Y A-T-IL UN NATUREL APRÈS 3 ?

Introduction

Le propre des mathématiques, c'est l'abstraction. Abstraire c'est permettre de simplifier puisqu'une même théorie s'appliquera alors à diverses situations. Mais la démarche de l'abstraction est difficile car elle nous oblige à nous débarrasser d'un symbolisme culturel ou non pour en adopter un autre, le symbolisme mathématique, soi-disant plus universel. Impossible d'enseigner les mathématiques sans connaître la culture des enseignés. Ce fait était particulièrement patent à l'époque des mathématiques dites modernes où les enseignants passaient beaucoup de temps à expliquer la différence entre, par exemple, le **et** du français courant et le **et** ($\wedge$) mathématique. La notion de fonction est toujours l'occasion d'un tel aller-retour entre la pratique quotidienne du mot et son sens mathématique. Mais on oublie trop souvent que sur des notions très simples comme le dénombrement, ou même le simple comptage, ces questions sont tout aussi pertinentes. Il y a sans doute un biais culturel, le numérique ayant envahi notre civilisation, mais pas seulement. Certes, tous les professeurs sont sensibilisés aux difficultés qui surgissent à propos de 0 ; mais est-ce le seul nombre à propos duquel surgissent ces difficultés ?

Les réflexions personnelles qui suivent invitent à montrer que les entiers ***1***, ***2*** et ***3*** ont un statut très particulier dans la pensée humaine. Ces réflexions devraient permettre un retour sur l'enseignement du calcul littéral en collège en faisant mieux comprendre les raisons des erreurs des élèves face, par exemple, à l'utilisation du 1.

1. Aspects linguistiques des petits nombres

Si les mathématiques peuvent être considérées comme un des fondements de la pensée humaine et le nombre le fondement des mathématiques, c'est à travers la linguistique que l'on peut remonter aux aspects primordiaux et à la structure de ladite pensée humaine, en particulier aux premières notions de nombre.

Nous allons voir que l'utilisation des petits nombres (***1***, ***2***, ***3***, rarement ***4*** ou plus) est systématiquement incluse dans la grammaire de toutes les langues humaines. Ceci tendrait à prouver que ces nombres jouent un rôle particulier dans la structuration de la pensée. Sans prétendre à une étude exhaustive, les quelques pistes de recherches citées permettent de montrer que ces petits nombres n'ont pas le même statut que les suivants.

1. Les conjugaisons

Il est quand même curieux que (toutes ?) les langues humaines n'envisagent que trois personnes (pour le singulier au moins) dans la conjugaison des verbes ou l'usage des pronoms puisque dans certaines langues les verbes ont une forme invariable. Les trois pronoms du singulier sont, en français, *je*, *tu*, *il* [1]. Remarquons que le *il* est bien plus ambigu que le *je* ou le *tu* En effet le *il* renvoie à une personne ou un objet sur lequel les deux interlocuteurs ont du se mettre d'accord, ce qui n'est pas toujours évident comme le montre la phrase suivante :

[1] Je n'oublie pas le féminin, mais il est, dans le cadre qui nous intéresse ici, très secondaire d'avoir ou non un verbe qui s'accorde en genre avec son sujet. L'étude du genre fait l'objet d'un autre paragraphe.

L'expérimentateur introduit le carbonate de calcium dans ce milieu ; il subsiste après filtration[2]

Par contre *je* et *tu* ne présentent aucune ambiguïté. *Je* c'est moi, l'unité. *Tu* c'est toi, la deuxième personne, l'autre moi-même avec qui je converse. *Il* renvoie à un tout indistinct, une pluralité singulière.

Disons un mot de la conjugaison au pluriel. *Nous, vous, ils* sont beaucoup plus ambigus. À tel point que plusieurs langues distinguent deux formes du *nous*. C'est le cas de certaines langues amérindiennes. Le guarani admet les formes *ñande* et *ore,* la première forme incluant la ou les personnes avec lesquelles parle le locuteur, la deuxième les excluant. Ces formes plurielles, *nous, vous* (je ne parle pas ici de la forme de politesse utilisée en français standard) et *ils,* impliquent une certaine généralisation sur laquelle il n'est pas toujours possible de se mettre entièrement d'accord. Nous retrouvons ici la difficulté vue à propos du *il.* Nous nous heurtons alors à des généralisations abusives source d'incompréhensions et de conflits.

2. Singulier, duel, pluriel

Dans l'ancien indo-européen (langue reconstituée dont sont issues la plupart des langues européennes mais aussi le sanskrit) existait un nombre spécial intermédiaire entre le singulier (réservé à l'unité) et le pluriel, le duel qui servait à dénombrer les couples et d'une façon générale était utilisé dès qu'il s'agissait de deux éléments. On peut noter que nombreux sont les éléments qui vont par couple, des différents organes du corps (mains, yeux, oreilles,…) à la sexualité. Le grec ancien a gardé le duel mais d'autres langues non apparentées comme l'arabe classique, le huron (langue amérindienne d'Amérique du nord), … ont également une forme de duel. Il en reste quelques traces dans les langues européennes modernes par des formes spéciales pour un et deux alors que la régularité commence à partir de trois (et parfois à quatre mais il faudrait faire une étude poussée sur la reconstruction des formes après usure linguistique à partir de forme régulière) :

En anglais : *once, twice, three times…* avec deux niveaux irréguliers, mais *first, second, third, fourth…* où il y a trois niveaux irréguliers avant de rencontrer la régularité.

En français : *premier, second (deuxième ?), troisième…* mais *demi, tiers, quart, cinquième…*

3. Masculin, féminin, neutre.

La distinction masculin-féminin semble résulter d'une distinction assez naturelle des sexes où l'on retrouve la notion de couples, de *2.* Le problème c'est que cette distinction n'est pas aussi nette dans toutes les langues. Et cela se comprend. En effet le sexe de certains êtres vivants n'est pas facile à déterminer (pour certains végétaux, insectes, oiseaux, …). Il est alors naturel d'envisager trois genres : masculin, féminin et neutre. Mais ce n'est qu'un choix possible ce qui traduit une influence culturelle dans cette distinction des genres. L'ancien indo-européen distinguait le genre « animé » du genre « inanimé » et il en reste des traces dans les langues slaves. Nous pouvons observer que dans la plupart des langues il y a un partage en deux ou trois classes. Il existe cependant des langues où le partage se fait en un bien plus grand nombre de catégories comme par exemple dans les langues sino-tibétaines avec l'usage des classificateurs. Les classificateurs jouent effectivement un rôle voisin de celui du genre en français mais il arrive qu'un même mot puisse recevoir différents classificateurs[3]. Dans ce cas, il est cepen-

---

[2] D'après *Les langues du monde* ouvrage collectif, Éditions Pour la Science.

[3] C'est ainsi que l'on peut distinguer *yF lún yùe* (« la lune » avec le classificateur *lún*) et *yF gè yùe* (« le mois lunaire » avec le classificateur *gè*), le premier mot *yF* correspondant à l'unité.

dant possible de se demander s'il n'y a pas eu nécessité de distinguer un grand nombre d'homonymes. C'est en tout cas une possibilité pour le mandarin (chinois officiel), langue pour laquelle le nombre de classificateur est le plus grand. Comme le nombre de classificateurs a beaucoup changé au cours de l'histoire du chinois (une dizaine en chinois ancien puis plus de 300 aujourd'hui avec toutefois une tendance à la diminution dans certains dialectes) il est difficile de lier cette notion à celle de genre et surtout de penser que cette notion soit primitive.

4. Les positions spatio-temporelles

La plus part des systèmes verbaux reposent soit sur une distinction de temps, soit sur une distinction d'aspect. Les temps distinguent trois niveaux : passé, présent, futur. Les aspects sont en général deux : perfectif et imperfectif (comme dans les langues slaves) ou accompli et inaccompli (comme dans les langues sémitiques). Il n'est pas question de faire une étude comparée et détaillée des divers systèmes verbaux mais d'attirer l'attention sur cette décomposition en deux ou trois catégories. Toutefois d'autres notions interviennent comme l'hypothétique, le souhaitable,... Temps et aspects se recoupent largement. On sait que passé et futur s'opposent au présent puisque les deux premiers ont une durée et que le dernier n'est qu'un point sur l'échelle temporelle. Si nous nous contentons de regarder le système français de l'indicatif nous remarquons que les temps simples correspondent à l'aspect inaccompli (ou imperfectif) et les temps composés à l'aspect accompli (ou perfectif) :

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{je chante}\\ \textit{je chantais}\\ \textit{je chanterai}\end{array}\right. \quad \text{action en cours (inachevée)} \quad \left\{\begin{array}{l}\textit{j'ai chanté}\\ \textit{j'avais chanté}\\ \textit{j'aurai chanté}\end{array}\right. \quad \text{action achevée}$$

D'un point de vue spatial la distinction entre quelques positions est tout aussi patente dans les différentes langues. Il y a toujours deux ou trois catégories correspondant à chacune des extrémités et parfois au milieu, quelques fois quatre par dédoublement de deux catégories initiales. Chacune des trois (!) directions de l'espace donne naissance à au moins un couple de mots : droite et gauche, devant et derrière, dessus et dessous, et, éventuellement, le milieu. Le français distingue *ici* et *là, en deçà* et *au delà.* L'espagnol utilisera jusqu'à trois niveaux *aquí, ahí,* et *allí.* En fait la recombinaison des différentes directions conduit souvent à multiplier le nombre de positions spatiales. Notons, par exemple, les quatre directions de la rose des vents (nord, est, sud, ouest) qui combinent ainsi la droite et la gauche avec l'avant et l'arrière, mais certaines cultures comptent six directions, ajoutant le zénith et le nadir, c'est-à-dire le dessus et le dessous.

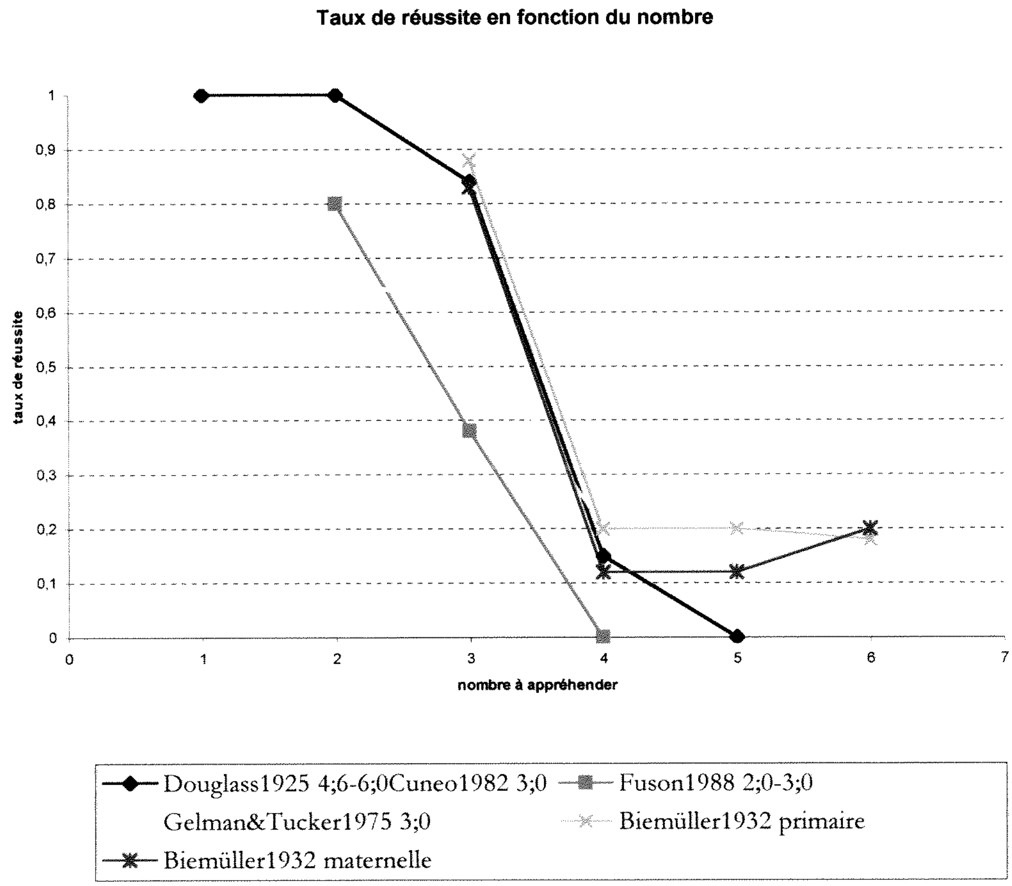
5. Conclusion linguistique

Cette très rapide étude montre bien que les nombres ***1*** et ***2*** ont un statut fondamental, apparaissant systématiquement en opposition. Le ***3*** a un rôle légèrement « second » mais aussi très fort dans les différentes grammaires. Sauf cas de recombinaison, les autres nombres n'ont pas un rôle aussi important ce qui laisse penser que les nombres ***1*** et ***2*** sont imprimés dans nos gènes ou dans la structure de notre cerveau et que le nombre ***3*** n'y est peut-être que l'initial de tous les autres. Bien sûr tous les autres nombres sont en germe sinon il n'y aurait pas de mathématiques telles que nous les connaissons, mais il faut envisager que, contrairement aux axiomes de PEANO (première version[4]) ce n'est pas ***1*** qui engendre tous les naturels, du moins pas au niveau du fonctionnement de notre cerveau.

2. Historique de la construction des petits nombres

1. La construction du nombre chez l'enfant

De très nombreuses études de didactiques ont été consacrées à la genèse de la notion de nombre chez l'enfant. Les résultats qui suivent sont extraits essentiellement de l'ouvrage *Apprentissages numériques* de Jean-Paul FISCHER[5]. L'auteur y présente les résultats d'expériences passées qui sont résumés dans le tableau ci-après. Ces expériences ont en commun d'avoir présenté des collections linéaires de points ou de boules régulièrement espacés et d'avoir empêché le comptage un par un par une limitation du temps d'exposition ou par des consignes données aux enfants. (les âges du type 3;6 signifient 3 ans et 6 mois).



Ces différentes expériences passées montrent parfaitement que les nombres ***1*** et ***2*** sont très rapidement assimilés, que ***3*** l'est assez vite mais qu'au-delà il y a une chute spectaculaire de l'appréhension du nombre. Le nombre ***3*** apparaît comme le terme ultime de la numération immédiate, c'est-à-dire des nombres que l'on peut évaluer sans compter.

[4] Dans une première version PEANO construisit les entiers en partant de 1. Toutes les versions ultérieures commencent en 0.

[5] Apprentissages numériques par Jean-Paul FISCHER, Presses Universitaires de Nancy, 1992.

En fait Fischer montre dans son ouvrage que les choses sont un petit peu plus compliquées. Il fait en effet une distinction selon la représentation figurée des nombres soit en ligne, soit en constellation.

	1	2	3	4	5	6
Représentation en ligne	•	• •	• • •	• • • •	• • • • •	• • • • • •
Représentation en constellation	•	• •	• • •	• • • •	• • • • •	• • • • • •

La reconnaissance de la forme géométrique facilite l'appréhension du nombre. Une étude systématique n'a pas été faite pour ***6***, mais il apparaît que si ***3*** reste le nombre ultime pour bien des enfants, surtout des plus jeunes, la disposition symétrique des points facilite la dénomination des nombres ***4*** et ***5*** sauf justement pour les plus jeunes. Le tableau suivant donne le nombre d'enfants ayant réussi la dénomination du nombre présenté en fonction du groupe d'âge. Chaque groupe d'âge de 4;3 ans à 5;9 ans comporte 36 individus.

	1L	*1C*	*2L*	*2C*	*3L*	*3C*	*4L*	*4C*	*5L*	*5C*
4;3ans	35	34	32	30	14	16	5	3	2	0
4;9ans	36	36	32	30	21	23	3	10	5	8
5;3ans	36	36	34	34	28	29	10	19	6	19
5;9ans	36	36	36	36	35	34	12	27	9	26
Total	**143**	**142**	**134**	**130**	**98**	**102**	**30**	**59**	**22**	**53**

La différence entre ***3*** en ligne (3 L) et ***3*** en constellation (3 C) n'est pas significative. De nombreuses expériences tendent à prouver que les bons résultats relatifs à ***4*** et ***5*** en constellation résultent d'un comptage qu'il est beaucoup plus facile et rapide de faire dans ce type de présentation plutôt que dans la présentation en ligne. Il y a ensuite mémorisation de la forme de la constellation. Ceci prouve que ***3*** reste bien une borne supérieure dans l'appréhension des nombres.

En fait une analyse plus fine des diverses expériences faites auprès des enfants tend à montrer que la reconnaissance de ***3*** résulte également d'un comptage qui a lieu beaucoup plus tôt dans le développement. Il faut également noter que pour bien des plus jeunes, tout ce qui n'est pas ***1*** ou ***2*** est nécessairement ***3***.

2. Les grecs et le nombre *3*

On sait que PYTHAGORE avait créé une sorte de secte mathématico-religieuse. Le nombre y était la base de la théologie et plus particulièrement les nombres ***1***, ***2***, ***3*** et ***4***. C'est la fameuse *tétraktys* célébrée dans cet hymne :

*Bénis-nous, nombre divin, toi qui a engendré les dieux et les hommes, Ô Sainte, Sainte Tétraktys, toi qui contient la racine et la source du flux éternel de la création car le nombre divin débute par l'unité pure et profonde et atteint ensuite le **4** sacré puis il engendre la mère de tout, qui relie tout, le premier né, celui qui ne dévie jamais, qui ne se lasse jamais, le **10** sacré qui détient la clé de toute chose*[6]

Pour PYTHAGORE, le ***1***, la monade est la source de tous les nombres. Le ***2***, premier nombre pair est le symbole du féminin et ***3*** premier nombre impair (ce qui prouve que

[6] D'après *Les mathématiques ? Quelle Histoire !* Cassette vidéo d'André STOLL, IREM de Strasbourg.

1 n'est pas un nombre) est le symbole du masculin. Le rôle de la Tétraktys ne peut se comprendre si on ne se réfère pas aux nombres triangles dont l'importance dans la pensée pythagoricienne est indéniable. Le ***1***, le ***2*** et le ***3*** appartiennent aux hommes car ils correspondent aux trois directions de l'espace sensible, et 1 + 2 + 3 donne ***6***, nombre triangulaire, le premier nombre parfait. Et 1 + 2 + 3 + 4 = ***10***, la décade, nombre sacré car il correspond à la base de la numération des grecs[7]. En dépassant les nombres des hommes, ne serait-ce que d'une unité on atteint les nombres des dieux, ce qui explique le caractère sacré de ***4*** (et de ***10***).

L'étude des nombres est alors un moyen de comprendre les dieux et par voie de conséquence la nature que les dieux ont créée :

Là où on ne trouve ni le nombre ni sa nature, rien ne peut exister qui soit intelligible à quiconque en soi-même ou en relation avec d'autres choses. Vous pouvez observer le pouvoir du nombre s'exerçant par lui-même dans tous les actes et toutes les pensées des hommes, dans tous les métiers et la musique.

On retrouve cette vision des mathématiques dans la célèbre phrase de GALILÉE sur l'univers, livre ouvert écrit en langage mathématique.

3. Religion et nombres

Nous venons de voir le rôle très particulier que PYTHAGORE attribuait aux nombres et en particulier aux premiers d'entre eux. Les religions monothéistes vont très vite assimiler le nombre ***1*** à Dieu, ce qui implique que ***1*** ne saurait être un nombre avec les propriétés des nombres puisque Dieu transcende tout. Cette vision religieuse du nombre ***1*** va perdurer pendant tout le Moyen-Âge, surtout dans l'empire arabe alors au sommet de sa puissance. Les mathématiciens, tant musulmans que juifs, travaillant à Bagdad expliqueront plus d'une fois que ***1*** n'est pas un nombre puisqu'il représente Dieu qui ne saurait être divisé. En effet ***1*** n'a pas de diviseur autre que lui-même.

Chez les chrétiens, l'invention de la Trinité peut très bien se concevoir comme une concession à la philosophie pythagoricienne qui imprégnait de façon diffuse la pensée grecque au début de notre ère. C'est dans le fond la trace d'un certain syncrétisme. Mais cela prouve la force du nombre ***3*** qui tend à resurgir dans différents domaines.

D'une façon générale, dans toutes les religions, certains nombres vont recevoir une charge symbolique très forte : – il en est ainsi du nombre ***7*** qui, des sumériens aux juifs puis au chrétiens et aux musulmans, finira par rythmer le temps quotidien avec la semaine –. On sait que la Bible fait un grand usage des nombres ***10*** et ***12***, et on sait aussi qu'une multitude de livres ont été écrit à propos du fameux ***666*** de l'Apocalypse (Apoc. XIII 18), nombre auquel il faudrait joindre le ***153*** de l'évangile de Jean (JEAN **XXIII**)[8] est plus que vraisemblable que tous ces nombres se renvoient les uns les autres par l'intermédiaire de sommes et de produits. Il semble donc que l'on retrouve ici une influence pythagoricienne à moins que PYTHAGORE et juifs n'aient emprunté à la même source. Mais tout ceci est hors de notre présent propos.

La notion de couple, couples primitifs engendrant toute l'humanité ou couples divins se partageant le monde soit en opposition soit en parallèle, se retrouve dans la plupart des cultures. Que l'on pense aux religions de l'Inde, à la religion de l'Égypte antique, au manichéisme, ou à bien d'autres.

---

[7] Heureuse coïncidence qui n'aurait pu avoir lieu chez les mayas avec la base 20.

[8] 666 est le nombre triangulaire de $36 = 6^2$ et 6 est lui-même triangulaire, en même temps que nombre parfait, mais il lui manque ***1*** pour atteindre le 7 divin ; 153 est le nombre triangulaire de 17 = 10 + 7 deux nombres relatifs à la perfection de Dieu. $10 = 5 \times 2$ et $5 + 2 = 7$, de même $12 = 4 \times 3$ et $4 + 3 = 7$, etc.

4. Fermat et le nombre 1[9]

Dans un défi adressé à divers mathématiciens étrangers et en particulier à WALLIS, FERMAT propose, le 3 janvier 1657, de chercher un carré ou un cube qui ajouté à ses parties aliquotes fasse un cube[10], à l'exemple de $7^3=343$ qui est tel que $343+1+7+49=20^3$... WALLIS proposera rapidement la seule solution *1*. Cette réponse va déclencher une controverse sur la nature du nombre *1* dont les extraits suivants montrent la nature et prouvent la difficulté de concevoir le nombre *1* comme un nombre ordinaire.

*Ainsi on demande un nombre qui ait des parties aliquotes ; mais un nombre est une pluralité d'unités, et l'unité elle-même n'est pas un nombre ; elle ne résout donc pas la question, où l'on demande un nombre, non pas quelconque, mais qui ait des parties aliquotes qui puissent lui être ajoutées et qui soit de même nature que le nombre **343**, dont les parties sont énumérées. Mais quelles sont les parties de l'unité ? Il est clair que si elle n 'en a pas, ainsi que l'avoue Wallis lui-même, elle n'est aucunement de la même nature que le nombre **343**, cube ayant des parties aliquotes, qui, ajoutées à ce nombre, en donnent un autre carré.*

[...]

Mais quand Wallis présente à plusieurs reprises l'unité comme étant le cube cherché et [...], il est inexcusable, puis qu'en donnant l'unité, il ne donne en fait aucun cube.

Lettre de Frenicle à Digby du 3 février 1658

*Sa chicane sur votre solution par le nombre **1** est bien mauvaise; car chacun sait que quelques uns sont de l'opinion que **1** n'est pas un nombre ; mais ceux-là même savent tout aussi bien que, dans l'opinion des autres, il en est un.*

Lettre de Brouncker à Wallis du 28 février 1658
(datée du 18 février 1657 style anglais[11])

En dehors de la controverse, il faut noter le vocabulaire qui trahit bien la difficulté qu'ont les mathématiciens de l'époque à donner au nombre *1* le même statut qu'aux autres nombres. Aujourd'hui, on parle du nombre *1*, pas de l'unité, mot qui a une signification bien précise dans le cadre de la structure d'anneau. L'extrait suivant montre que le nombre *2* a aussi un synonyme, binaire, dont le sens, de nos jours, a été considérablement restreint.

*Je lui avois écrit qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit quarré est 25, auquel si vous ajoutez **2**, il se fait 27 qui est cube.*

Lettre de Fermat à Digby du 15 août 1657

Une autre trace du rôle particulier de deux est la notation xx pour x^2 encore très vivace au XVIII^e siècle.

Ces quelques exemples sont des indices forts du rôle très particulier qu'ont encore les petits nombres dans la pensée mathématiques du XVII^e siècle.

Conclusion et retour sur l'enseignement des maths

1. Conclusion provisoire

Le développement de la notion de nombre chez l'enfant, la linguistique, la sociologie, les religions, l'histoire, (on pourrait y ajouter la psychanalyse), tous ces aspects de la

---

[9] Tous les exemples de cet alinéa sont extraits de « œuvres de Pierre FERMAT, I- Théorie des nombres » présenté par R. RASHED et Ai. et publié chez Blanchard (1999).

[10] Les parties aliquotes sont les diviseurs stricts. Ainsi les parties aliquotes de 6 sont 1, 2, 3.

[11] Non seulement les anglais utilisaient le calendrier julien en retard de 10 jours sur le calendrier grégorien, mais leur année commençait au 1^er avril.

pensée humaine tendent à prouver que notre esprit fonctionne à partir de la notion de ***1*** et de ***2*** et que tous les autres nombres sont construits à partir de ces deux là. Si le nombre ***3*** apparaît très vite il semble, cependant, jouer un rôle un peu différent. Il regroupe la notion de pluriel et il est le début du comptage. Mais nous n'avons ici que des aspects indirects du fonctionnement de notre cerveau. Bien des recherches seront encore nécessaires pour améliorer la compréhension de notre nature et en particulier la compréhension de notre façon de penser les nombres, à commencer par $\mathbb{N}$.

2. Influence sur l'enseignement

Mon professeur de 4e avait l'habitude de nous répéter : « Le prochain qui me dit que 0 c'est rien aura 0, il verra si c'est rien !» Bien évidemment il n'en faisait jamais rien ! et nous répétait inlassablement le rôle mathématique du 0. Mais le nombre 0 est apparu très tardivement dans l'histoire des mathématiques et tous les pédagogues sont depuis longtemps sensibilisés aux difficultés de son appréhension mathématique.

Il est curieux que le nombre ***1*** qui joue rigoureusement le même rôle d'élément neutre pour la multiplication que le 0 pour l'addition ne fasse pas l'objet de soins aussi attentifs de la part des pédagogues. De même que le 0 disparaît de l'écriture, de même le ***1*** disparaît : on écrit x et non ***1***x ou $x^{\mathbf{1}}$. Il ne faut donc pas s'étonner que les élèves oublient ce facteur 1 dans une factorisation. Il serait intéressant de savoir si la disparition du ***1*** dans les écritures algébriques n'est pas vécu comme une disparition du moi, à moins qu'il ne s'agisse de la non visibilité de Dieu ? Question qui n'est pas si idiote quand on a vu l'influence de la religion sur la perception de ***1*** comme nombre.

Deux paraît être ressenti essentiellement comme la valeur du couple (au sens sexuel), de tout ce qui va par deux dans la vie, donc de la paire : bras, jambes, yeux, oreilles, etc. Cette référence quasi obligée de ***2*** à bien des aspects du corps ne pourrait-elle pas jouer un rôle analogue dans le refus de l'abstraction qu'impose l'aspect mathématique du nombre ***2***. Là encore, je soulève plus de questions que je n'apporte de réponses, le seul fait de s'interroger permettant une prise de conscience qui ne peut être que bénéfique du point de vue didactique et pédagogique.

Il serait intéressant de savoir si la construction de la numération au delà de ***3*** n'est pas vécu comme une approche de l'infini, que l'on pense à cette réflexion classique d'enfants s'adressant à un de leur parent : « Dis, papa (maman), jusqu'à combien tu sais compter ? » Cet aspect peu pris en compte dans la pédagogie actuelles mériterait une réflexion. Le vertige que l'on éprouve face à l'infini pouvant se révéler traumatisant pour certains enfants qui seront peut-être justement ceux qui rejetteront ultérieurement les mathématiques.

Une des difficultés essentielles qu'ont les élèves pour comprendre les maths, c'est d'admettre que l'abstraction n'est pas une perte de sens mais bien plutôt une multiplication des sens. Pour rester au niveau numérique qui est le mien dans cet article, l'abstraction « deux » recouvre non seulement la notion de couple mais aussi toute sorte d'ensembles dont « ***2*** » sera le cardinal commun. Ce ***2*** peut être précisé par un mot qui incarnera[12] alors son sens. Cette prise de conscience me paraît nécessaire pour entrer dans les mathématiques et éviter toute sorte de blocages affectifs. Le mieux est de commencer tôt.

[12] J'utilise volontairement le mot « incarner » qui a une forte connotation religieuse.

3. 1, 2, 3 et après ?

Tout le monde connaît la réponse au titre de cet article. Mais si nous dépassons la simple étude des naturels nous arrivons aux nombres *irrationnels,* puis au nombres *négatifs* (qui donnaient de *fausses* solutions), puis au nombres *imaginaires,* aux nombres *transcendants,* aux nombres *idéaux,...*[13] et finalement nous sommes confrontés à la notion même de nombre.

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Ici le vocabulaire porte la trace des difficultés qu'ont eues les mathématiciens à dégager les bonnes notions et ce vocabulaire même incite les enseignants mobiliser toute leur capacité pédagogique afin que les élèves, à leur tour, dégagent les bonnes notions mathématiques à partir de leur symbolique, relative à ladite notion.

Mais les mathématiques ne s'arrêtent pas aux nombres quelque soit l'étendue que nous donnons à ce concept. Il faut ensuite parler des structures et des fonctions. Mais ceci est un autre chapitre bien plus long. Gageons qu'il sera d'autant mieux compris par les étudiants que ceux-ci auront été bien démarré sur ***1****,* ***2*** et ***3****.*

[13] Et ce n'est pas fini (!), voir par exemple « Et pourtant ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$ » de Claude LOBRY, Éd. Aléas.