

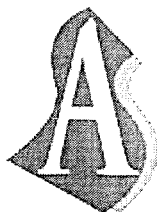
LES ETOILES DE

1997 - 2000

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

LES ETOILES DE

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES



ACADEMIE
DE STRASBOURG

présentées par
l'Inspection Pédagogique Régionale,
les Equipes de Professeurs,
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Strasbourg.

FASCICULE 5
EDITION FRANCAISE

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Sujets

de décembre 1997 à mars 2000

**FASCICULE 5
EDITION FRANCAISE**

Mathématiques Sans Frontières

Collège Fustel de Coulanges
4, rue Jacques Peirotes
F- 67000 Strasbourg

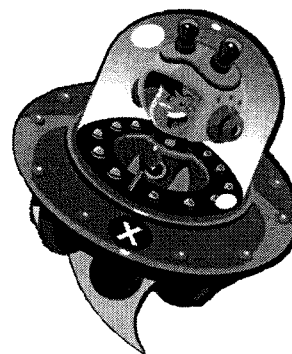
e-mail : math_sans_frontieres@email.com

Site internet : <http://www.ac-strasbourg.fr>

Dans les menus, choisir la rubrique **Pédagogie, second degré, mathématiques**.

Présentation de la compétition :	page 2
Introduction par M. le Recteur de l'Académie de Strasbourg :	page 3
Année scolaire 1997/1998 - 9^{ème} édition :	page 5
Epreuve d'entraînement de décembre 1997 :	page 6
Corrigé :	page 9
Epreuve de mars 1998 :	page 11
Corrigé :	page 15
Année scolaire 1998/1999 - 10^{ème} édition :	page 19
Epreuve d'entraînement de décembre 1998 :	page 20
Corrigé :	page 23
Epreuve de mars 1999 :	page 26
Corrigé :	page 30
Année scolaire 1999/2000 - 11^{ème} édition :	page 33
Epreuve d'entraînement de décembre 1999 :	page 34
Corrigé :	page 38
Epreuve de mars 2000 :	page 40
Corrigé :	page 44

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
...une compétition interclasses !



Un concours interclasses

- ◆ Des classes entières de troisième et de seconde ou de niveau équivalent dans des pays étrangers concourent entre elles.
- ◆ Une palette d'exercices variés leur est proposée (dix en troisième et treize en seconde).
- ◆ La solution de l'un des exercices doit être rédigée en langue étrangère.
- ◆ La classe s'organise pour résoudre les exercices en une heure et demie et rend une seule feuille-réponse pour chacun d'eux.

L'équipe d'organisation

- ◆ Elle est composée de professeurs, de chefs d'établissement et d'inspecteurs.
- ◆ Elle se réserve le droit de modifier le règlement de la compétition en cas de nécessité.
- ◆ Elle a créé une association culturelle et scientifique du nom de **Mathématiques sans frontières**.

Pour quoi faire ?

- ◆ Ouvrir des frontières :
 - entre la France et les pays voisins,
 - entre les établissements scolaires, les entreprises et la cité,
 - entre les mathématiques et les langues vivantes,
 - entre les collèges et les lycées,
 - entre les élèves d'une classe.
- ◆ Favoriser :
 - l'intérêt pour les mathématiques,
 - le travail en équipe,
 - la participation de tous,
 - l'initiative des élèves,
 - la pratique d'une langue étrangère.

Des exercices variés

- ◆ Ils sont de genres divers et de difficulté variée.
- ◆ Ils cherchent à favoriser le travail en équipe et s'adressent à tous les élèves.
- ◆ La rédaction d'un des exercices doit se faire en anglais, en allemand, en espagnol ou en italien.
- ◆ Chaque élève peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.



Participation en chiffres

année	nombre de classes	nombre d'élèves
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 900
1991/92	572	14 700
1992/93	1 370	34 600
1993/94	1 802	45 300
1994/95	2 440	67 000
1995/96	2 725	75 750
1996/97	2 857	73 712
1997/98	3 053	80 598
1998/99	3 278	86 856
1999/00	3 512	92 151

- ◆ 14 langues, 25 pays, 30 secteurs d'organisation.

Comment s'inscrire ?

- ◆ Seules les classes entières de troisième, de seconde ou de niveau équivalent peuvent s'inscrire.
- ◆ La compétition s'adresse aux établissements publics ou privés.
- ◆ L'inscription se fait après accord entre la classe entière, le professeur de mathématiques et le chef d'établissement.

Calendrier annuel

- ◆ Septembre - octobre : inscription des classes,
- ◆ Décembre - janvier : épreuve d'entraînement,
- ◆ Mars : épreuve officielle,
- ◆ Mai : remises des prix.

De nombreux lots

- ◆ Sur chaque secteur concerné, deux palmarès sont établis : l'un pour les classes de troisième, l'autre pour les classes de seconde ou niveaux équivalents.
- ◆ Chaque élève d'une classe primée bénéficie d'une part du lot (par exemple : cadeau, voyage, spectacle, etc.).
- ◆ Les remises des prix par secteur se font en présence des classes gagnantes, de leurs professeurs, des personnalités locales, des parrains de la compétition et de la presse.
 - ◆ Des lots de participation sont attribués par tirage au sort.

« Mathématiques sans Frontières »

**Les nouvelles Etoiles
1997-2000**

Au cœur de « l'Année Mondiale des Mathématiques », la compétition internationale « Mathématiques sans Frontières », créée dans l'Académie de Strasbourg en 1989, ne cesse de s'étendre, favorisant esprit d'équipe, démarche scientifique et ouverture aux langues vivantes dans les établissements scolaires.

80 000 élèves de 15 à 17 ans ont découvert ces mathématiques ludiques et attirantes grâce au travail de 30 équipes d'organisation. Les exercices proposés sont résolus en fonction des goûts et compétences de chacun. La présentation d'exercices dans d'autres langues que le français donne à la compétition un attrait supplémentaire.

Cette manifestation est d'autant plus importante que l'avantage d'une orientation scientifique en terme d'avenir professionnel n'est pas assez perçu par les élèves et n'attire pas assez les jeunes filles. Pourtant, les besoins en scientifiques sont aujourd'hui importants.

Au même titre que « La Fête de la Science » repose sur l'expérimentation concrète, « Mathématiques sans Frontières » met en avant le développement des capacités d'analyse et de synthèse. Cette attention portée dans tous les domaines à la valorisation de multiples formes d'intelligence doit nous permettre de diversifier les accès à la réussite, toujours dans l'objectif d'offrir une meilleure égalité des chances à nos élèves.

Les professeurs, les inspecteurs et les chefs d'établissement des équipes d'organisation de « Mathématiques sans Frontières » présentent ici les annales des compétitions de décembre 1997 à mars 2000. Elles sont donc le résultat d'un travail international de conception, mené dans un climat d'écoute et d'humour sans frontières.

Que ces étoiles des mathématiques brillent dans les collèges et lycées de nombreux pays pour la réussite et le plaisir de tous...

Claude LAMBERT
Recteur de l'Académie de Strasbourg

N.B : cette version française de « Mathématiques sans Frontières » 1997-2000 est couplée avec une version internationale éditée également par l'I.R.E.M. de Strasbourg.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1997-1998

9^{ème} édition

Mathématiques sans frontières

Les exercices n° 2, 4, 6, 8, 9 et 12 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.

Exercice 1
10 Points

Abracadabra !

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

David, der Zauberer betritt die Bühne und zeigt dem Publikum drei Kisten. Auf eine dieser Kisten sind zwei Kaninchen gemalt, auf eine andere zwei Tauben, auf die dritte eine Taube und ein Kaninchen.

Mit verbundenen Augen bittet David einen Zuschauer, in eine Kiste zwei Tauben, in eine andere zwei Kaninchen und in die letzte ein Kaninchen und eine Taube zu setzen. Dabei soll das Bild auf der Kiste in keinem Fall mit dem Inhalt übereinstimmen.

Nun behauptet David, daß es ihm genüge, nur einer der drei Kisten ein einziges Tier zu entnehmen, um den Inhalt aller Kisten herauszufinden.

Erkläre, was sich der Zauberer dazu überlegen muß.

David the magician is going on stage and is showing the audience three big boxes.

There are two rabbits drawn on one of the three boxes, two doves on another one and a rabbit and a dove on the last one.

Blindfolded David asks one of the member of the audience to put two rabbits into one box, two doves into another box and finally a rabbit and a dove into the last box so that the content of each box does not correspond to its drawing.

Then David announces that taking one single animal out of only one of the three boxes is enough for him to find out the content of each box.

Explain his reasoning.

David el mago sale a escena y presenta al público tres cajones gruesos. Sobre el primero ha dibujado dos conejitos, sobre el segundo dos palomas, y sobre el tercero un conejito y una paloma.

Vendados los ojos, David le pide a un espectador que ponga dos conejitos en un cajón, dos palomas en otro y por fin un conejito y una paloma en el último cajón, de tal manera que lo que contiene cada cajón no corresponda con el dibujo.

Entonces David declara que no le hace falta sacar más de un animal de un solo cajón para saber lo que contiene cada cajón.

Explicad su razonamiento.

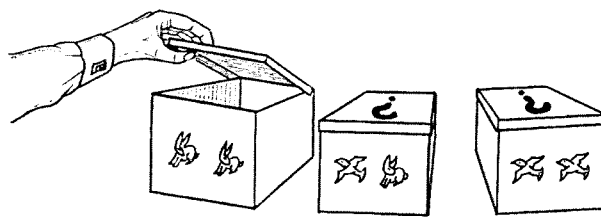
Il prestigiatore Davide entra in scena e presenta al pubblico tre scatoloni.

Su uno di questi sono raffigurati due conigli, su un altro sono disegnate due colombe e sul terzo un coniglio e una colomba.

Davide, con gli occhi bendati, chiede ad uno spettatore di introdurre in uno scatolone due conigli, in un altro due colombe e, infine, nell'ultimo scatolone un coniglio e una colomba in modo che il contenuto di ogni scatolone non corrisponda alla figura esterna.

Davide dichiara, quindi, che gli basta levare un animale da uno solo dei tre scatoloni per scoprire il contenuto di ogni scatolone.

Si spieghi il ragionamento del prestigiatore.



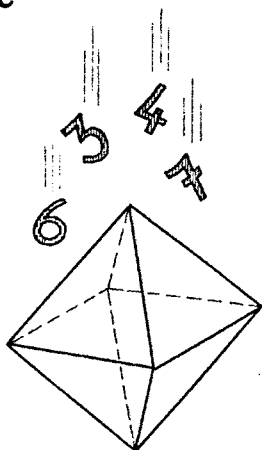
Exercice 2 Platonique

3 Points

L'octaèdre régulier est un des cinq solides de Platon.

Fabriquer un octaèdre régulier.

Numéroter ses faces de 1 à 8 de sorte que la somme des numéros des quatre faces autour de chaque sommet soit égale à 18.



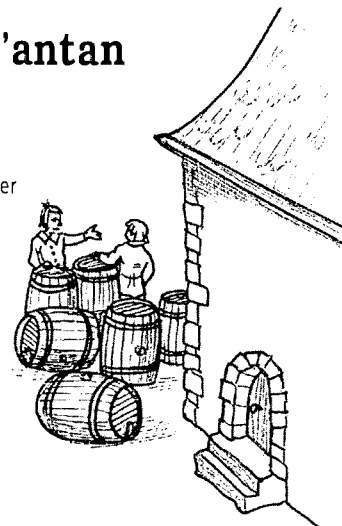
Exercice 4 Algèbre d'antan

3 Points

Nicolas Chuquet a écrit en 1484 le premier livre d'algèbre rédigé en français.

Dans un problème, il demande de partager entre trois personnes vingt et un tonneaux de vin dont sept pleins, sept vides et sept à moitié pleins, de telle sorte que chaque personne ait le même nombre de tonneaux et la même quantité de vin sans ouvrir un seul tonneau.

Donner un partage possible.

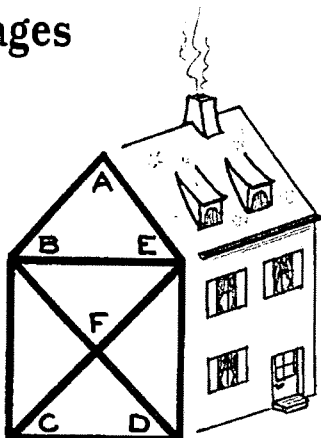


Exercice 3 Colombages

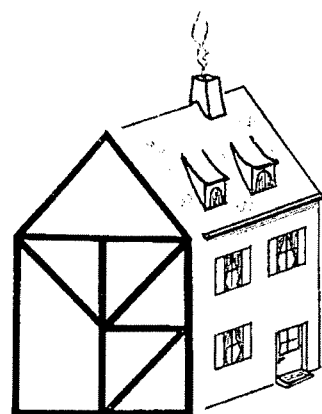
10 Points

Anne essaie de tracer les poutres du pignon de sa maisonnette sans lever le crayon et sans repasser sur un segment préalablement tracé.

Elle y réussit assez vite et, après avoir compté le nombre de segments issus de chaque point nommé, elle comprend qu'il n'y a que deux points possibles pour le début ou la fin du tracé.



En respectant la règle du jeu d'Anne, montrer qu'il est possible de tracer les poutres du pignon de la maisonnette de droite. Donner les étapes du tracé.



Exercice 5
10 Points

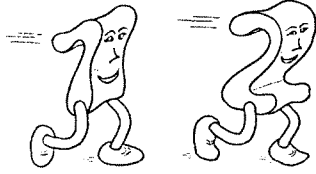
Le premier à 20

Thimothée et Hélène jouent à "la course à 20".

Thimothée commence en écrivant au choix 1 ou 2. Hélène ajoute 1 ou 2 au nombre de Thimothée et écrit la somme obtenue. Puis Thimothée ajoute 1 ou 2 au dernier nombre écrit par Hélène et ainsi de suite à tour de rôle. Le premier qui arrive à 20 a gagné !

Thimothée affirme qu'il a une stratégie qui permet au premier joueur de gagner à coup sûr.

Expliquer la stratégie de Thimothée.

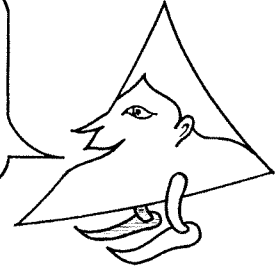


Exercice 6
5 Points

Dessine-moi un triangle

Un de mes angles mesure 50° , un autre 30° et mon périmètre est égal à 15 cm.

Dessinez-moi de la façon la plus précise possible !



Exercice 7
10 Points

Parapli

Lorsque le Professeur eut terminé son cours, un de ses disciples lui demanda :

"Maître, quelle est la courbe décrite par une pierre que je lance devant moi ?"

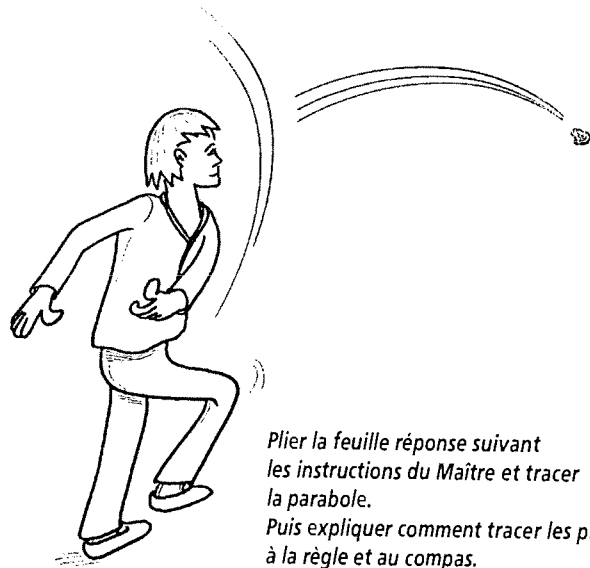
Le Maître lui répondit : "Bonne question ! C'est une parabole et voici un procédé simple pour l'obtenir :

place un point F sur le grand axe de symétrie d'une feuille, à 4 cm du bord supérieur AB. Place un point M sur AB, superpose M et F, marque le pli et déplie, puis recommence en changeant la position de M sur AB.

Après avoir obtenu un certain nombre de plis, tu découvriras que les traces de ces plis enveloppent une parabole."

Le disciple était comblé, mais le Maître ajouta :

"Le bon disciple ne se contente pas de cela et cherche une construction géométrique à la règle et au compas des traces de chaque pli !"



Plier la feuille réponse suivant les instructions du Maître et tracer la parabole. Puis expliquer comment tracer les plis à la règle et au compas.

Exercice 8
5 Points

Scandaleux !

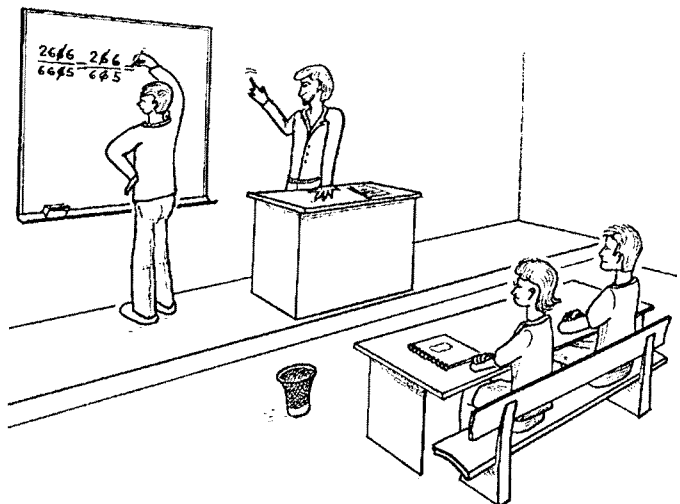
Thimothée est au tableau pour simplifier la fraction $\frac{2666}{6665}$.

"Facile, dit-il, j'enlève un 6 au numérateur et un 6 au dénominateur, j'écris $\frac{266}{665}$ puis je recommence. Je trouve $\frac{26}{65}$ et enfin $\frac{2}{5}$ qui est irréductible."

A la grande surprise de ses camarades, Thimothée ne déclenche pas les foudres de son professeur!

"Toutes les fractions que tu as écrites sont égales, mais quelle drôle de méthode!", dit le professeur.

Trouver une fraction de la forme $\frac{abbb}{bbbc}$, égale à $\frac{1}{2}$ qui se simplifie à la mode de Thimothée.

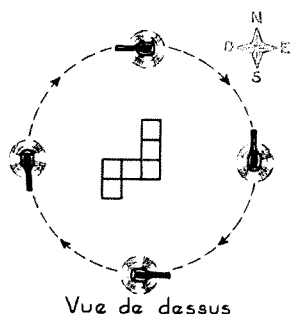


Exercice 9
10 Points

Héli 3D

Un hélicoptère tourne au-dessus d'un immeuble pour en faire des photos aériennes.

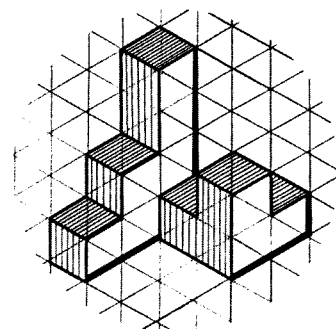
L'édifice est constitué de onze cubes.



Vue de dessus

On peut en voir à droite une vue du Nord-Ouest.

Dessiner suivant le même mode de représentation la vue du Sud-Est



Exercice - 10
15 Points

Exercice de rattrapage

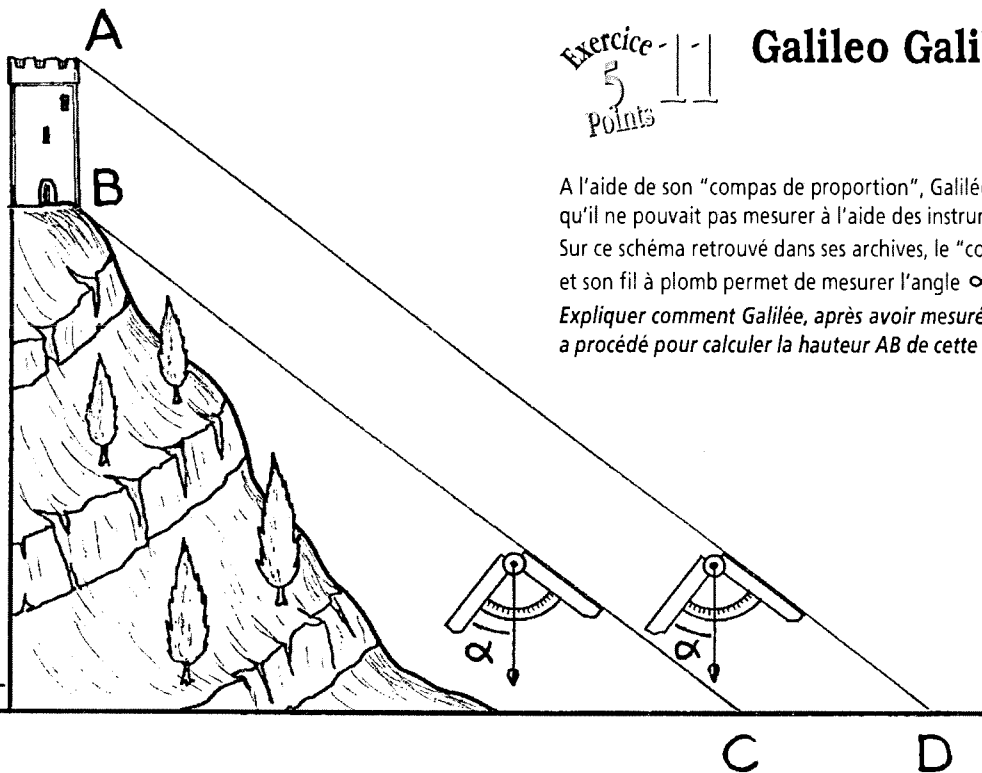
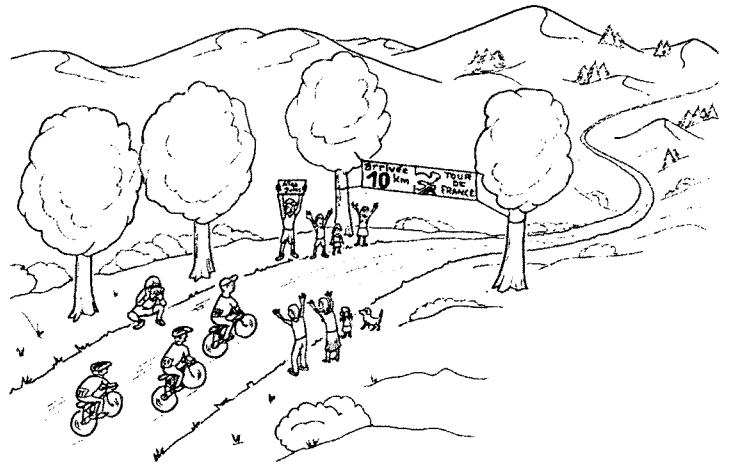
L'arrivée d'une étape du Tour de France cycliste est au sommet du Ballon d'Alsace.

Jules franchit la banderole "Arrivée à 10 km" quatre minutes avant le coureur Richard.

Trente minutes plus tard, Jules franchit la ligne d'arrivée six minutes après Richard.

On suppose qu'entre ces deux instants les vitesses de Jules et Richard sont constantes.

A quelle distance de l'arrivée Richard a-t-il dépassé Jules ?



Exercice - 11
5 Points

Galileo Galilei

A l'aide de son "compas de proportion", Galilée calculait des longueurs qu'il ne pouvait pas mesurer à l'aide des instruments classiques.

Sur ce schéma retrouvé dans ses archives, le "compas" forme un angle droit et son fil à plomb permet de mesurer l'angle α .

Expliquer comment Galilée, après avoir mesuré la distance CD, a procédé pour calculer la hauteur AB de cette tour.

SPÉCIAL SECONDE

Exercice - 12
10 Points

Plein format

Gaëtan expose des photos de la remise des prix des Mathématiques sans Frontières sur un panneau carré de 75 cm de côté.

Il dispose de trente photos à placer horizontalement et de trente photos à placer verticalement, toutes de format 9 x 13 cm et veut en exposer le maximum.

Dessiner une disposition possible à l'échelle 1/5^e sur la feuille-réponse et indiquer le nombre de photos exposées.



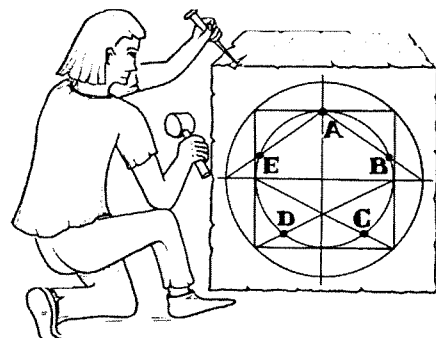
Exercice - 13
15 Points

Erreur de taille ?

Dans le but d'obtenir un pentagone régulier, les bâtisseurs du Moyen-Age utilisaient la construction suivante :

On trace un carré et ses médianes, puis le cercle inscrit dans le carré et le cercle circonscrit à ce carré, enfin les points A, B, C, D, E sur le cercle inscrit comme l'indique la figure.

Les points A, B, C, D, E sont-ils régulièrement espacés sur ce cercle ? Justifiez votre réponse.





MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Indications de solutions pour l'épreuve de décembre 1997

Exercice n°1 10 points *Abacadabra !*

En notant C pour colombe et L pour lapin, on a :

Dessin de la boîte	LL	CC	CL
Contenu de la boîte	CC ou CL	LC ou LL	CC ou LL

Il suffit que David sorte un animal de la boîte comportant le dessin CL.

- S'il sort un lapin, alors cette boîte en contient deux.

- La boîte marquée CC ne peut contenir deux lapins, donc elle contient un lapin et une colombe.
- La boîte marquée LL contient donc deux colombes.

Dessin	CL	CC	LL
Contenu	LL	LC	CC

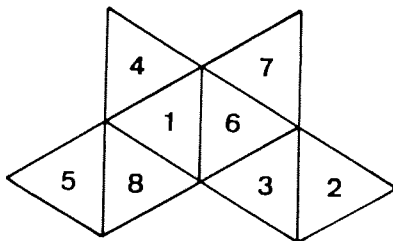
- S'il sort une colombe, alors cette boîte en contient deux.

- La boîte marquée LL contient une colombe et un lapin.
- La boîte marquée CC contient donc deux lapins.

Dessin	CL	LL	CC
Contenu	CC	CL	LL

Exercice n°2 5 points *Platonique*

Il y a plusieurs solutions. Voici le patron d'une de ces solutions :

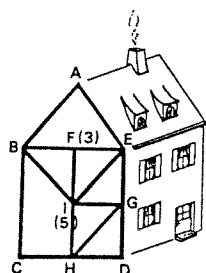


Exercice n°3 10 points *Colombages*

Appelons « degré » d'un point le nombre de segments à tracer dont ce point est une extrémité.

S'il y a des sommets de degré impair, ce sont ceux de départ et d'arrivée, tous les autres sommets étant de degré pair.

Seuls F et I, sur la figure ci-contre sont de degré impair.



On peut, par exemple, tracer le circuit FBAEGDHGICBIEFI.

Exercice n°4 5 points *Algèbre d'antan*

Appelons A, B, C les trois personnes. Outre les permutations possibles de ces trois personnes, il y a deux solutions :

		Tonneaux pleins	Tonneaux à moitié pleins	Tonneaux vides
1 ^{ère} solution	A	3	1	3
	B	3	1	3
	C	1	5	1
2 ^{ème} solution	A	3	1	3
	B	2	3	2
	C	2	3	2

Exercice n°5 10 points *Le premier à 20*

S'il arrive à 17, Thimothée est sûr de gagner, quoi que fasse Ursule :

- si Ursule ajoute 1, il rajoutera 2
- si Ursule ajoute 2, il rajoutera 1.

De même, pour arriver à 17, Thimothée repère les positions gagnantes successives :

14 - 11 - 8 - 5 - 2.

S'il commence à jouer, Thimothée est sûr de gagner la partie s'il écrit 2.

Exercice n°6 5 points

Dessine-moi un triangle

Aucune justification n'était demandée.

On trace un triangle ABC dont les angles mesurent 30° , 50° et 100° . Avec le compas, on place sur (AB), à l'extérieur de [AB], les points I et J tels que $AI = AC$ et $BJ = BC$. Ainsi le périmètre du triangle ABC est égal à IJ.

Soit O le milieu de [AB] et soient I' et J' tels que $OI' = 7,5$ cm et $OJ' = 7,5$ cm, donc $I'J' = 15$ cm (voir figure).

L'homothétie h de centre O qui transforme I en I' (de rapport 15/IJ)

- transforme J en J'

- transforme C en C', A en A' et B en B' tels que :

C' appartient à (OC) et à la parallèle à (IC) issue de I'
A' appartient à (OA) et à la parallèle à (AC) issue de C'
B' appartient à (OB) et à la parallèle à (BC) issue de C'.

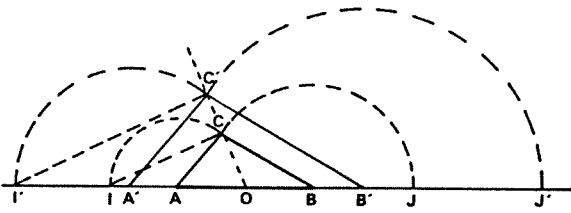
Le triangle A'B'C' a pour périmètre $I'J' = 15$ cm, et il a les mêmes angles que ABC.

Remarque : les mesures a, b, c des côtés du triangle ABC vérifient :

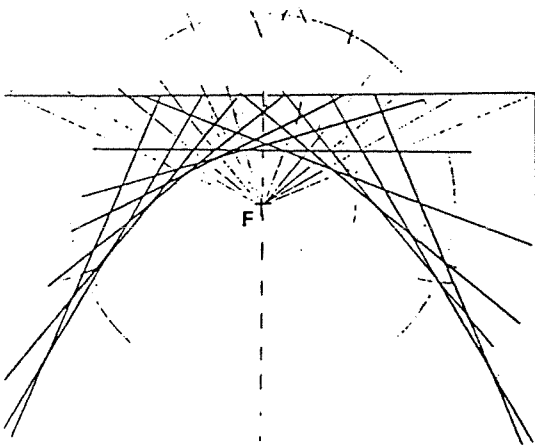
$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 100^\circ} = \frac{a+b+c}{\sin 30^\circ + \sin 50^\circ + \sin 100^\circ}$$

où $a+b+c = 15$ cm d'où :

$a \approx 3,332$ cm, $b \approx 5,105$ cm et $c \approx 6,563$ cm.



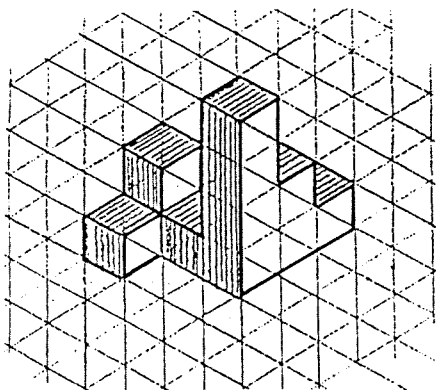
Exercice n°7 10 points Parapli



Exercice n°8 5 points Scandaleux !

On a : $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ et : $\frac{4999}{9998} = \frac{499}{998} = \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$.

Exercice n°9 10 points Heli 3D



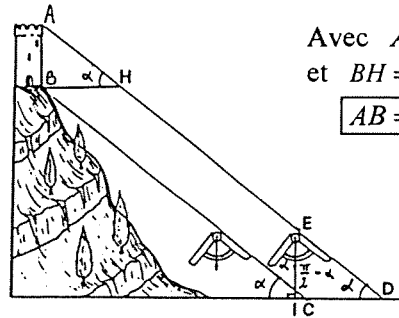
Exercice n°10 15 points

Exercice de rattrapage

Pour les 10 derniers kilomètres, Jules met 30 min, et Richard met $30 - 4 - 6 = 20$ min ; donc Richard gagne 10 min sur Jules en 10 km, c'est-à-dire une minute au kilomètre.

Richard rattrape donc ses 4 minutes de retard sur Jules au bout de 4 km, à 4 km de la banderole : il dépasse Jules à 6 km de l'arrivée.

Exercice n°11 5 points Galileo Galilei



Avec $AB = BH \tan \alpha$
et $BH = CD$, on a :

$$AB = CD \tan \alpha.$$

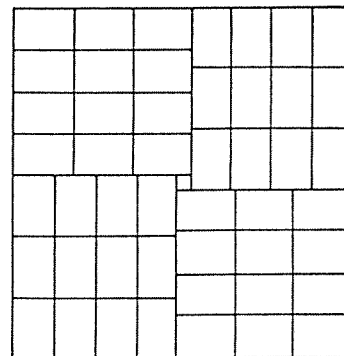
Exercice n°12 10 points Plein format

Surface d'une photo : $9 \times 13 = 117$ cm².

Surface du panneau : $75 \times 75 = 5625$ cm².

Or $5625 : 117 \approx 48,07$, donc il ne peut pas y avoir plus de 48 photos.

En remarquant que $75 = 3 \times 13 + 4 \times 9$, on peut placer ces 48 photos selon la disposition :



Exercice n°13 15 points Erreur de taille ?

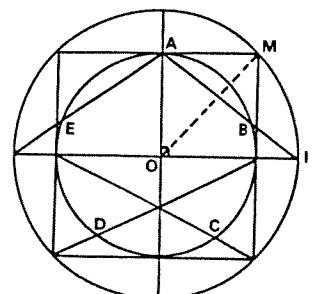
Dans le triangle rectangle OAT, on a : $\tan \widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} = \sqrt{2}$, car $OT = OM$ et

$OM^2 = OA^2 + AM^2 = 2OA^2$ donc $OT = OA \sqrt{2}$. On en déduit $\widehat{OAT} \approx 54,73^\circ$.

Dans le triangle isocèle OAB, on en déduit

$\widehat{AOB} \approx 70,54^\circ$, alors que, dans un pentagone régulier, l'angle \widehat{AOB} devrait mesurer $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Le pentagone ABCDE n'est donc pas régulier.



Mathématiques sans frontières

**Epreuve du
12 mars 1998**



- Les exercices n° 2, 4, 5, 8 et 9 ne nécessitent aucune justification.
- Le soin sera pris en compte
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice

**exercice
n° 1
10 points**

Pair et gagne !

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Margot hält in einer Hand eine gerade Anzahl und in der anderen Hand eine ungerade Anzahl von Münzen.

"Multipliziert die Anzahl der Münzen in Eurer rechten Hand mit zwei", sagt Nicolas Chuquet zu Margot. "Sodann zählt Ihr die Anzahl der Münzen in Eurer linken Hand hinzu und nennt mir die Summe. Ich werde Euch dann sagen, in welcher Hand sich die gerade Anzahl von Münzen befindet."

Erkläre die Methode von Nicolas Chuquet.

En una mano, Margot tiene un número par de monedas, y en la otra un número impar de monedas.

Nicolas Chuquet le dice a Margot : "Multiplique usted por dos el número de monedas que tiene en la mano derecha y sume a ello el número de monedas de la mano izquierda. Dígame cuál es el total y le diré en qué mano tiene el número par de monedas."

Explica el método de Nicolas Chuquet.

Margot has got an even number of coins in one hand and an odd number of coins in the other one.

In order to find which hand the even number of coins is in, Nicolas Chuquet says :

"Multiply the number of coins of the right hand by two, add it to the number of coins of the left hand and give me the result."

Explain Nicolas Chuquet's method.



Margot ha in una mano un numero pari di monete e nell'altra un numero dispari.

Al fine di trovare in quale mano ci sia il numero pari di monete, Nicolas Chuquet afferma :

"Moltiplicate il numero delle monete della mano destra per due, aggiungetevi il numero delle monete contenute nella mano sinistra e ditemi il risultato."

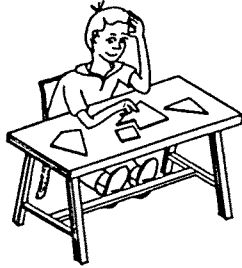
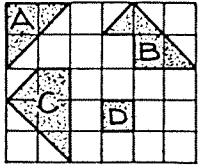
Si spieghi il metodo di Nicolas Chuquet.

exercice n° 2
5 points

Aux carrés

Etienne découpe les quatre pièces A, B, C, D du puzzle ci-dessous. Avec les trois pièces A, B, C il forme un carré. Soudain il s'exclame : " Mais on peut former un autre carré avec toutes les pièces du puzzle."

Dessiner les deux carrés ainsi formés avec le détail de leur composition.



exercice n° 4
5 points

L'abaque de Sylvestre

Voici un abaque de multiplication utilisé au dixième siècle par Gerbert d'Aurillac, qui devint pape sous le nom de Sylvestre II. Il représente la multiplication de I livre VII sols VI deniers par V. Une livre (£) valait vingt sols (s) et un sol valait douze deniers (d).

Sur le même principe, construire l'abaque de la multiplication de VII livres VII sols VII deniers par VIII.

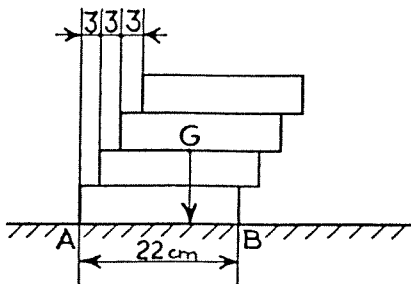
£	s	d
I	VII	VI
○	○	○
○	○	○
○	○	○
○	○	○
○	○	○
○	○	○
○	○	○
○	○	○
VI	XVII	VI
£	s	d



exercice n° 6
5 points

Pour une brique de plus

Sur un sol horizontal, Thierry empile et colle des briques parallélépipédiques toutes identiques de longueur 22 cm avec un décalage constant de 3 cm dans le sens de la longueur. Cet empilement ne tombe pas tant que le centre de symétrie G de la figure obtenue se projette orthogonalement sur le sol en un point situé entre A et B.



Quel est le nombre maximum de briques que Thierry peut ainsi empiler ? Justifier la réponse.

exercice n° 3
10 points

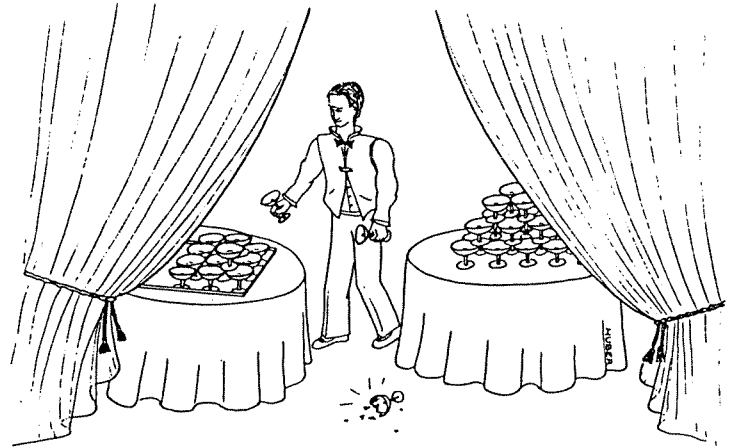
La coupe est pleine

Pour fêter son anniversaire, Lucas érige une pyramide de coupes. Il versera du champagne dans la coupe sommitale qui, en débordant, remplira toutes les coupes de la pyramide.

Il réalise une pyramide dont la base est un triangle équilatéral. Chaque coupe repose sur les bords deux à deux tangents de trois coupes de l'étage inférieur. Malencontreusement, il casse la coupe sommitale.

En disposant toutes les coupes restantes comme sur le dessin, il réussit à construire une pyramide à base carrée avec un étage de moins que la pyramide précédente.

Combien de coupes avait-il au début ? Justifier la réponse.



exercice n° 5
10 points

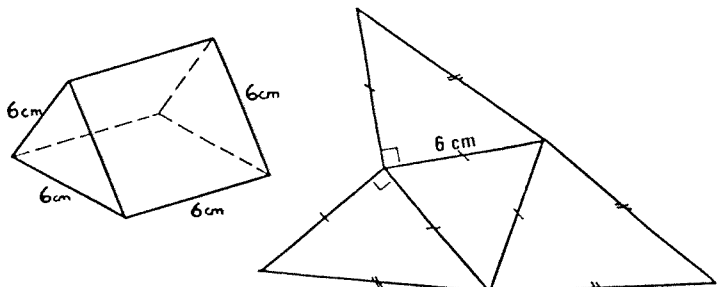
La pyramide cachée

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du volume d'un prisme de même base et de même hauteur.

Pour vérifier expérimentalement cette propriété, on considère un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces latérales sont des carrés. Toutes les arêtes mesurent 6 cm. Ce prisme se décompose en trois pyramides de volume égal.

Voici le dessin en perspective d'un tel prisme et le patron de deux des trois pyramides.

Sur la feuille-réponse, dessiner en vraie grandeur le patron de la troisième pyramide.

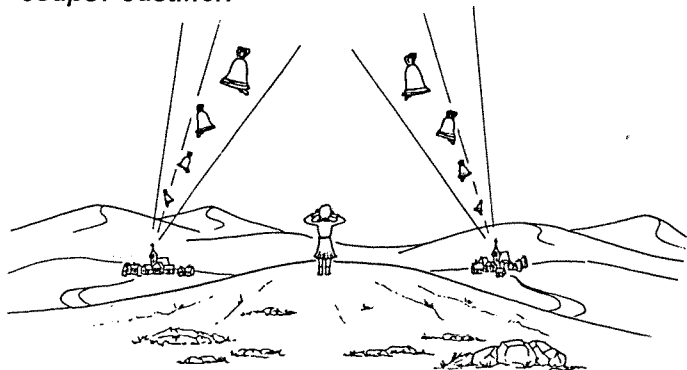


**exercice
n° 7
10 points**

Raisonnement

Marie se promène à la campagne. Elle est à la même distance des clochers de deux villages lorsque les deux cloches sonnent en même temps le premier coup de la même heure. L'une des horloges égrène les coups toutes les quatre secondes et l'autre toutes les cinq secondes. Marie ne distingue deux coups que s'ils interviennent à plus d'une seconde d'écart.

Quelle heure est-il si Marie distingue au total treize coups? Justifier.

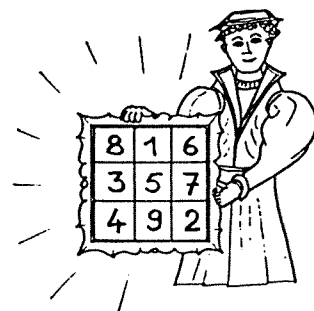


**exercice
n° 8
5 points**

A sommer

Voici un carré magique : la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales est la même.

Placer ces neuf nombres dans un carré de façon à ce que les huit sommes précédentes, que l'on écrira, soient toutes différentes.



**exercice
n° 10
15 points**

Trisection d'un angle

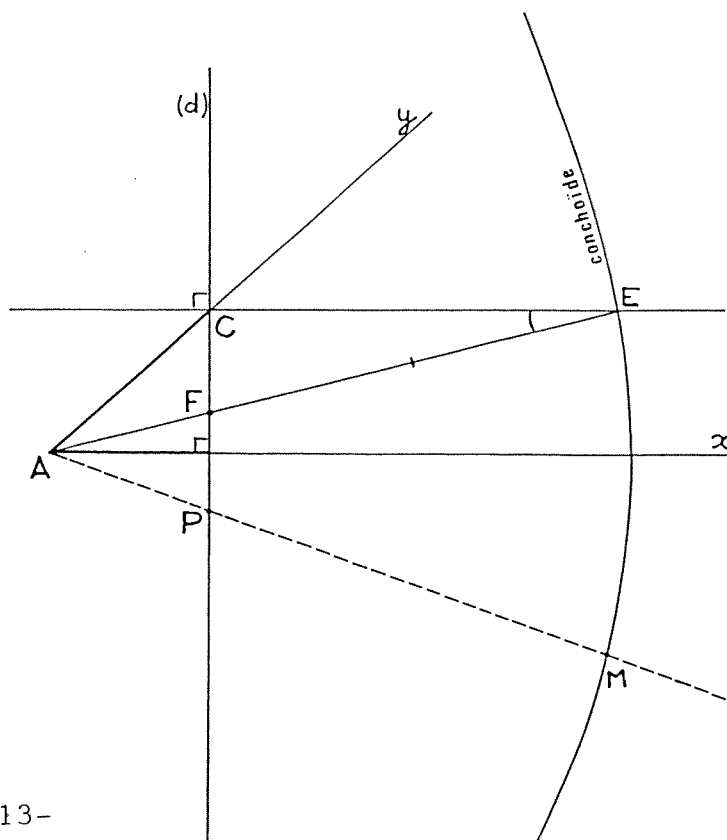
Nicomède découvrit une construction permettant de partager un angle en trois angles égaux.

Voici son procédé : on veut faire la trisection de l'angle \widehat{xAy} de la figure ci-dessous.

Pour cela on a placé un point C sur le côté [Ay), on a construit la droite (d) passant par C et perpendiculaire au côté [Ax) puis la courbe conchoïde ainsi définie: pour tout point P de (d), la demi-droite [AP) coupe la courbe en M tel que $PM = 2AC$.

La droite passant par C et perpendiculaire à d coupe la courbe en E.

Démontrer que l'angle \widehat{xAE} est le tiers de l'angle \widehat{xAy} . Il est inutile de construire la conchoïde



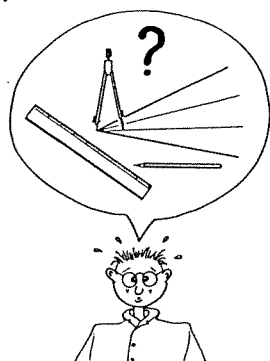
**exercice
n° 9
10 points**

Conchoïde de Nicomède

La trisection d'un angle consiste à le partager en trois angles égaux. Ce problème posé par les Grecs de l'Antiquité ne peut être résolu en général à la règle et au compas seuls. Mais Nicomède, vers 150 ans av. JC a trouvé une solution géométrique qui utilise une courbe appelée conchoïde, dont voici le programme de construction :

- Tracer la grande médiane de la feuille réponse. Nommer cette droite d .
- Sur la petite médiane, placer le point A à 2 cm à gauche de d .
- Choisir un point P sur d , placer, si possible, les deux points M et M' de la droite (AP) qui sont situés à 6 cm de P.
M et M' sont alors deux points de la conchoïde.
- Répéter l'étape c) en changeant la position de P sur d .

Construire point par point les deux parties aussi longues que possible de cette courbe.



Spécial Seconde

exercice
n° 11
5 points

A vos masques

Pierre, Paul et Jean préparent le carnaval. Ils disposent de trois déguisements, un pour chacun : clown, pirate et fantôme.
Paul dit : "Si Jean se déguise en clown, alors je me mets en pirate.
Mais si Jean se déguise en pirate alors je m'habille en fantôme."
Pierre intervient alors :
"Si Paul ne se déguise pas en clown, alors c'est moi le pirate."



Quel est le déguisement de chacun? Expliquer.

exercice
n° 12
10 points

Vendanges tardives

Germain fait vendanger deux parcelles dont l'une a une aire double de l'autre.
Le premier jour, toute l'équipe des vendangeurs travaille sur la grande parcelle.
Pour le deuxième jour, l'équipe se scinde en deux groupes égaux. Un des groupes reste dans la grande parcelle tandis que l'autre entame la petite.
A la fin de ces deux jours, la grande parcelle est entièrement terminée, mais non la petite qui occupe deux des vendangeurs pendant toute la troisième journée.
On suppose que les vendangeurs travaillent au même rythme et que les durées des journées de travail sont égales.

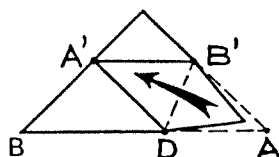
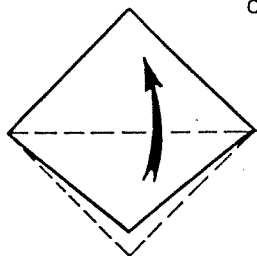
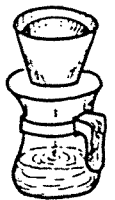
Combien l'équipe compte-t-elle de vendangeurs? Justifier la réponse.



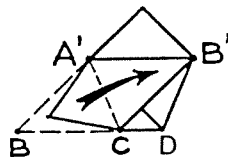
exercice
n° 13
15 points

Fort de café

Pierre confectionne un filtre à café avec une feuille de papier "essuie tout" carrée de côté 21cm, en faisant les pliages suivants :



$(AB) \parallel (A'B')$



Il se demande si le filtre s'ajustera sur le porte-filtre. Pour cela il faut que la distance CD soit inférieure à 5 cm.

Réaliser et coller le filtre sur la feuille-réponse puis répondre au problème de Pierre en justifiant que $A'B'AD$ et $A'B'CB$ sont des losanges et en calculant CD.



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Indications de solutions pour l'épreuve de mars 1998

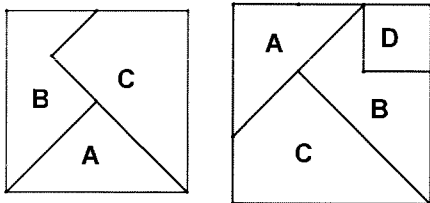
Exercice n°1 10 points

Pair et gagne !

Comme on multiplie par deux le nombre d'objets de la main droite, la parité de la somme est la même que celle du nombre d'objets de la main gauche.

Si la somme est paire, il y a un nombre pair d'objets dans la main gauche, et si la somme est impaire, il y a un nombre impair d'objets dans la main gauche et un nombre pair d'objets dans la main droite.

Exercice n°2 5 points *Aux carrés*



Exercice n°3 10 points

La coupe est pleine

Nombre d'étages	1	2	3	4	5	6
Nombre de coupes (base triangulaire)	1	4	10	20	35	56
Nombre de coupes (base carrée)	1	5	14	30	55	

Au début, Lucas avait donc 56 coupes.

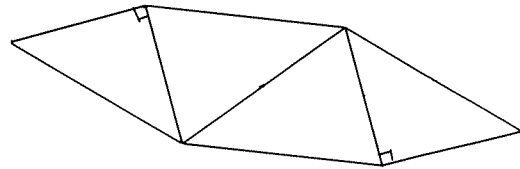
Exercice n°4 5 points

L'abaque de Sylvestre

£	S		d	
VII	VII		VII	
V O O	V	O O	V O	O
V O O	V	O O	∩	V O O
V O O	∩	V O O	∩	V O O
V O O	V	O O	∩	V O O
V O O	V	O O	∩	V O O
V O O	∩	V O O	∩	V O O
V O O	V	O O	∩	V O O
V O O	V	O O	∩	V O O
● ● ● ∩	● ● ● ●	∩		
LIX			VIII	
£	S		d	

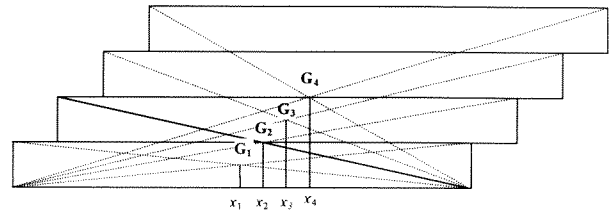
Exercice n°5 10 points

La pyramide cachée



Exercice n°6 5 points

Pour une brique de plus



Soit G_n le centre de symétrie lorsqu'il y a n briques. Dans (A, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité mesurant 1 cm, l'abscisse de G_1 est 11, celle de G_2 est $11+1,5$, et celle de G_n est égale à $x_n = 11 + 1,5(n-1)$.

Le solide est en équilibre tant que $x_n \leq 22$.

On a : $11 + 1,5(n-1) < 22$, donc $n < \frac{12,5}{1,5}$, et, n étant entier, $n \leq 8$.

Il y a au maximum 8 briques.

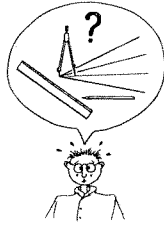
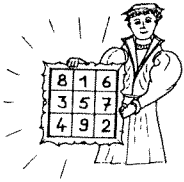
Exercice n°7 10 points

Raisonnement

On note les instants (en secondes) auxquels chaque cloche sonne. Pour neuf coups, on obtient :

- 1^{ère} cloche : **0**, 4, 8, 12, **16**, 20, **24**, 28, 32.
- 2^{ème} cloche : 0, 5, 10, **15**, 20, 25, 30, 35, 40.

Aux instants marqués en caractères gras, on n'entend qu'un seul coup de cloche. Au total, on entend 13 coups de cloche. *Il est donc neuf heures.*



Exercice n°8 5 points

A sommer

Parmi les nombreuses solutions, citons, par exemple :

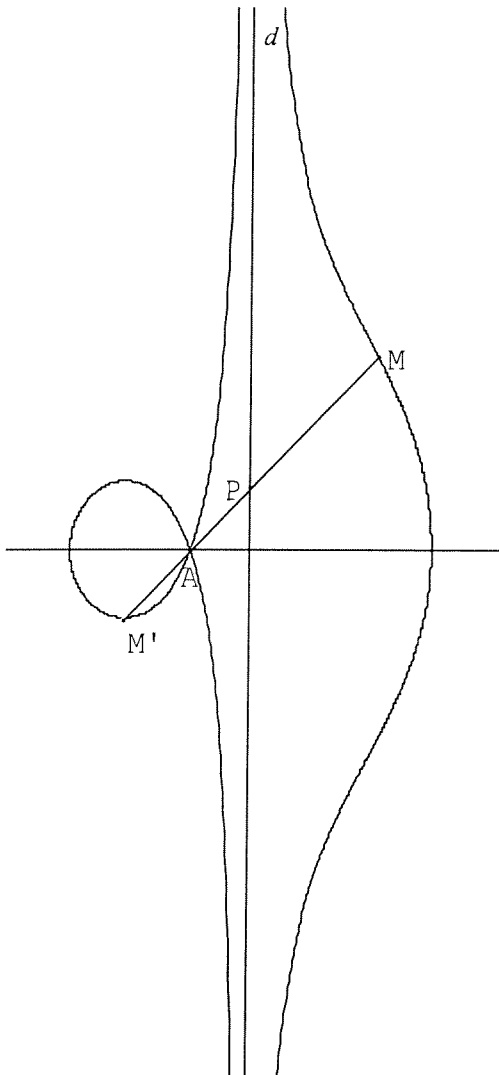
2	3	4	9
5	1	7	13
9	6	8	23

1	2	6	9
3	9	7	19
5	4	8	17

14 16 10 19 11 20 9 15 21 18

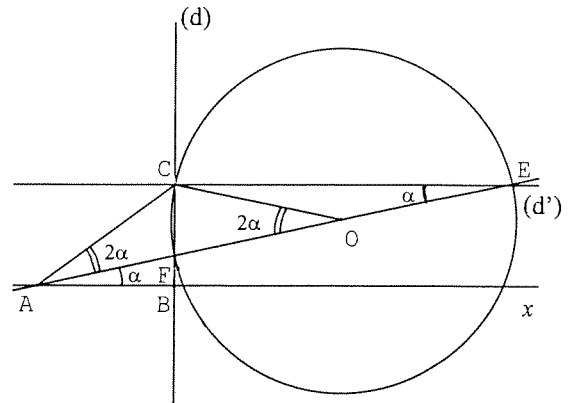
Exercice n°9 10 points

Conchoïde de Nicomède



Exercice n°10 15 points

Trisection d'un angle



Posons $\widehat{CEF} = \alpha$. Soit O le milieu de [EF] ;
 $FO = OE = OC$.

Alors $\widehat{ABE} = \alpha = \widehat{CEF}$ (angles alternes-internes)
 et on a $\widehat{ECO} = \alpha$ car le triangle OEC est isocèle en O.

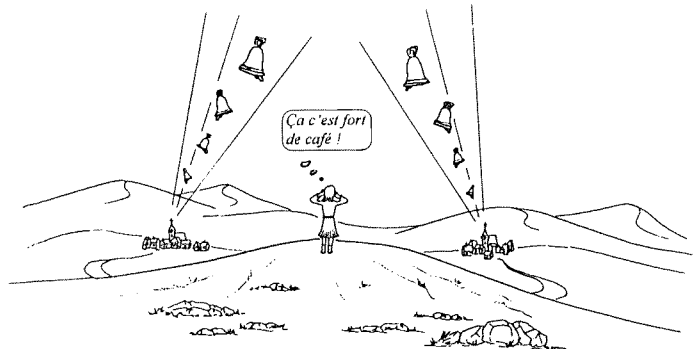
1^{ère} méthode : on a $\widehat{COF} = 2 \widehat{CEF} = 2\alpha$ (angle au centre interceptant le même arc que \widehat{CEF})

Donc $\widehat{ACO} = 2\alpha$, car le triangle ACO est isocèle en C.

Donc : $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ et
 $\widehat{BAC} = 3 \widehat{BAE}$

2^{ème} méthode : Dans le triangle OCE,
 $\widehat{COE} = 180^\circ - \widehat{CEO} - \widehat{OCE}$ donc
 $\widehat{COE} = 180^\circ - 2\alpha$, donc $\widehat{AOC} = 2\alpha$ (angles supplémentaires).

On conclut de même : $\widehat{BAC} = 3 \widehat{BAE}$.



Spécial Seconde

A vos masques

Il y a six déguisements possibles :

	a	b	c	d	e	f
Paul	C	F	P	F	C	P
Pierre	P	C	F	P	F	C
Jean	F	P	C	C	P	F

D'après l'énoncé, si Jean est en clown, alors Paul est en pirate, ce qui élimine la possibilité *d*.

Si Jean est en pirate, alors Paul est en fantôme, ce qui élimine la possibilité *e*.

Si Paul n'est pas en clown, alors Pierre est en pirate, ce qui élimine les cas *b*, *c* et *f*.

Il ne reste alors que la possibilité *a* qui n'est en contradiction avec aucune des trois affirmations.

Donc Paul est déguisé en clown, Pierre en pirate et Jean en fantôme.

Exercice n°12 10 points

Vendanges tardives

Soit *a* l'aire vendangée en un jour par un vendangeur et *x* le nombre de vendangeurs dans cette équipe.

Aires vendangées	Grande parcelle	Petite parcelle
1 ^{er} jour :	ax	
2 ^{ème} jour :	$a \frac{x}{2}$	$a \frac{x}{2}$
3 ^{ème} jour :		$2a$
En tout :	$3 \frac{ax}{2}$	$a(\frac{x}{2} + 2)$

L'aire de la grande parcelle étant le double de celle de la petite, on a : $3a \frac{x}{2} = 2a(\frac{x}{2} + 2)$ avec

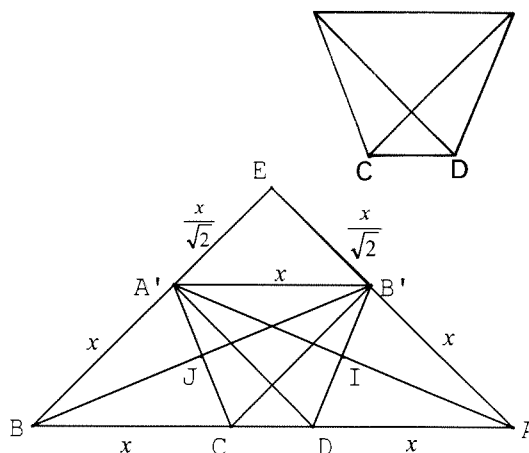
$a \neq 0$ donc : $\frac{3x}{2} = x + 4$, et donc $x = 8$.

Cette équipe compte donc 8 vendangeurs.



Exercice n°13 15 points

Fort de café



Après le 1^{er} pliage, le carré de côté 21 cm devient un triangle rectangle et isocèle en E, dans lequel $AE = BE = 21$ cm et, d'après le théorème de Pythagore, $AB = 21\sqrt{2}$ cm.

Les points A et A' sont symétriques par rapport à (B'D) par définition du 2^{ème} pliage, donc (B'D) est la médiatrice de [AA']. De (AD)//(A'B') et du théorème de Thalès résulte que (AA') coupe aussi [B'D] en son milieu I. Donc le quadrilatère AB'A'D est un losange.

On démontre de même que le quadrilatère A'B'CB est un losange.

On pose $A'B' = AB' = x$.

Comme (AB)//(A'B'), on a : $\frac{EB'}{EA} = \frac{A'B'}{BA}$ donc

$$\frac{EB'}{21} = \frac{x}{21\sqrt{2}} \text{ donc } EB' = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Or $\frac{x}{\sqrt{2}} + x = EA = 21$, d'où $x = 21(2 - \sqrt{2})$ (en cm).

Donc : $CD = AB - 2x = 21\sqrt{2} - 42(2 - \sqrt{2})$.

$$CD = 63\sqrt{2} - 84 \approx 5,095 \text{ cm}$$

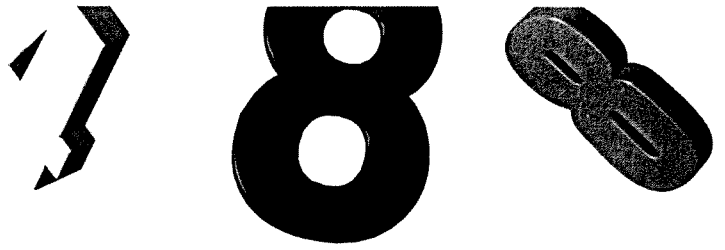
En tenant compte de la souplesse du papier, on peut admettre que le filtre va s'ajuster sur le porte-filtre.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1998-1999

10^{ème} édition





Langue vivante

Les exercices n° 2, 5, 6, 7 et 9 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.

10 points → **Exercice 1**
Tour de magie

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien
 (en un minimum de 30 mots).

Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you : "what is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower ?"

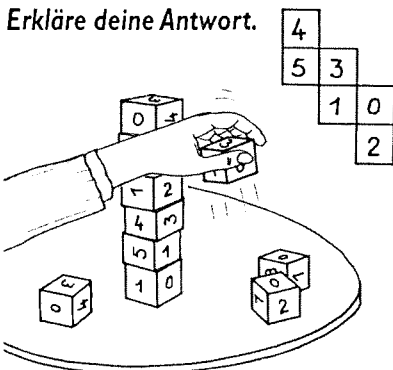
How will you go about it ?
Explain your answer.

Pedro ha hecho una torre apilando en un mesa 10 cubos idénticos. Aquí está el modelo de uno de ellos. Pedro le da el número marcado en la cara superior de la torre y le pide la suma total de los números marcados en todas las caras visibles de la torre.

¿ Cómo lo resuelve usted ?
Explicar la respuesta.

Pierre hat einen Turm aus 10 gleichen Würfeln gebaut, welche er aufeinandergelegt hat. Das Netz eines dieser Würfel ist hier zu sehen. Pierre verrät dir die Zahl, welche auf der obersten Würfelseite des Turmes geschrieben steht und fragt dich nach der Summe der Zahlen auf allen sichtbaren Seiten des Turmes.

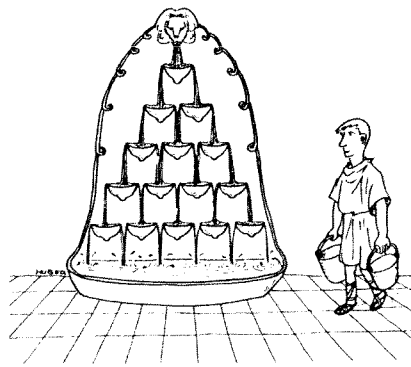
Wie gehst du vor ?
Erkläre deine Antwort.



Piero ha costruito una torre impilando su un tavolo 10 cubi identici. Ecco in figura il modello esplosivo di uno dei cubi. Piero vi comunica il numero scritto sulla faccia superiore della torre e vi domanda la somma dei numeri scritti su tutte le facce visibili della torre.

In che modo procedete ?
Giustificate la vostra soluzione.

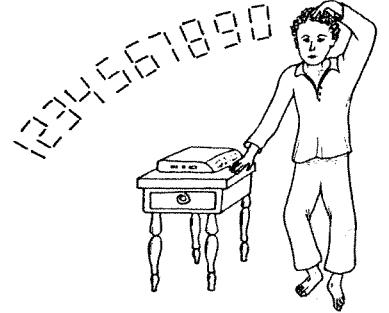
5 points → **Exercice 2**
Fontaine romaine



Toutes les vasques de la fontaine ci-dessus débordent. A chaque étage la moitié du volume ajouté à une vasque s'écoule dans chacune des deux vasques placées en dessous. Pendant la journée un mètre cube coule dans la vasque supérieure.

Exprimer sous forme de fraction de ce mètre cube le volume d'eau s'écoulant dans chaque vasque de la fontaine.

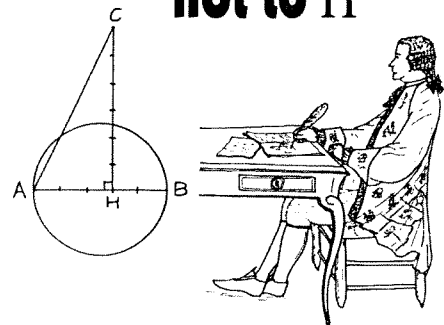
10 points → **Exercice 3**
Panne de réveil



Les chiffres du réveil de Henri sont formés à partir de 7 segments dont certains sont éclairés et d'autres non. Un des segments est défectueux et ne s'allume plus. A cause de cela, après avoir regardé son réveil, il s'est levé une heure plus tôt que d'habitude.

Quel est le segment défectueux ? Justifier la réponse.

5 points → **Exercice 4**
To Π or not to Π



Vers 1680, Thomas Hobbes proposa les étapes de la construction suivante :

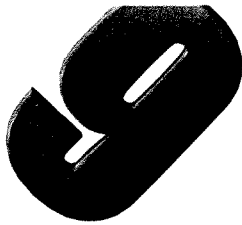
- Construire un cercle de 1 décimètre de diamètre.
- Partager un de ses diamètres en 5 parties égales.
- Enfin construire le triangle rectangle AHC tel que $HC = 6/5$ dm comme sur la figure ci-dessus.

Il prétendit alors que le périmètre du triangle AHC est exactement égal à π dm.

Que pensez-vous de l'affirmation de Thomas Hobbes ?

Justifiez la réponse.

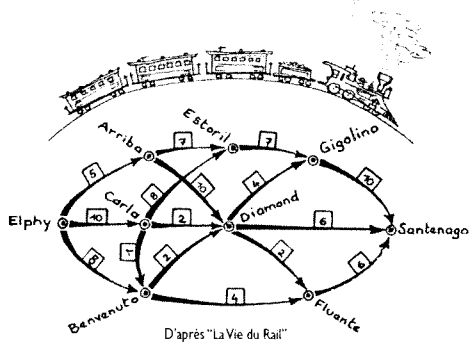




10 points → Exercice 5
Train train

Sur le réseau ferroviaire on a indiqué sur chaque tronçon entre deux villes le nombre maximum de trains qui peuvent passer par jour dans le sens indiqué. Le trajet entre Elphy et Santenago se fait en moins d'un jour. Un jour, il peut partir au plus 23 trains d'Elphy.

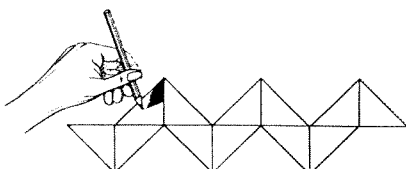
Combien de ces trains, au maximum, peuvent parvenir dans la journée à Santenago ? Reproduire le réseau ferroviaire et, pour les trains qui arrivent à Santenago, indiquer sur chaque tronçon emprunté le nombre de ces trains qui passent.



5 points → Exercice 6
Serpent à cube

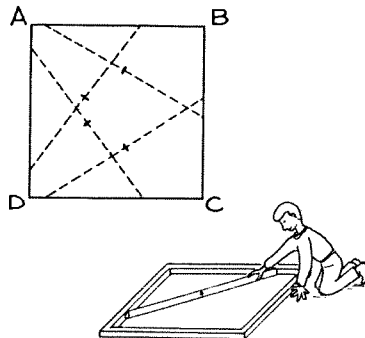
La figure ci-dessous est formée de triangles rectangles isocèles. C'est en fait une facétie de notre dessinateur qui a ainsi représenté un patron de cube.

Reproduire ce patron sur la feuille réponse et, en utilisant 3 couleurs différentes, colorier les faces du cube, deux faces parallèles étant de même couleur.



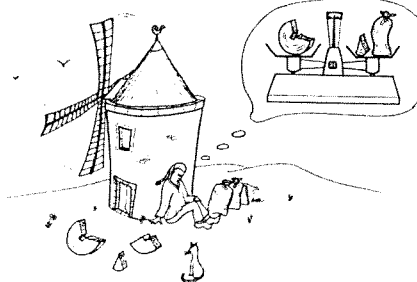
10 points → Exercice 7
A tout carreau

ABCD est un carré de 13 cm de côté. Une tige de longueur 15 cm est placée à l'intérieur de ce carré de façon que ses deux extrémités appartiennent à deux côtés consécutifs du carré.



Construire la courbe décrite par le milieu de la tige quand celle-ci occupe toutes les positions possibles.

5 points → Exercice 8
Morceaux de mon moulin

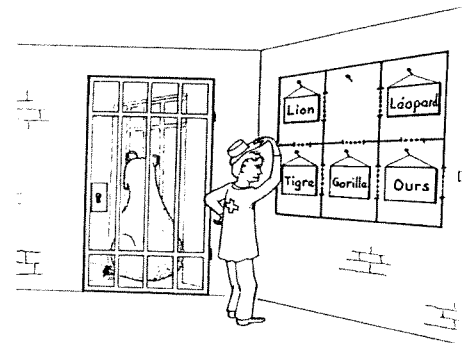


Le meunier a cassé sa meule de pierre en 3 morceaux de 1 kg, 3 kg et 9 kg. Mais il constate qu'à l'aide de ces trois morceaux et d'une balance à deux plateaux, il peut maintenant peser tout objet de masse entière comprise entre 1 kg et 13 kg.

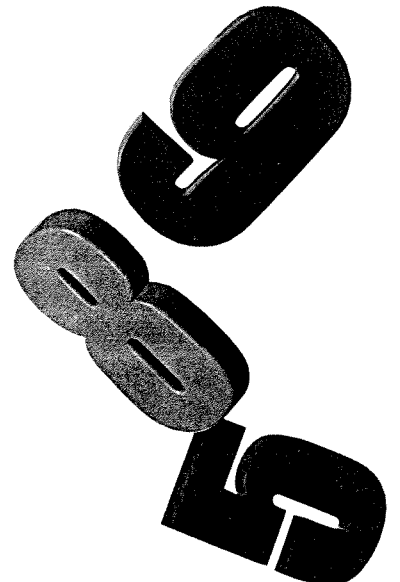
Afin de redonner une nouvelle vie aux morceaux de la meule, expliquer comment procède le meunier pour peser les 13 objets.

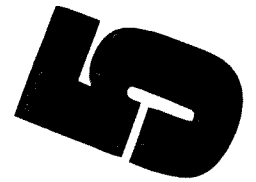
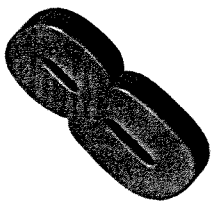
10 points → Exercice 9
Quel cirque !

Voici le plan d'une ménagerie un peu spéciale. Il n'y a qu'une porte d'entrée par l'infirmerie et les cages sont toutes reliées entre elles par des portes. Pour surveiller l'ours qui a été soigné à l'infirmerie, il faut qu'il aille dans la cage du léopard. Mais pour soigner le léopard, il faut l'amener face à l'infirmerie. Il est impossible de faire sortir les animaux car ils sont trop dangereux mais on peut seulement faire passer une bête de sa cage dans une cage vide.



Ecrire sur la feuille réponse la liste, dans l'ordre, des animaux qu'il faut faire passer dans la cage vide pour échanger les positions de l'ours et du léopard.



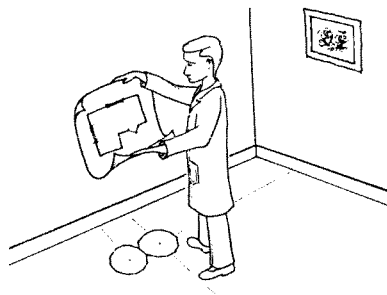


15 points → Exercice 10

Dodécarrelages

Gontran le châtelain a une figure favorite : le dodécagone régulier qui a 12 côtés. Aussi décide-t-il de faire carreler la grande salle du château avec des dodécagones réguliers de 20 cm de côté.

Ils sont disposés de façon que leurs centres forment un réseau de carrés.



Il subsiste alors une figure entre quatre dodécagones voisins.

Construire quatre dodécagones ainsi placés, chacun étant en contact avec 2 autres par un de ses côtés.

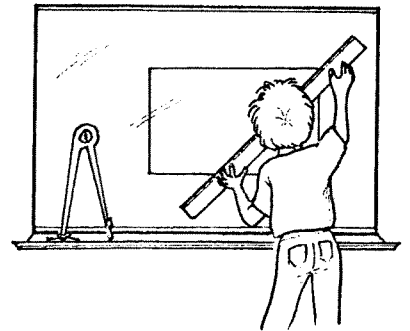
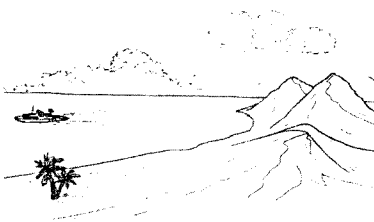
Calculer l'aire réelle de la figure entourée par 4 dodécagones de 20 cm de côté, voisins du carrelage.

Seconde

5 points → Exercice 11 Corvette en tête

Quelque part en mer une flottille navigue à cap constant à la vitesse de 12 nœuds, c'est-à-dire 12 milles par heure. Une corvette part en avant pour reconnaître le secteur ; sa vitesse passe alors à 24 nœuds. Après avoir parcouru 60 milles, la corvette fait demi-tour pour rejoindre le reste de la flottille.

Quel temps, en heures et en minutes, s'est-il écoulé entre le départ et le retour de la corvette, en supposant les vitesses constantes entre ces deux instants ?

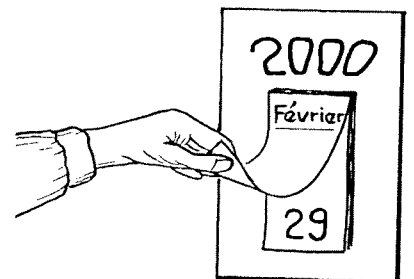


Faire la figure et dire qui a raison. Justifier la réponse.

15 points → Exercice 13 Révolution de calendrier

Le temps moyen de révolution de la terre autour du soleil est environ égal à 365,2422 jours.

Puisque le nombre de jours par an est un nombre entier, Jules César a introduit les années bissextiles. Plus tard, le Pape Grégoire a instauré la règle suivante ; Les années bissextiles sont celles dont le numéro est multiple de 4 avec une exception pour les années multiples de 100 ; parmi celles-ci, seules celles dont le nombre de centaines est multiple de 4 sont bissextiles. Ainsi 1900 n'était pas bissextile, mais 2000 le sera.



Expliquez cette particularité en calculant le nombre d'années bissextiles nécessaires en 400 ans.

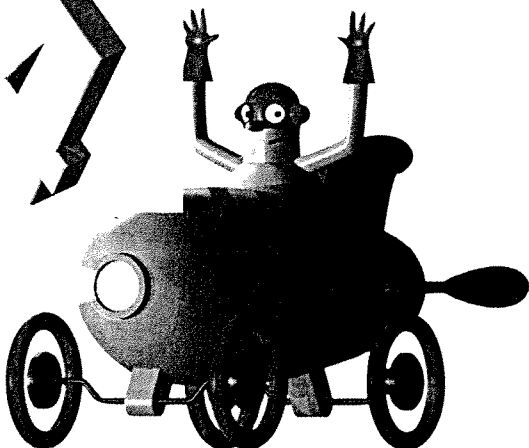
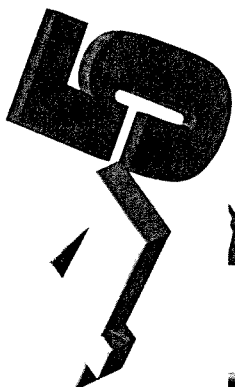
Cette règle vous paraît-elle immuable ?

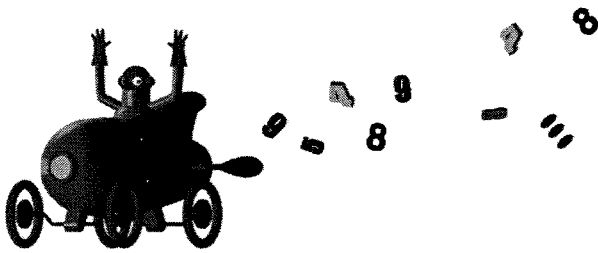
10 points → Exercice 12 Was jst das ?

Pierre, Paul et Jacques s'entraînent pour le concours de Mathématiques Sans Frontières.

Ils tracent chacun les quatre bissectrices des angles d'un rectangle. Celles-ci se coupent deux à deux en quatre points qui semblent former un quadrilatère particulier.

- C'est un rectangle, dit Pierre.
- Moi je pense que c'est un losange, dit Paul.
- Et si c'était un carré ? dit Jacques.





MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

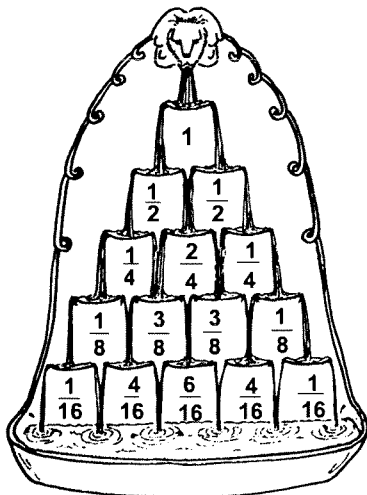
Indications de solutions pour l'épreuve d'entraînement de décembre 1998

Exercice n°1 10 points *Tour de magie*

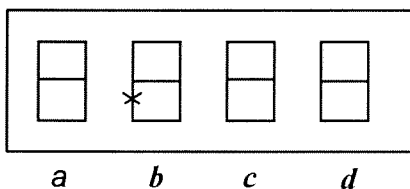
La somme des nombres de deux faces parallèles est 5 ; celle de quatre faces latérales d'un cube est $2 \times 5 = 10$, donc la somme des nombres de toutes les faces latérales des 10 cubes de la tour est 100.

Si n est le numéro inscrit sur la face supérieure, la somme des nombres des faces visibles est : $100 + n$.

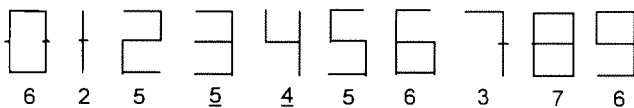
Exercice n°2 5 points *Fontaine romaine*



Exercice n°3 10 points *Panne de réveil*



Le segment défectueux est en b , à cause du décalage d'une heure. Ci-dessus, la croix indique le segment défectueux : lorsqu'il est **8 heures**, le réveil affiche **9 heures**. C'est la seule solution :

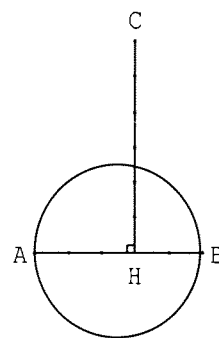


Ci-dessus, figure le nombre de segments utilisés pour chaque chiffre. Il est nécessaire d'avoir, pour qu'il y ait une solution, un segment de moins quand on passe d'une

heure à la suivante. Or 3 et 4 ne conviennent pas, et seulement avec 8 h et 9 h cela est réalisé.

Attention, quand on passe de 5 h à 6 h, le réveil continue d'afficher 5 h, et cela ne correspond évidemment pas à la situation où on se lève plus tôt !

Exercice n°4 5 points *To π or not to π*



D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHC rectangle en H,

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{45}{25}$$

$$\text{d'où } AC = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ dm.}$$

Le périmètre du triangle AHC est

$$P = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} \text{ dm}$$

$$P \approx 3,141640786. \text{ Or } \pi \approx 3,1415926535$$

(« Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages »).

Thomas Hobbes a tort, mais sa construction donne une approximation de π à 5×10^{-4} près par excès.

Exercice n°5 10 points *Train-train*

Dans la journée, il ne peut arriver plus de 22 trains (= 10 + 6 + 6) à Santenago.

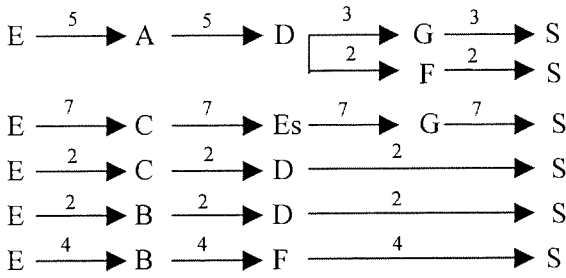
Peuvent passer par Diamond : 5 trains au plus d'Arriba (car 5 au plus d'Elphy à Arriba), 2 au plus venant de Carla et 2 au plus venant de Benvenuto, donc 9 trains.

Peuvent passer par Gigolino sans passer par Diamond : au maximum 7 trains.

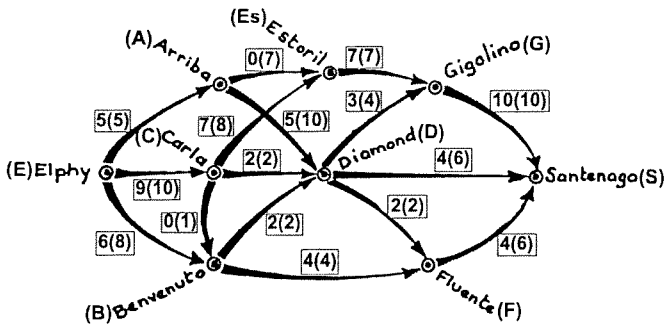
Peuvent passer par Fluente sans passer par Diamond : au maximum 4 trains.

En un jour, il ne peut donc y avoir plus de 20 trains de Elphy à Santenago.

Par exemple, 20 trains peuvent passer de la façon suivante :

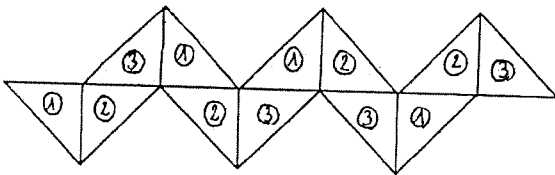


Ci-dessous le nombre de trains, dans ce cas, sur chaque tronçon (entre parenthèses, le nombre maximal possible sur le tronçon correspondant).

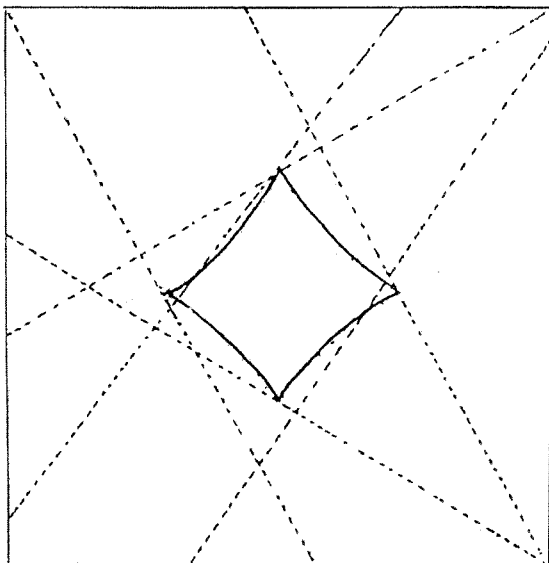


Exercice n°6 5 points *Serpent à cube*

①, ② et ③ désignent les trois couleurs.



Exercice n°7 10 points *A tout carreau*



Exercice n°8 5 points

Morceaux de mon moulin

1kg	=	1kg
2kg + 1kg	=	3kg
3kg	=	3kg
4kg	=	3kg + 1kg
5kg + 1kg + 3kg	=	9kg
6kg + 3kg	=	9kg
7kg + 3kg	=	9kg + 1kg
8kg + 1kg	=	9kg
9kg	=	9kg
10kg	=	9kg + 1kg
11kg + 1kg	=	9kg + 3kg
12kg	=	9kg + 3kg
13kg	=	9kg + 1kg + 3kg

Remarque : avec les masses marquées 1 kg, 3 kg, 9 kg et 27 kg (les puissances successives de 3), on peut peser tous les objets de masse entière comprise entre 1 kg et 40 kg car :

$$40 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3.$$

Exercice n°9 10 points *Quel cirque !*

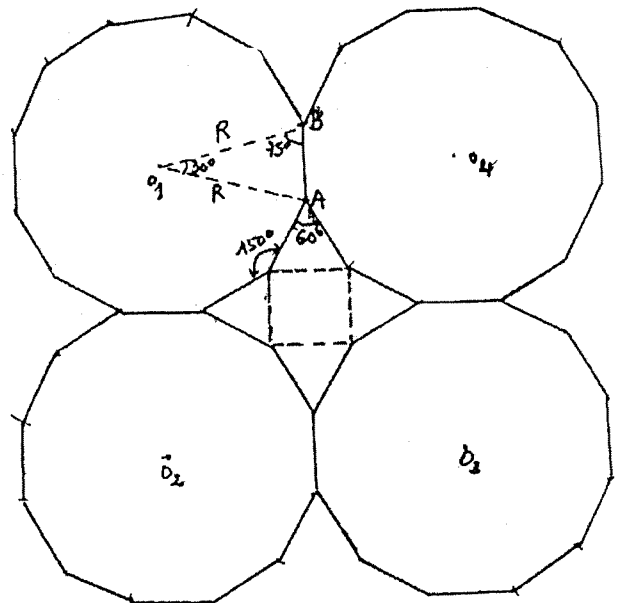
4	3	2
5	6	1

Au début :

Ou (ours) → 1, Léo (léopard) → 2, vide : 3, Li (lion) → 4, Ti (tigre) → 5, Go (gorille) → 6.

Par exemple, faire : Léo → 3, Ou → 2, Go → 1, Ti → 6, Li → 5, Léo → 4, Ou → 3, Go → 2, Ti → 1, Ou → 6, Go → 3, Ti → 2, Ou → 1, Li → 6, Léo → 5, Go → 4, Li → 3, Léo → 6, Go → 5, Li → 4, Ti → 3, Ou → 2, Léo → 1.

Exercice n°10 15 points *Dodécarrelages*



Remarque : pour la figure, utiliser $AB = 2R \cos 75^\circ$

$$\text{donc } R = \frac{AB}{2 \cos 75^\circ} \text{ où } AB = 20 \text{ cm.}$$

La figure entourée de 4 dodécagones voisins est formée d'un carré de côté $c = AB$ et de 4 triangles équilatéraux de même côté $c = AB$.

$$\text{Son aire est } A = c^2 + 4 \left(\frac{c^2 \sqrt{3}}{4} \right).$$

$$A = c^2 (1 + \sqrt{3}) = 400 (1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

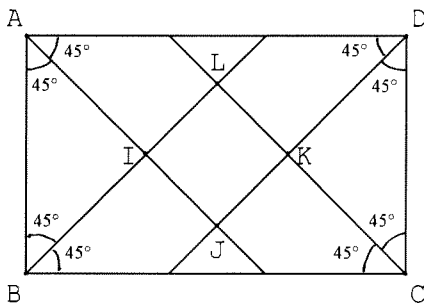
Exercice n°11 5 points *Corvette en tête*

Au moment où la corvette fait demi-tour, elle a parcouru 60 milles ; donc le reste de la flottille, qui va deux fois moins vite, a parcouru 30 milles (et se trouve à 30 milles de la corvette).

Donc la corvette est de retour après avoir fait 20 milles en sens inverse (le reste de la flottille, qui va deux fois moins vite, fera 10 milles). En tout, la corvette aura

$$\text{fait 80 milles en } \frac{80}{24} = 3 \text{ h } \frac{1}{3} = 3 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

Exercice n°12 10 points *Was ist das ?*



Dans chacun des triangles AIB, DKC, BCL et AJD,

il y a deux angles de 45° , donc les angles \widehat{LIJ}

(= \widehat{AIB}), \widehat{LKJ} (= \widehat{DKC}), ainsi que \widehat{BLC} et

\widehat{AJD} sont droits, donc le quadrilatère IJKL est un rectangle.

De plus les triangles AIB, BCL, AJD et DKC sont isocèles, donc I appartient à la médiatrice de [AB], de même K, J, L appartiennent respectivement aux médiatrices de [CD], [AD] et [BC] ; en particulier, [AB] et [CD] ayant même médiatrice, (IK) est perpendiculaire à (AB). De même, (LJ) est perpendiculaire à (IK). **Donc IJKL est un carré.**

Exercice n°13 15 points

Révolution de calendrier

Le temps moyen de révolution de la terre autour du soleil dépasse 365 jours de $0,2422 \text{ j} = \frac{x}{400}$ d'où $x = 96,88$.

Il faut donc environ 97 années bissextiles en 400 ans, donc une année bissextile tous les 4 ans, en retirant 3 années en 400 ans (d'où la règle que pour les multiples de 100, seules les années multiples de 400 sont bissextiles).

Mais, de la sorte, on aura environ $0,12$ (= $97 - 96,88$) année bissextile de trop en 400 ans, donc environ 3 années bissextiles de trop en 10 000 ans, ce qui va nécessiter un nouvel ajustement du calendrier.

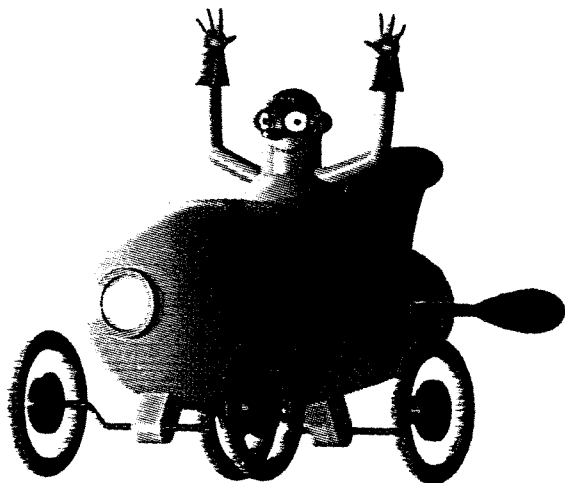




ACADEMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de
l'enseignement des
Mathématiques
Inspection Pédagogique
Régionale de
Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Mathématiques sans frontières

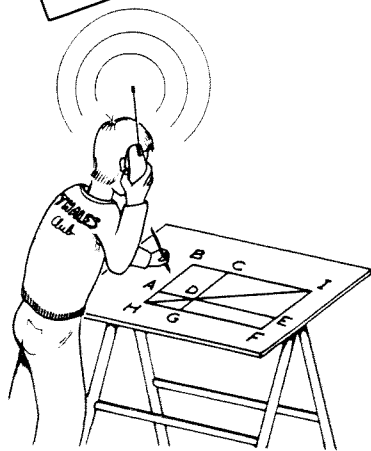


**EPREUVE DU
11 MARS 1999**

- Les exercices n° 6, 7 et 10 ne nécessitent aucune justification.
- Le soin et toute solution même partielle seront pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

**exercice
n° 1
10 points**

Fax simulé



Gaston hat Schwierigkeiten mit seinen Hausaufgaben in Mathematik :

« Gegeben sind ein Rechteck ABCD und eine Strecke DE in der Verlängerung von AD.

Konstruiere, ohne zu messen, das Rechteck DEFG, welches den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD besitzt. »

Gaston telefoniert mit Etienne, der die Lösung bereits gefunden hat.

Welche Konstruktionsbeschreibung muß Etienne Gaston übermitteln?

Wie kann er ihm erklären, daß die beiden Rechtecke ABCD und DEFG flächengleich sind?

Gaston can't do his maths homework. Here it is :

« Let ABCD be a rectangle and [DE] a segment which is the prolongation of [AD]. Without taking any measurements, construct a second rectangle DEFG whose area is the same as ABCD's. »

Then Gaston calls Etienne who has had no trouble finding a solution.

Say what instructions for constructing the second rectangle Etienne should give Gaston and how he should go about explaining to his friend that the areas of ABCD and DEFG are equal.

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots

Gaston tiene dificultades con el problema de matemáticas siguiente :

« Tenemos un rectángulo ABCD y un segmento [DE] en la prolongación de [AD]. Construid un rectángulo DEFG de la misma superficie que ABCD sin que sea necesario medir. »

Le llama a Etienne que ha encontrado una solución.

¿Qué método de construcción debe Etienne transmitir a Gaston y cómo debe explicarle que los rectángulos ABCD y DEFG tienen la misma superficie?

Gaston trova difficoltà nel compito di matematica :

« Dato un rettangolo ABCD e il segmento DE quale prolungamento di AD, si chiede di costruire un rettangolo DEFG di superficie equivalente a quella di ABCD senza effettuare misure. »

Telefona, pertanto, a Etienne che ha già risolto il problema.

Quale procedura di costruzione deve trasmettere Etienne a Gaston e come può spiegargli che i due rettangoli ABCD e DEFG hanno la stessa area?

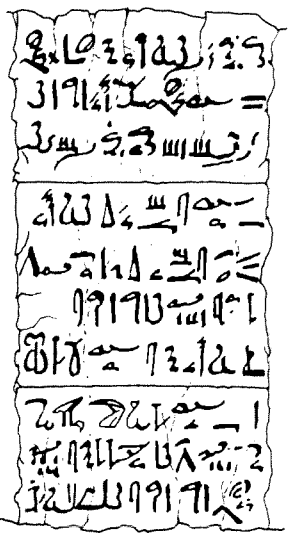


exercice n° 2
5 points

A l'inverse

Au temps des pharaons les Égyptiens n'écrivaient en général que des fractions unitaires, c'est-à-dire de numérateur égal à 1.

Voici une règle du papyrus Rhind pour calculer les deux tiers de toute fraction unitaire de dénominateur impair :



« Calculer les deux tiers d'une fraction impaire. Si l'on te dit "Quel est deux tiers de ?", tu fais 2 fois son dénominateur et 6 fois son dénominateur. Le résultat est la somme des deux fractions unitaires obtenues. Par exemple « deux tiers de $1/9$ c'est : $1/18 + 1/54$ ».

La règle énoncée est-elle exacte pour toutes les fractions unitaires impaires? Expliquer votre réponse. Inventer une règle plus simple pour toutes les fractions unitaires paires.

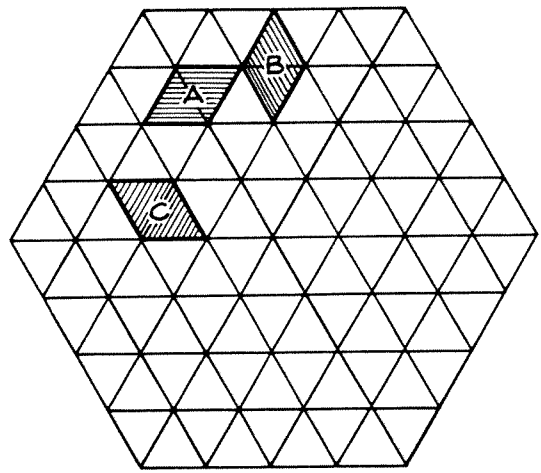
exercice n° 3
10 points

Calissons

Rémy remplit l'hexagone ci-dessous par des losanges identiques à A, B ou C qu'il colorie ainsi : en rouge le losange A et ceux qui sont orientés comme A, en jaune B et ceux qui sont orientés comme B et en vert C et ceux qui sont orientés comme C.

A la fin il est surpris de constater qu'il y a autant de losanges de chaque couleur. Il trouve alors une explication à cela en regardant son dessin comme la représentation en perspective de petits cubes placés dans un grand cube.

Reproduire l'hexagone, le paver de losanges selon les règles de Rémy et détailler son explication.



exercice n° 4
5 points

Ne pas avoir le jeton

Nathalie et Coralie disposent de 9 jetons numérotés de 1 à 9.

- Tiens, c'est curieux, dit Coralie. Si j'enlève un jeton, je peux faire avec tous les jetons qui restent trois tas tels que, dans chaque tas, la somme des chiffres est la même.

- Je dirais même plus, dit Nathalie. Avec les 8 jetons restants, je peux faire quatre tas ayant la même propriété.

Déterminer le jeton que Nathalie et Coralie ont écarté. Justifier.



exercice n° 5
10 points

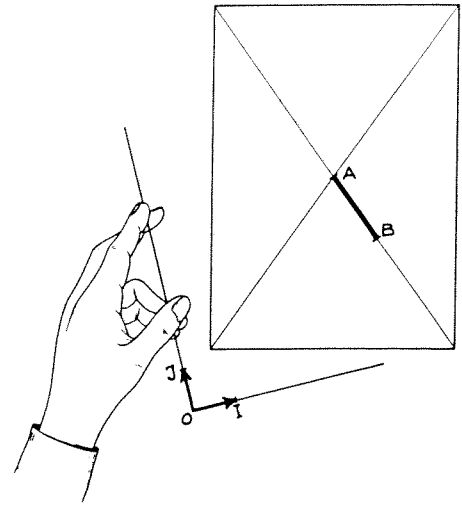
Manque de repère

Placer le point A à l'intersection des diagonales de la feuille réponse, le point B sur une diagonale, à 5 cm du point A.

Dans le repère orthonormé (O, I, J) où l'unité de longueur est le centimètre, les points A et B ont pour coordonnées (3; 2) et (7; 5).

Mais ce repère a disparu !

Sans utiliser de papier calque, construire le repère. Expliquer la construction.



**exercice
n° 6
5 points**

Code Enigma

Voici un message codé :

« QBDVXSRTTABBRKYNBXR ».

Pour faire le codage, on a utilisé la « clé » M.S.F. qui donne la suite (13; 19; 6) où chaque nombre est la position de la lettre correspondante dans l'alphabet. Dans le message initial, on a remplacé la première lettre par celle située 13 positions après elle dans l'alphabet, la seconde par celle située 19 positions après elle dans l'alphabet, la troisième lettre par celle située 6 positions après elle dans l'alphabet et ainsi de suite en répétant la clé.

A la 27^{ème} position on retrouve la lettre A, à la 28^{ème} position on retrouve la lettre B, etc...

Retrouver le message initial.



**exercice
n° 7
10 points**

Tout est relatif

Une planète P décrit d'un mouvement régulier un cercle (C) autour d'une étoile E en 360 jours.

Cette planète a un satellite S qui gravite autour d'elle dans le même sens. Vu depuis P, le satellite décrit d'un mouvement régulier un cercle (C') situé dans le plan de C. Tous les 30 jours, les points E, P et S se retrouvent alignés dans cet ordre.

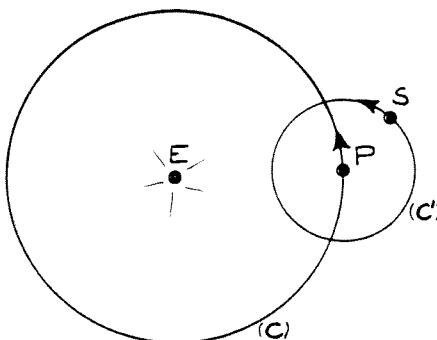
On donne les distances de centre à centre :

EP = 70 000 000 km

PS = 10 000 000 km

On demande de construire la trajectoire de S par rapport à cette étoile E.

Pour cela placer E au centre de la feuille réponse, le cercle (C) a 7 cm de rayon et (C') a 1 cm de rayon. Commencer la construction en plaçant E, S et P alignés dans cet ordre. Sachant qu'au bout de 15 jours ils sont alignés dans l'ordre E, P et S, construire suffisamment de positions de S puis tracer la trajectoire de S.



**exercice
n° 8
5 points**

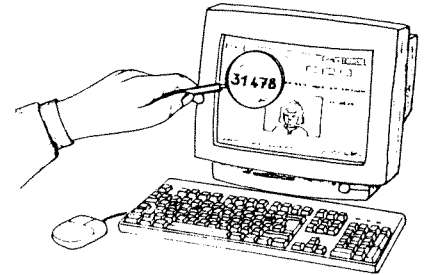
Retrospective

Lorsque Rémy tape sur son ordinateur la date d'aujourd'hui, 11 mars 1999, il voit s'afficher 34768.

Lorsqu'il tape la date à laquelle s'est déroulée la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières, il voit s'afficher 31478.

Cet ordinateur transforme chaque date en un nombre qui augmente de 1 unité par jour écoulé.

A l'aide de ces données, retrouver la date et le jour de la semaine de la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières. Expliquer la réponse.

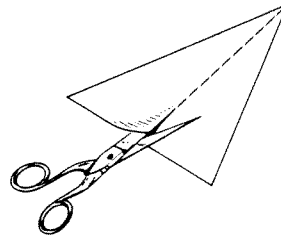


**exercice
n° 9
10 points**

Couper Coller

Le triangle ci-dessous est partagé en deux triangles par une médiane.

Il est possible de vérifier expérimentalement que ces deux triangles ont la même aire en découpant l'un d'eux et en recomposant l'autre avec les morceaux obtenus.



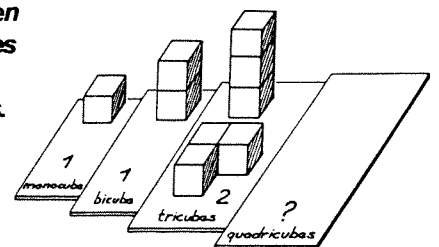
Sur la feuille réponse reproduire le triangle de départ, faire le découpage et par collage mettre en évidence l'égalité des aires. En précisant les lignes de coupe, justifier cette égalité.

**exercice
n° 10
15 points**

Quadricubes

Il y a un seul monocube et un seul bicube, mais il y a deux tricubes possibles.

Dessiner en perspective tous les quadricubes possibles différents.



Spécial seconde

**exercice
n° 11
5 points**

Grand angle

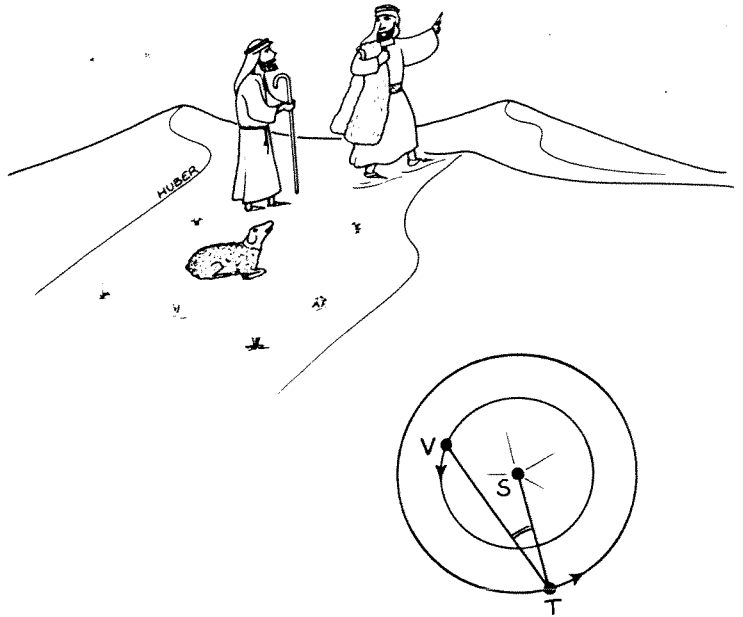
La planète Vénus, appelée Etoile du Berger est souvent visible au petit matin ou après le coucher du Soleil.

Comme la Terre, Vénus tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire, mais à une vitesse différente. Les orbites de la Terre et de Vénus sont à peu près coplanaires.

Les astronomes ont ainsi observé que l'angle \widehat{STV} varie au cours du temps, mais que sa valeur ne dépasse jamais une certaine valeur maximale.

Représenter l'orbite de la Terre par un cercle de 5 cm de rayon et de centre S. Placer la terre en un point T de son orbite. Construire l'orbite de Vénus, sachant que la valeur maximale de l'angle \widehat{STV} est égale à 46° .

Calculer le rayon de l'orbite de Vénus, sachant que $ST \approx 150 \times 10^6$ km.



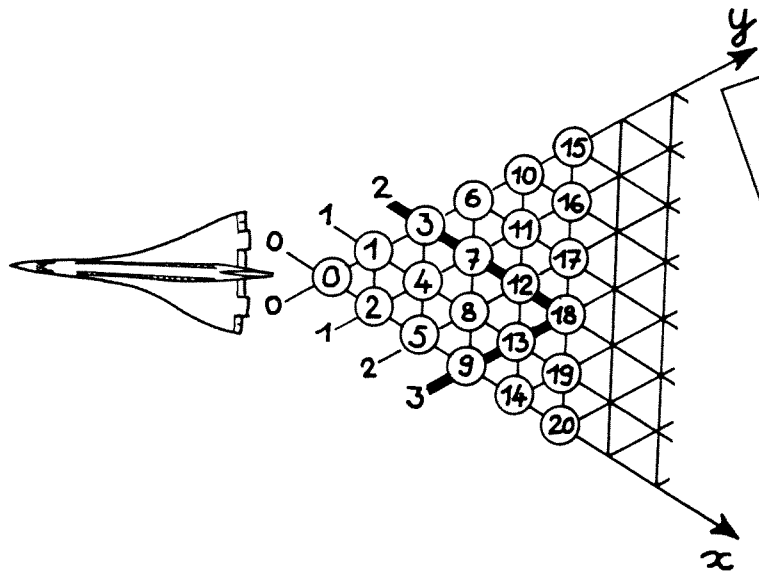
**exercice
n° 12
10 points**

Sur le réseau

On numérote les noeuds du réseau en suivant les diagonales, comme sur le dessin ci-contre.

Chaque noeud a des coordonnées, par exemple le noeud numéroté 18 a pour coordonnées (3 ; 2).

Quelles sont les coordonnées du noeud numéroté 1999? Justifier votre réponse.

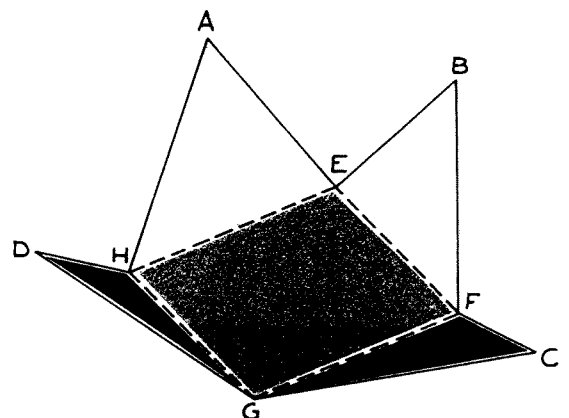


**exercice
n° 13
15 points**

Mystère pour une pyramide

Mercredi, Petit Pierre a décidé de s'amuser avec sa règle et son compas. Il trace sur un carton un carré ABCD de 10 cm de côté. Puis il trace les quatre quarts de cercle dont les centres sont les sommets du carré et qui relient des points diagonalement opposés du carré. Les arcs de cercles se coupent aux points E, F, G et H. Petit Pierre se demande alors si le polygone AEBFCGDH n'est pas le patron d'une pyramide.

Répondre à Petit Pierre en expliquant votre réponse. Si le polygone est un patron de pyramide, calculer sa hauteur.

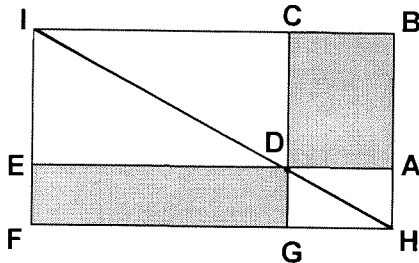




MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Indications de solutions pour l'épreuve du 11 mars 1999

Exercice n°1 10 points *Fax similé*



Construction :

- [DE] est dans le prolongement de [AD] ; en particulier $(CD) \perp (DE)$, donc on peut construire le point I tel que EDCI soit un rectangle.
- Puis on construit le point H d'intersection de (DI) et (AB).
- La perpendiculaire en H à (AB) coupe (CD) en G et (IE) en F. Comme $(AB) \parallel (CD) \parallel (IE)$ et $(HF) \parallel (AD) \parallel (BC)$ et $(AB) \perp (AD)$, les quadrilatères ADGH, BIFH et DEFG sont des rectangles.

Comparaison des aires des rectangles ABCD et DEFG :

Une diagonale partage un rectangle en deux triangles de même aire. Ainsi :

- Les triangles BHI et FHI ont même aire \mathcal{A}_1 .
- Les triangles HAD et HGD ont même aire \mathcal{A}_2 .
- Les triangles CDI et EDI ont même aire \mathcal{A}_3 .

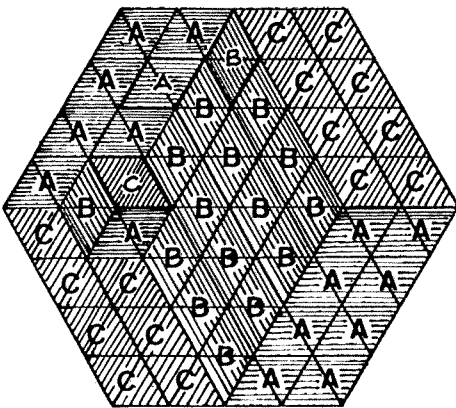
Donc les rectangles ABCD et DEFG ont même aire :
 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$

Exercice n°2 5 points *A l'inverse*

La règle énoncée est exacte pour toutes les fractions unitaires, paires ou impaires, car : $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2d} + \frac{1}{6d}$.

Mais pour les fractions unitaires paires, on remarque que : $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3n}$ (unitaire).

Exercice n°3 10 points *Calissons*



Le dessin, une fois colorié et orienté correctement, peut représenter des piles verticales de petits cubes de même taille placées dans un grand cube. Ces piles sont contiguës et forment un bloc sans trou.

- Les faces de dessus des petits cubes supérieurs de ces piles sont orientées de la même façon et sont donc de la même couleur.
- Par ailleurs, on peut éventuellement avoir sur la face de dessous du grand cube des losanges de cette couleur : ils correspondent à des piles absentes ou de hauteur nulle. En projetant tous ces losanges sur la face de dessous du grand cube, on obtient donc toute cette face, donc un total de 16 losanges.
- Même explication pour les deux autres couleurs, en tournant la feuille convenablement.

Exercice n°4 5 points *Ne pas avoir le jeton*

Après avoir enlevé un jeton, la somme S des chiffres des 8 autres jetons est divisible par 3 et par 4, donc par 12. Or $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, donc $S \leq 45$.

Et $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, donc $S \geq 36$.

La seule possibilité est donc $S = 36$, c'est à dire qu'il faut **enlever le jeton marqué du numéro 9**.

Effectivement : $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ (quatre tas)

$12 = 4 + 8 = 1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7$ (trois tas) (ou $12 = 4 + 8 = 1 + 2 + 3 + 6 = 5 + 7$).

Exercice n°5 10 points *Manque de repère*

Avec $A(3; 2)$ et $B(7; 5)$, on vérifie que $\vec{AB} = (4; 3)$ et que $AB = 5$ cm. Le cercle de centre A et de rayon 4 cm coupe le cercle de diamètre [AB] en deux points E et E'. Alors il y a deux solutions, correspondant à des repères de sens contraires :

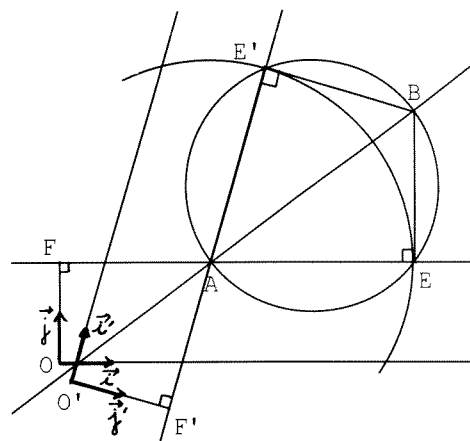
A partir de E, avec $\vec{AE} = (4; 0)$, on construit F tel que $\vec{FA} = (3; 0)$: F, A, E alignés dans cet ordre, et $AF = 3$ cm. Puis on construit le point O sur la perpendiculaire en F à (EF), tel que $OF = 2$ cm :

alors $\vec{OF} = (0; 2)$ et $\vec{i} = \frac{1}{4} \vec{AE}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3} \vec{EB}$ complètent le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) cherché, l'unité mesurant 1 cm.

On fait la même construction à partir de E'.

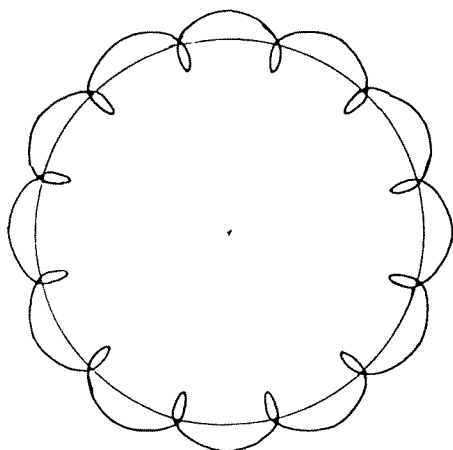
On observe que E, E' puis F, F' puis O et O' sont symétriques par rapport à (AB).

Si (O, \vec{i}, \vec{j}) est direct, alors (O', \vec{i}', \vec{j}') est rétrograde.



Exercice n°6 5 points *Code Enigma* DIXIEME ANNIVERSAIRE

Exercice n°7 10 points *Tout est relatif*



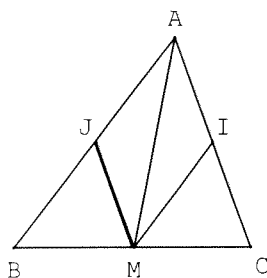
Exercice n°8 5 points *Rétrospective*

Entre la date de la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières et le 11 mars 1999, le nombre de jours écoulés est : $34768 - 31478 = 3290$.

Entre le 11 mars 1990 et le 11 mars 1999, il y a eu deux années bissextiles, 1992 et 1996, il s'est donc écoulé $9 \times 365 + 2 = 3287$ jours. On en déduit que la première épreuve de Mathématiques Sans Frontières a eu lieu le 8 mars 1990.

Et comme 3290 est divisible par 7, c'était, comme en 1999, un jeudi : **le jeudi 8 mars 1990**.

Exercice n°9 10 points *Couper Coller*



Soit M le milieu de [BC], J celui de [AB] et I celui de [AC].

On découpe le triangle ABM suivant la médiane [MJ].

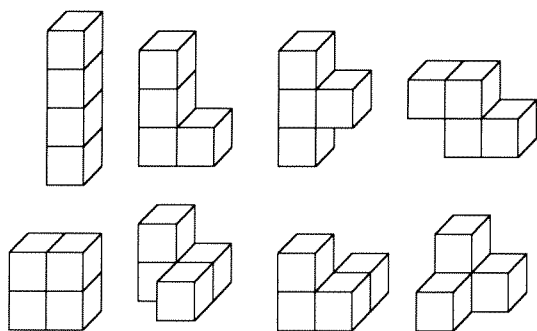
Justification :

D'après le théorème des milieux dans ABC, $\vec{JI} = \frac{1}{2} \vec{BC} = \vec{BM} = \vec{MC}$.

La translation de vecteur \vec{BM} transforme B en M, M en C et J en I, donc le triangle BMJ en le triangle MCI. Ces deux triangles sont superposables.

D'après le théorème des milieux dans ABC, $\vec{JM} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{AI}$ donc MIAJ est un parallélogramme, et $AI = MJ$ et $JA = MI$. Donc les triangles AJM et AIM sont superposables (par retournement).

Exercice n°10 15 points *Quadricubes*

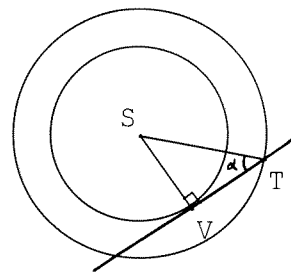


Il y a 8 quadricubes

Exercice n°11 5 points *Grand angle*

La valeur maximale de

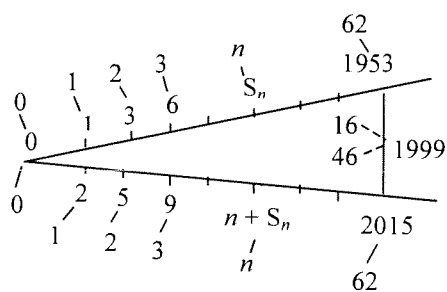
$\alpha = \widehat{STV}$ est obtenue lorsque $(SV) \perp (VT)$, c'est à dire lorsque (TV) est tangente à la trajectoire de V.



Le rayon de l'orbite de Vénus est $SV = ST \sin \alpha$ ($\alpha \approx 46^\circ$) $SV \approx 107\,900\,970 \text{ km}$.

N.B. Sur la figure, si ST est représenté par 5 cm, SV est représenté par environ 3,597 cm.

Exercice n°12 10 points *Sur le réseau*



$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sur la « diagonale » n figurent les entiers x tels que

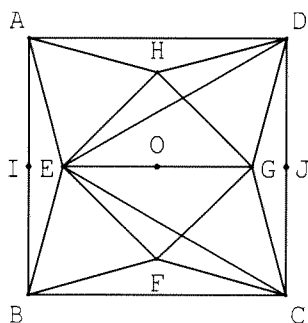
$$S_n \leq x \leq n + S_n.$$

On a : $S_{62} = 1953$, donc 1999 est sur la diagonale 62 ; or

$1999 - 1953 = 46$ qui est l'abscisse de 1999. La diagonale 62 aboutit à $S_{62} + 62 = 2015$; or $2015 - 1999 = 16$, qui est l'ordonnée de 1999.

On obtient : $(46 ; 16)$

Exercice n°13 15 points *Mystère pour une pyramide*



Soit O le centre du carré ABCD et I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

Le triangle CDE est équilatéral de côté 10 cm, donc $EJ = 5\sqrt{3}$ cm et $EI = 10 - 5\sqrt{3}$ cm.

D'après le théorème de Pythagore,

$$AE^2 = AI^2 + IE^2 = 25 + (10 - 5\sqrt{3})^2 = 200 - 100\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\boxed{AE = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}}. \text{ De même : } \boxed{AH = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}}.$$

$$\text{On a : } \boxed{OE = OI - IE = 5 - (10 - 5\sqrt{3})}. \quad \boxed{OE = OH = 5\sqrt{3} - 5 \text{ cm}}.$$

D'après le théorème de Pythagore, $EH^2 = EO^2 + OH^2$, donc : $EH^2 = 2(5\sqrt{3} - 5)^2$

et $EH^2 = 200 - 100\sqrt{3} = AE^2$. Le triangle AEH est équilatéral de côté $10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm.

Il en est de même des triangles DHG, CGF et EBF : la pyramide considérée existe car $AE > OE$. Elle est régulière et son sommet S se projette en O. Sa hauteur est h telle que : $h^2 = SE^2 - OE^2$; $SE = AE = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$$\text{On a : } h^2 = (200 - 100\sqrt{3}) - (100 - 50\sqrt{3}) = 100 - 50\sqrt{3} = 25(4 - 2\sqrt{3}). \quad \boxed{h = 5\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \text{ cm} \approx 3,66 \text{ cm}}.$$

2^{ème} méthode

Le triangle ABG est équilatéral donc $\widehat{BAG} = 60^\circ$ donc $\widehat{DAG} = 30^\circ$, puis $\widehat{ADG} = 75^\circ$ et $\widehat{GDC} = 15^\circ$; de même $\widehat{ADH} = 15^\circ$, puis $\widehat{HDG} = 60^\circ$: le triangle HDG est équilatéral, de même que les triangles AHE, BEF et CFG ; Le quadrilatère EFGH est un losange ayant un angle droit, c'est un carré. On a : $EO = \frac{AE}{\sqrt{2}} < EA$, donc on obtient une pyramide.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 1999-2000

11^{ème} édition



Les exercices n° 2, 3, 4, 6 et 8 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

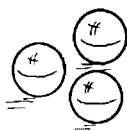
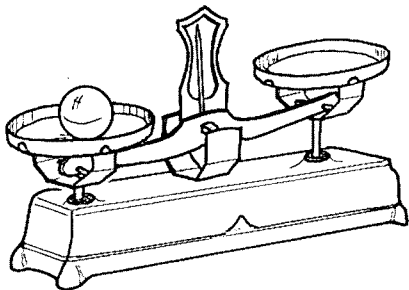
EXERCICE N°1



Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots)

DEUX POIDS, DEUX MESURES

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa mas o menos que los demas. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar



masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demas en solo dos pesadas.

¿Como tiene que proceder ?

Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A, B, C e D. Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa diferente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più leggera delle altre. Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve determinare la biglia che è diferente delle altre in due pesate al massimo.

Come deve procedere ?

Antoine has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. 3 of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He doesn't know if this marble is heavier or lighter than the others. Antoine has only got scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of 2 weighings.

How does he have to proceed ?

Antoine hat vier Murmeln, die mit A, B, C und D bezeichnet sind, sonst aber völlig gleich aussehen. Drei dieser Murmeln haben die gleiche Masse. Die Masse der vierten Murmel unterscheidet sich von der Masse der anderen. Er weiß jedoch nicht, ob diese Murmel leichter oder schwerer als

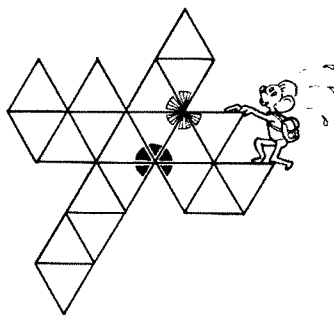
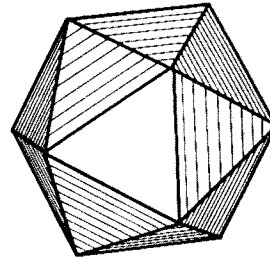
die anderen ist. Antoine besitzt eine Balkenwaage, mit deren Hilfe er nur die Massen vergleichen kann. Mit höchstens zwei Wägungen kann er feststellen, welche der vier Murmeln sich von den anderen unterscheidet.

Wie muss er dabei vorgehen ?

EXERCICE N°2



RÉUNION AU SOMMET



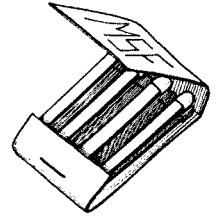
L'icosaèdre est un polyèdre régulier à 12 sommets et 20 faces qui sont des triangles équilatéraux.

Reproduire le patron ci-dessus sur la feuille-réponse, puis, comme sur le patron, marquer de la même façon (couleur,...) les angles des triangles dont les sommets se confondent avec l'un des sommets de l'icosaèdre.

EXERCICE N°3



TOPO LOGIQUE



Avec un nombre donné d'allumettes on réalise sur une table des assemblages avec les règles suivantes :

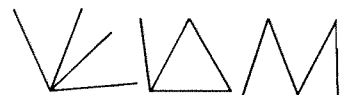
- * Chaque allumette en touche au moins une autre par une extrémité.
- * Les contacts ne peuvent se faire qu'aux extrémités. Deux assemblages sont considérés comme identiques si on peut passer de l'un à l'autre en déplaçant des allumettes sans les soulever et en gardant les contacts. Par exemple, voici deux assemblages identiques :



Ainsi, il n'y a que 3 façons d'assembler 3 allumettes :



Et 5 façons d'en assembler 4 :



De combien de façons peut-on assembler 5 allumettes ? Réaliser les figures correspondantes.

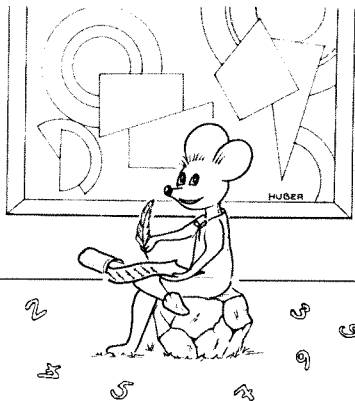
PREUVE D'ENTRAÎNEMENT

EXERCICE N°4

5 points

ODI-MATH

On lui doit qu'il n'y a pas
De fraction de carré égal
à deux,
Pour multiplier une table
Plusieurs fois formidable
Et un théorème par trop
fameux
Pour son nom vous
n'hésitez pas.



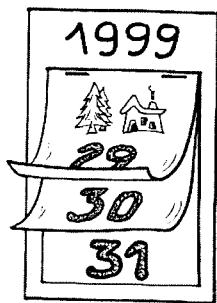
Par $(16/9)^2$
en Egypte on m'approcha
Puis la course des siècles fut
Aussi celle à mes décimales :
Plus d'un milliard au
compteur aujourd'hui !
Par bonheur vous m'écrirez
autrement
Moi l'aire du disque
de rayon 1.

**De qui ou de quoi
parle chacun de ces
deux textes ?
Ecrire sur le même
principe un texte
poétique en rapport
avec les mathéma-
tiques.**

EXERCICE N°5

10 points

COURSE AUX ÉTRENNES



Grégoire et Juliette jouent
avec les dates d'une même
année. Celui qui commence
donne le numéro d'un jour
de janvier, par exemple le
6 janvier. Ensuite, chaque
joueur à son tour donne une
date ultérieure mais en
conservant soit le numéro du
jour, soit le mois de la date



que vient de donner l'autre
joueur.
Par exemple, après
le 6 janvier, il est possible
de dire 10 janvier, 20 janvier
ou 6 février, 6 avril,
6 septembre...
Le vainqueur est le premier
qui dit «31 décembre».

**Après quelques
parties, Juliette
affirme qu'il existe
une stratégie qui
permet de gagner à
coup sûr. Expliquer
cette stratégie.**

EXERCICE N°6

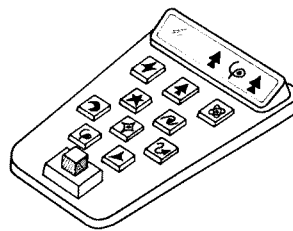
5 points

CALCUBATRICE

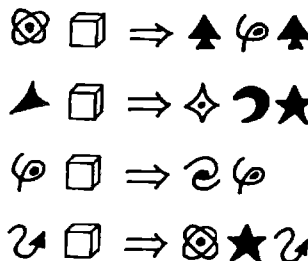
Sur la planète Xcyzq tout
est de forme cubique.
Les habitants utilisent le
même système décimal que
nous mais avec 10 symboles
différents des nôtres.
Ils ne connaissent que
l'opération d'élévation
au cube.

Ci-dessous est dessinée une
de leurs calculatrices appelée
calculatrice.

Elle a 10 touches pour leurs
chiffres et une onzième pour
l'élévation au cube.



Voici 4 opérations faites avec
cette calculatrice :



**Faire correspondre
les symboles avec
nos chiffres de 0 à 9.**

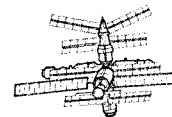
EXERCICE N°7

10 points

MIR

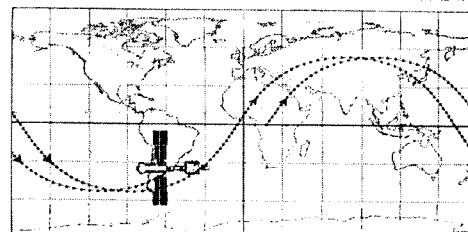


La station MIR tourne autour
de la Terre sur une orbite
quasi circulaire inclinée
par rapport au plan de
l'équateur.



Boris est surpris de découvrir
en temps réel la trace de ce
mouvement sur l'écran de son
ordinateur : il est 10h23min
à Paris et MIR se trouve
au-dessus de Buenos Aires.
MIR fait le tour de la Terre
en 91 minutes : elle survole
l'équateur toutes les 45
minutes et demie. Les traces
de ses passages successifs

HOUSTON 02:23:00 PARIS: 10:23:00 MOSCOW: 11:23:00



MIR REALTIME DATA

Latitude: 36.33 deg
Longitude: -57.79 deg
Altitude: 328.73 km
Speed: 7704.38 mps

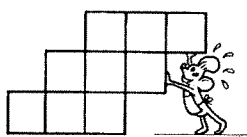
sont décalées à cause du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

Dessiner sur la feuille-réponse (carte ci-jointe) la suite de la trace de MIR jusqu'à ce qu'elle survole la France, puis donner une estimation de l'heure de passage au-dessus de Paris.

EXERCICE N°8



NOMBRES GRILLÉS



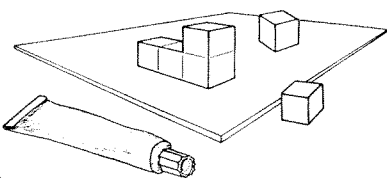
Numéroter les neuf cases de 1 à 9 de façon que dans n'importe quelle ligne, colonne et diagonale, on n'ait jamais deux entiers consécutifs.

EXERCICE N°9



LES COLLES DES CUBES

Wczxop, habitant de la planète Xcyzq, dispose de cubes de 1 cm d'arête. Il colle le premier cube sur une planche par une de ses faces puis il prend un deuxième cube qu'il colle au premier par une de



ses faces, ce cube pouvant éventuellement être aussi collé sur la planche, et ainsi de suite : chaque nouveau cube est collé par une seule de ses faces à une face de l'un des cubes précédents, avec éventuellement une autre de ses faces collée sur la planche.

A la fin, Wczxop trouve 30 cm^2 pour l'aire extérieure de l'assemblage.

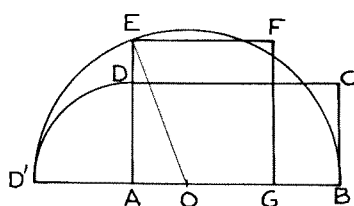
De combien de cubes l'assemblage est-il formé ? Dessiner un tel assemblage sur la feuille-réponse. Justifier la réponse.

EXERCICE N°10



QUADRATURE

«Quarrer un rectangle», c'est construire à la règle et au compas un carré de même aire.



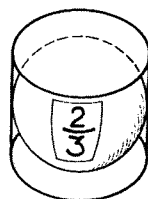
Voici la méthode d'Euclide pour carrer le rectangle ABCD de longueur AB égale à x et de largeur AD égale à y. On rabat le segment [AD] sur la droite (AB) pour obtenir le segment [AD']. On construit le demi-cercle de diamètre [D'B] situé du côté de D. On construit le carré AGFE, E appartenant au demi-cercle. **Justifier que ABCD et AGFE ont la même aire.**

EXERCICE N°11

SPÉCIAL SECONDE



ARCHI-CONNU



Gravée sur la tombe d'Archimède, la figure ci-dessus illustre une propriété démontrée par lui.

Enoncer cette propriété et la démontrer.

(D'après le roman <«Le Théorème du Perroquet» de Denis Guedj)

EXERCICE N°12

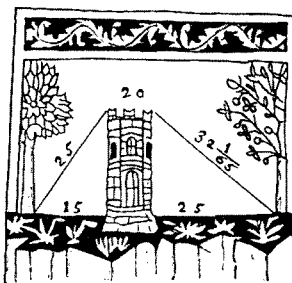
SPÉCIAL SECONDE



À UN POIL PRÈS

Le document ci-dessous est extrait de «Compendion Del Abaqos», écrit en langue occitane par Frances Pelos en 1492.

Camille et David qui n'ont pas de calculatrice essayent de comprendre la valeur $32 \frac{1}{65}$ proposée par Frances Pelos.



Camille : «C'est facile. Je sais calculer l'hypoténuse du triangle de droite.»

David : « $32^2=1024$ et $33^2=1089$ et il reste à passer de 1024 à 1025.»

Justifier l'affirmation de Camille et terminer la méthode commencée par David pour retrouver $32 \frac{1}{65}$.

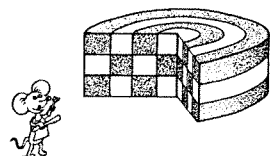
EXERCICE N°13

SPÉCIAL SECONDE



UN DESSERT POUR FINIR

Le gâteau de Mamie est superbe et plein de surprises. Quand on le coupe, on découvre qu'elle s'est donné bien du mal à le faire !



Il est formé de deux pâtes différentes : l'une est à la vanille et l'autre au chocolat. Il comprend trois étages de même hauteur. Le moule qui a permis de le faire est circulaire. Le damier qu'on obtient sur la tranche est constitué de 12 rectangles de mêmes dimensions. Il suffit de le regarder pour en avoir un avant-goût !

En comptant les rectangles blancs et les rectangles noirs, un de ses petits-fils, Gaston, s'exclame : «Tiens, on dirait que dans le gâteau il y a autant de vanille que de chocolat.»

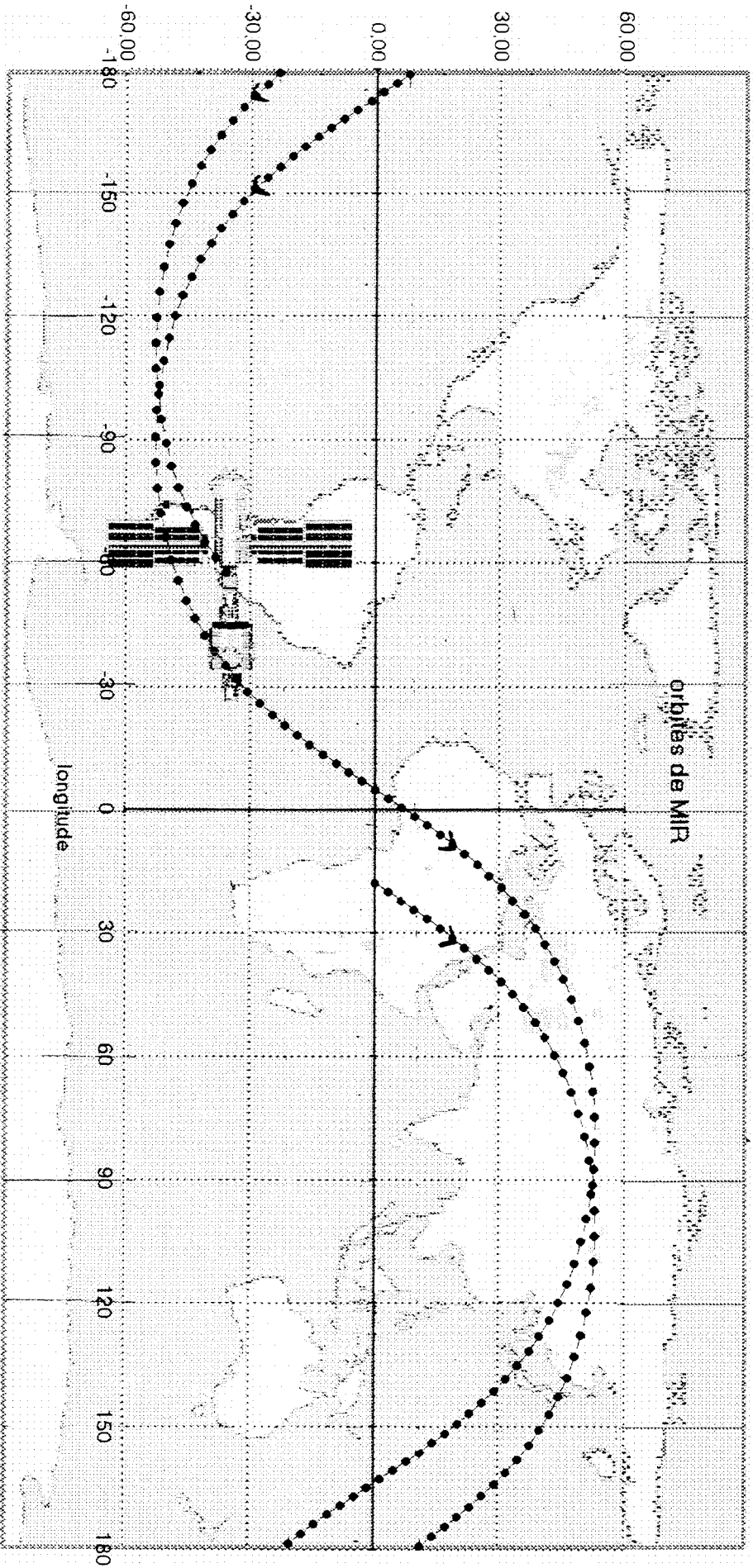
Gaston a-t-il raison ? Justifier la réponse.



HOUSTON 02:23:00

PARIS: 10:23:00

MOSCOW: 12:23:00



I
a
t
t
i
t
u
d
e

MIR REALTIME DATA

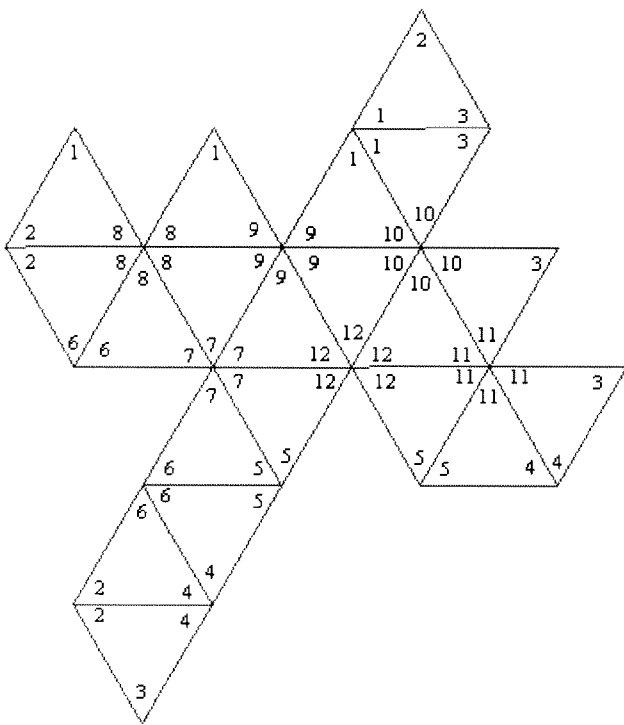
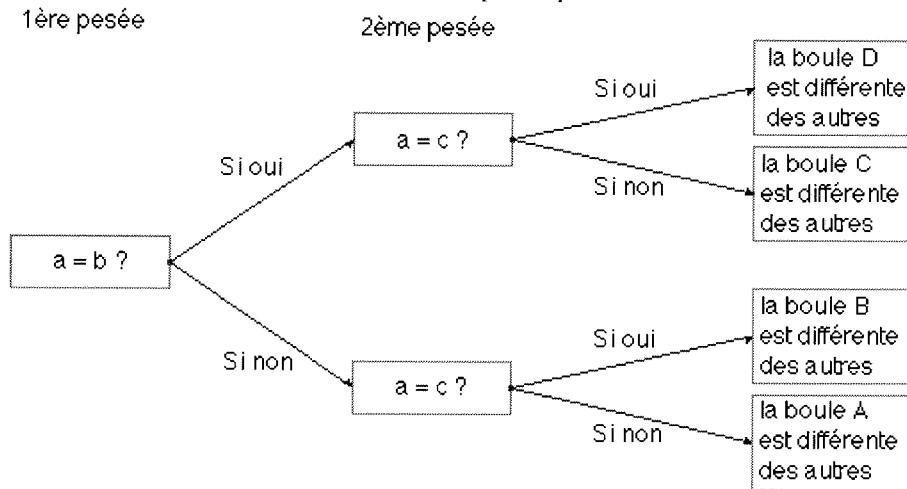
Latitude: - 36.03 deg
Longitude: - 57.79 deg
Altitude: 328.73 km
Speed: 7704.38 mps

Les points de la trajectoire donnent la position de MIR minute par minute.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES 2000
Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 1999

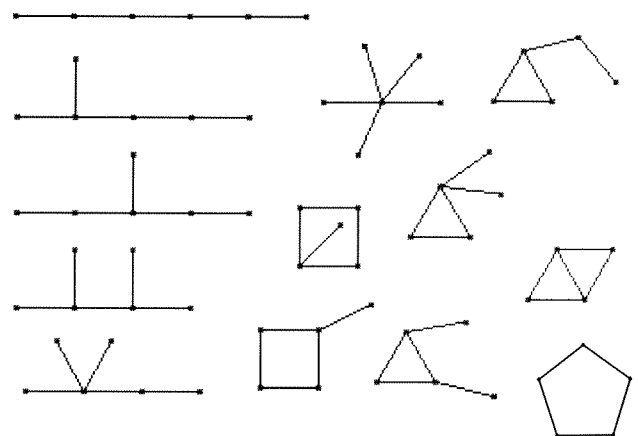
Exercice 1

Notons a, b, c et d les masses des boules A, B, C et D. Les deux pesées peuvent se résumer ainsi :



Exercice 3

On peut réaliser 13 figures différentes :



Exercice 4

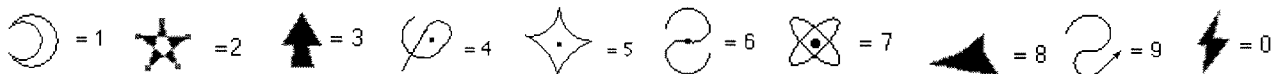
Le premier texte parle de **Pythagore** et le deuxième texte parle du nombre π (**pi**).

Exercice 5

Il faut jouer en commençant par le **20 janvier** puis passer au 21 février, 22 mars, 23 avril, 24 mai, 25 juin, 26 juillet, 27 août, 28 septembre, 29 octobre, 30 novembre et enfin 31 décembre.

Exercice 6

La première opération correspond à $7^3 = 343$, la deuxième opération correspond à $8^3 = 512$, la troisième opération correspond à $4^3 = 64$ et la quatrième et dernière opération correspond à $9^3 = 729$. La correspondance des symboles est donc la suivante :



Exercice 7

En partant de Buenos Aires, pour arriver à la latitude de Paris, il faut environ 30 minutes (on compte 45 points entre 2 passages successifs à l'équateur d'où 90-91 points pour 91 minutes soit 1 point par minute). Ensuite Mir doit faire encore un tour complet autour de la terre pour arriver sur le méridien de Paris. En tout Mir mettra donc $30 + 91 = 121$ minutes soit environ 2 heures.

Mir survolera donc la France vers 12h 23 min – 12h 24 min. (Remarque : « Mir » signifie « paix » en russe.)

Exercice 9

Le premier cube collé présente 5 faces visibles. Si le cube suivant est aussi collé à la table, le nombre de faces visible augmente de 3. S'il n'est pas collé à la table, le nombre de faces visibles augmente de 4. Et ainsi de suite.

Notons x le nombre de cubes du premier type et y celui du second type; on doit avoir $5 + 3x + 4y = 30$ soit $3x + 4y = 25$.

On trouve les **deux solutions** :

$x = 7$ et $y = 1$ ce qui correspond à **un total de 9 cubes** dont 8 (= 7 + 1) collés sur la table (figure 1)

et $x = 3$ et $y = 4$ ce qui correspond à **un total de 8 cubes** dont 4 (= 3 + 1) collés sur la table (figure 2).

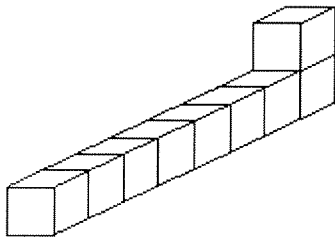


figure 1

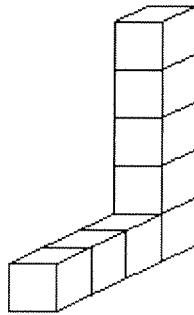


figure 2

Exercice 8

		1	8	6
	7	5	3	
4	2	9		

Exercice 10

On a $BD' = x + y$ (diamètre) donc $OE = \frac{x+y}{2}$ (rayon). $OA = OD' - AD' = \frac{x+y}{2} - y = \frac{x-y}{2}$.

Dans le triangle OAE rectangle en A, $AE^2 = OE^2 - OA^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{4xy}{4} = xy$

Comme AE^2 est l'aire du carré AGFE et xy est celle du rectangle ABCD, on a bien $Aire_{ABCD} = Aire_{AGFE}$.

Exercice 11

Le volume d'une boule inscrite dans un cylindre (boule tangente aux bases du cylindre et à la surface latérale) est égal

aux $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre. $Volume\ cylindre = aire\ de\ la\ base \times hauteur = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$; $Volume\ boule = \frac{4\pi R^3}{3}$

On a bien $Volume\ boule = \frac{2}{3} \times Volume\ cylindre$ en effet $\frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4\pi R^3}{3}$. (Propriété découverte par Archimède)

Il existe une autre solution : L'aire de la boule est égale $\frac{2}{3}$ de l'aire totale du cylindre. En effet : $Aire\ boule = 4\pi R^2$

$Aire\ totale\ du\ cylindre = aire\ des\ 2\ bases + aire\ de\ la\ surface\ latérale = 2 \times \pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

On a bien $Aire\ boule = \frac{2}{3} \times Aire\ cylindre$ en effet $\frac{2}{3} \times 6\pi R^2 = 4\pi R^2$.

Anecdote : Cette propriété découverte et démontrée par Archimède sur les volumes lui plut tellement qu'il a demandé que la figure correspondante soit gravée sur sa tombe, ce qui a été fait en 212 avant J.-C. sur ordre du général Marcellus. Et c'est ce qui permit au grand Cicéron, plus d'un siècle plus tard, de retrouver cette tombe oubliée de tous.

Exercice 12

Affirmation de Camille : L'hypoténuse du triangle de droite mesure $\sqrt{(25^2 + 20^2)} = \sqrt{1025}$.

Méthode de David : On admet que les accroissements de x et x^2 sont proportionnels (cf. interpolation linéaire)

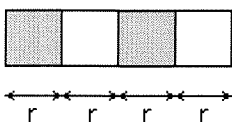
		÷65
	↪	
accroissement de x	$33 - 32 = 1$	$1/65$
accroissement de x^2	$1089 - 1024 = 65$	$1025 - 1024 = 1$
	↪	÷65

Comme $\sqrt{1024} = 32$, on a donc $\sqrt{1025} \approx 32 \frac{1}{65}$.

Exercice 13

* En échangeant les parts de vanille et de chocolat des 2 couches supérieures on se ramène à une couche de vanille et à une de chocolat : il y a donc autant de vanille que de chocolat sur les 2 couches supérieures.

* Il reste à comparer les volumes de pâte à la vanille et au chocolat sur la couche inférieure.



Il suffit de comparer les aires des bases des parties chocolat et vanille.

Pour la vanille : $\pi r^2 + \pi(9r^2 - 4r^2) = 6\pi r^2$

Pour le chocolat : $\pi(4r^2 - r^2) + \pi(16r^2 - 9r^2) = 10\pi r^2$

Le gâteau comporte donc plus de chocolat que de vanille : **Gaston a tort**.

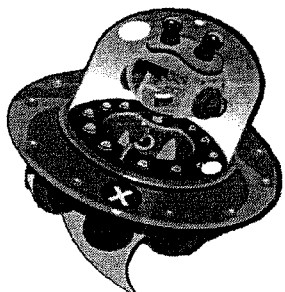


ACADEMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de
l'enseignement des
Mathématiques
Inspection Pédagogique
Régionale de
Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Compétition interclasses de 3^e & 2^{de}

Mathématiques sans frontières



EPREUVE DU 14 MARS 2000

- ☞ Les exercices n°4, 8 et 9 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée.
- ☞ Le soin sera pris en compte.
- ☞ Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

exercice
n° 1
10 points

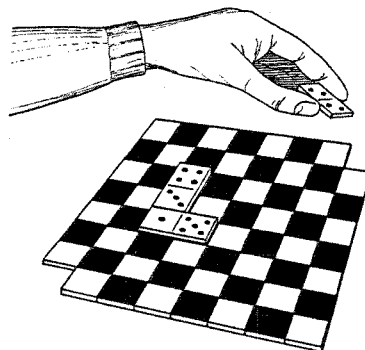
Echecs aux dominos

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots

Bei einem Schachbrett entfernt man zwei schwarze Felder, die in gegenüberliegenden Ecken liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auf die restlichen Felder verteilt man 30 Dominosteine, wobei jeder Stein genau zwei Felder bedeckt. Zuletzt bleiben zwei Felder frei.

Haben diese Felder die gleiche Farbe? Begründe deine Antwort.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram opposite. 30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered. **Say whether or not these squares are the same colour? Justify your answer.**



En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura al lado. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes: cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

¿ Son del mismo color estas casillas? Justifica tu respuesta.

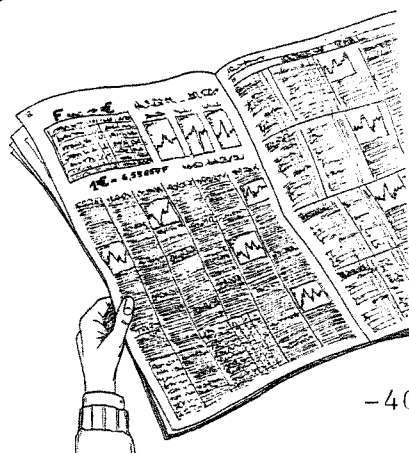
Si tolgono due caselle nere situate negli angoli opposti di una scacchiera, come nella figura a fianco.

Si pongono 30 domino sulle caselle restanti. Ogni domino copre esattamente due caselle. Rimangono due caselle scoperte.

Queste caselle sono dello stesso colore? Giustificare la risposta.

exercice
n° 2
5 points

Poussières d'euros



Le cours de l'euro a été fixé à : 1 euro = 6,55957 F
Pour convertir en euros une somme de plusieurs prix donnés en francs, on a le choix entre deux possibilités :

- Soit convertir cette somme en euros et arrondir le résultat au centième d'euro.
- Soit convertir chaque prix en euros, arrondir le résultat au centième d'euro puis additionner ces arrondis.

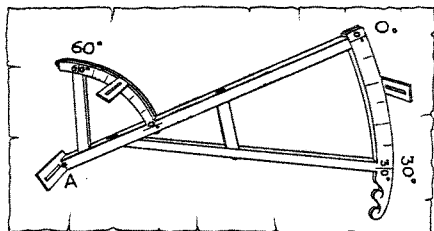
Montrer sur un exemple que ces deux méthodes peuvent conduire à des résultats différents.

**exercice n° 3
10 points**

Quartier de Davis

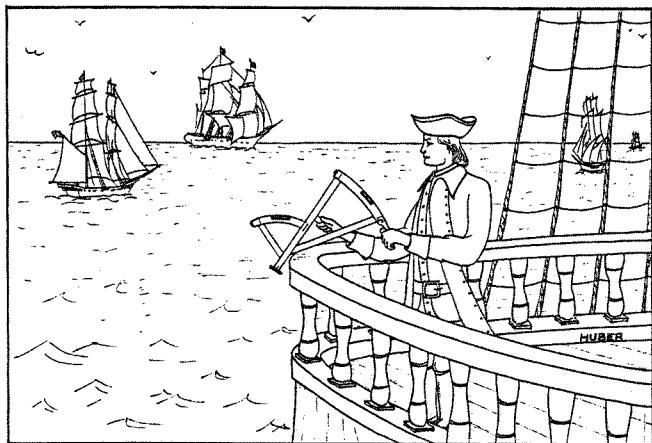
Vers 1590 un marin anglais, John Davis, mettait au point, à partir de l'arbalète, un instrument qui porta son nom : le Quartier de Davis. Il permettait de calculer la hauteur du soleil en degrés d'angle. Ce fut un tel progrès que tous les navigateurs l'utilisèrent jusqu'au milieu du 18^{ème} siècle.

Cet appareil était constitué d'une baguette sur laquelle étaient fixés deux arcs de cercle. L'arc de cercle supérieur était gradué de 0° à 60°, l'arc inférieur de 0° à 30°. Sur les deux arcs de cercle de même centre A, deux fentes coulissaient.



Pour effectuer la mesure, l'observateur tournait le dos au soleil et maintenait l'instrument dans un plan vertical. Ses rayons passaient à travers la fente de l'arc de cercle supérieur et venaient éclairer une fente horizontale située en A à l'extrémité de la baguette. Dans le même temps, l'observateur visait par la fente de l'arc de cercle inférieur l'horizon à travers cette même fente.

Représenter l'observateur mesurant la hauteur du soleil avec un quartier de Davis et expliquer le calcul de cette hauteur (en degrés d'angle).

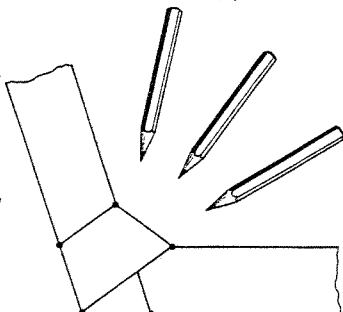


**exercice n° 4
5 points**

Nœud de couleur

Avec une bande de papier de 4 cm de large, faire un nœud comme sur la figure ci-dessous. Ce nœud fait apparaître un pentagone.

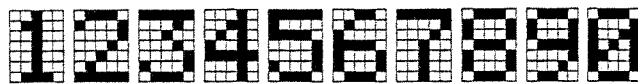
Colorier de la même couleur toutes les parties du pentagone qui comptent le même nombre de couches de papier. Coller le nœud colorié sur la feuille réponse.



**exercice n° 5
10 points**

Pixels

Ma calculatrice affiche le nombre 1 234 567 890 sur l'écran en allumant des pixels. Par exemple, il faut allumer 19 pixels pour afficher le chiffre 0 et 21 pixels pour le nombre 17. Un nombre entier non nul ne commence pas par 0.



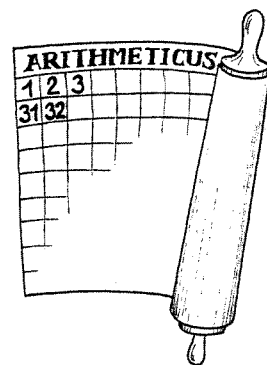
Trouver un nombre pour lequel le nombre de pixels allumés est égal au nombre affiché. Est-ce le seul ? Justifier.

**exercice n° 6
5 points**

5^{ème} colonne

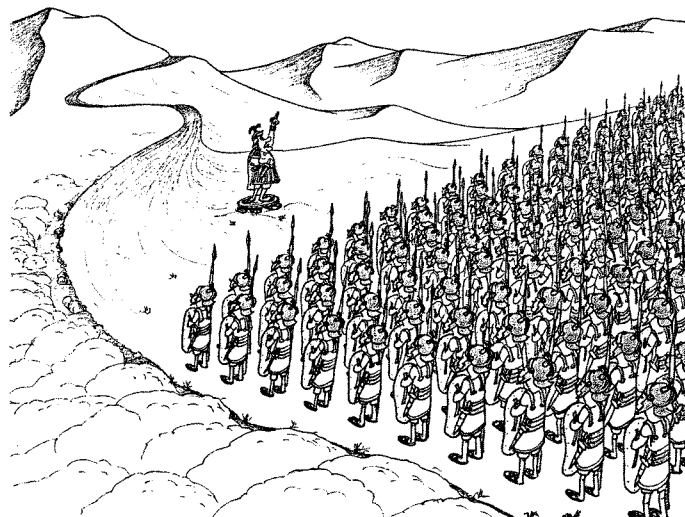
Dans l'armée romaine on ne badine pas avec l'ordre. Chaque légionnaire porte un numéro qui lui permet de connaître sa place et qu'il conserve toujours.

Le général Arithméticus a rassemblé ses 990 légionnaires et les a rangés en un rectangle de 33 lignes et 30 colonnes. Il remplit successivement chaque ligne comme sur la figure ci-dessous. Hocus et Pocus sont dans la 5^{ème} colonne et aucun n'est en première ligne.



Mais Arithméticus est rappelé à Rome et le général Calculus prend le commandement des troupes. Il les repositionne de la même manière en un rectangle de 30 lignes et 33 colonnes. Hocus et Pocus sont encore dans la 5^{ème} colonne.

Quels sont leurs numéros ? Expliquer la réponse.

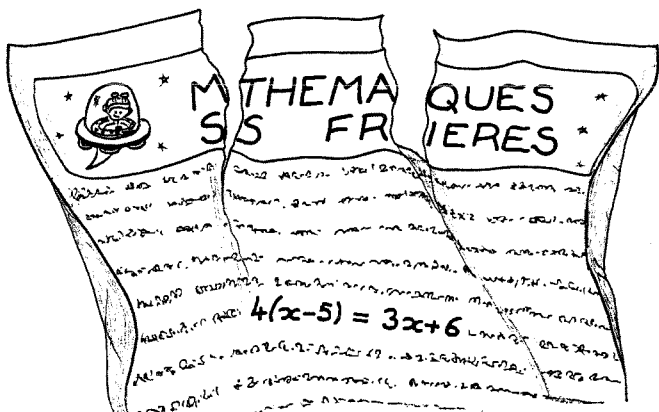


exercice n° 7
10 points

Retour vers le futur

En l'année 20000, un antiquologue trouvera un fossile en très mauvais état de ce qui s'avèrera avoir été une feuille de papier. Il réussira à déchiffrer en haut de la page les lettres "M.THEMA...QUES S...S FR...IERES", en dessous un texte d'une dizaine de lignes totalement illisible car détruit par le temps, puis une équation : $4(x - 5) = 3x + 6$. Après avoir consulté les spécialistes de la période post-protohistorique, l'antiquologue comprend qu'il s'agit de l'énoncé d'un problème de mathématiques d'un célèbre concours et de sa solution.

Rédiger sur la feuille réponse le texte qui sera trouvé dans 18000 ans. Pour cela, il faut inventer un énoncé puis rédiger sa solution qui contient l'équation trouvée par l'antiquologue.



exercice n° 8
5 points

Polyèdre oublié

Pierre dit "Tiens, j'ai fabriqué un solide qui a 6 faces."

Jean : "Mais je le connais, c'est un cube ! Il a 6 faces et 8 sommets."

Pierre : "Ah non, mon solide n'a que 5 sommets et donc 9 arêtes."

Jean : "Mais alors les faces ne sont pas carrées ?"

Pierre : "Non bien sûr, ce ne sont que des triangles équilatéraux."

Jean : "Alors je sais aussi le fabriquer."



Sur la feuille-réponse dessiner un patron et une représentation en perspective de ce solide. Quel est son nom ?

exercice n° 9
10 points

Cyclométrie

Soit un cercle de centre O.

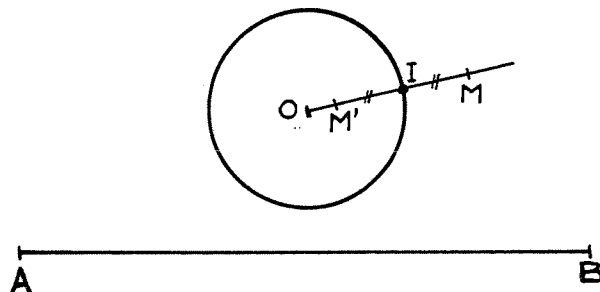
Voici comment obtenir le point symétrique d'un point M différent de O par rapport à ce cercle :

- On trace la demi-droite [OM) qui coupe le cercle au point I.

- Le symétrique M' de M par rapport à I est le symétrique de M par rapport au cercle.

Construire point par point le symétrique du segment [AB] par rapport au cercle.

Données : OA = OB = 11,5 cm, AB = 22 cm, Rayon = 2,5 cm.

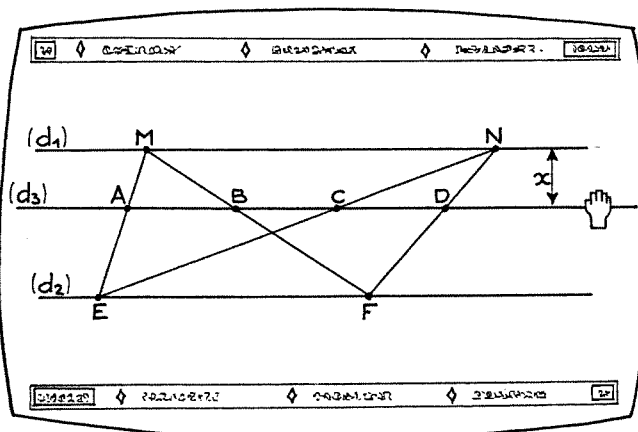


exercice n° 10
15 points

Liberté Égalité

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées.

Démontrer que $AB = CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



Spécial seconde

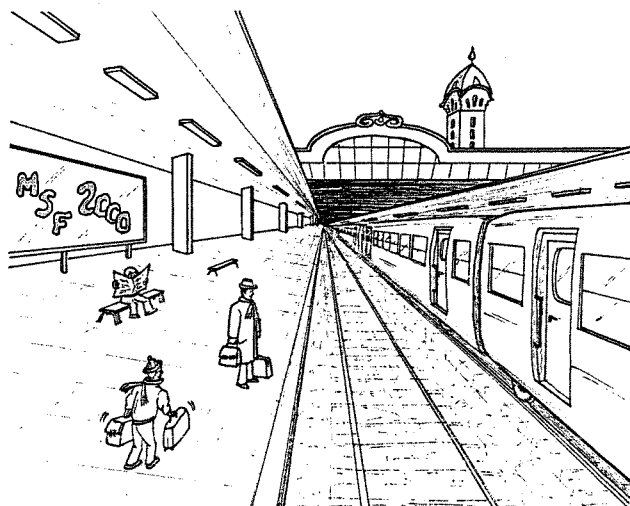
**exercice
n° 11
5 points**

Dans les temps

Immobile sur le quai de la gare d'Hère, Hansi observe :

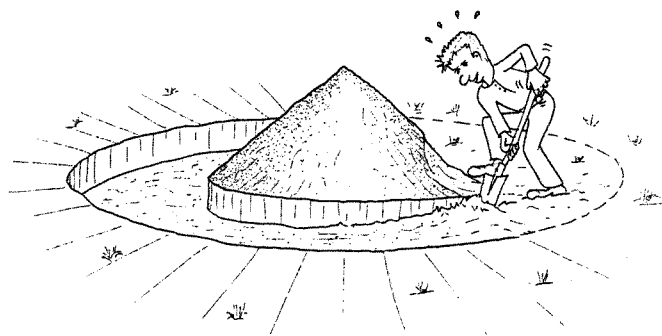
- ▶ Qu'un train a mis 6 secondes pour passer devant lui en roulant à vitesse constante,
- ▶ Qu'il se passe 23 secondes entre le moment où la locomotive de ce même train passe devant le début du quai et le moment où le dernier wagon quitte la fin du quai long de 340 m.

Calculer la vitesse et la longueur de ce train.



**exercice
n° 12
10 points**

Petit sablé



Pour réaliser un tas de sable, Albert creuse un fossé dont les parois sont verticales et dont la base est délimitée par deux cercles dont l'un a un rayon double de l'autre. Avec tout le sable extrait il forme au milieu un cône de révolution dont la base coïncide parfaitement avec le disque autour duquel il a creusé.

Tout à coup, le père d'Albert lui demande de s'arrêter de creuser et constate : " Le tas de sable a la forme d'un cône de révolution. En plus, si tu te tiens debout au fond du fossé, le sommet du tas de sable est exactement à la même hauteur que le sommet de ta tête ". À ce moment précis, le fossé creusé par Albert a 15 cm de profondeur.

Quelle est la taille du jeune Albert ? Justifier la réponse.

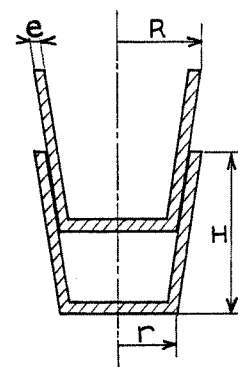
**exercice
n° 13
15 points**

Question de pot

Voici la coupe de deux pots identiques empilés. Pendant l'hiver, on empile 10 pots vides identiques à ceux-ci.

Quelle est la hauteur exacte de la pile ? Justifier la réponse.

Données : $R = 9$ cm, $r = 5$ cm, $H = 18$ cm, $e = 0,5$ cm.



Corrigé de l'épreuve définitive de MARS 2000

Exercice 1 :

L'échiquier compte normalement 64 cases (= 8 × 8) dont 32 noires et 32 blanches. Etant donné qu'on lui a enlevé deux cases noires, il ne reste que 30 cases noires et 32 blanches. Un domino recouvre exactement deux cases adjacentes donc une case noire et une blanche. Les 30 dominos posés recouvrent par conséquent 30 cases noires et 30 cases blanches. **Les 2 cases restantes sont donc de la même couleur** : elles sont blanches.

Exercice 2 :

Voici un exemple parmi d'autres : on considère les prix suivants 1 F et 2 F respectivement convertis à 0,15 e et 0,30 e. La somme des prix convertis est donc égale à **0,45 e**. Par contre, la somme des prix 3 F convertie en euros donne **0,46 e**. Les deux méthodes peuvent donc conduire à des résultats différents.

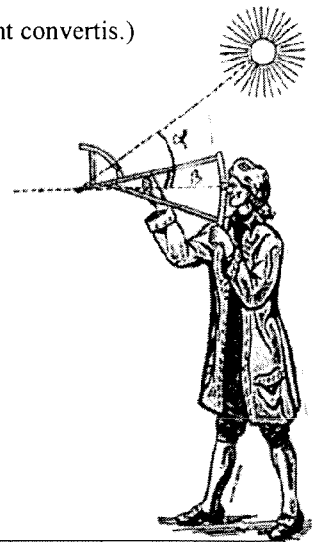
(La méthode qui s'applique en réalité est celle qui consiste à faire la somme des prix initialement convertis.)

Exercice 3 :

Dans un premier temps l'observateur plaçait la fente de l'arc supérieur sur une certaine valeur α ; il ajustait ensuite l'inclinaison de l'instrument de façon que les rayons du Soleil arrivent en A ; simultanément, il pointait l'horizon à travers la fente de l'arc inférieur et relevait alors la mesure β .

La hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon est obtenue en additionnant les angles α et β .

Remarque : En fait, l'arc de cercle supérieur pouvait se contenter de graduations espacées de 5 à 10 degrés. L'arc inférieur sur lequel la visée était faite pouvait, pour sa part, être agrandi par l'accroissement de son rayon, ce qui avait pour effet d'augmenter le nombre de graduations et donc d'améliorer la précision de la mesure.



Exercice 5 :

chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
nombre de pixels allumés	10	14	14	14	17	15	11	17	15	19

Pour chaque chiffre, le nombre de pixels est compris entre 10 et 19.

Pour un entier à deux chiffres, le nombre de pixels allumés est donc compris entre 20 et 38 ; parmi ces entiers, la seule solution est 29 ($29 = 14 + 15$).

nombre	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
nombre de pixels allumés	33	24	28	28	28	31	29	25	31	29	33	24	28	28	28	31	29	25	31

Un entier ayant n chiffres s'affiche avec au maximum $19n$ pixels et ce nombre est supérieur ou égal à 10^{n-1} ; or pour tout entier $n \geq 3$, $19n < 10^{n-1}$. **29 est donc la seule solution.**

Remarque : Les nombres de la forme "ab" et "ba" sont affichés avec le même nombre de pixels. On peut donc laisser de côté 21 et 31 qui correspondent à 12 et 13 déjà éliminés. Ainsi que 32 après avoir éliminé 23.

Exercice 6 :

Une méthode (qui sera vraisemblablement celles des élèves) consiste à dresser la liste des numéros des soldats rangés dans la 5^{ème} colonne pour chacune des deux dispositions.

Ceux de la 5^{ème} colonne d'Arithmétique ont leurs numéros qui partent de 5 et vont de 30 en 30 soit : 5 – 35 – 65 – 95 – 125 – 155 – 185 – 215 – 245 – 275 – 305 – 335 – 365 – 395 – 425 – 455 – 485 – 515 – 545 – 575 – 605 – 635 – 665 – 695 – 725 – 755 – 785 – 815 – 845 – 875 – 905 – 935 – 965.

Ceux de la 5^{ème} colonne de Calculus ont leurs numéros qui partent de 5 et vont de 33 en 33 soit : 5 – 38 – 71 – 104 – 137 – 170 – 203 – 236 – 269 – 302 – 335 – 368 – 401 – 434 – 467 – 500 – 533 – 566 – 599 – 632 – 665 – 698 – 731 – 764 – 797 – 830 – 863 – 896 – 929 – 962.

On constate alors que **Hocus et Pocus portent les numéros 335 et 665** (numéros communs aux 2 positions ; 5 ne convient pas car aucun des 2 romains n'est en 1^{ère} ligne).

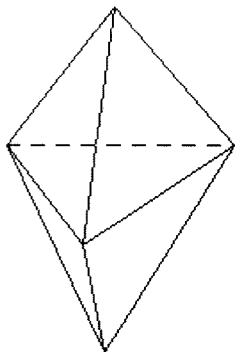
Remarques :

- Par congruence, on y arrive plus vite : les numéros chez Arithmétique sont de la forme $5 + 30k$ et ceux chez Calculus de la forme $5 + 33k'$ d'où $5 + 30k = 5 + 33k'$, par simplification on a $10k = 11k'$. Avec $k = 11$, $k' = 10$ et on obtient $5 + 30 \times 11 = 335$. Avec $k = 22$, $k' = 20$ et on obtient $5 + 30 \times 22 = 665$.
- On peut proposer aux bons élèves une variante de cet exercice : Hocus, Pocus et Abracadabrus sont dans la 1^{ère} colonne sous le commandement d'Arithmétique et dans la 7^{ème} colonne sous Calculus. Quels sont leurs numéros ?

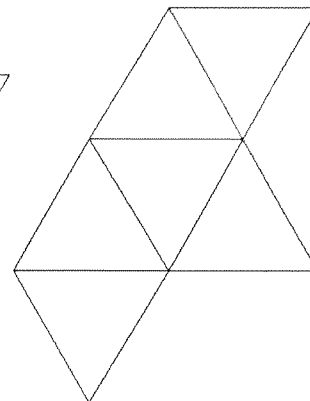
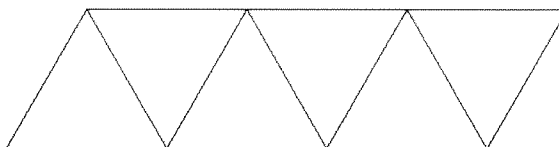
solution de cette variante : n° 271, 601 et 931.

Exercice 8 :

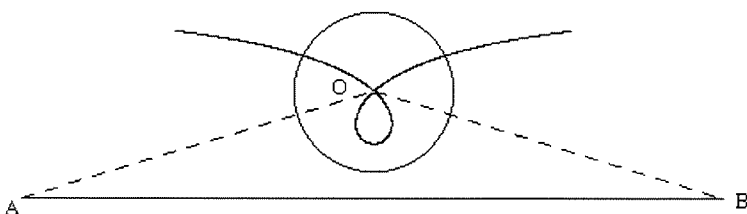
Le polyèdre de Pierre est un **hexaèdre**.



Voici deux patrons possibles :



Exercice 9 :

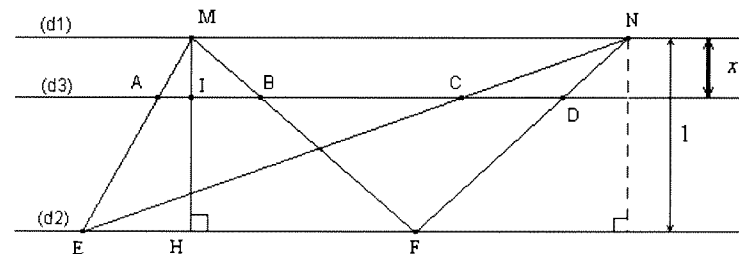


Exercice 10 :

En appliquant successivement dans les triangles MEF puis MEH le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MI}{MH} = \frac{x}{1}$$

De même (en considérant la hauteur issue de N dans le triangle NEF), on a : $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{x}{1} = x$. De $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} = x$, on déduit **AB = CD**.



Exercice 12 :

Notons r le rayon et h la hauteur du tas de sable de forme conique.

$$\text{Volume de sable extrait : } 15 \times (\pi \times (2r)^2 - \pi \times r^2) = 15\pi (4r^2 - r^2) = 15\pi \times 3r^2 = 45\pi r^2$$

$$\text{Volume du cône : } \frac{\pi r^2 h}{3}. \text{ Ces volumes sont égaux donc } 45\pi r^2 = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\text{D'où } 45 = \frac{h}{3} \text{ soit } h = 135 \text{ cm.}$$

Albert mesure donc $135 + 15 = 150 \text{ cm} = \mathbf{1 \text{ m } 50}$.

Remarque : La hauteur du tas de sable est indépendante du rayon. En fait, si le grand cercle avait un rayon différent du double du petit cercle, la hauteur dépendrait uniquement du rapport des rayons.

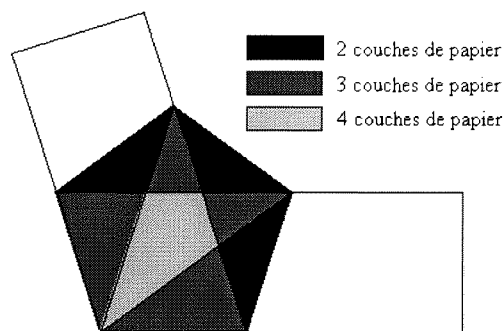
Exercice 13 :

Le point E se trouve à l'aplomb du point B du 1^{er} pot. On a : $AB = e$ et $AC = R - e - (r - e) = R - r$. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{EB}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ soit } \frac{EB}{H} = \frac{e}{R-r}. \text{ D'où } EB = \frac{eH}{R-r} = \frac{0,5 \times 18}{9-5} = 2,25 \text{ cm.}$$

Pour 10 pots, il y a 9 espaces donc la hauteur des 10 pots est égale à $18 + 9 \times 2,25 = 18 + 20,25 = \mathbf{38,25 \text{ cm}}$.

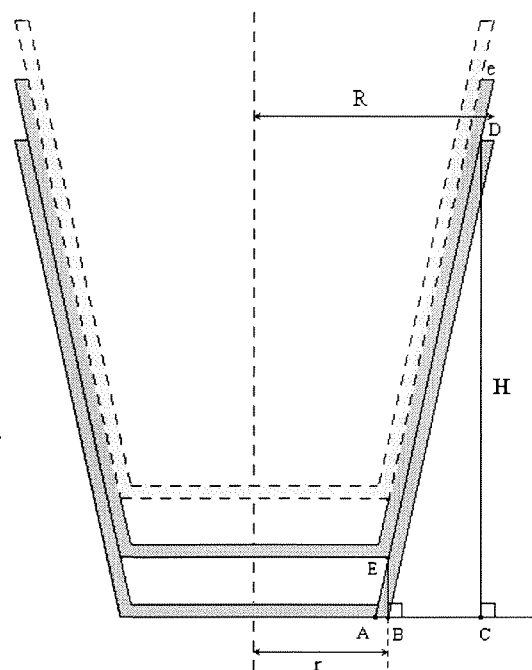
Exercice 4 :



Exercice 11 :

Les 23 secondes correspondent à la traversée complète de la gare par le train (du début de la locomotive à la fin du dernier wagon) soit la longueur du quai plus la longueur du train. Il faut y enlever les 6 secondes correspondant uniquement à la longueur du train. On a alors 17 secondes pour la longueur du quai de 340 mètres. La vitesse du train est donc $v = \frac{340 \text{ m}}{17 \text{ s}} = 20 \text{ m/s} = \mathbf{72 \text{ km/h}}$ (ce peut être un train de marchandise).

La longueur du train est $d' = 20 \times 6 = \mathbf{120 \text{ m}}$.



- Titre :** Les Étoiles de « *MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES* » 1997-2000 -- Fascicule 5 -- Edition française.
- Présentées par :** L'Inspection Pédagogique Régionale, les Equipes de Professeurs, l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Strasbourg.
- Auteurs :** Eliane LEGRAND et l'équipe de conception du concours « Mathématiques Sans Frontières ».
- Mots-clés :** troisième – seconde – rallye.
- Date :** Février 2001.
- Editeur :** I.R.E.M. de Strasbourg (**S. 180**)
7, rue René Descartes
F – 67084 STRASBOURG CEDEX
<http://irem.u-strasbg.fr>
Pour les brochures :
Tél. : 03 90 24 01 61
Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
- ISBN :** 2-911446-15-1
- Public concerné :** Professeurs et élèves des classes de Troisième et Seconde.
- Résumé :** 3500 classes de Troisième et de Seconde ont concouru en 2000. 90000 élèves de 15 à 17 ans ont ainsi découvert des mathématiques ludiques et attirantes grâce au travail de 30 équipes d'organisation. La présentation d'exercices dans d'autres langues que le français donne à la compétition un attrait supplémentaire.
- Prix :** 35 F (+ port).