# LA MILLIONIÈME DÉCIMALE de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$

Jean LEFORT

C'était il y a quelques années, en 1996, la communauté mathématicienne apprenait avec stupeur la découverte de David H. BAILEY, Peter B. BONWEIN et Simon M. PLOUFFE rendant possible de calculer le milliardième chiffre du développement binaire de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ sans qu'il soit nécessaire de calculer les 999 999 999 précédents. Bien sûr, plus le rang du chiffre est élevé plus il faut de temps mais alors que le calcul du premier milliard de décimales de $\pi$ est à la limite des possibilités de calcul des ordinateurs, le calcul du milliardième chiffre en binaire se fait en un temps ridiculement court. La formule et la méthode de calcul utilisées sont élémentaires et auraient pu être découvertes par le grand Euler. La communauté mathématique s'interroge : Existe-t-il une formule analogue permettant de déterminer la milliardième décimale de $\pi$ ? Car pour le moment seules les bases puissance de 2 (2, 4, 8, 16, ...) sont accessibles à la méthode.

Il existe d'autres constantes mathématiques pour lesquels le travail en base dix est possible. C'est ainsi le cas de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ .On se propose, dans cet article, d'illustrer la méthode avec le calcul de la millionième décimale de ce nombre. On reviendra sur $\pi$ ; à la fin de l'article.

## 1. Aspect théorique

### La formule utilisée

On considère le développement en série entière de la fonction logarithme, à savoir $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ et on l'applique au cas $x = \frac{1}{10}$ . Comme le logarithme de l'inverse est l'opposé du logarithme, il vient $\ln\left(\frac{10}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,10^n}$. Il est alors clair que si on cherche la $p$-ième décimale il suffit en gros de ne sommer que jusqu'à $n = p$. En effet les termes négligés $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n\,10^n}$ peuvent être majorés par $\frac{1}{p+1}\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ où l'on reconnaît une série géométrique de somme $\frac{10}{9(p+1)10^{p+1}} = \frac{1}{9(p+1)10^p}$. Cette quantité n'intervient pas dans le calcul de la $p$-ième décimale sauf peut-être à cause d'une retenue. Mais il faudrait vraiment jouer de malchance pour qu'il y ait autant de 9 successifs qui entraîneraient une retenue. Si c'était le cas, il serait nécessaire d'aller un peu plus loin dans le calcul. Il est à remarquer que le calcul précédent est très grossier et qu'il est sans doute possible de s'arrêter avant le terme d'ordre $p$ pour calculer la $p$-ième décimale, surtout si $p$ est grand. La méthode donnée permet d'obtenir non seulement la $p$-ième décimale mais aussi quelques-unes unes des suivantes.

En conclusion, la $p$-ième décimale de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ est la même que celle de $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n\,10^n}$. En multipliant la dernière formule par $10^{p-1}$ il suffit de chercher la première décimale de $\sum_{n=1}^{p} \frac{10^{p-1-n}}{n}$ .

**La méthode utilisée**

La formule précédente n'est pas nouvelle et elle est utilisée de façon classique pour calculer les décimales successives de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$. Ce qui est intéressant c'est que pour avoir la première décimale (et quelques-unes des suivantes), il suffit de considérer la partie fractionnaire de chacun des termes de la somme. Mais la partie fractionnaire de $\frac{10^{p-1-n}}{n}$ est la même que celle de $\frac{10^{p-1-n} - kn}{n}$ pour $k$ entier. Il suffit donc de calculer $10^{p-1-n}$ modulo $n$, et de diviser par $n$ pour obtenir cette partie fractionnaire. Or le calcul de $10^k$ modulo $n$ se fait très rapidement par l'algorithme suivant (qui s'applique de façon analogue au calcul de $a^k$ pour $a$ entier quelconque) :

L'idée est d'écrire $k$ comme somme de puissance de 2. Par exemple si $k = 43$ alors : $k = 2^5 + 2^3 + 2 + 2^0$. Et on utilise un schéma de HÖRNER pour faire le calcul :
$2^5 + 2^3 + 2 + 2^0$ $2(2(2(2(2(1)+0)+1)+0)+1)+1$ . Et le calcul de $10^{43}$ modulo $n$ se fait à l'aide d'élévations au carré ou de multiplications par 10 en réduisant modulo $n$ selon que l'on rencontre un 0 (simple élévation au carré) ou un 1 (multiplication par 10 puis élévation au carré) en partant de la parenthèse la plus interne. Dans l'exemple donné on trouve la succession 1, 0, 1, 0, 1, 1 ce qui conduit, en prenant par exemple, si $n = 17$, aux 6 étapes :

$1\times10= 10$ et $10^2=100=15$.
$15^2=225=4$;
$4\times10 =40=6$ et $6^2=36=2$;
$2^2=4$;
$4\times10=40=6$ et $6^2=36=2$;
$2\times10=20=3$.

Et pour ce dernier cas il n'y a pas élévation au carré puisque dans le schéma de HÖRNER il n'y a plus de multiplication par 2. On en déduit que $10^{43}$ modulo 17 vaut 3.

En utilisant les mêmes notations et en notant $t$ la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à $k$ et en partant de $r= 10$, l'algorithme s'écrit :

```
r := r mod n
n := n - t
t := t/2
TANT QUE t >= 1 FAIRE      r := r^2
r := r mod n
SI  n >= t ALORS      r := 10×r
     r := r mod n
     n := n-t     IS
     t := t / 2       QT
```

Il manque l'algorithme permettant la détermination de $t$. Cela n'est pas difficile en prenant le quotient entier de $k$ par 2 autant de fois que possible. Par exemple pour 43 on trouve 21 , 10, 5, 2, i soit 5 étapes ce qui prouve que $t$ vaut $2^5$. D'où l'algorithme:

```
a := 0
TANT QUE k <> 1 FAIRE      k := k div 2
   a := a+i  QT
   t := 2^a
```

On a maintenant tous les ingrédients pour réussir le calcul, calcul qui va être fait en utilisant le logiciel MAPLE.

## 2. Le calcul effectif avec MAPLE

On utilise la formule $\sum_{n=1}^{p} \frac{10^{p-1-n} \bmod n}{n}$ . En fait il faut s'arrêter à $p$–1 dans la somme car on ne sait pas calculer modulo $n$ avec des fractions. Le dernier terme devrait s'écrire $\frac{1}{10p}$. Il peut bien sûr être regroupé avec les termes du reste de la série entière. Il ne faut pas oublier que la série a été multipliée par $10^p$ et que par conséquent le reste est majoré par $\frac{1}{9(p+1)}$ . Comme le calcul va être fait pour $p$ très grand, l'erreur due à la méthode est inférieure à $\frac{1}{5p}$.

Par ailleurs, pour accélérer le calcul il faut l'effectuer en virgule flottante. Ceci introduit des erreurs d'arrondi et il y en a autant que de termes dans la somme, c'est-à-dire $p$ . Ce qui veut dire que si on travaille avec $k$ chiffres après la virgule, le résultat final ne sera connu qu'avec environ $k - \log p$ chiffres après la virgule (la notation log renvoie au logarithme décimal).

En fait le logiciel MAPLE ne travaille pas comme cela. Il va afficher le résultat avec $k$ chiffres. Or on peut estimer que chaque terme est un nombre au hasard entre 0 et 1. La somme sera donc voisine de $\frac{p}{2}$. Le travail en virgule flottante conduira à un résultat qui ne contiendra qu'environ $k - \log p$ chiffres après la virgule. Ceci prouve que les chiffres donnés seront presque tous exacts si l'on prend $k = 2 \log p$. En fait MAPLE introduit lui-même des approximations et il vaut mieux se donner une marge de sécurité de 2 ou 3 chiffres supplémentaires. Le logiciel MAPLE étant un logiciel évolué, les algorithmes précédents sont implantés directement dans le calcul modulo $m$ . L'aide est à ce propos très explicite :

« Pour calculer `i^n  mod m` où `i` est un entier, il est maladroit d'utiliser la syntaxe évidente car c'est la puissance qui est calculée en premier (donnant sans doute un entier très grand) le résultat étant ensuite réduit modulo `m` . Il vaut mieux utiliser l'opérateur inerte `&^` : `i &^ n mod m`. Sous cette forme la puissance sera calculée intelligemment par l'opérateur `mod`. »

Le calcul est alors immédiat. pour p = $10^6$, on va travailler avec 15 chiffres.

```
[> Digits:=15:
[> add(evalf((10&^(999999-n)mod n)/n,15),n=1..999999);
        497102.801741811
```

Le temps de calcul est d'environ six minutes sur mon ordinateur équipé d'un Pentium Pro S cadencé à 200 MHz avec 128 kO de RAM.

On en déduit que la millionième décimale de $\ln\left(\frac{10}{9}\right)$ est un 8 suivi de 0,1,7 et 4.

## 3. Retour sur π

### La formule

La formule utilisée est la suivante: $\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$.

Découvrir cette formule n'est pas un mince exploit bien que la démonstration ne pose aucune difficulté et soit à la portée d'un étudiant de DEUG. En voici les principales étapes dont on laisse la justification au lecteur :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\,dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}\ .$$

Par suite : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,dx$.

Après simplification et le changement de variable $y = x\sqrt{2}$, on décompose partiellement en éléments simples :

$$\int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}\,dy = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}\,dy = \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}\,dy = \pi\ .$$

On remarque que la formule pour π ressemble à celle utilisée dans la première partie de cet article, mais la présence des puissances successives de 16 oblige à travailler en hexadécimal.

La millionième hexadécimale de π est 2 suivi de 6, C, 6, 5, E, 5, etc. Pour la milliardième on trouve 8 suivi de 5, 8, 9, 5, 5, etc.

### Les changements de base

Il est très facile de passer de la base seize à la base deux. Il suffit de remplacer chaque chiffre hexadécimal par sa traduction sur 4 chiffres en base deux. Ainsi les résultats précédents montre que la quatre millionième « bicimale » de π est 0 et qu'il vient ensuite 010, 0110, 1100, 0110, 0101, 1110, 0101 etc.

Si maintenant on veut travailler en base 32 on regroupe les « bicimales » par 5.

Contrairement à ce que peuvent croire ceux qui n'ont pas l'habitude de l'arithmétique, il n'est pas possible de passer aussi simplement d'une base *a* à une base *b* choisies arbitrairement. On va traiter ici le passage de la base deux à la base dix pour un nombre à virgule puisque c'est le cas le plus fréquent. On suppose que dans la base deux le nombre N s'écrive 0, $a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ où les $a_n$ valent 0 ou 1. Cela signifie que $N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ ce qui peut encore s'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n a_n}{10^n}$ où il semble apparaître une décomposition en base dix. Seulement $5^n$ est un nombre très grand qui a à peu près 0,6 $n$ chiffres puisque le logarithme décimal de 5 vaut à peu près 0,6. Par conséquent la valeur de $a_n$ intervient non seulement sur le $n$-ième chiffre décimal mais encore sur les 0,6 $n$ précédents et il y aura sans doute des retenues. Cela veut dire que si l'on veut calculer la milliardième décimale il faut connaître au moins la milliardième « bicimale » et les 1,5 milliard suivantes La méthode vue ci-dessus ne présente plus aucun intérêt.

## Conclusion

On a dit qu'Euler aurait été capable de trouver une telle formule. Certes, celle relative à $\pi$ n'est pas évidente, mais d'autres nombres comme ln 2 se prêtent admirablement à ce calcul du $n$-ième chiffre dans une base donnée. EULER lui-même savait que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ qui donne un calcul évident en base deux. Ce qui est étonnant c'est qu'alors que la quête de chiffres du développement dans une base donnée est à la mode depuis des dizaines d'années (et pour $\pi$ depuis Archimède au moins !) personne ne s'est avisé, avant la découverte de 1996 qu'un nombre tel que ln 2 était aussi facilement accessible à ce type de raisonnement.

Les adeptes de la recherche de l'utilité immédiate seront déçus. À quoi peut bien servir de savoir que la millionième décimale de $\ln \frac{10}{9}$ est un 8 ? À rien bien sûr aujourd'hui. Mais qui sait quelles retombées va avoir cette méthode et les recherche d'une formule donnant les décimales de $\pi$ ? Ainsi va la recherche en mathématiques, de recherches internes qui n'ont de retombées que beaucoup plus tard en recherches suscitées par des problèmes externes et qui font avancer un tout autre domaine, le progrès est constant grâce à la liberté qui est donné au chercheur.