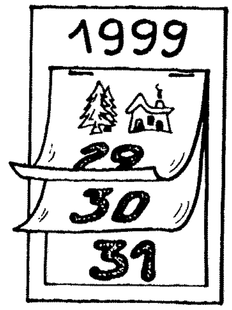
He was the first to be aware
That no square halved is still a square
That numbers also guide the way
To music that we like to play
But it's his theorem is his fame
And every pupil knows his name.

$\left(\frac{16}{9}\right)^2$ was close in Egypt's dawn
But as the centuries rolled on and on
So did the digits in my decimal place
Till now a million plus have joined the race
But still my size is easiest done
As the area of a circle radius one.

Who and what are these poems about ? Write your own poem in a similar way about some mathematical subject.

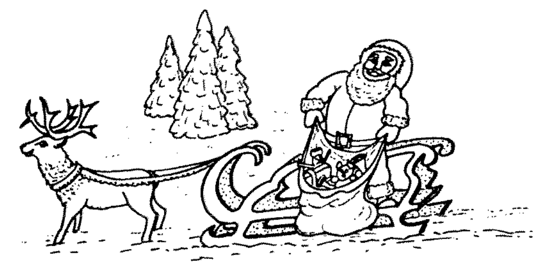
QUESTION 5
10 POINTS

Game



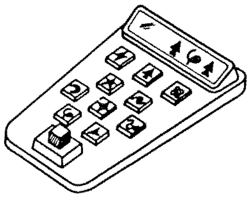
Gregory and Julian are playing a game with the dates of a year. The one who starts gives a date, for example 6 January. Then each player for his turn gives a later date but must keep either the day or the month given by the previous player.
For example after the 6 January you can give 7, 8, 9 ... January or 6 February, 6 March ...
The winner is the one who is first to say "31 December".

After a few games Julian states that there is a strategy which means you can always win. Explain this strategy.



QUESTION 6 5 POINTS — *Calculator*

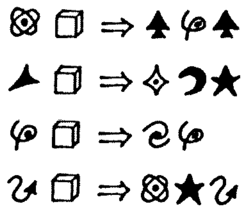
On the planet Xcyzq everything is based on the cube. The inhabitants use the same decimal system as us but use 10 different symbols for the digits. They only use one arithmetical operation : raising a number to a cube.



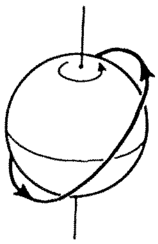
Here is a picture of one of their calculators. They call it a calcubator. It has 10 buttons for the digits and an eleventh for their only operation, raise to power 3.

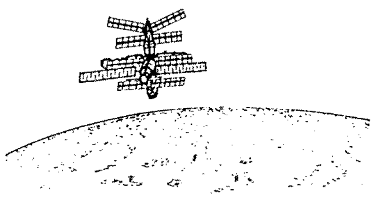
Here are 4 operations done using the calcubator.

Match the symbols to our digits 0 to 9.

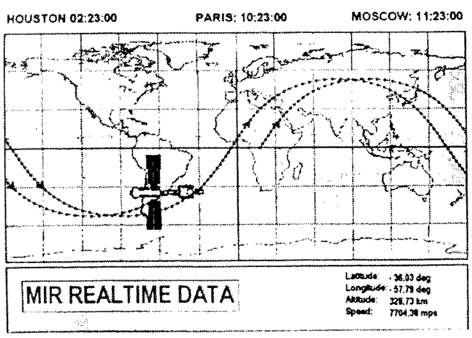


QUESTION 7 10 POINTS — МИР





The space station MIR orbits the Earth in a nearly circular orbit making an angle with the plane of the equator.
Boris is surprised to find a real-time trace of its path on his computer : it is 10.23 in Paris and MIR is over Buenos Aires.

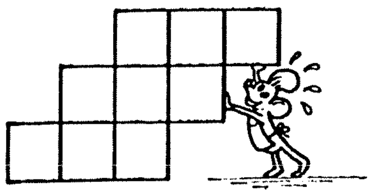


MIR makes an orbit of the Earth in 91 minutes ; crossing the equator every 45.5 minutes. The path of each successive orbit is displaced because of the Earth's rotation on its axis.

Continue on the answer sheet given the rest of the path of MIR until it passes over France, and make an estimate of its time of passage over Paris.

On the answer sheet the points show the position of the satellite minute by minute.

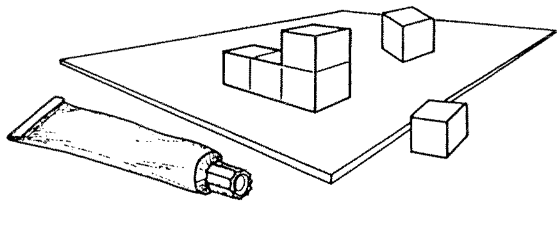
QUESTION 8 5 POINTS — *Neomajic neosquare*



Put the digits 1 to 9 into the boxes so that in any direction, row, column, or diagonal, there are never two consecutive numbers.

QUESTION 9 10 POINTS — *Sticky cubes*

Wczxop, who lives on Xcyzq , uses cubes of side 1 cm. He sticks the first cube on a board by one of its faces, then takes a second that he sticks to the first by one of its faces. This cube can also be stuck to the board if necessary. He continues in the same way, each new cube being stuck by a single one of its faces to a face of one of the preceding cubes. The new cube can also be stuck to the board if necessary.
Finally Wczxop finds that the exterior area of his assembly is 30 cm^2.

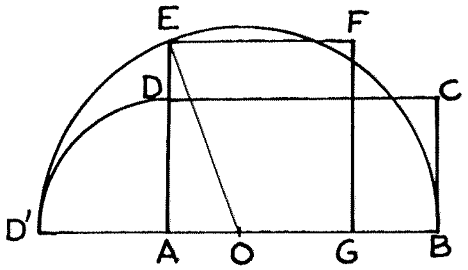


How many cubes make up his assembly. Draw an assembly like that on your answer sheet and justify your answer.

QUESTION 10
15 POINTS

It's a quare world

To square a rectangle means to construct with a ruler and compass a square of the same area as a given rectangle.
Here is Euclid's method for squaring the rectangle ABCD which has length AB equal to x and breadth AD equal to y.



Use compasses to draw the segment AD' = AD on AB.

Construct the semi-circle with diameter D'B as in diagram.

Construct the square AGFE where E is on the semicircle.

Explain clearly why ABCD and AGFE have the same area.

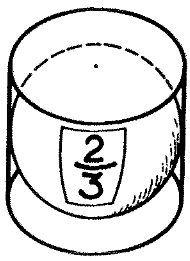
QUESTION 11
5 POINTS

Archie Meedees

Senior classes only

The figure below is engraved on the tomb of Archimedes and illustrates a property that he discovered.

Write down the property and say why it is true.

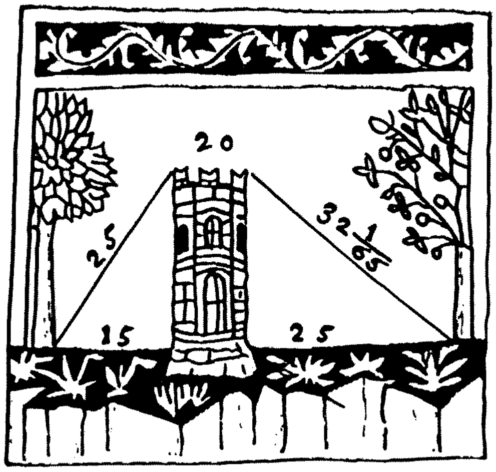


QUESTION 12
10 POINTS

Vernier

Senior classes only

The diagram below is from the Compendion Del Abaquos which was written in the Occitan language (langue d'oc) in 1492 by Frances Pelos.



Camille and David don't have a calculator and are trying to understand why Frances Pelos indicates the value of 32 1/65 as the size of a side.

Camille says, " It's easy. I can calculate the hypotenuse of the triangle on the right".

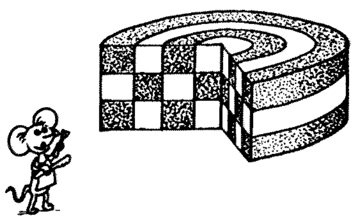
David says, " $32^2 = 1024$ and $33^2 = 1089$ and all you have to do is go from 1024 to 1025".

Justify Camille's statement and finish of the method that David has started to find why 32 1/65 is a good value for the hypotenuse.

QUESTION 13
15 POINTS

Granny's Gateau

Senior classes only

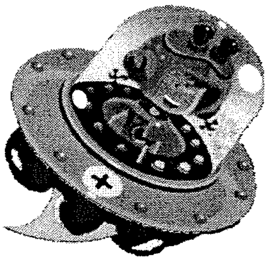


Granny's gateau is excellent and full of surprises. When you cut into it you find it is made of two different mixtures : one is vanilla and the other is chocolate.
It is made up of 3 layers of the same thickness. The mould it was made in is circular. The picture you see when you cut it is of 12 rectangles of the same size. You just have to look to imagine the taste.
After counting the white and black rectangles one of the grand children, Gaston, says. " Hang on, in this cake there is just as much vanilla as there is chocolate".

Is Gaston correct ? Justify your answer.

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIERES



Támogatóink:

Oktatási Minisztérium
Safari-Park Gänserndorf
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
Merkel Economos
Graphic-A Studio
CASIO
Informatika-Számìtástechnika Tanárok Egyesülete-ISZE

PRÓBA-FORDULÓ 1999-2000

1. feladat: Két mérés, két súly

Ezt a feladatot angolul, németül, franciául, olaszul vagy spanyolul oldjátok meg, legalább 30 szóban!
(10 pont)

Antoine dispose de 4 billes identiques à l'œil appelées A, B, C et D. Parmi elles, 3 ont la même masse et la quatrième a une masse différente. Il ne sait pas si cette bille est plus lourde ou plus légère que les autres.

Antoine ne possède qu'une balance permettant de comparer des masses et il doit déterminer la bille différente des autres en 2 pesées maximum.

Comment doit-il procéder ?

★★★

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D.

Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa más o menos que los demás.

Antonio sólo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demás en sólo dos pesadas.

¿ Cómo tiene que proceder ?

★★★

Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A, B, C e D.

Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa differente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più leggera delle altre.

Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve determinare la biglia che è differente delle altre in due pesate al massimo.

Come deve procedere ?

★★★

Antoine has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. 3 of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He doesn't know if this marble is heavier or lighter than the others.

Antoine has only got scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of 2 weighings.

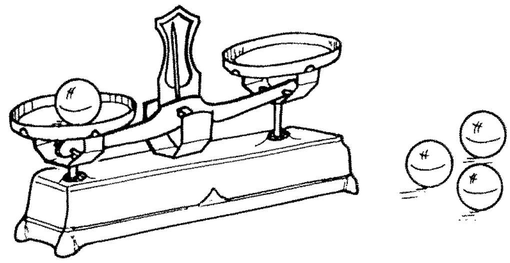
How does he have to proceed ?

★★★

Antoine hat vier Murmeln, die mit A, B, C und D bezeichnet sind, sonst aber völlig gleich aussehen. Drei dieser Murmeln haben die gleiche Masse. Die Masse der vierten Murmel unterscheidet sich von der Masse der anderen. Er weiß jedoch nicht, ob diese Murmel leichter oder schwerer als die anderen ist.

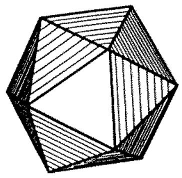
Antoine besitzt eine Balkenwaage, mit deren Hilfe er nur die Massen vergleichen kann. Mit höchstens zwei Wägungen kann er feststellen, welche der vier Murmeln sich von den anderen unterscheidet.

Wie muss er dabei vorgehen ?



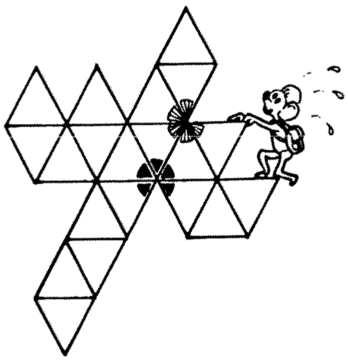
2. feladat: **Csúcs-találkozó**

Az ikozaéder olyan szabályos test, amelynek 12 csúcsa és 20 egybevágó szabályos háromszög lapja van.



Készítsétek el az itt látható hálózat másolatát a válaszlapra, és színezzétek ki azonos színnel azokat a szögtartományokat, amelyek az ikozaédernek ugyanahhoz a csúcsához illeszkednek. (lásd az ábrát!)

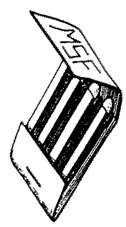
(5 pont)



3. feladat: **Topo-logika**

Gyufaszálakból az alábbi szabály alapján alkotunk figurát:

- Mindegyik gyufaszál vége legalább egy másikhoz hozzáér.
- A gyufaszálak csak a végüknél érintkezhetnek.



Két figurát akkor tekintünk azonosnak, ha az egyiket úgy tudjuk átmozgatni a másikba, hogy közben nem emeljük fel, s a mozgatás közben az érintkezés megmarad.

Az itt látható két figura ilyen értelemben azonos:

A fenti szabályok alapján 3 különböző figura állítható elő 3 gyufaszállal:

És 5 különböző figura állítható elő 4 gyufaszállal:

Hány különböző figurát lehet készíteni 5 gyufaszál segítségével?
Rajzoljátok le a lehetőségeket!

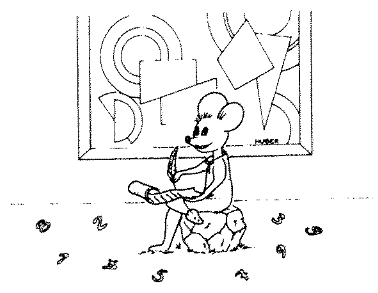
(10 pont)

4. feladat: **ART-MAT**

Milyen matematikai fogalom van elrejtve a versikében? Írjatok Ti is verset valamilyen matematikai fogalomról! (5 pont)

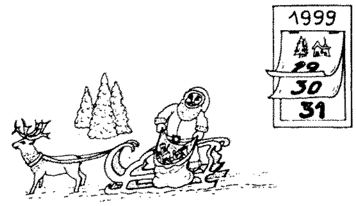
Réges-rég Egyiptom tudós koponyái
Tizenhat-kilenced négyzetének hitték.
Azóta már sok víz folyt le a Níluson;
Tizedes jegyeim sok-sok ezren lettek.

Nehéz lenne ezért leírnotok engem,
Elfogyna a papír, telnének a napok.
Micsoda szerencse: ismerjük már egymást,
Egy sugarú körnek területe vagyok.



5. feladat: **Boldog Szilvesztert!**

Gregoire és Juliette dátum játékot játszik. Ez a játék abból áll, hogy egy adott év dátumait mondják felváltva.

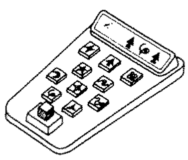


A játékszabály a következő: a kezdő játékos mond egy januári dátumot, például január 6-át. Majd a soron következő játékos egy későbbi dátumot mond, de vagy a hónap, vagy a nap azonos az előző dátummal.
Például január 6-ra lehet január 10-ét, január 20-át vagy február 6-át, április 6-át szeptember 6-át stb. válaszolni.
Az győz, aki elsőnek mondja ki december 31-ét.
Néhány játék után Juliette megállapítja, hogy van biztosan nyerő stratégiája.
Magyarázzátok el ezt a stratégiát.

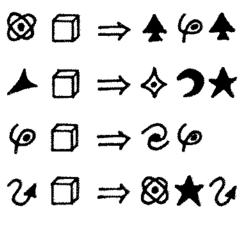
(10 pont)

6. feladat: **Számolóköb**

Az Xcyzq bolygón minden kocka alakú. A bolygó lakói tizes számrendszerrel dolgoznak, de a tíz számjegy leírására más szimbólumokat használnak, mint mi.
A mellékelt ábrán egy számológép, az ő nyelvükön számolóköb látható.



A számjegyeknek 10 nyomógomb felel meg, a 11. gomb a köbre emelés műveletet hajtja végre.
Íme négy műveletsor, amelyeket a számolóköbbel végeztek el:

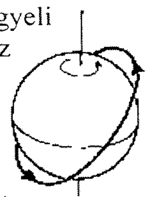


Melyik szimbólumnak melyik számjegy felel meg?

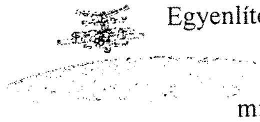
(5 pont)

7. feladat: MIR

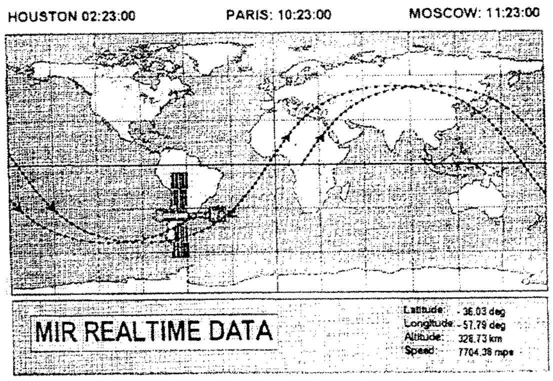
A MIR űrállomás nagyjából körpályán kering a Föld körül az Egyenlítő síkjával szöget bezárva. Borisz érdeklődéssel figyeli számítógépének monitorján az űrállomás útját: Párizsban 10 óra 23 perc van, amikor a Mir Buenos Aires fölött van éppen.



A Mir 91 perc alatt tesz meg egy fordulatot, s 45,5 percenként repül át az Egyenlítő fölött. Az egymást követő metszéspontok a Föld tengely körüli forgása miatt nem ugyanott vannak.

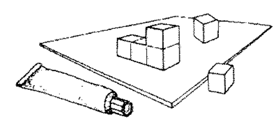


Rajzoljátok le a válaszlapra az alábbi térkép alapján a Mir űrállomás útját egészen addig, amíg át nem repül Franciaország fölött, s becsüljétek meg , hány órakor repül el Párizs fölött az űrállomás! (10 pont)



8. feladat: **Kocka-kollázs**

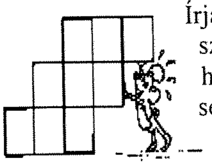
Wczxop-nek, az Xcyzq bolygó lakójának van néhány 1 cm élhosszú kockája. Az első kockát az egyik lapjánál felragasztja egy rajzlapra, majd a másodikat szintén az egyik lapjánál felragasztja az első kocka valamelyik lapjára, vagy az előbbi rajzlapra. Ugyanígy folytatja: minden újabb kockát egy lapjánál valamelyik előző kocka lapjára, vagy a rajzlapra ragasztja.



Végül Wczxop úgy tapasztalja, hogy egy olyan összefüggő test keletkezett, amelynek felszíne 30 cm^2.
Hány kockából áll az alkotás? Rajzoljátok le az összeállítást. Válaszotokat indokoljátok!

(10 pont)

9. feladat: Rácsos számok

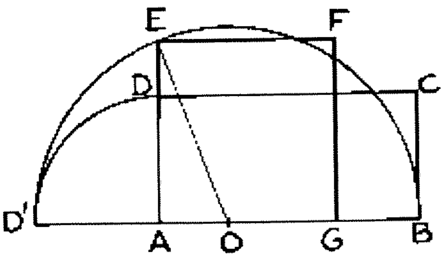


Írjátok be 1-től 9-ig a számjegyeket a következő hálózatba úgy, se vízszintesen, se függőlegesen, se átlósan ne legyen egymást követő szám!
(5 pont)

10. feladat: Négyzetesítsünk!

A téglalapot „négyzetesíteni" annyit tesz, mint körzővel és vonalzóval szerkeszteni a téglalappal megegyező területű négyzetet.
Íme Euklidész módszere az ABCD téglalap „négyzetesítésére":

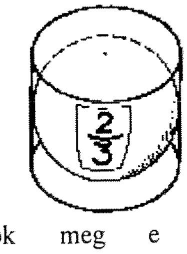
- Leforgatjuk az AD szakaszt az AB egyenesre, így megkapjuk az AD' szakaszt
- Szerkesztünk egy félkört D'B átmérő fölé a D felőli oldalra
- Megszerkesztjük az AGFE négyzetet, ahol E a félkör pontja



Igazoljátok, hogy az ABCD és AGFE négyszögek területe egyenlő! (15 pont)

11. feladat: Sírfelirat

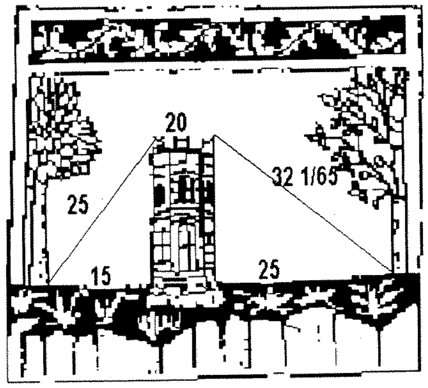
Archimédesz sírján látható az itt alábbi ábra. Ez egy általa bizonyított tulajdonságot illusztrál.



Fogalmazzátok meg e tulajdonságot és bizonyítsátok be! (5 pont)

12. feladat: Hajszálra ...

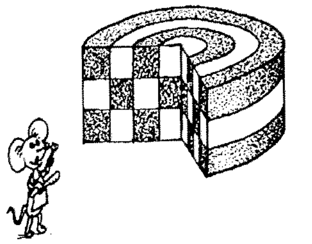
A mellékelt kép Frances Pelosnak 1492-ben okszitán nyelven íródott Compendion Del Abaquos című művéből való.
Camille és David számológép nélkül próbálják megérteni Frances Pelos által jelzett 32 egész 1/65-öt.



Camille: „ Ez egyszerű! A derékszögű háromszög átfogóját tudjuk számítani."
David:" $32^2=1024$ és $33^2=1089$. Már csak 1024-ről 1025-re kell váltani."
Fejezzétek be David által elkezdett eljárást 32 egész 1/65 megtalálására! (10 pont)

13. feladat: Fejezzük be a desszerttel!

A nagymama tortája mindig kitűnő, és tele van meglepetéssel.
A mai süteményt két különböző tésztából alkotta: az egyik vanília ízű, a másik csokoládé. Három emeletes a torta, mindhárom ugyanolyan magas.
Ha egy szeletet vágunk belőle, a szelet oldalán 12 egybevágó téglalapot látunk. Elég ránézni, hogy megkívánjuk ...
Gaston, az egyik unoka látván a fehér és fekete téglalapokat, megszólalt: „ Úgy tűnik, hogy ugyanannyi a vanília, mint a csokoládé a tortában."



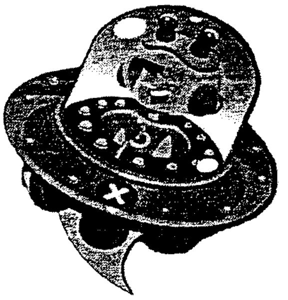
Igaza volt-e Gaston-nak? Válaszotokat indokoljátok! (15 pont)

ACADEMIE DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Compétition interclasses de 3e & 2de

Mathématiques sans frontières



EPREUVE DU 14 MARS 2000

- Les exercices n°4, 8 et 9 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Année 2000, année des mathématiques

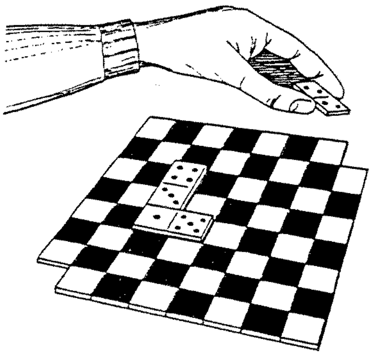
exercice n° 1 10 points

Echecs aux dominos

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots

Bei einem Schachbrett entfernt man zwei schwarze Felder, die in gegenüberliegenden Ecken liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auf die restlichen Felder verteilt man 30 Dominosteine, wobei jeder Stein genau zwei Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei Felder frei.
Haben diese Felder die gleiche Farbe ? Begründe deine Antwort.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram opposite. 30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered.
Say whether or not these squares are the same colour ? Justify your answer.



En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura al lado. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes : cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.
¿ Son del mismo color estas casillas ? Justifica tu respuesta.

Si tolgono due caselle nere situate negli angoli opposti di una scacchiera, come nella figura a fianco.
Si pongono 30 domino sulle caselle restanti. Ogni domino copre esattemente due caselle. Rimangono due caselle scoperte.
Queste caselle sono dello stesso colore ? Giustificare la risposta.

exercice n° 2 5 points

Poussières d'euros

Le cours de l'euro a été fixé à : 1 euro = 6,55957 F
Pour convertir en euros une somme de plusieurs prix donnés en francs, on a le choix entre deux possibilités :
- Soit convertir cette somme en euros et arrondir le résultat au centième d'euro.
- Soit convertir chaque prix en euros, arrondir le résultat au centième d'euro puis additionner ces arrondis.

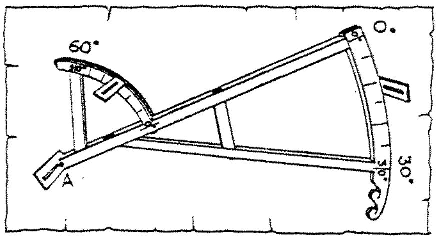
Montrer sur un exemple que ces deux méthodes peuvent conduire à des résultats différents.

exercice n° 3 10 points

Quartier de Davis

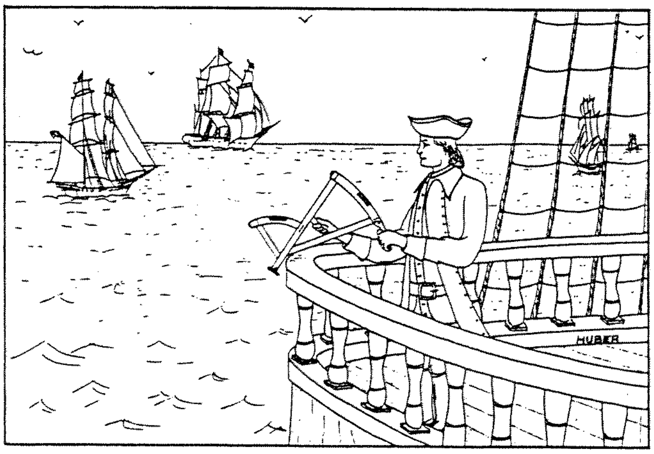
Vers 1590 un marin anglais, John Davis, mettait au point, à partir de l'arbalète, un instrument qui porta son nom : le Quartier de Davis. Il permettait de calculer la hauteur du soleil en degrés d'angle. Ce fut un tel progrès que tous les navigateurs l'utilisèrent jusqu'au milieu du 18ème siècle.

Cet appareil était constitué d'une baguette sur laquelle étaient fixés deux arcs de cercle. L'arc de cercle supérieur était gradué de 0° à 60°, l'arc inférieur de 0° à 30°. Sur les deux arcs de cercle de même centre A, deux fentes coulissaient.



Pour effectuer la mesure, l'observateur tournait le dos au soleil et maintenait l'instrument dans un plan vertical. Ses rayons passaient à travers la fente de l'arc de cercle supérieur et venaient éclairer une fente horizontale située en A à l'extrémité de la baguette. Dans le même temps, l'observateur visait par la fente de l'arc de cercle inférieur l'horizon à travers cette même fente.

Représenter l'observateur mesurant la hauteur du soleil avec un quartier de Davis et expliquer le calcul de cette hauteur (en degrés d'angle).

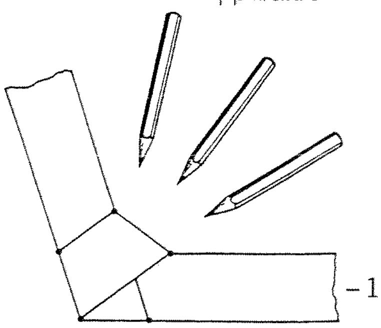


exercice n° 4 5 points

Nœud de couleur

Avec une bande de papier de 4 cm de large, faire un nœud comme sur la figure ci-dessous. Ce nœud fait apparaître un pentagone.

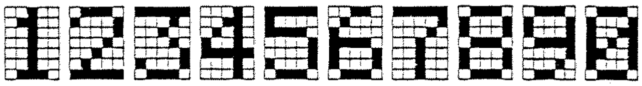
Colorier de la même couleur toutes les parties du pentagone qui comptent le même nombre de couches de papier. Coller le nœud colorié sur la feuille réponse.



exercice n° 5 10 points

Pixels

Ma calculatrice affiche le nombre 1 234 567 890 sur l'écran en allumant des pixels. Par exemple, il faut allumer 19 pixels pour afficher le chiffre 0 et 21 pixels pour le nombre 17. Un nombre entier non nul ne commence pas par 0.



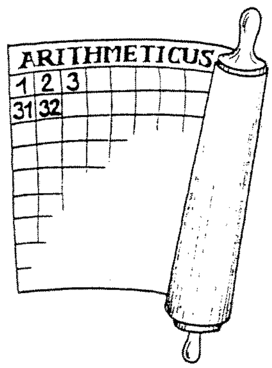
Trouver un nombre pour lequel le nombre de pixels allumés est égal au nombre affiché. Est-ce le seul ? Justifier.

exercice n° 6 5 points

5ème colonne

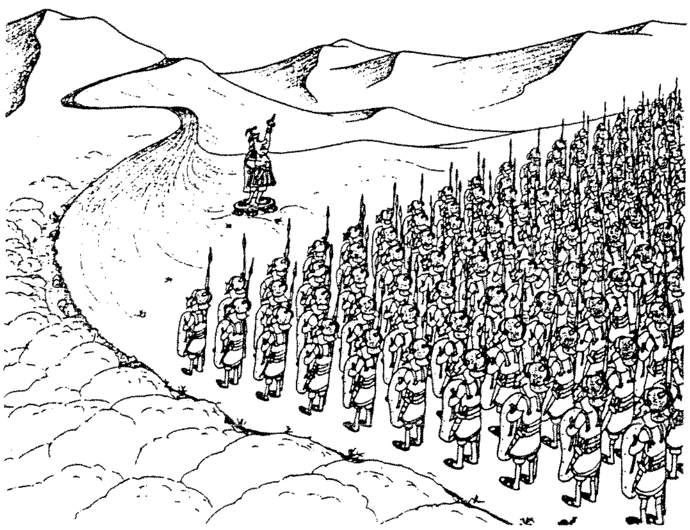
Dans l'armée romaine on ne badine pas avec l'ordre. Chaque légionnaire porte un numéro qui lui permet de connaître sa place et qu'il conserve toujours.

Le général Arithméticus a rassemblé ses 990 légionnaires et les a rangés en un rectangle de 33 lignes et 30 colonnes. Il remplit successivement chaque ligne comme sur la figure ci-dessous. Hocus et Pocus sont dans la 5ème colonne et aucun n'est en première ligne.



Mais Arithméticus est rappelé à Rome et le général Calculus prend le commandement des troupes. Il les repositionne de la même manière en un rectangle de 30 lignes et 33 colonnes. Hocus et Pocus sont encore dans la 5ème colonne.

Quels sont leurs numéros ? Expliquer la réponse.

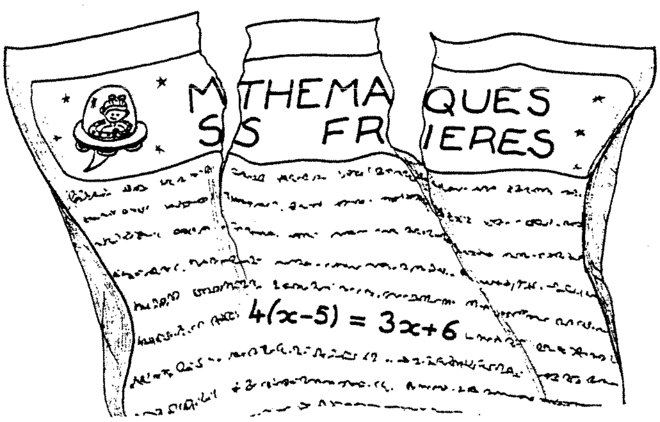


exercice n° 7 10 points

Retour vers le futur

En l'année 20000, un antiquologue trouvera un fossile en très mauvais état de ce qui s'avèrera avoir été une feuille de papier. Il réussira à déchiffrer en haut de la page les lettres "M.THEMA...QUES S...S FR...IERES", en dessous un texte d'une dizaine de lignes totalement illisible car détruit par le temps, puis une équation : $4(x-5) = 3x+6$. Après avoir consulté les spécialistes de la période post-protohistorique, l'antiquologue comprend qu'il s'agit de l'énoncé d'un problème de mathématiques d'un célèbre concours et de sa solution.

Rédiger sur la feuille réponse le texte qui sera trouvé dans 18000 ans. Pour cela, il faut inventer un énoncé puis rédiger sa solution qui contient l'équation trouvée par l'antiquologue.



exercice n° 8 5 points

Polyèdre oublié

Pierre dit " Tiens, j'ai fabriqué un solide qui a 6 faces."
Jean : " Mais je le connais, c'est un cube ! Il a 6 faces et 8 sommets."
Pierre : " Ah non, mon solide n'a que 5 sommets et donc 9 arêtes."
Jean : " Mais alors les faces ne sont pas carrées ?"
Pierre : " Non bien sûr, ce ne sont que des triangles équilatéraux . "
Jean : " Alors je sais aussi le fabriquer. "

Sur la feuille-réponse dessiner un patron et une représentation en perspective de ce solide. Quel est son nom ?

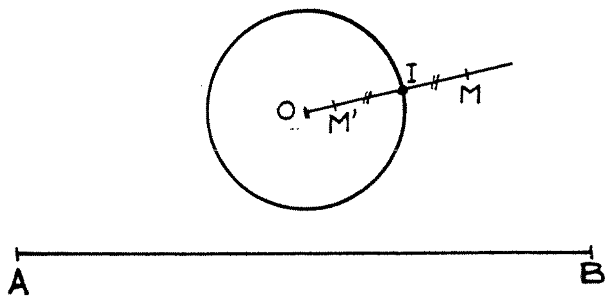
exercice n° 9 10 points

Cyclométrie

Soit un cercle de centre O.
Voici comment obtenir le point symétrique d'un point M différent de O par rapport à ce cercle :
- On trace la demi-droite [OM) qui coupe le cercle au point I.
- Le symétrique M' de M par rapport à I est le symétrique de M par rapport au cercle.

Construire point par point le symétrique du segment [AB] par rapport au cercle.

Données : OA = OB = 11,5 cm, AB = 22 cm, Rayon= 2,5 cm.

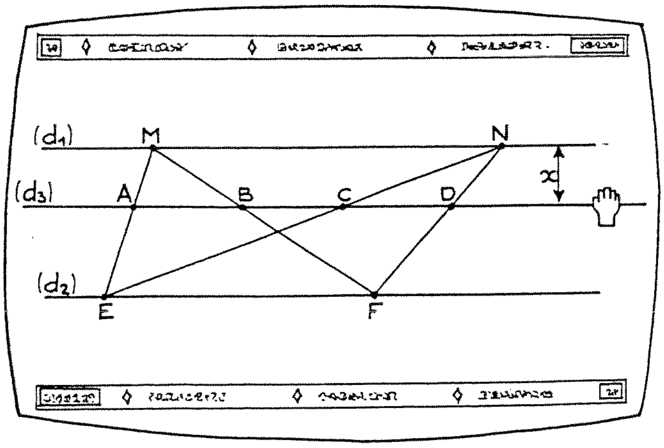


exercice n° 10 15 points

Liberté Egalité

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3), mais il s'agit de valeurs approchées.

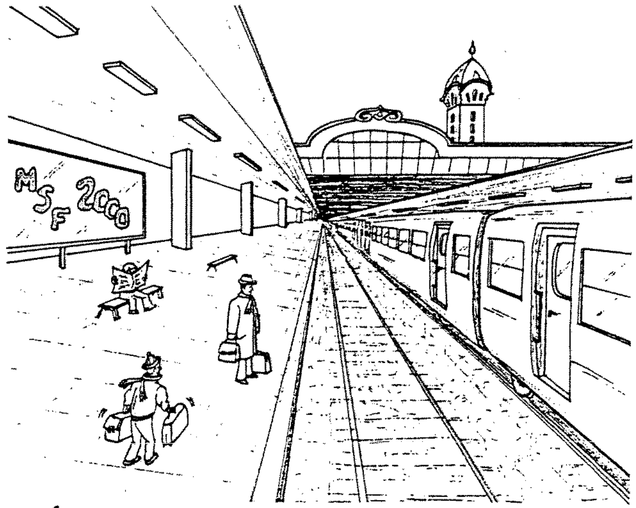
Démontrer que AB = CD quelle que soit la position de (d_3).



Spécial seconde

exercice n° 11 5 points

Dans les temps



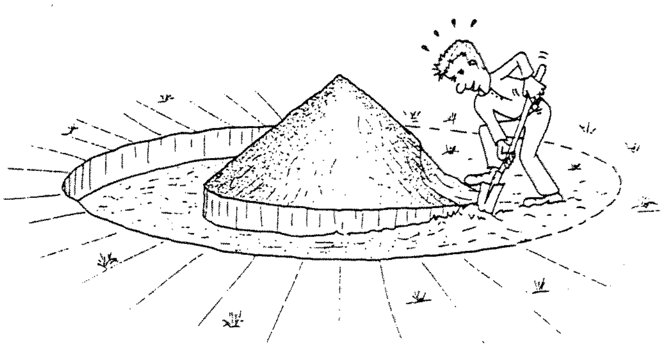
Immobile sur le quai de la gare d'Hère, Hansi observe :

- Qu'un train a mis 6 secondes pour passer devant lui en roulant à vitesse constante,
- Qu'il se passe 23 secondes entre le moment où la locomotive de ce même train passe devant le début du quai et le moment où le dernier wagon quitte la fin du quai long de 340 m.

Calculer la vitesse et la longueur de ce train.

exercice n° 12 10 points

Petit sablé



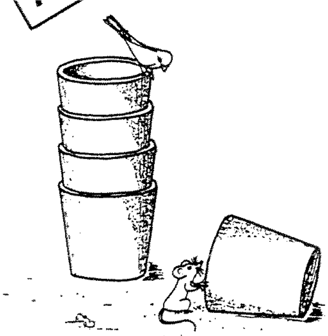
Pour réaliser un tas de sable, Albert creuse un fossé dont les parois sont verticales et dont la base est délimitée par deux cercles dont l'un a un rayon double de l'autre. Avec tout le sable extrait il forme au milieu un cône de révolution dont la base coïncide parfaitement avec le disque autour duquel il a creusé.

Tout à coup, le père d'Albert lui demande de s'arrêter de creuser et constate : “ Le tas de sable a la forme d'un cône de révolution. En plus, si tu te tiens debout au fond du fossé, le sommet du tas de sable est exactement à la même hauteur que le sommet de ta tête ”. À ce moment précis, le fossé creusé par Albert a 15 cm de profondeur.

Quelle est la taille du jeune Albert ? Justifier la réponse.

exercice n° 13 15 points

Question de pot

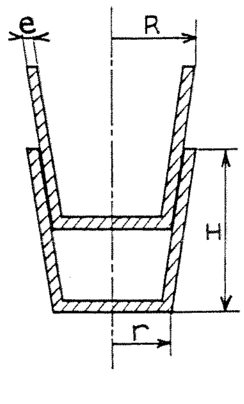


Voici la coupe de deux pots identiques empilés.

Pendant l'hiver, on empile 10 pots vides identiques à ceux-ci.

Quelle est la hauteur exacte de la pile ?
Justifier la réponse.

Données : R = 9 cm, r = 5 cm, H = 18 cm, e = 0,5 cm.



Corrigé de l'épreuve définitive de MARS 2000

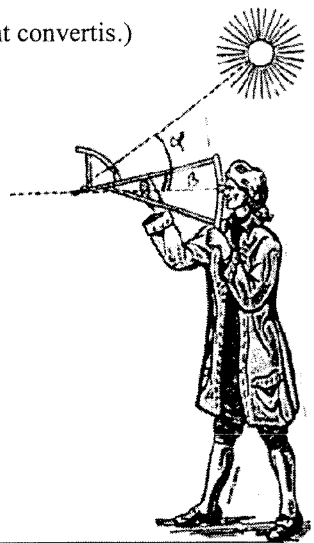
Exercice 1 :

L'échiquier compte normalement 64 cases (= 8 × 8) dont 32 noires et 32 blanches. Etant donné qu'on lui a enlevé deux cases noires, il ne reste que 30 cases noires et 32 blanches. Un domino recouvre exactement deux cases adjacentes donc une case noire et une blanche. Les 30 dominos posés recouvrent par conséquent 30 cases noires et 30 cases blanches. **Les 2 cases restantes sont donc de la même couleur** : elles sont blanches.

Exercice 2 :

Voici un exemple parmi d'autres : on considère les prix suivants 1 F et 2 F respectivement convertis à 0,15 e et 0,30 e. La somme des prix convertis est donc égale à **0,45 e**. Par contre, la somme des prix 3 F convertie en euros donne **0,46 e**. Les deux méthodes peuvent donc conduire à des résultats différents.

(La méthode qui s'applique en réalité est celle qui consiste à faire la somme des prix initialement convertis.)



Exercice 3 :

Dans un premier temps l'observateur plaçait la fente de l'arc supérieur sur une certaine valeur α ; il ajustait ensuite l'inclinaison de l'instrument de façon que les rayons du Soleil arrivent en A ; simultanément, il pointait l'horizon à travers la fente de l'arc inférieur et relevait alors la mesure β.

La hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon est obtenue en additionnant les angles α et β.

Remarque : En fait, l'arc de cercle supérieur pouvait se contenter de graduations espacées de 5 à 10 degrés. L'arc inférieur sur lequel la visée était faite pouvait, pour sa part, être agrandi par l'accroissement de son rayon, ce qui avait pour effet d'augmenter le nombre de graduations et donc d'améliorer la précision de la mesure.

Exercice 5 :

chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
nombre de pixels allumés	10	14	14	14	17	15	11	17	15	19

Pour chaque chiffre, le nombre de pixels est compris entre 10 et 19.

Pour un entier à deux chiffres, le nombre de pixels allumés est donc compris entre 20 et 38 ; parmi ces entiers, la seule solution est 29 (29 = 14 + 15).

nombre	20	21	22	23	24	25	26	27	28	**29**	30	31	32	33	34	35	36	37	38
nombre de pixels allumés	33	24	28	28	28	31	29	25	31	**29**	33	24	28	28	28	31	29	25	31

Un entier ayant n chiffres s'affiche avec au maximum 19n pixels et ce nombre est supérieur ou égal à 10^{n-1} ; or pour tout entier $n \geq 3$, $19n < 10^{n-1}$. **29 est donc la seule solution.**

Remarque : Les nombres de la forme "ab"et "ba" sont affichés avec le même nombre de pixels. On peut donc laisser de côté 21 et 31 qui correspondent à 12 et 13 déjà éliminés. Ainsi que 32 après avoir éliminé 23.

Exercice 6 :

Une méthode (qui sera vraisemblablement celles des élèves) consiste à dresser la liste des numéros des soldats rangés dans la 5ème colonne pour chacune des deux dispositions.

Ceux de la 5ème colonne d'Arithméticus ont leurs numéros qui partent de 5 et vont de 30 en 30 soit : 5 – 35 – 65 – 95 – 125 – 155 – 185 – 215 – 245 – 275 – 305 – 335 – 365 – 395 – 425 – 455 – 485 – 515 – 545 – 575 – 605 – 635 – 665 – 695 – 725 – 755 – 785 – 815 – 845 – 875 – 905 – 935 – 965.

Ceux de la 5ème colonne d'Arithméticus ont leurs numéros qui partent de 5 et vont de 33 en 33 soit : 5 – 38 – 71 – 104 – 137 – 170 – 203 – 236 – 269 – 302 –335 – 368 – 401 – 434 – 467 – 500 – 533 – 566 – 599 – 632 – 665 – 698 – 731 – 764 – 797 – 830 – 863 – 896 – 929 –962.

On constate alors que **Hocus et Pocus portent les numéros 335 et 665** (numéros communs aux 2 positions ; 5 ne convient pas car aucun des 2 romains n'est en 1ère ligne).

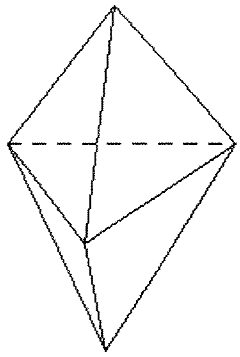
Remarques :

- Par congruence, on y arrive plus vite : les numéros chez Arithméticus sont de la forme 5 + 30k et ceux chez Calculus de la forme 5 + 33k' d'où 5 + 30k = 5 + 33k', par simplification on a 10k = 11k'. Avec k = 11, k' = 10 et on obtient 5 + 30 × 11 = 335. Avec k = 22, k' = 20 et on obtient 5 + 30 × 22 = 665.
- On peut proposer aux bons élèves une variante de cet exercice : Hocus, Pocus et Abracadabrus sont dans la 1ère colonne sous le commandement d'Arithméticus et dans la 7ème colonne sous Calculus. Quels sont leurs numéros ?

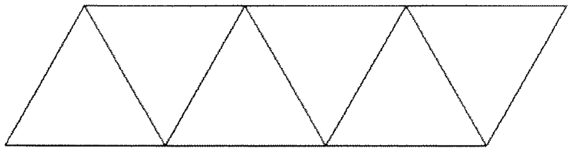
solution de cette variante : n° 271, 601 et 931.

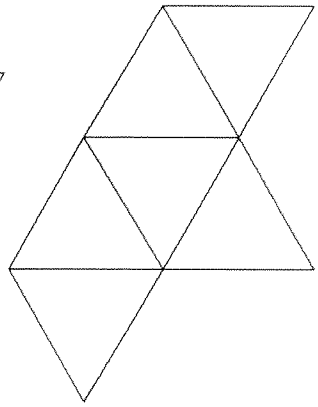
Exercice 8 :

Le polyèdre de Pierre est un **hexaèdre**.

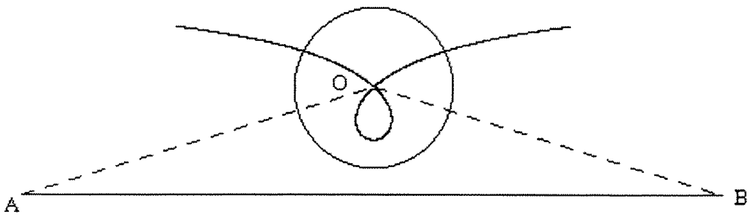


Voici deux patrons possibles :

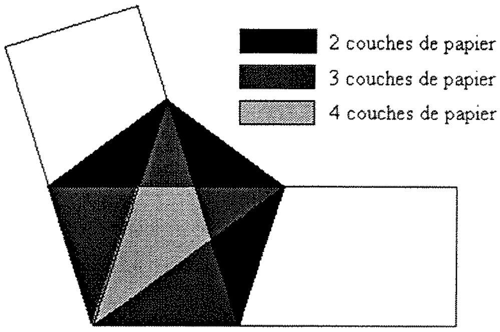




Exercice 9 :



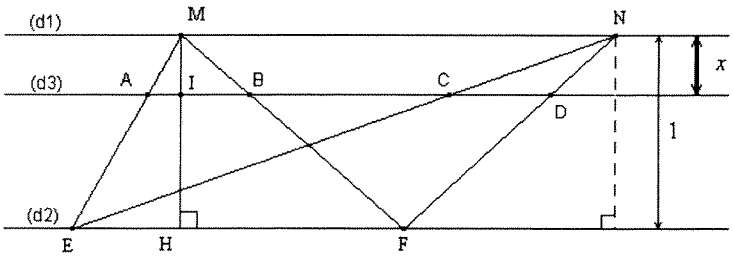
Exercice 4 :



Exercice 10 :

En appliquant successivement dans les triangles MEF puis MEH le théorème de Thalès, on obtient : $\frac{AB}{EF}=\frac{MA}{ME}=\frac{MI}{MH}=\frac{x}{1}=x$.

De même (en considérant la hauteur issue de N dans le triangle NEF), on a : $\frac{CD}{EF}=\frac{ND}{NF}=\frac{x}{1}=x$. De $\frac{AB}{EF}=\frac{CD}{EF}=x$, on déduit **AB = CD**.



Exercice 11 :

Les 23 secondes correspondent à la traversée complète de la gare par le train (du début de la locomotive à la fin du dernier wagon) soit la longueur du quai plus la longueur du train. Il faut y enlever les 6 secondes correspondant uniquement à la longueur du train. On a alors 17 secondes pour la longueur du quai de 340 mètres. La vitesse du train est donc $v=\frac{340\text{ m}}{17\text{ s}}=20\text{ m/s}$ = **72 km/h** (ce peut être un train de marchandise).

La longueur du train est $d' = 20 \times 6 =$ **120 m**.

Exercice 12 :

Notons r le rayon et h la hauteur du tas de sable de forme conique.

Volume de sable extrait : $15 \times (\pi \times (2r)^2 - \pi \times r^2) = 15\pi\,(4r^2 - r^2)$

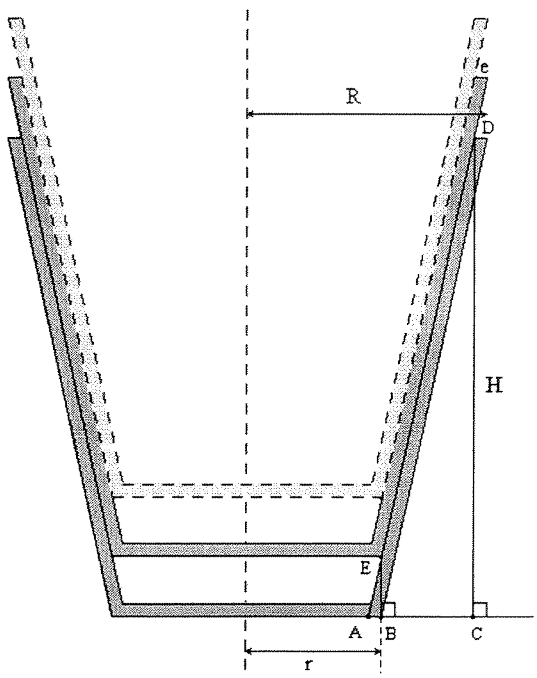
$= 15\pi \times 3r^2 = 45\pi\, r^2$.

Volume du cône : $\frac{\pi r^2 h}{3}$. Ces volumes sont égaux donc $45\pi\, r^2 = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

D'où $45 = \frac{h}{3}$ soit $h = 135$ cm.

Albert mesure donc 135 + 15 = 150 cm = **1 m 50**.

Remarque : La hauteur du tas de sable est indépendante du rayon. En fait, si le grand cercle avait un rayon différent du double du petit cercle, la hauteur dépendrait uniquement du rapport des rayons.



Exercice 13 :

Le point E se trouve à l'aplomb du point B du 1[er] pot. On a : AB = e et AC = R – e – (r – e)= R – r. D'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{EB}{CD}=\frac{AB}{AC}$ soit $\frac{EB}{H}=\frac{e}{R-r}$. D'où EB = $\frac{eH}{R-r}=\frac{0,5\times 18}{9-5}=2,25$ cm.

Pour 10 pots, il y a 9 espaces donc la hauteur des 10 pots est égale à 18 + 9 × 2,25 = 18 + 20,25 = **38,25 cm**.

ACADEMIE DE STRASBOURG

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangssstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

14. März 2000

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

- ***Für die Aufgaben 4, 8 und 9 ist keine Erklärung notwendig. Bei allen anderen Aufgaben muss die Lösung begründet werden.***
- ***Die Darstellung wird mitbewertet.***
- ***Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.***

Aufgabe 1
10 Punkte

SCHACH DEM DOMINO

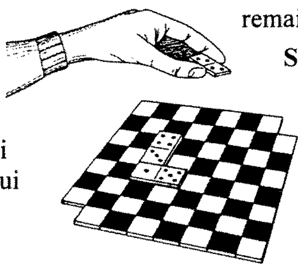
Die Lösung dieser Aufgabe muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

On enlève deux cases noires situées aux coins opposés d'un échiquier, comme sur la figure ci-contre.
On pose 30 dominos sur les cases restantes. Chaque domino recouvre exactement deux cases. Il reste alors deux cases non recouvertes.

Ces cases sont-elles de la même couleur? Justifier la réponse.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram opposite.
30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered.

Say whether or not these squares are the same colour? Justify your answer.



Si tolgono due caselle nere situate negli angoli opposti di una scacchiera, come nella figura qui sotto. Si pongono 30 domino sulle caselle restanti.
Ogni domino copre esattamente due caselle. Rimangono due caselle scoperte.

Queste caselle sono dello stesso colore? Giustificare la risposta.

En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes: cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

¿Son del mismo color estas 2 casillas? Justifica tu respuesta.

Aufgabe 2
5 Punkte

RUNDER EURO

Der Kurs des Euro wurde so festgelegt, dass 1 Euro 1,95583 DM entspricht. Um die Summe mehrerer Beträge von DM in Euro umzurechnen, hat man zwei Möglichkeiten:

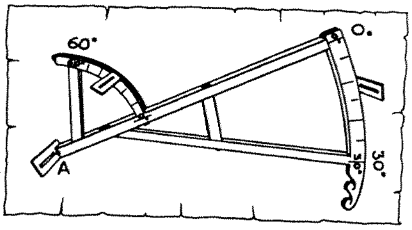
- Man rechnet den Gesamtbetrag in Euro um und und rundet auf dann auf zwei Dezimalen.
- Man rechnet die Einzelbeträge in Euro um, rundet auf zwei Dezimalen und addiert die gerundeten Beträge.

Zeige an einem Beispiel, dass die beiden Methoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können.

Aufgabe 3
10 Punkte

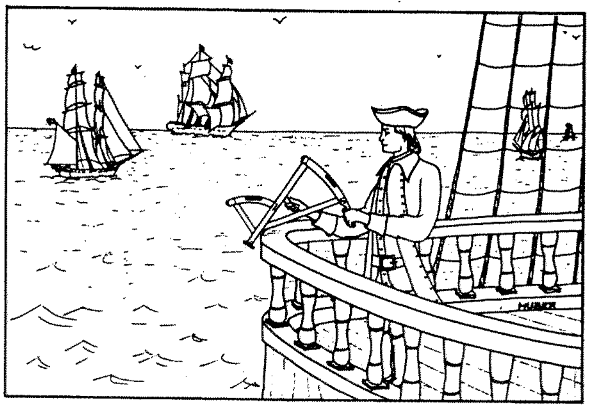
QUADRANT VON DAVIS

Um das Jahr 1590 entwickelte John Davis, ein englischer Seemann, ein Navigationsgerät, das unter seinem Namen bekannt wurde: den Quadranten von Davis. Damit war es möglich, den Erhebungswinkel der Sonne über dem Horizont zu bestimmen, ohne in die Sonne sehen zu müssen. Dies war ein solcher Fortschritt, dass das Gerät bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts Verwendung fand.



Das Gerät bestand aus einer Leiste, auf der zwei Kreisbögen mit dem Mittelpunkt A befestigt waren. Der obere Kreisbogen trug eine Einteilung von 0° bis 60°, der untere war von 0° bis 30° unterteilt. Auf beiden Bogenstücken war jeweils ein verschiebbarer Spalt angebracht. Im Zentrum A der beiden Kreisbögen befand sich ein weiterer Spalt.

Bei der Messung wandte der Navigator der Sonne den Rücken zu und hielt das Instrument in einer vertikalen Ebene. Das Gerät wurde so eingestellt, dass das Sonnenlicht durch den Spalt auf dem oberen Bogen auf den Spalt bei A fiel.Gleichzeitig wurde durch den Spalt auf dem unteren Bogen und den Spalt bei A der Horizont anvisiert.



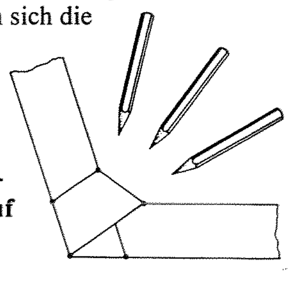
Zeichne den Navigator bei der Messung, und erkläre, wie man aus den Einstellungen des Geräts den Erhebungswinkel erhält.

Aufgabe 4
5 Punkte

FARBKNOTEN

Falte aus einem 4 cm breiten Papierstreifen einen Knoten, wie er auf der Abbildung zu sehen ist. In der Form des Knotens lassen sich die Eckpunkte eines Fünfecks erkennen.

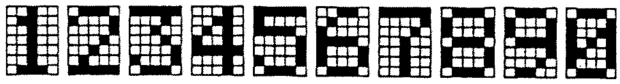
Färbe das Fünfeck so, dass genau die Bereiche gleich gefärbt sind, bei denen die Anzahl der übereinander liegenden Papierschichten übereinstimmt. Klebe den farbigen Knoten auf das Antwortblatt!



Aufgabe 5
10 Punkte

PIXEL

Wenn mein alter Rechner die Zahl 1 234 567 890 auf dem Bildschirm anzeigt, so erfolgt die Darstellung durch das Aufleuchten bestimmter Pixel (siehe Abbildung). Zur Anzeige der Zahl 0 leuchten 19 Pixel auf, für die Zahl 17 benötigt man 21 Pixel. Eine ganze Zahl beginnt nicht mit der Ziffer 0.



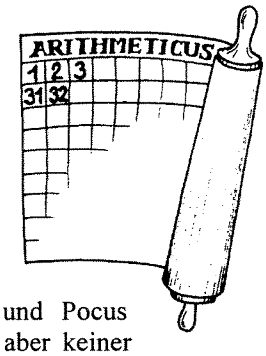
Finde eine Zahl, bei der die Anzahl der notwendigen Pixel mit dem Wert der Zahl übereinstimmt.
Ist es die einzige Zahl? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 6
5 Punkte

ORDNUNG MUSS SEIN

Wenn es um die Ordnung geht, versteht man in der römischen Armee keinen Spaß. Jeder Legionär hat eine Nummer, damit er genau weiß, welchen Platz er innerhalb der Formation einnehmen muss.

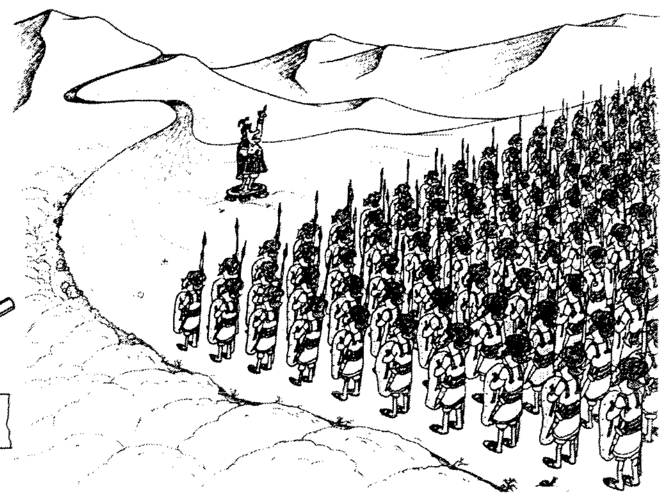
Lässt General Arithmeticus seine 990 Legionäre antreten, so stellen sie sich in einer rechteckigen Formation von 33 Linien und 30 Kolonnen auf. Jede Linie wird dabei in aufsteigender Reihenfolge aufgefüllt, so wie es auf der Schriftrolle zu sehen ist.



Die beiden Legionäre Hocus und Pocus stehen in der fünften Kolonne, aber keiner steht in der ersten Linie.

Als Arithmeticus nach Rom gerufen wird, übernimmt General Calculus das Kommando. Er verlangt, dass sich die Legionäre wieder in aufsteigender Reihenfolge, nun aber in einem Rechteck mit 30 Linien und 33 Kolonnen aufstellen. Hocus und Pocus stehen wieder in der fünften Kolonne.

Welche Nummern tragen die beiden Legionäre? Erläutere deine Antwort.



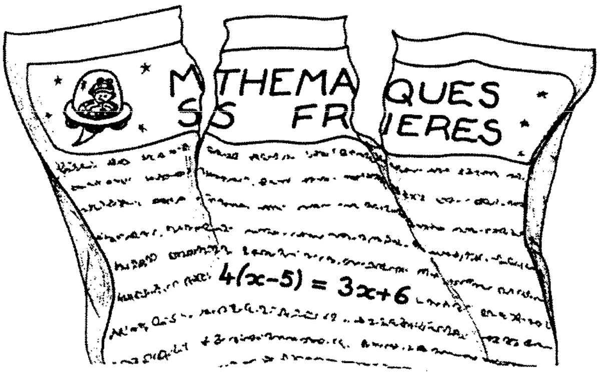
Aufgabe 7 – 10 Punkte: Zurück in die Zukunft

Im Jahr 20000 findet ein Archäologe ein Relikt in sehr schlechtem Zustand, dessen Konsistenz früher als Papier bezeichnet wurde. Es gelingt ihm, die Buchstaben "M...THEMA...QUES S...S FR...IERES" zu entziffern. Darunter folgt ein Text von etwa zehn unleserlichen Zeilen, dann eine Gleichung:

$$4(x-5) = 3x + 6.$$

Nach Hinzuziehen eines Sachverständigen wird klar, dass es sich bei dem Text um eine Aufgabe eines berühmten Mathematikwettbewerbs und deren Lösung handelt.

Schreibe einen Text auf, der in 18000 Jahren gefunden werden soll. Erfinde dazu eine Aufgabe und stelle ihre Lösung dar. Die Lösung soll die oben erwähnte Gleichung enthalten.



Aufgabe 8 – 5 Punkte: Namenloses Polyeder

Pierre: „Ich habe einen Körper mit sechs Seitenflächen gebastelt."

Jean: „Bestimmt ist es ein Würfel! Er hat sechs Seitenflächen und acht Eckpunkte."

Pierre: „Nein, nein! Mein Körper hat nur fünf Eckpunkte, jedoch neun Kanten."

Jean: „Aber dann können die Seitenflächen nicht quadratisch sein."

Pierre: „Natürlich nicht, es sind lauter gleichseitige Dreiecke."

Jean: „Dann kann auch ich den Körper bauen!"

Zeichne ein Netz und skizziere ein Schrägbild dieses Körpers. Wie könnte man ihn nennen?

Aufgabe 9 – 10 Punkte: Krummes Ding

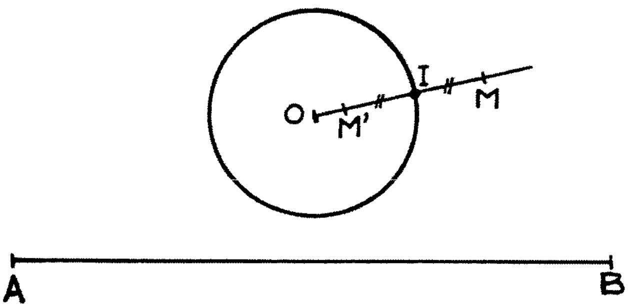
Gegeben sei die Kreislinie K mit dem Radius r und dem Mittelpunkt O. Den zu einem Punkt M ≠ O symmetrischen Punkt M‘ in bezug auf die Kreislinie K erhält man nach folgender Vorschrift:

- Man zeichne die Halbgerade [OM). Sie schneide K im Punkt I.
- Den Bildpunkt M‘ erhält man durch Spiegelung von M an I.

Konstruiere punktweise das Bild der Strecke AB in bezug auf die Kreislinie K.

Verwende folgende Maße:

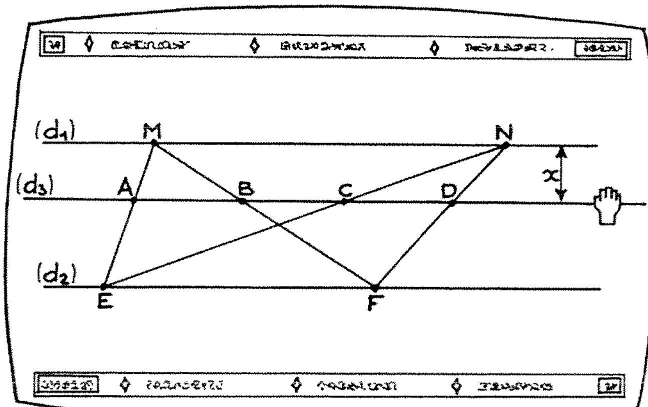
$\overline{AB} = 22$ cm; $\overline{OA} = \overline{OB} = 11{,}5$ cm; $r = 2{,}5$ cm.



Aufgabe 10 – 15 Punkte: Geometrie beweglich

Mit einem Geometrieprogramm hat Hans-Jürgen die abgebildete Figur mit den Parallelen (d_1), (d_2) und (d_3) konstruiert. (d_1) und (d_2) haben einen Abstand von 1dm. Als er (d_3) zwischen (d_1) und (d_2) parallel verschiebt, stellt er fest, dass die vom Computer angezeigten Längen der Strecken AB und CD stets gleich sind. Da die angezeigten Längen jedoch gerundet sind, hat er Zweifel.

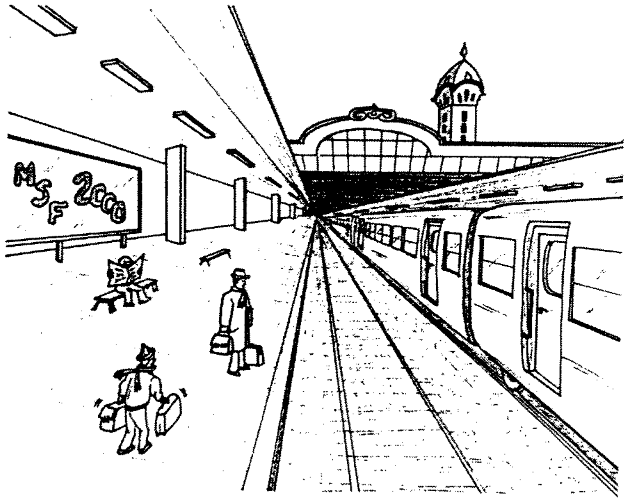
Zeige, dass die Strecken AB und CD wirklich gleich lang sind, in welcher Position zwischen den beiden anderen Geraden sich (d_3) auch befindet.



nur für Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Es hat Durchfahrt...



Auf einem 340 m langen Bahnsteig wartet Hansi auf seinen Anschluss und denkt nach:

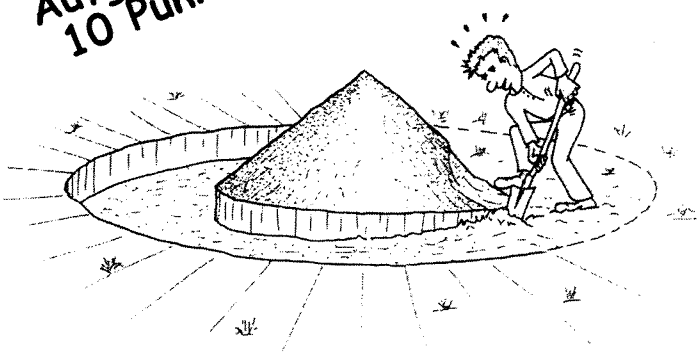
„Angenommen, der eben durchfahrende Zug benötigt genau sechs Sekunden, um mit gleichbleibender Geschwindigkeit an mir vorbei zu fahren. – Und angenommen, zwischen dem Zeitpunkt, an dem die Lokomotive den Anfang des Bahnsteigs erreicht, und dem Zeitpunkt, an dem das Schlusslicht des letzten Wagens das Ende des Bahnsteigs passiert, liegen genau 23 Sekunden:

Wie lang ist dann dieser Zug, wie schnell fährt er?“

Berechne die Geschwindigkeit und die Länge des Zuges!

Aufgabe 12
10 Punkte

Kind und Kegel



Um einen Sandhaufen aufzuschütten, hat Albert einen ringförmigen Graben mit senkrechten Wänden ausgehoben. Der Außenradius des Ringes ist doppelt so groß wie der Innenradius. Mit dem ausgehobenen Sand formt er einen senkrechten Kreiskegel, dessen Grundfläche vom Innenrand des Grabens begrenzt wird.

„Warte einen Augenblick!“ ruft plötzlich Alberts Vater. „Wenn du dich aufrecht in den Graben stellst, ist die Kegelspitze genau so hoch wie der höchste Punkt deines Kopfes.“

In diesem Moment ist der Graben überall 15 cm tief.

Wie groß ist Albert? Begründe deine Antwort.

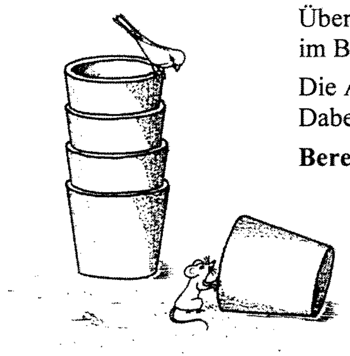
Aufgabe 13
15 Punkte

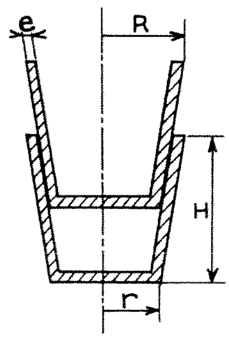
Hochstapelei

Über den Winter werden 10 gleiche, leere Blumentöpfe wie im Bild gestapelt.

Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch zwei dieser Töpfe. Dabei ist R = 9 cm, r = 5 cm, H = 18 cm und e = 0,5 cm.

Berechne die genaue Höhe des Stapels aus zehn Töpfen.





Mathematik ohne Grenzen 2000
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 14.3.2000

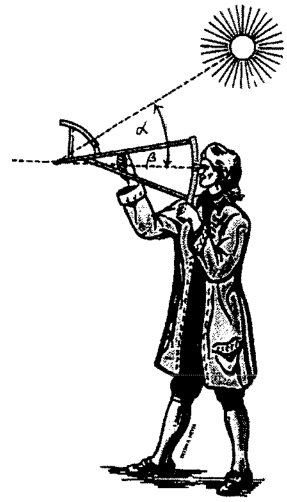
Aufgabe 1 (10 Punkte) :

Nach Wegname der beiden schwarzen Felder bleiben noch 30 schwarze und 32 weiße Felder übrig. Da jeweils benachbarte Felder verschiedenfarbig sind, bedeckt jeder Stein ein schwarzes und ein weißes Feld. Es werden also 30 weiße und 30 schwarze Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei weiße Felder übrig.

Aufgabe 2 (5 Punkte) :

Beispiel : 2 DM und 3 DM ergeben gerundet 1,02 Euro und 1,53 Euro. Als Summe der gerundeten Beträge erhält man 2,55 Euro. Rechnet man dagegen 5 DM um, so erhält man gerundet 2,56 Euro.

Aufgabe 3 (10 Punkte) :

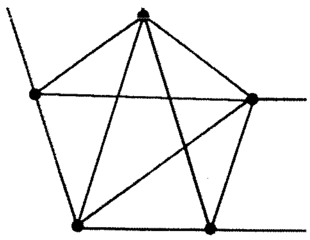


Zunächst stellt der Beobachter auf dem oberen Bogen einen gewissen Winkel α ein. Dann hält er das Instrument so, dass das Sonnenlicht durch den oberen Spalt auf den Spalt bei A fällt. Verstellt er nun den Spalt auf dem unteren Bogen so, dass er gleichzeitig den Horizont anpeilen kann (Winkel β), so ergibt sich der Erhebungswinkel als Summe von α und β.

Bemerkung : Auf dem oberen Bogen begnügte man sich mit einer Unterteilung in 5°-Schritten. Die Feineinstellung erfolgte durch den Spalt auf dem unteren Bogen mit dem größeren Radius.

Aufgabe 4 (5 Punkte) :

Die Zahlen geben die Anzahl der Papierschichten an.



Aufgabe 5 (10 Punkte) :

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Pixel	10	14	14	14	17	15	11	17	15	19

Für eine Zahl n aus zwei Ziffern folgt aus der Tabelle $20 \leq n \leq 17 + 19$.

Ziffer	20	21	22	23	24	25	26	27	28	**29**	30	31	32	33	34	35	36
Pixel	33	24	28	28	28	31	29	25	31	**29**	33	24	28	28	28	31	29

Für eine Zahl n aus k Ziffern gilt einerseits $n \geq 10^{k-1}$. Andererseits gilt für die Anzahl m der Pixel $m < 19k$.
Aus $m = n$ erhält man $10^{k-1} \leq n < 19k$. Für $k > 2$ gilt jedoch $19k < 10^{k-1}$. Damit ist 29 die einzige Lösung.

Aufgabe 6 (5 Punkte) :

Nach der Aufstellung von Arithmeticus haben die Legionäre der 5. Kolonne die Nummern $5+a\cdot 30$ mit $1\leq a \leq 32$.

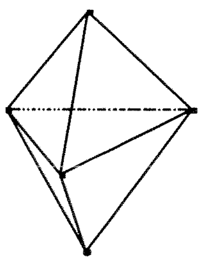
In der Formation von Calculus stehen in der 5. Kolonne die Legionäre mit den Nummern $5+b\cdot 33$ mit $1\leq b \leq 29$.

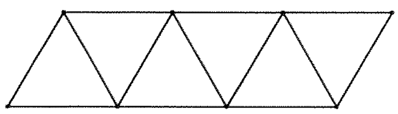
Steht ein Legionär bei beiden Aufstellungen in der 5. Kolonne, so gilt für seine Nummer $5+30a = 5+33b$ und damit $a/b = 33/30$. Mit $a = 11$ und $b = 10$ erhält man die Nummer 335. Mit $a = 22$ und $b = 20$ ergibt sich die Nummer 665.

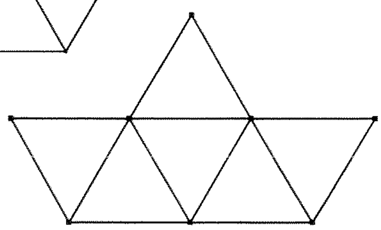
Listen die Schüler für beide Formationen die Nummern der 5. Kolonne auf, und kommen durch Vergleichen zum Ergebnis, so ist dies ebenfalls richtig.

Aufgabe 8 (5 Punkte) :

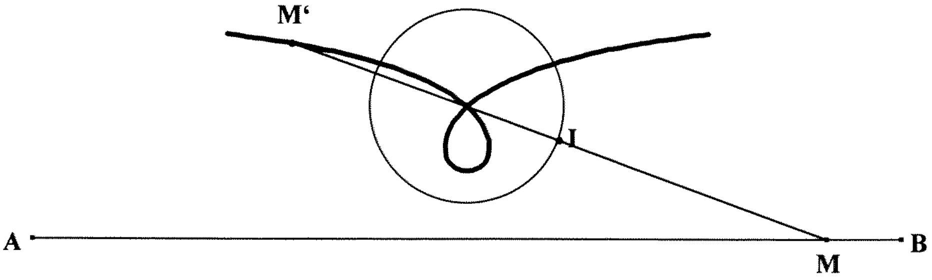
Ein möglicher Name ist z.B. Doppeltetraeder.
Die exakte Konstruktion des Schrägbildes ist nicht verlangt.







Aufgabe 9 (10 Punkte) :

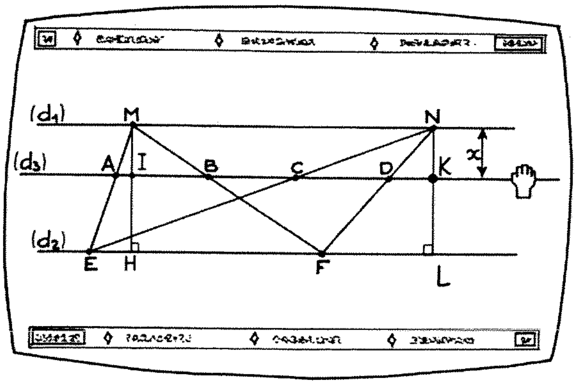


Aufgabe 10 (15 Punkte) :

Im Dreieck EFM gilt $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{MH}} = \frac{x}{1}$.

Im Dreieck EFN gilt $\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{NL}} = \frac{x}{1}$.

Es ist also $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$ und damit $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Aufgabe 11 (5 Punkte) :

Sei x die Länge des Zuges. Die Spitze der Lokomotive, und damit der ganze Zug, legt in 23 s die Strecke 340 m + x zurück. Andererseits legt der Zug, während er an Hansi vorbeifährt, in 6s die Strecke x zurück.

Es gilt also $v = \frac{340\,m + x}{23\,s} = \frac{x}{6\,s}$. Daraus erhält man **x = 120 m** und **v = 20 m/s**.

Aufgabe 12 (10 Punkte) :

Volumen des Grabens: $V = \pi \cdot [(2r)^2 - r^2] \cdot 15\,cm = 45\,cm \cdot \pi r^2$ Volumen des Kegels: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Durch Gleichsetzen erhält man $h = 3 \cdot 45\,cm = 135\,cm$. Größe von Albert: 135 cm + 15 cm =**150 cm**.

Aufgabe 13 (15 Punkte) :

Die Punkte B und E sind von der gemeinsamen Symmetrieachse der Töpfe gleich weit entfernt. Dies gilt auch für die Punkte C und D. Damit ist BE parallel zu CD.

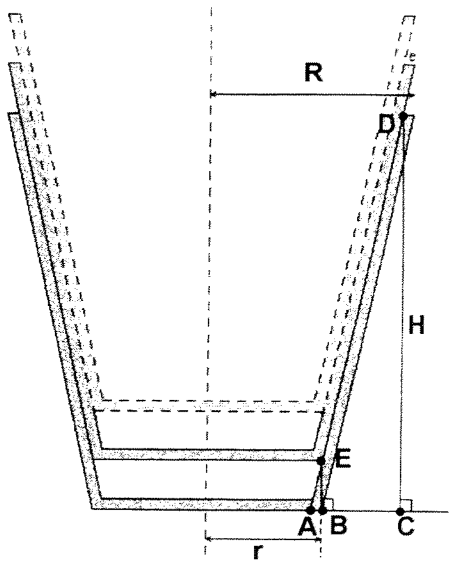
Weiter ist $\overline{AB} = e$ und $\overline{AC} = R - e - (r - e) = R - r$.

Strahlensatz: $\frac{\overline{EB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{e}{R-r} \Rightarrow \overline{EB} = \frac{eH}{R-r}$.

Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man $\overline{EB} = 2{,}25$ cm.

Dieser Wert gibt den Abstand zwischen zwei Töpfen und damit den Höhenzuwachs beim Stapeln an.

Bei 10 Töpfen beträgt die Gesamthöhe 18 cm + 9· 2,25 cm = **38,25 cm**.



Competizione 13 marzo 2000

Anno 2000 proclamato dall'UNESCO ANNO della MATEMATICA

- *Solo le risoluzioni degli esercizi n. 3, 6 e 8 non richiedono giustificazioni.*
- *Ogni risposta, anche se parziale, sarà considerata*
- *Si terrà conto dell'accuratezza delle risposte.*
- *Usare un solo foglio-risposta per ciascun esercizio.*

Esercizio n. 1 (punti 10)
Domino sulla scacchiera
con risposta da redigere nella lingua scelta con non meno di 30 parole

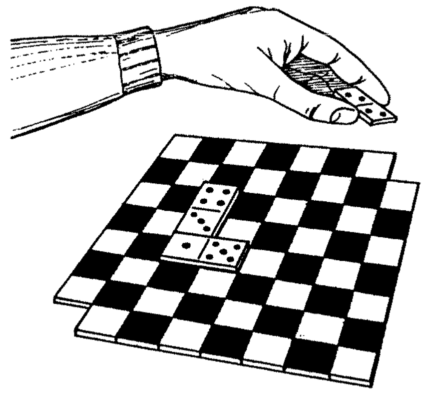
---

On enlève deux cases noires situées aux coins opposés d'un échiquier, comme sur la figure. O.n pose 30 dominos sur les cases restantes. Chaque domino recouvre exactement deux cases. Il reste alors deux cases non recouvertes.

Ces cases sont-elles de la même couleur ? Justifier la réponse.

En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura al lado. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes : cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

¿ Son del mismo color estas casillas ? Justifica tu respuesta.



Bei einem Schachbrett entfernt man zwei schwarze Felder, die in gegenüberliegenden Ecken liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auf die restlichen Felder verteilt man 30 Dominosteine, wobei jeder Stein genau zwei Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei Felder frei.

Haben diese Felder die gleiche Farbe ? Begründe deine Antwort.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram opposite. 30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered.

Say whether or not these squares are the same colour Justify your answer.

Ezercizio n.2 (punti 5)
Briciole di Euro

Il valore dell'Euro è stato fissato così :
1 euro = 1936,27 lire. Per convertire in euro la somma di vari prezzi dati in lire si può scegliere fra due procedimenti :

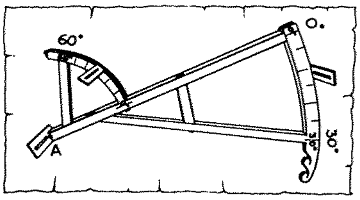
- convertire la somma in euro e arrotondare il risultato al centesimo di euro,
- convertire ogni prezzo in euro, arrotondando ogni risultato al centesimo di euro, e alla fine sommare questi valori arrotondati.

Mostrate a partire da un esempio che questi due metodi possono condurre a risultati diversi.

Ezercizio n.3 (punti 10)
Sestante di Davis

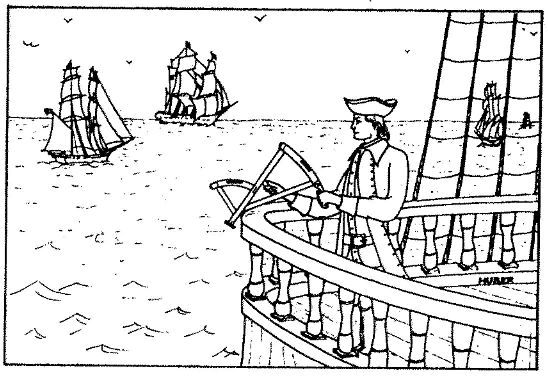
Verso il 1590 il marinaio inglese John Davis mise a punto, a partire dalla ballestriglia, uno strumento che portò il suo nome: il sestante di Davis. Esso permetteva di calcolare l'altezza del sole in gradi. Fu un progresso tale che tutti i navigatori l'usarono fino a metà del diciottesimo secolo.

Questo strumento era costituito da una asticciola alla quale erano fissati due archi di circonferenza. L'arco superiore era graduato da 0° a 60°, quello inferiore da 0° a 30°. Su ognuno dei due archi, aventi entrambi centro A, era posta una fenditura scorrevole.



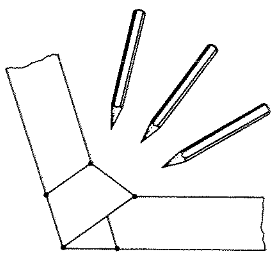
Per eseguire la misura, l'osservatore dava le spalle al sole e teneva lo strumento in un piano verticale. I raggi del sole, passando attraverso la fenditura dell'arco superiore, illuminavano una fenditura orizzontale posta in A, all'estremità dell'asta. Contemporaneamente l'osservatore mirava l'orizzonte attraverso la fenditura dell'arco inferiore e attraverso la fenditura in A.

Rappresentate l'osservatore mentre misura l'altezza del sole con un sestante di DAVIS e spiegate come si calcola questa altezza in gradi.



Ezercizio n.4 (punti 5)
Nodo colorato

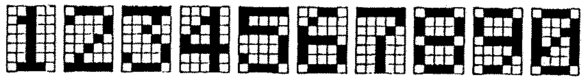
Con una striscia di carta larga 4 cm fare un nodo come nella figura. Questo nodo fa apparire un pentagono.



Colorate nella stessa tinta tutte le regioni del pentagono che hanno uguale numero di strati di carta. Incollate il nodo colorato sul foglio-risposta.

Ezercizio n.5 (punti 10)
Pixel

La mia calcolatrice visualizza il numero 1 234 567 890 sullo schermo illuminando dei pixel. Per esempio, occorre illuminare 19 pixel per visualizzare la cifra 0 e 21 pixel per il numero 17. Un numero intero non nullo non comincia mai con 0.

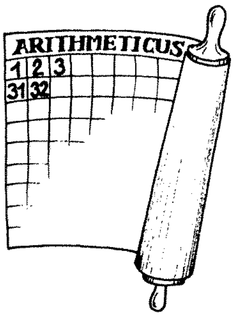


Trovate un numero uguale al numero di pixel illuminati per visualizzarlo. E' unico ? Motivate la risposta.

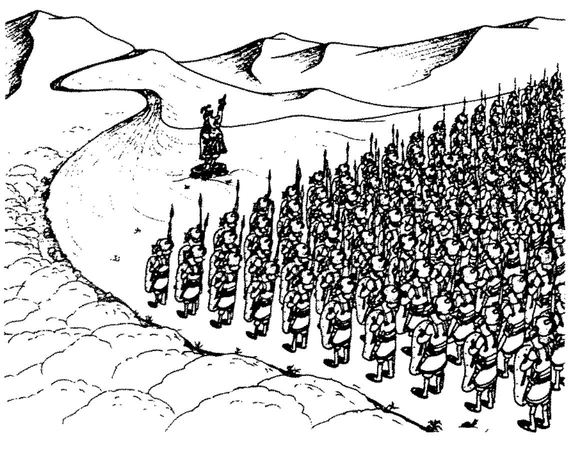
Ezercizio n.6 (punti 5)
Quinta colonna

Nell'esercito romano non si scherza con l'ordine. Ogni legionario porta un numero, che conserva per sempre, che gli permette di conoscere il suo posto.

Il generale Aritmeticus ha radunato i suoi 990 legionari e li dispone in formazione rettangolare di 33 righe e 30 colonne. Sistema via via come in figura i soldati. Hocus e Pocus sono entrambi nella quinta colonna e, per fortuna, nessuno dei due si trova in prima linea. Ma Aritmetico viene richiamato a Roma e prende il comando delle truppe il generale Calculus che li risistema con lo stesso criterio, ma in un rettangolo di 30 righe e 33 colonne. Hocus e Pocus si trovano ancora in quinta colonna.



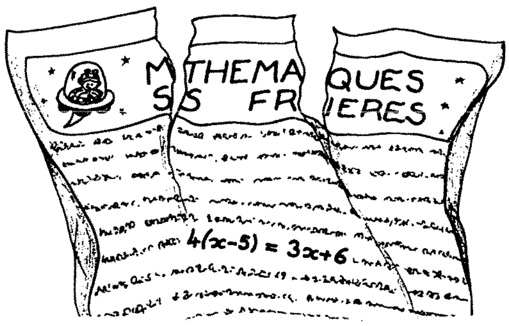
Quali sono i loro numeri ? Motivate la risposta.



Ezercizio n.7 (punti 10)
Ritorno al futuro

Nell'anno 20 000 un "anticologo" ritroverà un fossile in pessimo stato di conservazione che si scoprirà essere stato un foglio di carta. Riuscirà a decifrare in cima alla pagina le lettere "M.THEMA..QUES S..S FR…IERES"; sotto a questa scritta c'è un testo di una decina di righe illeggibili perché distrutte dal tempo, poi una equazione: $4(x - 5) = 3x + 6$.
Dopo aver consultato vari specialisti del periodo post-preistorico l'"anticologo" capisce che si tratta dell'enunciato di un problema matematico di un famoso concorso e della sua soluzione.

Scrivete sul foglio-risposta il testo che verrà ritrovato fra 18 000 anni. Per farlo dovrete inventare un problema e scriverne la soluzione contenente l'equazione ritrovata dall'"anticologo".



Ezercizio n.8 (punti 5)
Come sarà ?

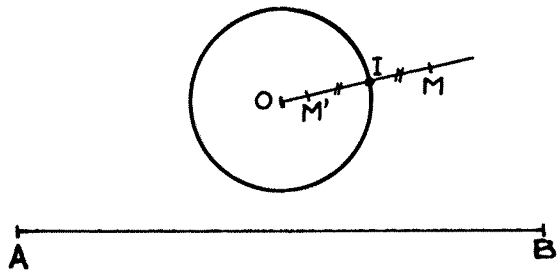
Piero dice: "Guarda, ho costruito un solido che ha 6 facce!" Gianni: "Ma lo conosco, è un cubo! Ha 6 facce e 8 vertici." Piero: "Eh no, il mio solido ha solo 5 vertici e, quindi, 9 spigoli." Gianni: "Ma allora le facce non sono quadrate!" Piero: "No, certo, sono tutti triangoli equilateri." Gianni: "Allora, so costruirlo anch'io."

Disegnate sul foglio-risposta un modello e un disegno in prospettiva di questo solido. Come si chiama?

Ezercizio n.9 (punti 10)
Linee trasformate

Ecco come ottenere il punto simmetrico di un punto M rispetto ad una circonferenza di centro O distinto da M :

- si traccia la semiretta OM che taglia la circonferenza nel punto I;
- denominiamo simmetrico di M rispetto alla circonferenza il punto M' simmetrico di M rispetto ad I.

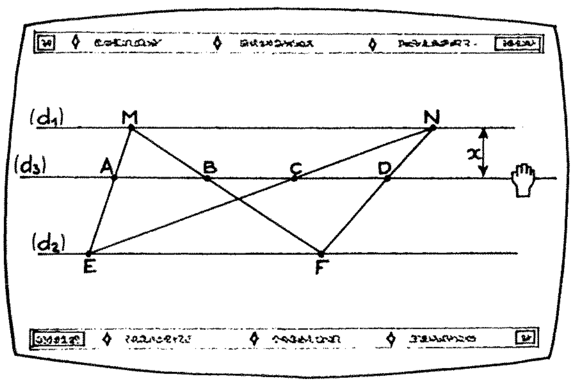


Costruite per punti la figura simmetrica del segmento AB (di lunghezza 22 cm) rispetto alla circonferenza di raggio uguale a 2,5 cm, tale che OA = OB = 11,5 cm.

Ezercizio n.10 (punti 15)
Libertà, uguaglianza

Sullo schermo del suo computer Gerardo ha costruito la figura qui riportata. Le rette parallele d_1 e d_2 distano fra loro 1 dm. Gerardo inserisce fra le due la retta d_3 parallela ad esse e osserva che i segmenti AB e CD valutati sullo schermo sono uguali per ogni posizione di d_3, ma si tratta di valori approssimati.

Dimostrate che AB = CD per ogni retta d_3.



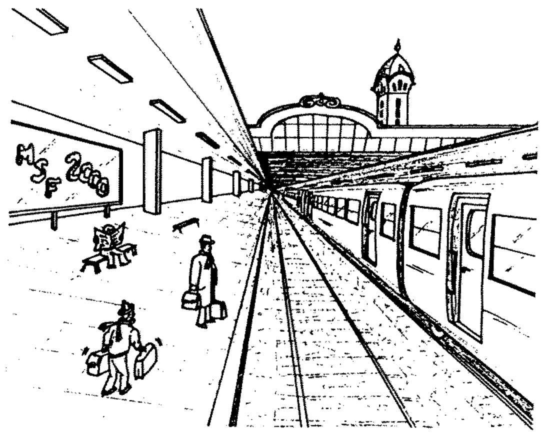
classe terza

Ezercizio n.11 (punti 5)
Per ingannare l'attesta

Fermo sul marciapiede di un binario della stazione di Monza, Luca osserva che

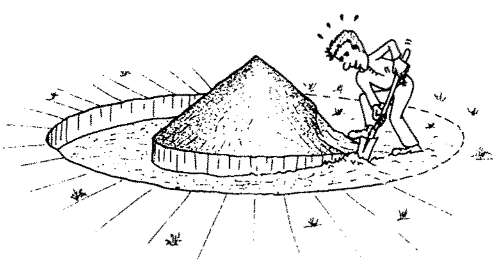
- un treno ha impiegato 6 secondi per passare davanti a lui, viaggiando a velocità costante;
- sono passati 23 secondi tra il momento in cui la testa del treno è arrivata all'inizio del marciapiede, e il momento in cui l'ultimo vagone lascia la fine del marciapiede che è lungo 340 metri.

Calcolate la velocità e la lunghezza del treno.



classe terza

Ezercizio n.12 (punti 10)
Ragazzino nella sabbia



Per ottenere un mucchio di sabbia Alberto scava un fossato dalle pareti verticali, la cui base è una corona circolare il cui raggio esterno è doppio del raggio interno. Con tutta la sabbia estratta Alberto forma un cono circolare la cui base coincide perfettamente col cerchio intorno a cui ha scavato. Ad un certo punto il padre di Alberto gli chiede di smettere di scavare ed osserva: "Il tuo mucchio di sabbia ha la forma di un cono circolare. Se tu ti metti ritto nel fossato la cima del mucchio di sabbia arriva esattamente allo stesso livello della sommità della tua testa." In quel momento il tuo fossato scavato da Alberto è profondo 15 cm.

Quanto è alto il giovane Alberto ? Giustificate la risposta.

classe terza

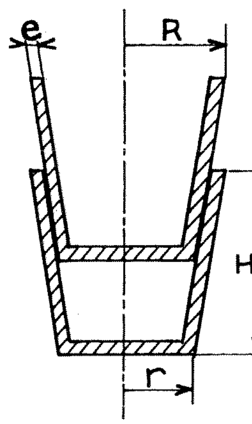
Ezercizio n.13 (punti 15)
Questione di vasi

Ecco la sezione di due vasi da fiori identici uno nell'altro. Durante l'inverno io ripongo 10 vasi vuoti uguali a questi infilati uno nell'altro.

Dati : R = 9 cm ; r = 5 cm H = 18 cm ;

e = 0,5 cm.

Qual è l'altezza esatta della pila ? Motivate la risposta.



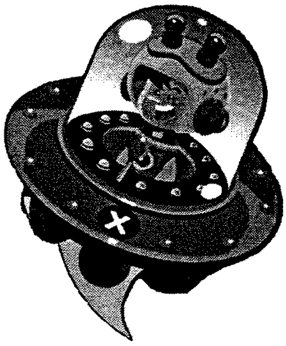
Mathématiques sans frontières

ACADEMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex



March 2000

- Questions 3, 6 and 8 dont need any explanation..
- For the others you should show all your working and give a full explanation. Partially correct answers will be given credit.
- Neatness especially in the drawing questions is important..
- Only hand in one answer sheet per team for each question..

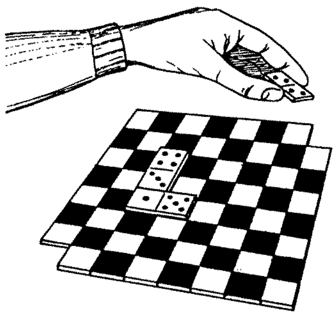
QUESTION 1
10 MARKS

Echecs aux dominos

Write down your answer in French, German, Spanish or Italian using at least 30 words.

On enlève deux cases noires situées aux coins opposés d'un échiquier, comme sur la figure ci-dessous (ci-contre).On pose 30 dominos sur les cases restantes. Chaque domino recouvre exactement deux cases. Il reste alors deux cases non recouvertes.

Ces cases sont-elles de la même couleur ? Justifier la réponse.



En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura al lado. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes : cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

¿ Son del mismo color estas casillas ? Justifica tu respuesta.

Bei einem Schachbrett entfernt man zwei schwarze Felder, die in gegenüberliegenden Ecken liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auf die restlichen Felder verteilt man 30 Dominosteine, wobei jeder Stein genau zwei Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei Felder frei.

Haben diese Felder die gleiche Farbe ? Begründe deine Antwort.

En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura al lado. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes : cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

¿ Son del mismo color estas casillas ? Justifica tu respuesta.

QUESTION 2
5 MARKS

Change from the euro

The rate of exchange of the euro has been fixed at
1 euro = 6.55957 French francs.
There are two ways to convert the total of a number of prices given in francs into euro :

- find the total in francs and then change the total into euro to two decimal places
- change each price into euro to two decimal places and then add to find the total in euros.

Show by an example that these methods can give different answers.

QUESTION 3
10 MARKS

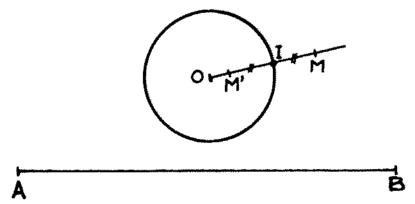
Round in a circle

Start with a circle centre O.
Here is how to find a image of a point M with respect to the circle :

- draw the line OM cutting the circle at the point I.
- the image M' of M with respect to the point I is also the image of M with respect to the circle i.e. IM' = IM.

Draw the image of the line AB with respect to the circle by constructing enough points.

Given : OA = OB = 11.5 cm ; AB = 22cm ; radius of the circle = 2.5 cm.

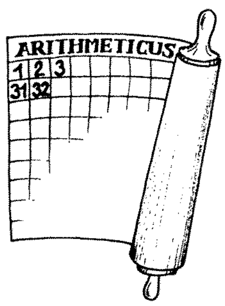


QUESTION 4
5 MARKS

Fifth column

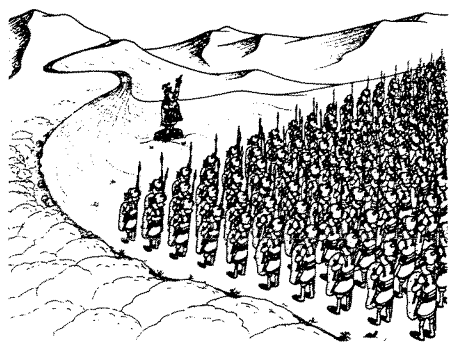
In the Roman army everything was by the numbers. Each legionary had a number so that he knew his place. He never changed his number.

General Arithmeticus assembled his 990 legionaries and arranged them in a rectangle of 33 rows and 30 columns. He filled in each row as in the plan on the scroll. Legionaries Hocus and Pocus were both in the fifth column. Neither of them were in the first row.



But Arithmeticus was called back to Rome to be replaced by general Calculus. He reorganised the legionaires in the same way but in 30 rows and 33 columns. Hocus and Pocus were still in the fifth column.

What are their numbers ? Explain your answer.

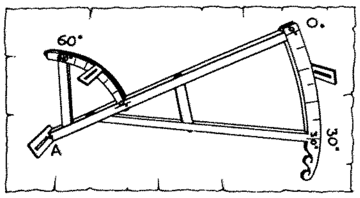


QUESTION 5
10 MARKS

Davis's quadrant

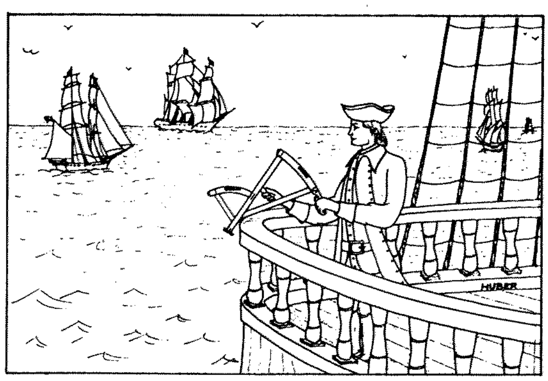
Around 1590 an English sailor John Davis improved the astrolabe and developed the instrument which now bears his name – Davis's quadrant. (Sometimes called Davis's backstaff). It measures the altitude or elevation of the sun in degrees. It was such a successful development that it was used by sailors up till the middle of the 18 century.

The device consists of a rod on which are set two circular arcs. The arc on the top can measure angles from 0° to 60° ; the arc on the bottom can measure from 0° to 30°. Both circular arcs have the same centre A and each has a movable slotted sight.



To make a measurement the observer turns his back to the sun and holds the instrument in a vertical plane. The rays pass through the slot of the sight on the upper arc and hit the slotted sight at A on the end of the rod. At the same time the observer looks through the sight on the lower circle and can looks at the horizon through the slot at A.

Sketch how the observer measures the altitude of the sun using Davis's quadrant showing clearly how the angle is measured. The altitude is the angle between the horizontal and the rays of the sun.



QUESTION 6
5 MARKS

Surfing The net

Pierre starts off : " I've just made a solid that has 6 faces."

Jean : " I know that one. It's a cube."

Pierre : " No. My solid has only 5 vertices and therefore 9 edges."

Jean : " Well the faces aren't squares."

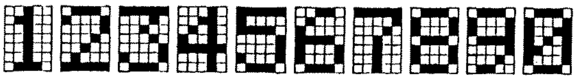
Pierre: " No, they're not. They're equilateral triangles."

Jean: " OK, then I know how to make it too."

On your answer sheet draw the net of the solid and a perspective sketch of the solid. What is its mathematical name?

QUESTION 7 10 MARKS — *Pixels*

My calculator shows the digits 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 on its screen by lighting up pixels. You can see it needs 19 pixels to show the digit 0 and 21 pixels to light up the digit 17.

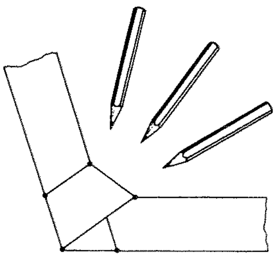


Find a whole number for which the number of pixels lit up is the same as the number itself. Is it the only one ? Justify your answer.

Note : a whole number never starts with 0.

QUESTION 8 5 MARKS — *Knotty problem*

Use a strip of paper 4 cm wide to make a knot like the one in the diagram. The knot should look like a pentagon.

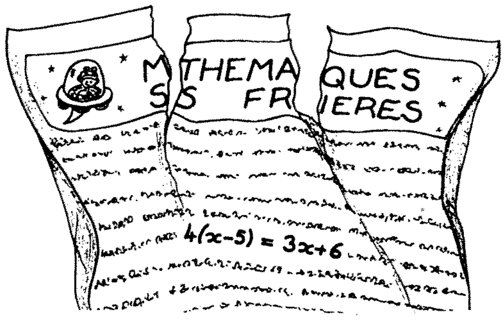


Divide the pentagon into sections, colouring in the sections which have the same number of layers of paper. Stick your knot on your answer sheet..

QUESTION 9 10 MARKS — *Back to the future*

In the year 20000 an antique-ologist finds a fossil that's in a poor condition. She is sure though that it's a sheet of paper. She manages to decipher the words at the top of the page as M.THEMA...QUES S..S FR...IERES, then there are a dozen lines of writing that cant be made out at all, and then an equation: $4(x-5) = 3x + 6$.

After she consults with colleagues who are expert in the pre-proto-historical period she realises that it is a question and solution from a famous maths competition.

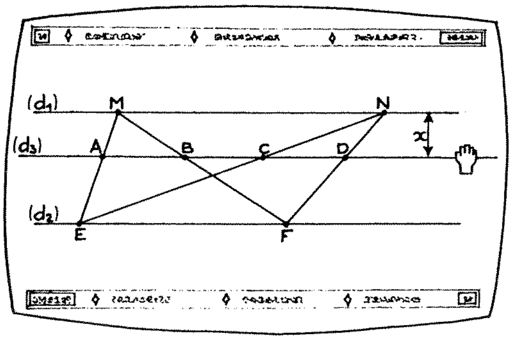


Write down on your answer sheet the text which will be found in 18000 years time. To do that you will need to make up a question which would use the equation as part of the solution.

QUESTION 10 15 MARKS — *Equal opportunity*

Gerard has drawn the figure below on his computer screen. The lines d_1 and d_2 are parallel and 10 cm apart. He draws a third line d_3 between d_1 and d_2 and parallel to them. He makes a conjecture that AB and CD are the same length no matter where d_3 is drawn.

Prove that Gerard is correct and that AB = CD no matter where the line d_3 is positioned.



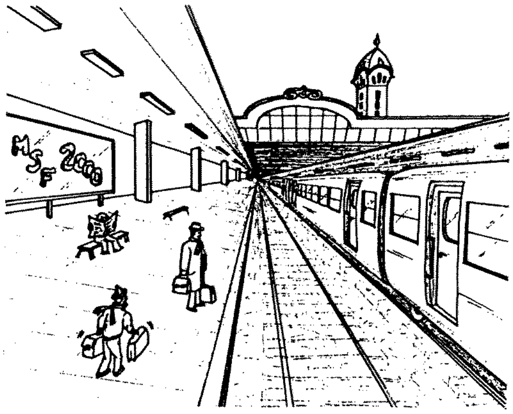
QUESTION 11 5 MARKS — *Good timing*

Senior classes only

Hansi is standing on the platform at the Gare d'Here and notices

- that a train takes 6 seconds to pass by him while going at a constant speed,
- that it takes 23 seconds from the moment when the locomotive of the train passes the far end of the platform and the moment when the last wagon passes the other end of the platform. The platform is 340 metres long.

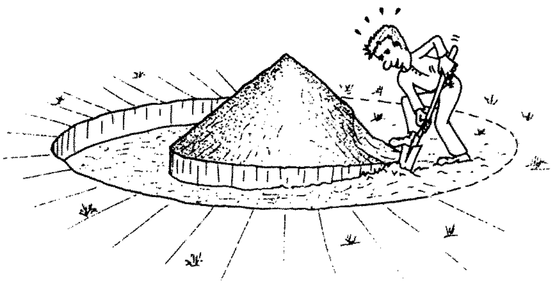
Calculate the speed of the train and the length of the train.



QUESTION 12
10 MARKS

Happy as a sandboy

Senior classes only



To build a sand castle Albert digs a trench with vertical sides which are concentric circles, one circle with radius double the other. With the sand he takes out he builds a cone whose base is the inner circle.

Suddenly Albert's father tells him to stop. He tells him, " Your pile of sand is exactly the shape of a cone. And if you stand upright in your trench the top of your pile of sand is exactly at the same level as the top of your head."

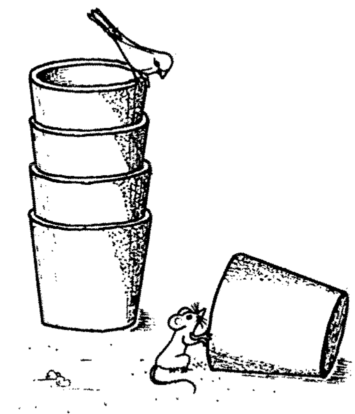
When Albert's father says this the trench is 15 cm deep.

What height is Albert ? Justify your answer.

QUESTION 13
15 MARKS

Gone to pot

Senior classes only

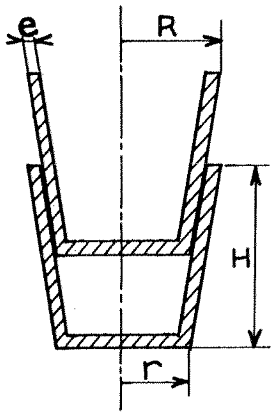


Here is a section through two identical pots, one placed inside the other.

During the winter I stack 10 pots inside each other in the same way.

What is the exact height of the pile ? Explain your answer.

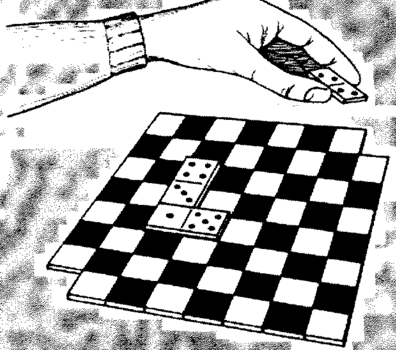
Given : R = 9cm, r = 5 cm, H = 18 cm, e = 0.5 cm.



MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL
MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

A verseny szponzorai:

Oktatási Minisztérium
Safari-Park Gänserndorf
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
Merkel Economos
Graphic-A Studio
CASIO
SKK Trade Kft.
Informatika-Számítástechnika Tanárok Egyesülete - ISZE
Mozaik Kiadó Szeged
Válogatás Reader's Digest



1. FELADAT:

SAKK-DOMINÓ

E feladat megoldását angolul, németül, franciául olaszul vagy spanyolul adjátok meg, legalább 30 szóban!

On enlève deux cases noires situées aux coins opposés d'un échiquier, comme sur la figure ci-dessus. On pose 30 dominos sur les cases restantes. Chaque domino recouvre exactement deux cases. Il reste alors deux cases non recouvertes. Ces cases sont-elles de la même couleur? Justifier la réponse.

Si tolgono due caselle nere situate negli angoli opposti di una scacchiera, come nella figura qui sotto. Si pongono 30 domino sulle caselle restanti. Ogni domino copre esattemente due caselle. Rimangono due caselle scoperte.Queste caselle sono dello stesso colore? Giustifica la riposta.

En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes: cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir. ¿Son del mismo color estas casillas? Justifica tu respuesta.

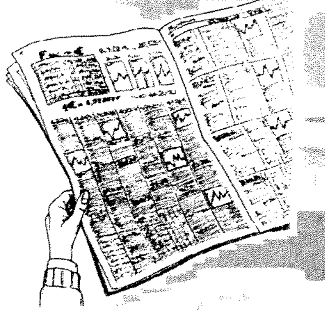
Bei einem Schachbrett entfernt man zwei schwarze Felder, die in gegenüberliegenden Ecken liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auf die restlichen Felder verteilt man 30 Dominosteine, wobei jeder Stein genau zwei Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei Felder frei. Haben diese Felder die gleiche Farbe? Begründe deine Antwort.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram opposite. 30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered. Say whether or not these squares are same solour? Justify your answer.

A VERSENYT MAGYARORSZÁGON A MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL ALAPÍTVÁNY RENDEZI.
AZ ALAPÍTVÁNY ADÓSZÁMA: 18226223-1-43. A SZEMÉLYI JÖVEDELEMADÓ 1 %-ÁT IDE KÉRJÜK UTALNI.
SZÁMLASZÁMA: OTP 11707024-20362078 TÁMOGATÁST ERRE A SZÁMLASZÁMRA LEHET UTALNI.

2. FELADAT:
EURO-MORZSÁK

Az Euro árfolyama francia frankban kifejezve:
1 Euro=6,55957 frank.
Ha át szeretnénk váltani egy több tételből álló, frankban megadott összeget Euro-ra, kétféleképpen is eljárhatunk:
- A végösszeget váltjuk át Euro-ra egy század pontossággal.
- Az egyes tételeket átváltjuk Euro-ra egy század pontossággal, s az átváltott értékeket adjuk össze.



Mutassátok meg egy konkrét példán keresztül, hogy e két eljárás különböző eredményre vezethet.

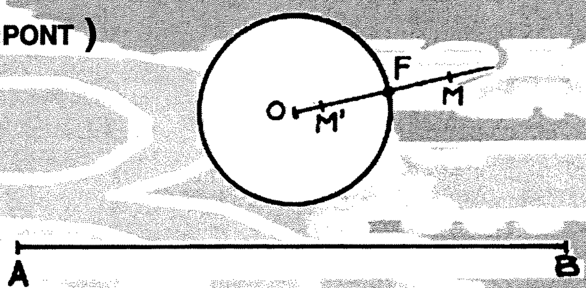
(5 PONT)

3. FELADAT:
GÖRBE TÜKÖR

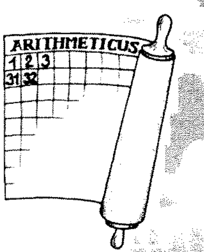
Vegyünk fel egy O középpontú kört. Az O ponttól különböző M pontot a körre az alábbi módon tükrözzü
- Húzzuk meg az OM félegyenest. A félegyenes és kör metszéspontja legyen F.
- Középpontosan tükrözzük M-et F-re. Az így kapott M' pontot nevezzük az M körre vonatkozó tükörképének.

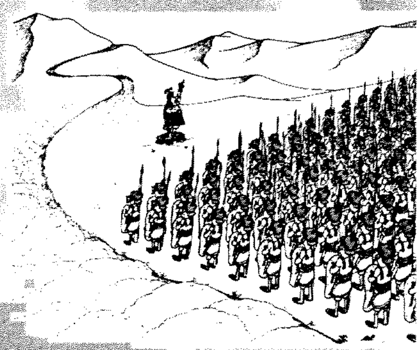
Szerkesszétek meg az AB szakasz legalább 20 pontjának a körre vonatkozó tükörképét, és ezek alapján rajzoljátok meg az AB szakasz képét a következő adatokkal:
OA=OB=11,5 cm ; AB=22 cm ; a kör sugara=2,5 cm .

(10 PONT)



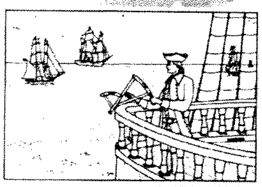
4. FELADAT:
ÖTÖDIK HADOSZLOP





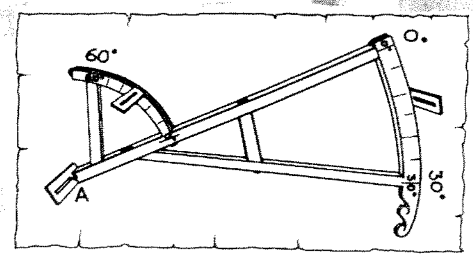
A római hadseregben nem tréfa a rend! Minden légiósnak megvan a maga sorszáma, amelyet mindig megőriz, s amely meghatározza helyét a hadrendben. Arithmetikusz tábornok csatarendbe állította 990 légiósát. Katonái téglalap alakban sorakoztak fel, amelyben 33 sor és 30 oszlop volt. Egymás után töltötték ki a sorokat, amint az ábrán is látszik. Hókusz és Pókusz mindketten az 5. oszlopba kerültek, s egyikük sem az első sorban állt. Arithmetikusz tábornokot váratlanul Rómába rendelték, s ezért Kalkulusz tábornok vette át a csapat parancsnokságát. Első dolga az volt, hogy átformálta az alakzatot: a téglalapnak nála 30 sora és 33 oszlopa volt. Hókusz és Pókusz ekkor is az 5. oszlopban kerültek.
MI volt Hókusz és Pókusz sorszáma? Indokoljátok válaszotokat!

(5 PONT)



5. FELADAT:
DAVIS - SZÖGMÉRŐ

Az 1590-es években John Davis angol tengerész kifejlesztett egy szögmérőt, amelyet róla neveztek el. Ez az eszköz a Nap magasságának mérését tette lehetővé fokokban, s olyan fejlődést jelentett a korábbiakhoz képest, hogy egészen a 18. század közepéig használták a hajósok. Egy lécehez két körívet erősítettek. A fölső, kisebb körívet 0°tól 60°-ig, az alsó, nagyobb körívet 0°tól 30°-ig osztották be. A két körív közös középpontja, a léc A-val jelölt végpontja. Ide egy réssel ellátott lemezt (lamellát) rögzítettek. A két körívre egy-egy, az íven mozgatható lamellát helyeztek el. A szerkezetet a következő módon használták: a mérést végző tengerész háttal állt a Napnak, s az eszközt függőleges síkban tartotta. A mozgatható lamellákat úgy állította be, hogy az alsó ív lamelláján és az A-ban elhelyezett lamellán keresztül a horizontot lássa, miközben a felső ív lamelláján áthaladó napsugár megvilágítja az A lamellát.



Rajzoljátok le, hogyan használták a Davis-szögmérőt a Nap fokokban számolt magasságának mérésére, s magyarázzátok a magasság kiszámításának módját.

(10 PONT)

6. FELADAT:
TESTES OLDAL

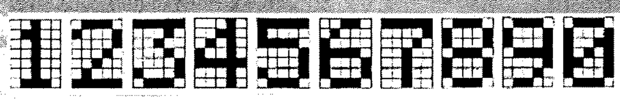
Pierre: - " Készítettem egy testet, amelynek 6 oldallapja van."
Jean: - " Bizonyára kockát. 6 oldala és 8 csúcsa van."
Pierre: - " Á nem. Az én testemnek 9 éle, de csak 5 csúcsa van."
Jean: - " Akkor nem is négyzetek a lapjai?"
Pierre: - " Persze hogy nem. A lapok szabályos háromszögek."
Jean: - " Akkor tudom milyen testet készítettél. Olyat én is tudok csinálni."
Készítsétek el a válaszlapra a test hálózatát, és perspektivikus képét!

(5 PONT)

7. FELADAT:
PONTOS SZÁMOK

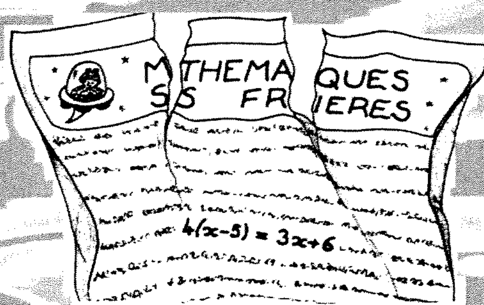
A számológépem az 1 234 567 890 számot a kijelzőn lévő pontok kigyulladásával írja ki. Például 19 pont gyullad ki a 0 és 21 pont gyullad ki a 17-es szám kiírásakor. Egész szám sosem kezdődik 0-val.
Keressetek olyan számot, amely kijelzésekor a kigyulladó pontok száma egyenlő a kiírt számmal!
Csak egy ilyen szám van?
Válaszotokat indokoljátok!

(10 PONT)



9. FELADAT:
VISSZA A JÖVŐBE

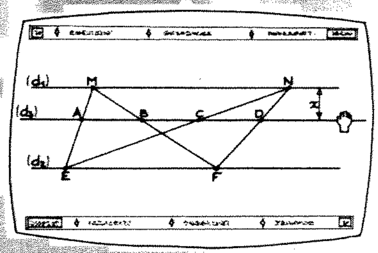
Az időszámításunk szerinti 20 000. évben egy régész talál egy nagyon rossz állapotban lévő papírfoszlányt. A papír tetején sikerül kiolvasnia a következő betűket: "M.THEMA...QUES S...S FR....IERES" , alatta mintegy tíz sornyi olvashatatlan szöveg következik, majd egy egyenlet olvasható: $4(x-5)=3x+6$.
Egy poszt-prehistorikus időket jól ismerő tudóssal konzultálva régészünk rájön, hogy a talált papíron egy korabeli híres matematika verseny feladata, s a feladat megoldása található.
Mi lehetett a feladat? Oldjátok is meg!



(5 PONT)

10. FELADAT:
SZABADSÁG! EGYENLŐSÉG!

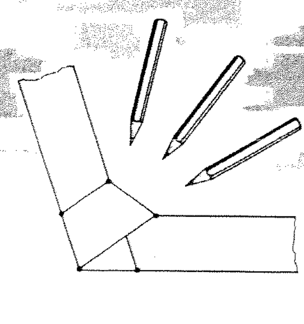
Gérard a következő ábrát rajzolta számítógépének képernyőjére:



A (d1) és (d2) egyenesek párhuzamosak, s 10 cm távolságra vannak egymástól. A (d3) egyenest az előző két egyenes közé, azokkal párhuzamosan rajzolta be.
Megállapította, hogy a (d3) egyenes helyzetétől függetlenül AB = CD.
Bizonyítsátok, hogy Gérard állítása helyes!

(15 PONT)

8. FELADAT:
SZÍNES CSOMÓ

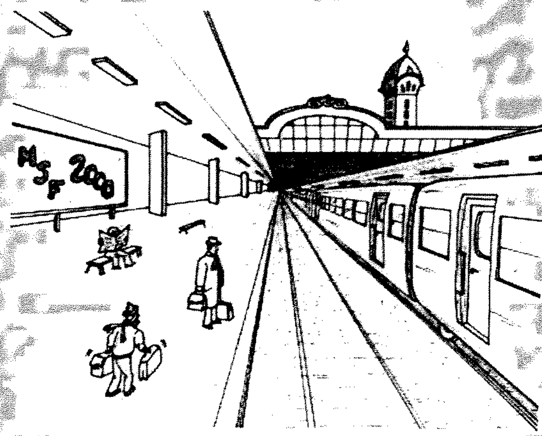


Készítettünk egy 4 cm széles papírcsíkból egy csomót az ábrán látható módon. Ez a csomó kijelöl egy ötszöget.
Rajzoljátok le mérethűen, és színezzétek azonos színnel minden részét, amelyen az eredeti papírcsík ugyanazon oldala látszik.

(5 PONT)

11. FELADAT:

ELZÁSZI PÁLYAUDVAR



Hansi áll a peronon és bámészkodik. Egy vonat éppen átrobog az állomáson. Eközben Hansi a következõket figyeli meg:

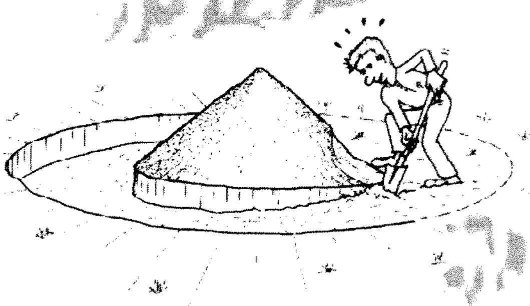
- A vonat 6 másodperc alatt halad el elõtte egyenletes sebességgel.
- 23 másodperc telik el aközött, hogy eléri a vonat mozdonya a peront illetve az utolsó kocsija elhagyja a 340 méter hosszú peron másik végét.
- A vonat rövidebb a peronnál.

Számítsátok ki a vonat sebességét!

(**10** PONT)

12. FELADAT:

HOMOKKUPAC



Albert a házuk kertjében egy földkúpot épít az alábbi módon. Körgyűrű alapú árkot ás, amelynek két határoló köre közül az egyik sugara éppen kétszerese a másik sugarának. Az árok oldalfala függõleges. Az árokból nyert földet középen forgáskúp formában halmozza fel, amelynek alapköre egybeesik az árok belsõ körével. Egyszer csak Albert édesapja kiszól a házból:
" A földkupac pontosan forgáskúp alakú. Ráadásul ha az árok alján állsz, a kúp csúcsa éppen egy magasságban van a fejed búbjával!"
Ekkor éppen 15 cm mély volt az árok.

Milyen magas Albert? Válaszotokat indokoljátok!

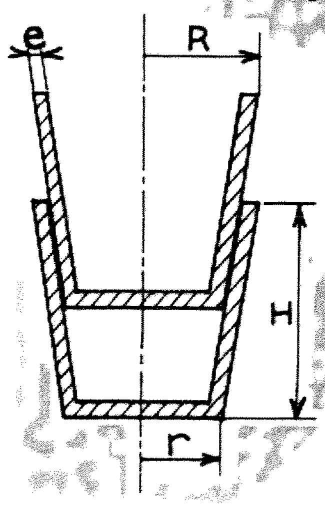
A kúp térfogata: $V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot \pi \cdot m$, *ahol r az alapkör sugara, m a kúp magassága.*

(**10** PONT)

13. FELADAT:

CSERÉP-KÉRDÉS

Íme két, egymásba rakott cserép képe:



Télen 10 ugyanilyen méretű üres cserepet raktam egymásba.
Mekkora lett az így összerakott cserepek magassága? Indokoljátok válaszotokat!

(**15** PONT)