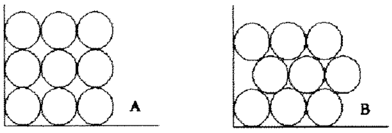
RALLYE MATHÉMATIQUE DE PREMIÈRE

SUJET 1



Émile le pâtissier possède des plaques de cuisson carrées de côté un multiple de 10 centimètres. Il peut disposer les gâteaux ronds de 10 centimètres de diamètre qu'il doit faire cuire de deux manières A ou B comme indiqué sur la figure. Déterminer pour chaque taille de plaque la disposition qui permet de cuire le plus grand nombre de gâteaux en une fournée.

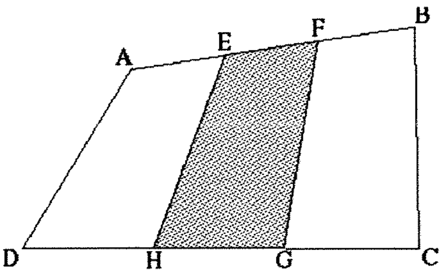
SUJET 2

	0	1	2	3	4	5	...	1997
0	1	2	3	4	5	6	...	1998
1							...	
2							...	
3							...	$f(3, 1997)$

On dispose d'un tableau ayant 4 lignes et 1998 colonnes. À l'intersection de la ligne m et de la colonne n se trouve l'élément noté $f(m, n)$. On donne, pour tout entier n compris entre 0 et 1997 la valeur $f(0, n) = n + 1$, ce qui permet donc de remplir la première ligne du tableau comme indiqué sur la figure.
Par ailleurs, on sait que pour tout entier m compris entre 1 et 3 et pour tout entier n compris entre 1 et 1997, on a les égalités suivantes :
$f(m, 0) = f(m - 1, 1)$ et $f(m, n) = f(m - 1, f(m, n - 1))$. Quel nombre se trouve à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne ?

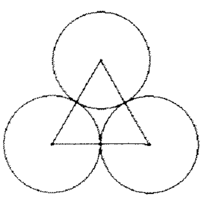
SUJET 3

On considère un quadrilatère convexe quelconque $ABCD$ dans le plan (voir figure). On découpe les segments $[AB]$ et $[CD]$ en trois parties égales, définissant les points E, F, G, H comme indiqué sur la figure.
Montrer que l'aire du quadrilatère central est le tiers de celle du quadrilatère total $ABCD$.



SUJET 1

Réponse : Pour une plaque ayant **jusqu'à 70 cm** de côté, la disposition **A est la plus avantageuse**. À partir de 80 cm, c'est la disposition B qui est préférable.



Solution : Soit n le côté de la plaque mesuré en décimètres (diamètre d'un gâteau : 1 décimètre). Dans la disposition A où les centres des cercles sont aux sommets d'un réseau à mailles carrées, on place n^2 gâteaux.
Dans la disposition B, les centres sont aux sommets d'un réseau à mailles triangulaires (pavage du plan par des triangles équilatéraux). Le côté d'un triangle élémentaire est égal au diamètre des cercles; sa hauteur en cm est donc $5\sqrt{3}$.
Pour la hauteur occupée par x rangées de gâteaux, on obtient donc $10 + 5(x - 1)\sqrt{3}$.
La première rangée comporte n gâteaux. Pour tenir dans la plaque, la deuxième rangée (ainsi que toutes les rangées d'ordre pair) doit comporter un gâteau de moins que la

première. Le nombre total de gâteaux obtenu est ainsi égal à $nx - \frac{x}{2}$ si x est pair, ou à $nx - \frac{x-1}{2}$ si x est impair.

Si $x > n$ (c'est à dire x au moins égal à n+1), ces valeurs sont supérieures à n^2 et cette deuxième disposition est plus avantageuse ; si $x = n$, la première disposition est évidemment plus avantageuse. Il reste à déterminer pour quelles largeurs de plaque, il est possible de placer un nombre de rangées $x = (n+1)$. Ceci conduit à déterminer les valeurs de n pour lesquelles $10n > 10+5n\sqrt{3}$, soit $n > \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Ainsi, puisque n doit être entier, on obtient n supérieur ou égal à 8.

SUJET 2

Réponse : La troisième ligne du tableau constitue une suite dite arithmético-géométrique, qui conduit pour le terme demandé à la valeur **f(3, 1997) = $2^{2000} - 3$.**

Solution : À partir de f(0, n) = n + 1, on obtient f(1, n) = f(0, f(1,n–1)) = f(1,n–1)+ 1. Comme f(1, 0) = f(0, 1) = 2, il en résulte f(1, n) = n + 2.

Remarque : Les égalités proposées dans l'énoncé doivent être étendues à des valeurs quelconques de n, sans limitation à 1997. Sinon, on ne peut rien dire de f(1, 1997) = f(0, f(1, 1996)) = f(0, 1998). Nous faisons cette extension, ici ainsi que pour la suite du problème.

Par suite, f(2, n) = f(1, f(2, n–1)) = f(2, n–1) + 2.Puisque f(2, 0) = f(1, 1) = 3, il en résulte f(2, n) = 2n + 3. Enfin, f(3, n) = f(2, f(3, n–1)) = 2f(3, n–1) + 3.

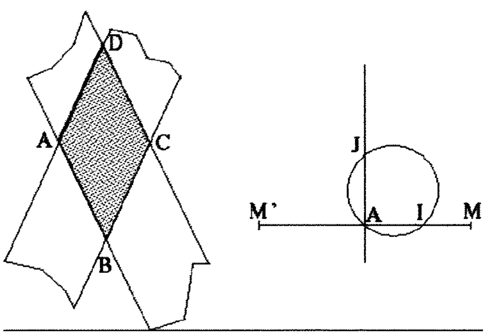
Et f(3, 0) = f(2, 1) = 5.

Pour expliciter f(3, n) en fonction de n, posons g(n) = f(3, n) + 3 (cette transformation permet de ramener les suites arithmético-géométriques à des suites géométriques). En remplaçant f(3, n) et f(3, n–1) respectivement par g(n) – 3 et g(n–1) – 3 dans l'égalité de récurrence ci-dessus, on obtient en effet g(n) – 3 = 2(g(n–1) – 3) + 3, d'où

g(n) = 2g(n–1). Donc g(n) est une suite géométrique de raison 2, ayant pour premier terme g(0) = 8 = 2^3. Par conséquent, g(n) = 2^{n+3} et en particulier g(1997) = 2^{2000}. Finalement f(3, 1997) = $2^{2000} - 3$.

SUJET 3

Solution : La solution s'appuie sur une triangulation. Plusieurs égalités d'aires de triangles peuvent être mises en évidence sur la figure, qui renvoient au classique résultat général suivant :



<u>Théorème général</u> – Soit S un point et **d** *une droite ne passant pas par S. Tous les triangles du type SXY, où X et Y sont deux points de la droite* **d** *tels que le segment XY ait une longueur donnée, ont la même aire.*

Par exemple, on a l'égalité d'aires :

$\mathscr{A}$(EFG) = $\mathscr{A}$(FBG), puisque les segments EF et FB sont de même longueur.

De même, $\mathscr{A}$(EGH) = $\mathscr{A}$(EHD).

Comme le quadrilatère EFGH est convexe puisque ABCD est convexe, son aire est la somme des aires des triangles EFG et EGH. D'où $\mathscr{A}$(EFGH) = $\mathscr{A}$(EFG) + $\mathscr{A}$(EGH) et donc :

$$2\mathscr{A}(\mathrm{EFGH}) = \mathscr{A}(\mathrm{EFG}) + \mathscr{A}(\mathrm{FBG}) + \mathscr{A}(\mathrm{EGH}) + \mathscr{A}(\mathrm{EHD}) = \mathscr{A}(\mathrm{EBGD}).$$

Or $\mathscr{A}$(ABCD) = $\mathscr{A}$(EBGD) + $\mathscr{A}$(AED) + $\mathscr{A}$(BCG). Mais, en se référant au théorème d'égalités d'aires de triangles, on peut écrire :

$$3\mathscr{A}(\mathrm{AED}) = \mathscr{A}(\mathrm{ABD}),\ 3\mathscr{A}(\mathrm{BCG}) = \mathscr{A}(\mathrm{BCD}).$$

On en déduit :

$$3\mathscr{A}(\mathrm{EBGD}) = 3\mathscr{A}(\mathrm{ABCD}) - 3\mathscr{A}(\mathrm{AED}) - 3\mathscr{A}(\mathrm{BCG}) = 2\mathscr{A}(\mathrm{ABCD}).$$

Mais on a vu que $\mathscr{A}$(EBGD) = 2$\mathscr{A}$(EFGH), ce qui entraîne alors l'égalité demandée :

$$\mathbf{3\mathscr{A}(EFGH) = \mathscr{A}(ABCD).}$$

RALLYE MATHÉMATIQUE DE TERMINALE

SUJET 1

Grand organisateur à Lembach des festivités liées à l'année mondiale des mathématiques, Émile le Bon est chargé de placer le mât du drapeau du Rallye mathématique d'Alsace au centre de la place circulaire de son village. Il ne dispose pour cela que d'une règle de longueur infinie non graduée à deux côtés parallèles et d'un crayon. Comment doit-il procéder ?

SUJET 2

Montrer que l'on peut trouver un entier de 2000 chiffres divisible par 2^{2000} qui s'écrive seulement avec les chiffres 1 et 2.

SUJET 3

On se donne un entier naturel non nul n. On choisit $n + 1$ nombres entiers tous distincts entre 1 et $2n$. Montrer que parmi eux, il en existe toujours deux dont le quotient est une puissance de deux.

SUJET 1

Solution : Un placement de règle permet de tracer deux parallèles dont la distance est la largeur de la règle. Il est donc facile d'utiliser la règle pour tracer des parallèles équidistantes. De plus, l'intersection de deux bandes de même largeur est un losange ABCD, dont on sait que les diagonales AC et BD sont perpendiculaires.

Ces considérations préliminaires conduisent facilement à une solution. Étant donné un point A sur le cercle, on trace une sécante quelconque AI au cercle. On peut déterminer des points M et M' équidistants de A sur cette sécante, en la coupant par des parallèles équidistantes. En plaçant alors la règle dans les deux positions telles que l'un de ses bords passe par M et l'autre par M', on obtient un losange dont MM' est une diagonale. La seconde diagonale de ce losange est donc perpendiculaire à AI ; elle recoupe ainsi le cercle en un point J qui est diamétralement opposé à I. Autrement dit, on a construit un diamètre IJ du cercle.

Deux telles constructions de diamètres permettent à Émile de crier victoire au centre du cercle.
Remarque : On ne pouvait pas retenir l'idée de tracer la médiatrice de AI en considérant un losange de diagonale AI, à cause du fait que la règle peut avoir une largeur supérieure au diamètre du cercle.

SUJET 2

Réponse : L'idée est de procéder par récurrence, même si on se « contente » d'aller jusqu'à 2000 et non pas jusqu'à l'infini. On peut commencer par 2, qui a un chiffre et est divisible par $2^1 = 2$, ou par 12, qui a deux chiffres et est divisible par $2^2=4$.

Solution : Supposons (hypothèse de récurrence) que l'on connaisse un nombre A de n chiffres, qui soit divisible par 2^n et dont tout chiffre soit égal soit à 1 soit à 2. Si le nombre A est un multiple pair de 2^n, c'est à dire si $A = 2p\times 2^n$, on obtiendra un multiple de 2^{n+1} ayant (n+1) chiffres en prenant
$A + 2\times 10^n$. En effet, $2\times 10^n + A = 2^{n+1}\times 5^n + p\times 2^{n+1}\times 5^n = 2^{n+1}\times 5^n\times(1 + p)$.
Si A est un multiple impair de 2^n, c'est à dire si $A = (2p+1)\times 2^n$, on considérera $A + 10^n$, ce qui revient à placer un 1 devant l'écriture chiffrée de A. En effet :

$$10^n + A = 2^n \times 5^n + (2p+1)\times 2^n = (5^n + 2p + 1)\times 2^n.$$

Or 5^n est un nombre impair, donc $(5^n + 2p + 1)$ est un nombre pair. Ainsi, il est possible d'extraire de la parenthèse un facteur 2, qui se combinera avec 2^n pour aboutir à 2^{n+1}.

SUJET 3

Solution À partir d'un entier donné, effectuons des divisions successives par 2 tant que c'est possible, c'est à dire tant que l'on est en présence d'un nombre pair. Ainsi, si le nombre de départ est impair, on ne fait rien. Au contraire, s'il est pair, on le divise par 2 ; si le résultat est encore un nombre pair, on recommence, sinon on s'arrête. De la sorte, on écrit tout entier comme produit d'une puissance de 2 par un nombre impair (qui peut être réduit à 1).
Dire alors que deux entiers ont un quotient qui est une puissance de 2, c'est dire que dans l'écriture considérée, le nombre impair est le même pour les deux entiers. Or, entre 1 et 2n, on dispose de n nombres impairs (à savoir 1, 3,... , 2n–1). Donc, si on choisit (n+1) entiers entre 1 et 2n, on est obligé d'en choisir au moins deux qui sont produits d'un même nombre impair par des puissances de 2.