

1. QU'EST-CE QU'IL Y A DANS LA QUATRIÈME DIMENSION ?

Strasbourg, le 24 mai 2000

Hommage à Jean-Pierre FRIEDELMEYER, à l'occasion de son départ en retraite

1. Une histoire très courte de la quatrième dimension

EUCLIDE ne parle explicitement ni de l'espace ni de ses dimensions. Mais de l'ensemble de son œuvre, on peut conclure que pour EUCLIDE l'espace était une grande boîte comprenant les corps. Il définit (XI, déf. 1) :

« Un corps (solide) est quelque chose qui possède une longueur, une largeur et une profondeur. »

Parce qu'il n'y a pas d'idée d'une quatrième dimension on ne multipliait jamais plus que trois longueurs (grandeurs linéaires). Si on n'a que trois facteurs le résultat d'une multiplication peut s'interpréter comme un volume. Par contre même EUCLIDE connaît des produits quelconques de nombres. Par conséquent il ne considère pas les nombres comme des grandeurs !

En principe on aurait eu quelques occasions à considérer une quatrième dimension. J'en donne un exemple : Les Pythagoriciens ont déjà étudié les nombres dits triangulaires 1, 3, 6, 10, 15 etc., une somme de nombres triangulaire donne un nombre pyramidal

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 6 &= 10 \\1 + 3 + 6 + 10 &= 20\end{aligned}$$

Mais qu'est-ce que se passe si on forme une somme de nombres pyramidaux :

$$1 + 4 + 10 + 20 = 35$$

C'est un nombre « hyperpyramidal » formé par la réunion des pyramides – une idée qu'on ne rencontre pas à l'antiquité. Selon Simplicius PTOLÉMÉE, le grand astronome de l'antiquité, a même donné une démonstration de la proposition « L'espace est tri-dimensionnel » fondée sur l'idée qu'on ne trouve pas plus que trois directions orthogonales dans un point.

Pendant les Moyens Âges on a commencé à se libérer des restrictions anciennes. Nicole ORESME a donné des représentations graphiques pour des quantités : Ces quantités sont représentées par des segments ordonnés selon une base. Si la base est un segment on obtient une ligne courbe (en général), si la base est une surface on obtient une surface courbe dans l'espace et si la base est un corps solide... on obtient rien parce qu'on n'a plus de liberté: ce qui manque c'est la quatrième dimension.

Dans *L'Ars magna* de CARDAN (1545) on lit¹ :

« For as positio [*the first power*] refers to a line, quadratum [*the square*] to a surface, and cubum [*the cube*] to a solid body, it would be very foolish for us to go beyond this point. Nature does not permit this" (p. 9)

¹ Comme la puissance un renvoie à une ligne, le carré à une surface et le cube à un corps solide, il serait très déraisonnable pour nous d'aller au-delà. La nature ne le permet pas.

Et d'ALEMBERT écrit dans l'Encyclopédie (article **dimension**): « Au reste, il ne peut y avoir proprement que des quantités de trois dimensions ; car passé le solide, on n'en peut concevoir d'autres.

J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée une quatrième dimension, et que le produit du temps, par la solidité, serait en quelque manière un produit de quatre dimensions, cette idée peut être contesté, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté. »

L'espace mathématique était limité par l'espace de l'expérience – le dernier étant tridimensionnel le premier doit être tridimensionnel aussi. On peut dire que cette limitation était fondée dans l'intuition – même dans les mathématiques rien était admis sans une interprétation intuitive! Il n'y avait qu'un seul espace – un substratum commun de l'expérience physique, des mathématiques, des arts etc.

Un des premiers qui a parlé d'une quatrième dimension était Thomas MORE (1614-1687), un penseur mystique *scot.* Dans son livre *The Immortality of the Soul* (1659) il décrit des esprits qui sont situés dans une quatrième dimension. Mais ses idées vagues sont passées sous silence. Peut-être le premier à parler d'une manière scientifique des espaces multidimensionnels était-il I. KANT. Dans sa dissertation *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*² (1747) il discute une science des espaces de tous dimensions. C'était une science théorique qui n'a rien à faire avec l'espace réel; aussi pour le jeune KANT le dernier était-il tri-dimensionnel.

„Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumformen wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte... Wenn es möglich ist, dass es Ausdehnungen von anderer Abmessung gebe, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass sie Gott irgendwo angebracht hat.“ (Jammer, 176)³

Vers la fin du XVIII^e siècle, par exemple chez LAGRANGE, on prenait la coutume de considérer le temps comme une quatrième dimension dans les contextes de la mécanique. C'était une manière de décrire les choses sans un contenu intuitif – donc sans une vraie existence. Même A. F. MÖBIUS, un des géomètres les plus avancés de son époque et disciple du grand GAUSS, écrit (*Barycentrischer Calcul* § 140, 1827) :

„Es scheint sonderbar, dass bei körperlichen Figuren Gleichheit und Aehnlichkeit ohne Coincidenz statt finden kann, da hingegen bei Figuren in Ebenen oder bei Systemen von Punkten in geraden Linien Gleichheit und Aehnlichkeit mit Coincidenz immer verbunden ist. Der Grund davon möchte darin zu suchen seyn, dass es über den körperlichen Raum von drei Dimensionen hinaus keinen andern, keinen von vier Dimensionen giebt. Gäbe es keinen körperlichen Raum, sondern wären alle räumlichen Verhältnisse in einer einzigen Ebene enthalten, so würde es eben so wenig möglich seyn, zwei sich gleiche und ähnliche Dreiecke, bei denen aber die Folge der sich entsprechenden Spitzen nach entgegengesetztem Sinne geht, zur Deckung zu bringen...

Zur Coincidenz zweier sich gleicher und ähnlicher Systeme im Raume von drei Dimensionen: A, B, C, D, E, ... und A', B', C', D', E', ... bei denen aber die Punkte D,

² *Réflexion sur l'estimation vraie de la force vivante*

³ Une science de toutes ces formes possibles de l'espace serait sans doute la Géométrie supérieure, qui pourrait prendre en charge la compréhension la plus achevée... S'il est possible d'avoir des extensions d'une autre mesure, il est également très probable, que Dieu l'a quelque part utilisée.

E, ... und D', E', ... auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und A'B'C' liegen, würde also, der Analogie nach zu schließen, erforderlich seyn, dass man das eine System in einem Raume von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich..." (184)⁴

La citation donnée est très intéressante :

- 1) MÖBIUS rebute même la possibilité de penser un espace à plus que trois dimensions! Son argument n'est pas limité à l'intuition ou à l'expérience.
- 2) Pour concevoir la situation dans un espace à quatre dimensions il se sert d'une analogie. Pour l'homme l'espace à quatre dimensions est comme l'espace tri-dimensionnel à des êtres plans.
- 3) En principe il invente ainsi les êtres plans plus tard appelés «êtres plans de HELMHOLTZ» et cités à plusieurs occasions.

En passant je veux noter que GAUSS lui-même a spéculé vers la fin de sa vie sur l'espace multi-dimensionnel et qu'il n'était pas si restrictif comme son disciple (lettre à GERLING du 08 04 1844 ; cf. JAMMER, 127).

Pour conclure, on peut constater que l'espace à quatre dimensions n'était pas du tout accepté même au début du XIX^e siècle.

2. La période « purement analytique »

Vers le milieu du XIX^e siècle plusieurs géomètres commençait à penser à une géométrie à plus de trois dimensions. Mais ils en étaient très prudents : On ne parlait pas de vrais êtres géométriques mais des « existences purement analytiques ». Pour en donner deux exemples je cite A. CAYLEY et A. L. CAUCHY :

"The general theorem,..., can be considered as the expression of an analytical fact, which ought equally well to hold in considering four coordinates instead of three. Here a geometrical interpretation holds which is applied to points in space. We can, in fact, without having recourse to any metaphysical notion in regard to the possibility of a space of four dimensions reason as follows..." (SMITH, 528)⁵

Et CAUCHY écrit :

"Conceive now that the number of variables $x, y, z, \dots$ becomes greater than three. Then such a system of values of $x, y, z, \dots$ will determine what we shall call an analytical

⁴ Il semble étrange, que chez les solides, l'égalité et la similitude puissent se trouver sans coïncidence, alors qu'au contraire, pour les figures planes ou pour les systèmes de points alignés, l'égalité et la similitude sont toujours liées à la coïncidence. La raison, que j'aimerais ici chercher, est qu'au delà de l'espace des solides à trois dimensions il n'y a pas d'autre espace à quatre dimensions. Il n'y a pas d'autre espace de solides, sinon tous les rapports de l'espace pourraient être contenus dans un simple plan, ainsi serait-il aussi peu possible d'amener à la superposition deux triangles égaux et semblables, pour lesquels la suite des sommets se correspondant va dans le sens contraire...

Pour la coïncidence de deux systèmes égaux et semblables de l'espace à trois dimensions A, B, C, D, E... et A', B', C', D', E',... pour lesquels les points D, E, ... et D', E', ... se situent sur des côtés de noms différents, des plans ABC et A'B'C' seraient ainsi nécessaires, pour conclure d'après l'analogie, qu'on puisse opérer un demi-tour d'un système dans un espace à quatre dimensions. Mais comme un tel espace est impensable, la coïncidence dans ce cas est également impossible.

⁵ Le théorème général... peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qu'on devrait tout aussi bien traiter en considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique considère ce qui est appliqué à des points de l'espace. Nous pouvons en fait sans avoir recours à aucune notion métaphysique au regard de la possibilité d'un espace à quatre dimensions raisonner comme suit...

point of which these variables are the coordinates, and to this point will correspond a certain value of each functions of $x, y, z, \dots$. Further, if the variables are subject to conditions represented by inequalities, the systems of values of $x, y, z, \dots$ for which these conditions are satisfied will correspond to analytical points, which together will form what we shall call an analytical locus.” (SMITH, 531)⁶

Ces citations données datent de 1847

En 1854 RIEMANN parlait à Göttingen des variétés à n dimensions. C’était un événement extraordinaire qui n’était pas compris par le monde mathématique que 20 ans après. C’est vrai aussi des travaux de GRASSMANN (1847) et de SCHLÄFLI (1852) qui datent de cette période et qui parlent explicitement d’une géométrie à n dimensions. Tous ces travaux restaient sans grande influence à l’époque parce qu’ils étaient trop avancés pour la majorité de la communauté mathématique.

Les années 1860 étaient caractérisées par des discussions sur l’admission de nouvelles idées dans la géométrie. On en a parlé plus tard d’une révolution anti-Euclidienne. Cette révolution avait au moins deux aspects : d’une part la géométrie dite non-Euclidienne (c’est à dire la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique), d’autre part la géométrie à plus que trois dimensions. La discussion était très vive en Allemagne et en Angleterre ; elle fut initiée par la publication des lettres de GAUSS à SCHUMACHER dans lesquelles le premier parlait franchement de la géométrie hyperbolique. En France la situation restait plus calme. En 1875 C. Jordan publiait un long mémoire sur la géométrie à n dimensions. Là il écrivait dans l’introduction :

« On sait que la fusion opérée par DESCARTES entre l’algèbre et la géométrie ne s’est pas montrée moins féconde pour l’une de ces sciences que pour l’autre.

Car, si d’une part les géométries ont appris, au contexte de l’analyse, à donner à leurs recherches une généralité jusque-là inconnue, les analystes, de leur côté, ont trouvé un puissant secours dans les images de la géométrie, tant pour découvrir leurs théorèmes que pour les énoncer sous une forme simple et frappants.

Ce secours cesse lorsqu’on passe à la considération des fonctions de plus de trois variables, ainsi la théorie de ces fonctions est-elle relativement fort en retard. Le moment semble venu de combler cette lacune en généralisant les résultats déjà obtenus pour ce cas de trois variables. Un grand nombre de géométrie s’en sont déjà occupés d’une manière plus ou moins immédiate...

Bien que ces recherches soient purement algébrique, nous avons cru utile d’emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi nous considérons un point comme défini dans l’espace à n dimensions ; par des valeurs de n coordonnées... »

Dans le mémoire cité JORDAN traite la géométrie à n dimensions d’une manière purement analytique. Il donne des équations par exemple pour les hyperplans, les droites et les sphères dans l’espace à n dimensions ; de plus il traite les matrices qui décrivent certaines isométries. Je pense que c’est l’endroit où il a introduit la forme qu’on appelle « forme de JORDAN ». Il est clair que pour JORDAN la géométrie à n

⁶ Imaginons maintenant que le nombre des variables $x, y, z, \dots$ soit plus grand que trois. Alors un tel système de valeurs de $x, y, z, \dots$ déterminera analytiquement un point dont les variables sont les coordonnées et à un point correspondra certaines valeurs des variables $x, y, z, \dots$. De plus, si les variables sont sujettes à des conditions représentées par des inégalités, le système de valeurs de $x, y, z, \dots$ pour lesquelles ces conditions sont satisfaites, correspond à des points analytiques, qui ensemble formeront ce que nous devons appeler une région analytique.

dimensions est devenue une réalité ; mais c'est la réalité d'un langage. Les formules analytiques précèdent les êtres géométriques ; il n'y a pas de réalité indépendante pour les derniers.

Il semble que la communauté mathématique française était assez hostile en regard de la géométrie à n dimensions (et à la géométrie non-Euclidienne aussi). Même en 1895 le grand POINCARÉ a senti la nécessité de défendre la nouvelle géométrie. Dans l'introduction de son mémoire très important sur l'*analysis situs* il écrit :

« La géométrie à n dimensions a un objet réel ; personne n'en doute aujourd'hui.

Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier...

La géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe ; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres analogues et plus généraux. » (VI, 193)

Pour conclure on peut constater que depuis un certain moment la géométrie à n dimensions est considérée comme une vraie géométrie dont les objets possèdent une réalité. Cette réalité n'est pas épuisée par des formules ; c'est plus qu'une réalité analytique ou d'un langage. Je nomme la doctrine citée la « théorie linguistique des espaces multidimensionnels » (une citation très typique en est donnée en bas).

3. Peupler le nouveau monde : le problème des polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions

Les êtres dans l'espace à quatre dimensions décrits par Jordan et d'autres étaient d'une nature assez simple ; ils sont des généralisations comme la sphère à trois dimensions :

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

Ce qu'il manquait ici c'était de vrais êtres géométriques comme les corps réguliers c'est-à-dire des entités qui ne sont pas définies par de simples équations mais par une synthèse classique. C'était un grand succès de la géométrie nouvelle d'avoir construit de telles entités. De plus le résultat obtenu en 1880 par le mathématicien américain STRINGHAM – c'était peut le premier résultat important des mathématiques américaines après ceux des Mayas – était stupéfiant : dans l'espace à quatre dimensions il existe six polytopes réguliers par contre dans les espaces de dimensions plus élevées il n'y en a que trois ! Donc : où est allée l'analogie ?

Avant d'entrer un peu, dans les détails du travail de STRINGHAM, je veux donner quelques informations sur les polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions.

Le premier et le plus simple polytope régulier dans l'espace à quatre dimensions est l'analogue du tétraèdre – le simplexe à trois dimensions au sens des topologies – appelé 4-simplex.

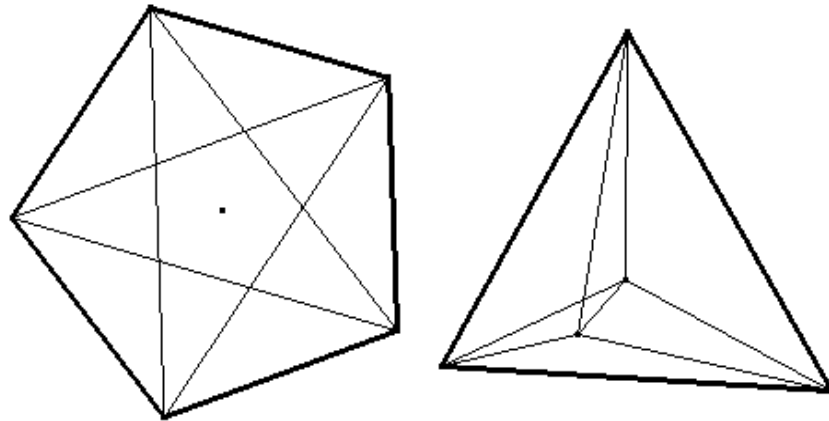
Regular Figures in n -dimensional Space.

BY W. I. STRINGHAM,

Fellow of the Johns Hopkins University.

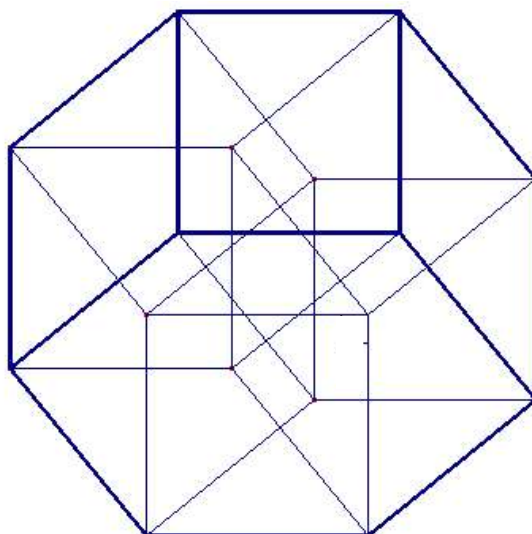
A PENCIL of lines, diverging from a common vertex in n -dimensional space, forms the edges of an n -fold (short for n -dimensional) angle. There must be at least n of them, for otherwise they would lie in a space of less than n dimensions. If there be just n of them, combined two and two they form 2-fold face boundaries; three and three, they form 3-fold trihedral boundaries, and so on. So that the simplest n -fold angle is bounded by n edges, $\frac{n(n-1)}{2}$ faces, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ 3-folds, in fact, by $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ k -folds. Let such an angle be called *elementary*. Fig. 1 represents the symmetrical arrangement, in three-dimensional perspective, of the four trihedral boundaries of an elementary 4-fold angle. When put into space of four dimensions, the faces of the tetrahedra, which lie adjacent to the common vertex, are to be brought into coincidence two and two; the edges will then fall together three and three.

Le point de départ pour sa construction est un tétraèdre. Nous cherchons dans l'espace à quatre dimensions un point qui possède la même distance à tous les sommets du tétraèdre. On joignant ce point avec les autres sommets on obtient un polytope avec 5 sommets, 10 côtés, 10 faces et 5 cases. Les faces sont des triangles isocèles, les cases ou cellules sont des tétraèdres. Voilà une projection plane de ce polytope :



Évidemment on peut généraliser la construction donnée pour un nombre quelconque de dimensions.

L'hypercube est un autre polytope régulier. On peut le construire en déplaçant orthogonalement un cube ordinaire dans l'espace à quatre dimensions. On obtient un polytope à 16 sommets, 32 côtés, 24 faces et 8 cases. Les faces sont des carrés, les cases sont des cubes. Voilà une projection de ce polytope :

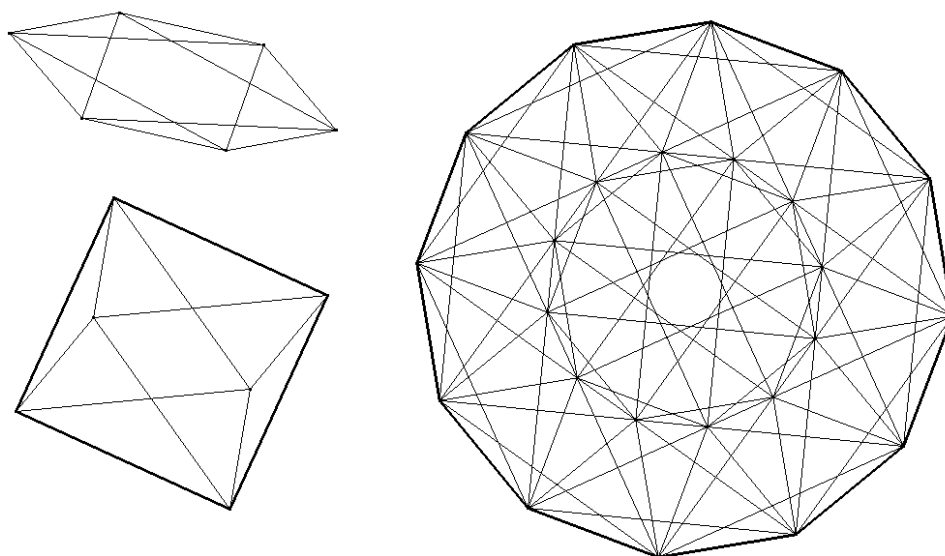


Il n'est pas difficile à donner les coordonnées des sommets de l'hypercube : ce sont les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Le troisième polytope est l'analogue de l'octaèdre appelé la bi-pyramide. L'accès le plus simple en est par les sommets. Sur chaque axe orthogonal du repère de l'espace à quatre dimensions on choisit deux points équidistants de l'origine ; par exemple $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$.

Ces points sont les 8 sommets du polytope à construire. Alors on construit les côtés, les faces et les cases. On obtient un polytope avec 8 sommets, 24 côtés, 32 faces et 16 cases. Les faces sont des triangles isocèles, les cases des tétraèdres.

Voilà une projection de ce polytope



Il est assez clair que les constructions données sont à généraliser pour un nombre quelconque de dimensions. Par conséquent on peut constater que dans les espaces à quatre ou plus dimensions il existe toujours au moins trois polytopes réguliers.

Pour trouver le nombre exact des polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions il nous manque un critère comparable au critère d'EUCLIDE. Avec le dernier

celui a démontré qu'il n'y a que cinq corps réguliers dans l'espace ordinaire – ce sont les corps dits de PLATON. Le critère d'EUCLIDE est le suivant :

Si on veut former un angle spatial ou – autrement dit un sommet – la somme des angles planes autour d'un sommet doit être inférieure à 360° .

La démonstration du critère est simple : si la somme est égale à 360° on obtient un plan et le sommet disparaît dans ce plan.

Un critère analogue est valable dans l'espace à quatre dimensions : Si on prend un côté la somme des angles diédraux des cases qui se rencontrent à ce côté ne doit excéder 360° . Si on veut former un polytope régulier ça mène aux possibilités suivantes :

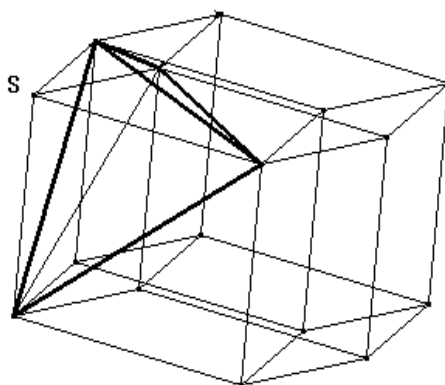
Trois tétraèdres, quatre tétraèdres, cinq tétraèdres, trois cubes, trois octaèdres, trois dodécaèdres.

(Les angles sont comme suit : tétraèdre $70^\circ 31'$; cube 90° ; octaèdre $109^\circ 28'$; dodécaèdre $116^\circ 34'$; icosaèdre $138^\circ 11'$).

Par conséquent on gagne l'information qu'il y a au maximum six polytopes réguliers dans l'espace à quatre dimensions. Mais on ne sait rien sur ces polytopes. Donc il faut procéder d'une autre manière.

Le point de départ de Stringham est la formule dite d'Euler. Il démontre la généralisation de cette formule à n dimensions – c'était la première démonstration publiée pour la généralisation (Schläfli a considéré et démontré la formule générale 30 ans avant sans publier ses recherches). La méthode de Stringham était de projeter le polytope sur une de ses cases et d'utiliser une induction complète. Stringham considérait aussi ce qu'il appelait un angle régulier c'est-à-dire un angle formé par des parties de figures régulières dans toutes les dimensions. Pour faciliter les choses ici, nous considérons seulement l'espace à quatre dimensions.

L'idée – clef de l'analyse de STRINGHAM – est la suivante : si on décrit une sphère avec le rayon unité autour le sommet S d'un angle régulier de l'espace à quatre dimensions cette sphère coupe la figure dans un polyèdre régulier. La dimension du polytope est donc baissée par une unité. Par conséquent on a trouvé un critère : pour qu'un angle soit régulier le nombre des côtés qui se rencontrent dans le sommet de cet angle doit être égal au nombre des sommets d'un polyèdre régulier. Le polyèdre qu'on obtient par l'intersection est appelé « frame » par STRINGHAM. Si le sommet S est un sommet d'un polytope régulier, il est nécessaire que tous les sommets des angles réguliers qu'on construit sur les côtés du « frame » soient identiques avec S.



Autrement dit : si on commence par un polyèdre régulier comme « frame » (en allemand : figure de sommet) on peut se demander : Comment peut-on former un angle régulier qui possède le polyèdre donné comme « frame » ? Le sommet de cet angle est alors un composant du sommet S d'un polytope régulier. On forme un tel angle en joignant des polyèdres réguliers avec le « frame ». Ca mène aux possibilités suivantes :

1. 4 tétraèdres sont liés avec un tétraèdre ;
2. 4 cubes sont liés avec un tétraèdre,
3. 4 dodécaèdres sont liés avec un tétraèdre,
4. 8 tétraèdres sont liés avec un octaèdre ;
5. 8 cubes avec un octaèdre ;
6. 8 dodécaèdres avec un octaèdre ;
7. 20 tétraèdres avec un icosaèdre ;
8. 20 cubes avec un icosaèdre ;
9. 20 dodécaèdres avec un icosaèdre ;
10. 6 octaèdres avec un cube ;
11. 12 icosaèdres avec un dodécaèdre.

Le nombre des cas à considérer se réduit par le fait qu'il y a des cas de dualité : n^{os} 2 et 4, n^{os} 3 et 7, n^{os} 6 et 8 sont réciproques. Les polytopes des cas n^{os} 1, 2 et 4 ont déjà été construits en haut. Ce sont le 4-simplex, l'hypercube et la bi-pyramide.

Pour éclaircir les autres cas nous étudions le premier cas un peu plus de près. Ici on veut lier un tétraèdre comme « frame » avec 4 tétraèdres afin de former un sommet. Le sommet est un des sommets des tétraèdres liés, par exemple le sommet S. Les côtés avec l'origine S sont des côtés de l'angle régulier ; ils doivent passer par trois sommets du tétraèdre qui sert comme « frame ». On obtient quatre tétraèdres (un pour chaque face du « frame ») qu'il faut coller face à face pour former le sommet S. En somme, on obtient le 4-simplex déjà construit en haut.

Évidemment on obtient ainsi un nouveau critère :

Pour qu'un sommet S d'un polytope régulier soit engendré par le processus décrit en haut il faut que le nombre des polyèdres qui se rencontrent dans ce sommet S soit inférieur au nombre des polyèdres de ce type qui remplissent complètement l'espace autour d'un point.

Si le critère n'est pas valable on n'obtient pas de sommet. Un cas particulier est celui dans lequel l'espace autour d'un point est exactement rempli par les polyèdres. C'est vrai seulement dans le cas n° 5. Le résultat n'en est pas un polytope régulier mais une dissection de l'espace ordinaire en cubes (« Raumteilung »). STRINGHAM le nomme le cas infini.

Pour appliquer son critère STRINGHAM part du polyèdre, qui forme le « frame ». Sans restriction de la généralité de l'argument on peut supposer que le polyèdre soit inscrit dans une sphère d'unité. Alors on peut calculer la longueur des côtés du polyèdre « frame ».

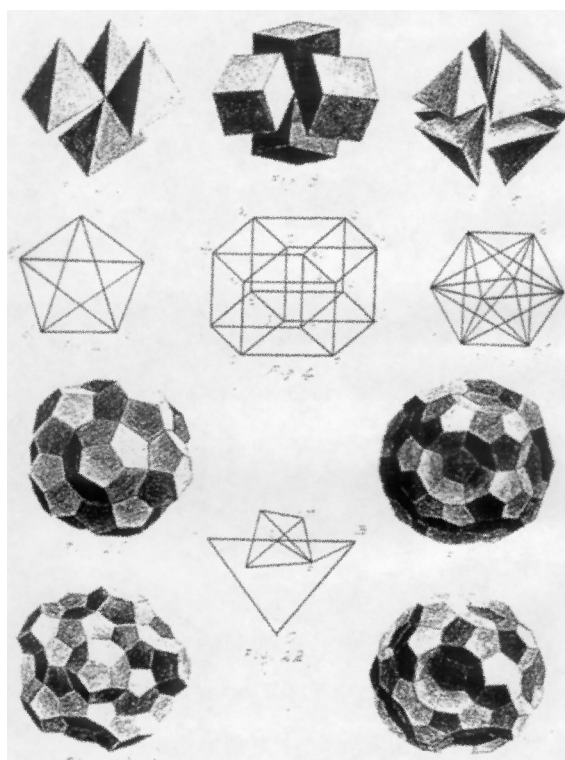
Tétraèdre	1,632994
Cube	1,154700
Octaèdre	1,141214
Dodécaèdre	0,713644

Icosaèdre

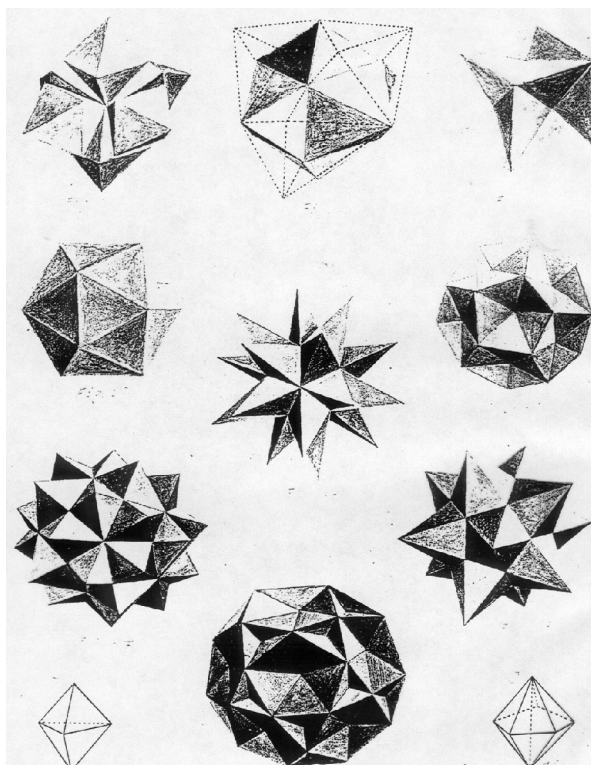
1,051462

Maintenant on va construire des angles réguliers tridimensionnels c'est à dire des parties de polyèdres réguliers sur les faces d'un « frame » selon la liste donnée en haut. Prenez comme STRINGHAM le cas n° 6 : On choisit un triangle de l'octaèdre et un sommet S d'un dodécaèdre. Autour de S il y a trois sommets voisins et équidistants de S. Si on a bien choisi cette distance on peut identifier les trois sommets du dodécaèdre avec les trois sommets du triangle donné de l'octaèdre. Par conséquent on peut calculer la longueur de la côté du dodécaèdre et on obtient la valeur $l = 0,874048$. Si nous orientons le dodécaèdre de la manière que le sommet S se trouve à l'intérieur de la sphère circonscrite autour de l'octaèdre la valeur trouvée nous apprend que S n'est pas identique avec le milieu de cette sphère, parce que la longueur l est inférieure à 1. Par conséquent les huit dodécaèdres liés avec le tétraèdre ne donnent pas un sommet d'un polytope régulier.

L'analyse de STRINGHAM montre qu'il n'y a que les cas n°s 3, 7 [le cas dual de 3] et 10 fournissant un sommet d'un polytope régulier : dans ces cas la longueur calculée l est plus grand que l'unité. Pour terminer sa démonstration STRINGHAM construit d'une manière explicite ces polytopes. Prenons le cas n° 10 dans lequel on forme un sommet S par six octaèdres liés avec les faces d'un cube. STRINGHAM nous propose le tableau suivant :



Autour de l'angle régulier formé ainsi on colle 12 octaèdres d'une manière symétrique. La constellation ainsi construite est montrée dans le tableau suivant :



La constellation est alors inversée (l'intérieur devient l'extérieur et vice versa) dans l'espace à quatre dimensions pour qu'on comprenne mieux que sa surface peut se fermer par l'addition de six octaèdres. Par conséquent on obtient un polytope régulier composé de 24 octaèdres avec 24 sommets, 96 faces triangulaires et 96 côtés. Donc la caractéristique d'EULER de ce polytope est zéro – ce qui confirme encore une fois son existence.

Les deux autres polytopes sont plus compliqués. L'un est composé de 120 dodécaèdres avec 600 sommets, 1200 côtés et 720 faces, l'autre par 600 tétraèdres (120 sommets, 720 côtés et 1200 faces).

Après ce travail considérable STRINGHAM applique ses critères aussi aux espaces à plus de quatre dimensions. Il démontre qu'il n'y a que trois polytopes réguliers dans ces espaces : les simplexes, les hypercubes et les bi-pyramides. En somme on trouve le tableau suivant :

Nombre de dimensions	Nombre de figures régulières
2	infini
3	5
4	6
5	3

À la recherche de l'analogie perdue... Les polytopes réguliers fournissent un bel exemple des objets exceptionnels – un aspect des mathématiques qui passe souvent sous silence dans l'histoire et dans la philosophie de cette discipline. J. STILLWELL a consacré un bel article à ce thème. Il y parle entre autres des polytopes réguliers, des groupes de Lie simples et des groupes finis simples dits spontanés.

4. Quelques remarques sur le développement postérieur

Il est remarquable qu'on trouve autour de 1880 beaucoup de travaux sur les polytopes réguliers en particulier en Allemagne. Ce n'était pas les plus grands des mathématiciens qui s'occupaient de cette question ; en rencontre des noms comme PUCHTA, CÉSARÒ, CURJEL, GOSSET, RUDEL, HOPPE, DURÈGE, SCHLEGEL, FORCHHAMMER et d'autres. Leurs travaux sont très concrets et souvent ingénieux du point de vue géométrique mais sans grande perspective.

Par contre le jeune POINCARÉ a bien compris qu'il y a là-dedans une perspective. C'est démontré par une lettre qu'il avait écrite à JORDAN en 1880. Dans cette lettre il posait la question si quelqu'un avait déterminé les polytopes réguliers par leurs groupes de symétrie. JORDAN lui-même avait ainsi déterminé les corps Platoniciens dans son fameux mémoire sur les groupes de mouvement (1875) ; ce sont les sous-groupes finis de $SO(3)$. Mais en 1880 il répondait à POINCARÉ qu'il ne connaît pas la réponse à la question analogue pour $SO(4)$. Cette réponse fut trouvée par GOURSAT en 1885 dans un grand mémoire à l'aide d'un homomorphisme $SO(3) \times SO(3) \rightarrow SO(4)$. Telle est l'histoire purement mathématique de notre sujet.

Mais la quatrième dimension est aussi un sujet extraordinaire au point de vue de l'histoire de la science en général parce que les esprits de Thomas MORE sont revenus dans les années 1870 et 1880 ; ils sont même restés jusqu'à nos jours. Ces années étaient une période féconde pour les idées spiritistes – en particulier en Angleterre et en Allemagne. On estime qu'il y avait entre 8 et 11 millions de partisans de la doctrine spiritiste à cette époque là : le mouvement du spiritisme disposait d'environ 25 journaux (cf. CRANZ 1890, 37). L'idée en était d'expliquer des phénomènes supranaturels (par exemple la résolution des nœuds, la disparition des choses, des tables qui se meuvent [dans l'article de CRANZ il y a plus qu'une page sur les phénomènes spiritistes, pp. 37/38]) par la quatrième dimension, „in dem *die Geisterwelt in die Körperwelt eingreift*.“ (CRANZ 1890, 43). L'étendue pour nous invisible des objets dans la quatrième dimension était même proposée comme explication de la doctrine kantienne de la « chose en soi ». C'est vraiment rare dans l'histoire des mathématiques qu'une théorie tellement abstraite ait reçu une publicité tellement vaste. Je n'ai pas le temps aujourd'hui d'entrer dans les détails de cette histoire. Je veux ici seulement indiquer qu'une réaction était de se retirer encore une fois sur la position nommée purement analytique en haut :

„Die sogenannten mehrdimensionalen Räume sind nichts weiter als Gedankendinge, analytische Fiktionen, welche dazu dienen, Sätze der Analysis oder Geometrie allgemein auszusprechen, mehrere Sätze in einen einzigen zusammenzufassen, Ausnahmen zu vermeiden. Alle übrigen Anwendungen der sogenannten vierten Dimension sind gegenstandslos, weil auf Trugschlüssen beruhend.“ (CRANZ 1890, 49)⁷.

Une discussion détaillée du point de vue de l'anthroposophie est fournie par R. STEINER ; elle est documentée en Steiner 1995 et dans les *Beiträge* cités en bas.

F. KLEIN avait écrit un article au début des années 1870 dans lequel il a expliqué qu'il n'y a plus de nœuds dans l'espace à quatre dimensions. Par conséquent la résolution

⁷ Les espaces appelés multidimensionnels ne sont rien de plus que des objets de pensée, des fictions analytiques, lesquelles servent exprès à formuler de manière générale des théorèmes d'analyse ou de géométrie, pour abrégé plusieurs théorèmes en un seul, et pour éviter des exceptions. Toutes les autres applications de la dénommée quatrième dimension sont sans intérêt, parce qu'elles s'appuient sur de fausses conclusions.

des nœuds était expliquée d'un point de vue mathématique. De plus il est clair qu'un objet dans une boîte peut être libéré de cette boîte s'il y a une quatrième dimension. Donc les spéculations spiritistes ont un noyau mathématique raisonnable. Pour se défendre contre ces spéculations une possibilité est la suivante : on distingue les espaces mathématiques de l'espace physique et peut-être d'autres espaces (par exemple l'espace de la vision [analysé par Helmholtz à cette époque là]), de l'espace de l'intuition et de suite. Les espaces mathématiques fournissent des modèles parmi lesquels on va choisir un candidat pour chaque espace concret. C'est un point de vue tout à fait nouveau qui est apparu dans la deuxième moitié du XIX^e siècle.

5. L'importance des objets concrets pour les mathématiques

La philosophie moderne des mathématiques est fortement influencée par le structuralisme de BOURBAKI et d'autres. Ce structuralisme prône la priorité des structures sur les entités concrètes ; les dernières sont souvent considérées comme des « exemples », c'est-à-dire comme des objets qui illustrent une théorie générale et préexistante. Pour en donner un exemple simple : Après avoir défini la notion de « polyèdre régulier » on cite le cube comme exemple. Je pense qu'il est clair que la manière décrite renverse la marche historique : la définition est abstraite des entités – elle est à posteriori. Mais ce problème qu'on peut nommer un problème didactique n'est pas le seul échec de la théorie structuraliste. Les objets concrets sont souvent d'une grande importance parce que sans objets concrets une théorie (ou une structure) est vide. Autrement dit : ils sont la raison d'être de la structure ; sans exemples la structure n'est pas justifiée. Si on n'en avait pas découvert des objets intéressants l'espace à quatre dimensions sera sans aucun intérêt – une abstraction vide basée sur la pensée par analogie (ici une sorte de *horror vacui* se fait voir). Un cas tout à fait comparable est fourni par la topologie tridimensionnelle qui était prise au sérieux seulement après la construction des variétés intéressantes – un travail fait par W. DYCK et H. POINCARÉ. Mais il y a au moins un troisième aspect selon lequel les objets concrets sont importants : C'est le fait que beaucoup de théories se développent par une interaction entre le général et le concret. C'est clair aussi dans notre exemple des polyèdres réguliers : trois espèces sont construites par voie d'analogie – c'est-à-dire par le général – mais les trois autres ne sont trouvées que par une recherche très concrète. Le point de départ de ce processus était assez général, mais le processus lui-même ne dépend pas de ce point de départ. L'aspect décrit du développement des mathématiques fut analysé par LAKATOS ; il me semble que son quasi-empirisme est une doctrine très importante au niveau de la philosophie des mathématiques. Il est vrai que l'exemple choisi par Lakatos – le théorème d'EULER-Descartes – n'est pas tout à fait typique de la démarche des mathématiques. Mais avant tout, c'est un point de départ à partir duquel on peut avancer.

Avec ses remarques concernant l'importance du concret pour les mathématiques je veux terminer mon discours. Je pense que ses remarques sont une illustration aussi de l'importance d'une perspective sur l'enseignement des mathématiques – un travail souvent dur mais de temps en temps aussi très satisfaisant que Jean Pierre a fait avec excellence depuis 30 ans – . Moi j'espère qu'il va consacrer à l'avenir, une partie de ses connaissances et de son activité, à l'histoire des mathématiques. Ce sera – j'en suis sûr – d'un grand profit pour notre discipline en général et pour moi en particulier.

*For hard, hard, hard is it only not to tumble,
So fantastical is the dainty metre.*⁸

(Phrase qui clôt le mémoire de STRINGHAM)

Bibliographie

- COXETER H S M : *Regular Polytopes* (New York: Dover, 1973).
- CRANZ C : *Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension* (Hamburg: Verlagsanstalt und Druckerei AG, 1890).
- GEIDER S : *Anschauliche Darstellung der vierdimensionalen Polytope* (Wissenschaftliche Prüfungsarbeit an der Universität Koblenz – Landau, 26. Mai 1998).
- HENDERSON L Dalrymple : *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* (Princeton University Press: Princeton N.Y., 1983).
- JAMMER M : *On Concepts of Space* (New York: Dover, 1993).
- JORDAN C : *Essai sur la géométrie à n dimensions*. in *Œuvres*. Tome III (Paris : Gauthiers-Villars, 1962), pp.79-149.
- POINCARÉ H : *Œuvres*. Tome VI (Paris : Gauthiers-Villars, 1952).
- Rudolf STEINER und der mehrdimensionale Raum* (Beiträge zur Rudolf Steiner Gesamtausgabe N° 114\115 Dornach, 1995).
- SCHOUTE P H : *Mehrdimensionale Geometrie*. II. Teil: Die Polytope (Leipzig: Göschen, 1905).
- SMITH E D : *A Source Book in Mathematics* (New York: Dover, 1959).
- STEINER R : *Die vierte Dimension. Mathematik und Wirklichkeit*. Hg. Von R. Ziegler (Dornach: Steiner Verlag, 1995).
- STILLWELL J : *Exceptional objects* (American Mathematical Monthly 105, 1998, pp.850-858).
- STRINGHAM W I : *Regular Figures in n-dimensional space* (American Journal of Mathematics 3, 1880, pp.1-14 & 2 plates).

⁸ Mot à mot : « Plus dur sera de simplement ne pas tomber, plus fantastique sera la difficile mesure. »