L'INFINI MATHÉMATIQUE, SES INVENTEURS, DÉCOUVREURS, DÉTRACTEURS, DÉFENSEURS, MAÎTRES, VICTIMES, UTILISATEURS ET SPECTATEURS

Dr Edward BELAGA
LSIIT-CNRS/UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR

« La mise au point définitive de la nature de l'infini est devenue nécessaire, non seulement pour l'intérêt spécialisé de sciences particulières mais aussi pour l'honneur de la compréhension humaine. L'infini a toujours suscité les émotions du genre humain, plus que toute autre question ; l'infini a stimulé et enrichi la raison comme peu d'autres idées l'ont fait, mais l'infini plus que toute autre notion a besoin de clarification. » [Hilbert 1925]

1. Préambule

« Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous. » [Hilbert 1925]

Commençons par la remarque banale suivante de caractère purement phénoménologique : avant que Georg Cantor entre dans la scène de l'infini mathématique, deux types de « totalités infinies » sont connus de manière expérimentale dans la communauté mathématique et ce, au moins depuis le temps d'Euclide, nous parlons de la totalité infinie du dénombrable et de la totalité infinie du continu.

Techniquement Cantor nous apporte :

— premièrement une remarquable mise au point des notions de dénombrable ω (ou$\aleph_0$)[1] et de continu $\mathfrak{c}$;

— deuxièmement la découverte de l'énorme vide entre les deux ;

— troisièmement l'invention d'une foule innombrable de totalités infinies nouvelles supposées pour certaines combler le vide entre $\aleph_0$ et $\mathfrak{c}$ et pour d'autres aller au delà de $\mathfrak{c}$.

Les successeurs de Cantor inventent des totalités infinies plus redoutables encore. Ils ont aussi essayé avec beaucoup d'acharnement de combler le hiatus $\{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$quoi-que avec un succès relatif.

Bien sûr de si modestes détails phénoménologiques ne peuvent être tenus pour responsables de l'aventure mathématique après Cantor. La vérité est que l'infini mathématique est devenu à la fois un attractif et périlleux « Klondike » de genres : une mine d'or pour les prospecteurs de l'infini, une ruine morale et psychologique pour d'autres, comprenant le fondateur *[Dauben 1986]*, *[Meschkowski 1964]* et son disciple le plus perspicace *[Feferman 1986]* qui, c'est dommage, appartiennent à la deuxième catégorie. De nombreuses réussites furent construites ici, mais plus encore d'espérances furent brisées provocant de temps en temps d'énormes et subits tremblements de terres mathématiques et philosophiques qui purent être ressentis loin de l'épicentre de l'infini. Des guerres fratricides furent jouées, gagnées et perdues.

Et comme ce qui est arrivé après la ruée vers l'or américaine, l'aventure risquée de l'infini s'est traduite par un nouvel essor des mathématiques : d'abord en logique, phi-

[1] Alors que les ω correspondent aux ordinaux des totalités infinies, les $\aleph$ correspondent aux cardinaux des totalités infinies ; voir ci-dessous section 3 et par exemple *[Hrbacek, Jech 1984]*.

losophie puis en informatique, physique et, en retour, en mathématiques. (Il est hors des propos d'insister ici dans cet article sur ces développements.)

Quoi qu'il en soit, la poussière de l'infini est encore loin de s'être stabilisée.

Un chercheur réputé n'a pas encore écrit un article complet sur l'infini, avec titres et préliminaires, qui en prendrait la défense tout en calmant le jeu *[Shelah 1992]*. À une autre occasion, le même auteur se demande sans l'ombre d'une ironie *« pourquoi nombre de ses collègues y compris les meilleurs spécialistes de la théorie des ensembles s'excusent dès qu'on aborde leur sujet. » [Shelah 1993]*p. 2 cf *[Jensen 1995]* p. 407. Au même moment, son célèbre contemporain, écarte catégoriquement, malgré ses efforts et ceux de ses collègues, toute *« découverte de nouveaux axiomes dans le pays inaccessible des cardinaux transfinis » [Mac Lane 1983]*. Pour consommer la désunion, d'un côté de l'infini, des annonces dramatiques abondent à la fois apocalyptiques *[Friedmann 1986]* et exubérantes *[Fremlin 1993]*, tandis que de l'autre côté on demeure sceptique, indifférent, ignorant, sinon carrément hostile.

Ce douloureux désaccord continue d'être accompagné par de non moins douloureux conflits sur les fondements de la philosophie des mathématiques *[Hersh 1979]* (cf un dialogue toujours pathétique *[Henle 1991]*, *[Henle 1992]*), ainsi que la méthodologie de l'éducation *[Bishop, Bridges 1985]* ou la politique de la recherche fondamentale en mathématiques *[Smorynski 1988]*, *[Mathias 1992]*). En fait, l'intégrité des mathématiques*[Simpson 1988]*, sinon son existence même *[Arnold 1995]*, est en jeu.

La question est maintenant : pourquoi ? Pourquoi cela nous arrive-t-il, toujours à nous, chercheurs (et en fait avec tant de succès) de ou dans l'infini? Pourquoi pas à « eux », les « autres », qui travaillent dans les autres branches des mathématiques ?

Ou bien avec moins d'humour et plus de responsabilité : quelle est la substance et la signification de *la crise sur les fondements, d'une ampleur sans précédent,* qui accompagne (paraphrasant *[Friedmann1986]*) la recherche actuelle sur la théorie des ensembles ?

2. Objets, questions et structure méthodologique

« Si j'avais été présent à la création, j'aurais donné quelques conseils pour un ordre meilleur de l'univers ». Alphonse X le Sage, Roi de Castille 1252-84 cité dans[ODQ 1980] p. 3

Principal objet et plan de l'étude

Dans ce qui suit, nous comptons exposer et en un sens résoudre le conflit des deux écoles de pensée prédominantes, qui perdure depuis le tout début de la *théorie des ensembles* jusqu'à aujourd'hui : l'une qui prétend bien connaître sinon presque tout de l'infini et l'autre qui affirme qu'un tel savoir, pour des raisons différentes et souvent d'incompatibles, est illusoire et/ou n'a aucun mérite particulier pour l'exercice « normal » de la mathématique.

L'exposé du conflit peut être conduit comme une lecture terre-à-terre du témoignage collectif des chercheurs contemporains dans ce domaine. « Terre-à-terre » devrait signifier en particulier que les attitudes spécifiques envers le continu servent de révélateur (papier tournesol) pour tester la « valeur réelle » des concepts de la théorie générale et de ses progrès.

Notre évaluation critique (mais en rien nihiliste) des règles cantoriennes et post cantoriennes de *fabrication des nouvelles totalités infinies*, porte en elle l'espoir d'une réconciliation des écoles de pensées en conflit à propos de l'infini, a condition d'accepter l'impératif de *confirmation mathématique indépendante de l'existence des totalités infinies*. L'idée même n'est pas nouvelle mais sa mise en œuvre systématique et prudente présente une sérieuse gageure d'accès ardu. La difficulté apparaît à qui-conque, à côté des succès retentissants a connu quelques échecs spectaculaires.

Finalement, à la lumière de toutes ces estimations bienveillantes de la Théorie Supérieure des Ensembles, nous adressons une idée séduisante, bien que légèrement controversée, sur d'autres interprétations possibles de ses réalisations.

Autres questions cruciales

Bien sûr, une lecture attentive du témoignage collectif présenté ci-dessous touche à de nombreuses autres questions intéressantes non traitées dans cet article, à cause du manque de place. Tout ce que nous pouvons faire est de mentionner ici quelques questions de manière un peu informelle. Encore que, comme nous le croyons, même une lecture superficielle et sélective rendra l'exposition suivante plus intelligible et instructive.

Derrière notre choix de questions on retrouve la conviction que les leçons de la crise précoce des fondements dans les mathématiques, nous fournissent les meilleures clés possibles pour la compréhension des difficultés courantes mathématiques, logiques et conceptuelles dans la Théorie Supérieure des Ensembles. Ainsi, peut-on débattre de ce que sont ces leçons. Pour nous cela donne la sélection suivante :

1. La pomme de discorde est, maintenant comme il y a de quatre-vingts à cent ans, l'interprétation de la nature et du sens de l'infini mathématique, aussi bien que le problème de signification et de légitimité des méthodes employées pour « découvrir » de nouvelles totalités transfinies.
2. Paradoxalement, conjointement des champions qualifiés et des objecteurs consciencieux de la théorie des ensembles de Cantor furent justifiés plus tard par les développements mathématiques, logiques et philosophiques qui germèrent de leurs intuitions initiales souvent très controversées. En fait, certains exposés (souvent même mutuellement incompatibles) sur la nature de la pensée mathématique faisant référence à la nouvelle théorie fondamentale des ensembles inspirèrent (et nous le croyons, inspirent) les critiques et défenseurs qui sont contraints de les utiliser. C'est une des principales raisons qui permette de croire que derrière la discorde actuelle, il y a des découvertes quelque peu conflictuelles mais de grande valeur et en la matière un *éclairage nouveau*. Les deux observations suivantes illustrent ce paradoxe.
3. Le fait que les mathématiques nouvelles, dans leur raisonnement sautèrent quelques pas logiques de nature constructive fondamentale froissèrent Luitzen Brouwer. Cette logique constructive a trouvé de nombreuses expressions riches et rigoureuses, en particulier, dans la brillante formalisation de calculabilité de Alonso Church, Alan Turing et autres. À la fin, leurs réalisations purement théoriques furent implémentées dans les ordinateurs modernes. Quelque critiques modernes au franc-parler de la Théorie Supérieure des Ensembles appartiennent à cette tradition constructive, d'autres non.
4. À l'autre extrême se tient fièrement David Hilbert, avec sa confiance illimitée dans la solidité de toute mathématique exempte de *contradictions logiques intrinsè-*

ques. Son attitude (appelons-là **méta programme** de Hilbert) consiste en une *justification formelle a posteriori* de toutes théories mathématiques consistantes possibles. Il s'est opposé à l'affirmation de Brouwer et ses successeurs qui prônent la légitimité philosophique a priori d'un *fragment logiquement sûr mais limité des mathématiques*, avec d'autres parties des mathématiques dont la véracité du *logiquement sûr* reste à vérifier*[Bishop, Bridges 1985]* p. 5. Le programme de Hilbert (son méta programme de spécification finie) s'est avéré d'une remarquable efficacité, pour ses critiques (qui commencent avec Kurt Gödel) et pour ses défenseurs ; et il est devenu et même reste la plus audacieuse vision conceptuelle de la théorie moderne de la démonstration.

5. Non moins paradoxalement les deux écoles ont prouvée la fausseté de leurs aspirations les plus ambitieuses : monopoliser d'une manière ou d'une autre les mathématiques. D'une part, l'intuition mathématique ne peut être réduite et donc justifiée par son fragment constructif. D'autre part, les riches théories mathématiques défient toutes les justifications formelles considérées comme des spécifications formelles du méta programme de Hilbert. Nous sommes en train tout doucement de glisser de la justification de la Théorie Supérieure des Ensembles à la quête en dernier ressort d'une signification provisoire en dehors de la théorie des ensembles de découvertes formelles importantes de cette théorie.

Structure méthodologique

Pour aborder les questions posées ci-dessus on doit étudier attentivement, et dans un large contexte culturel et intellectuel, les multiples facettes de l'infini mathématique et les tentatives séculaires de son appropriation et de son adaptation scientifique appelée *l'infini dans la théorie des ensembles.*

La vérité est que pour s'aventurer sur le sol incertain de la théorie des ensembles *[Cohen 1971]* p. 15, avec ses paysages surréalistes *[Mathias 1979]* p. 109 à la recherche de véritables exemples de l'infini mathématique, on doit prêter autant d'attention aux séduisantes images des guides de voyages officiels, qu'aux évaluations tantôt sérieuses tantôt amères des prospecteurs de l'infini expérimentés, occasionnellement mécontents ou simplement aux avertissements amicaux et témoignages d'incrédules *compagnons de route.*

L'article est un apport très personnel à l'exceptionnelle beauté du sujet, à la richesse et la profondeur des contributions mathématiques et philosophiques de nombreux mathématiciens contemporains à commencer par Georg Cantor. Les abondantes citations, ces perles empruntées à de nombreux auteurs à l'occasion de notre amicale réunion sur l'infini mathématique, sont reconnues ici avec la profonde gratitude de l'auteur et son humble admiration.

Ceci étant, nous nous excusons pour quelques sourires de circonstance peut-être trop évidents (puisse-t-il être comparés à un rire au Paradis ?) avec lesquels nous comptons atténuer la gêne occasionnelle de nos guides distingués de théorie des ensembles.

3. L'infini existe

« L'infini mathématique : a-t-on besoin de Cantor ? » [Feffermann 1987] le titre.

« Une équipe de génie de la technologie de Hollywood a entrepris de les ramener à la vie ... Ainsi ont-ils pris quelques libertés artistiques et décider de les faire une fois et demie plus grands. De toute façon, qu'en savaient-ils dans les livres ? Il arriva alors quelque chose de surprenant. Dans l'Utah les paléontologues trouvèrent des os d'un vrai rapace, et il était de la taille d'une bête du film. « Nous étions à la pointe » dit le chef des maquettes du film avec la fierté de l'inventeur. Après que nous les ayons créés, ils les ont découverts. » [Dorfmann 1993] p. 53

Comme de nombreux visionnaires et prophètes avant lui, Georg Cantor n'eu pas l'heur de voir les beaux fruits de ses révélations sur la théorie des ensembles ; comme d'habitude c'est même le contraire qui arriva, les controverses de la théorie des ensembles qui en résultèrent eurent des conséquences désastreuses tant pour son activité scientifique que pour son moral et pour sa santé mentale *[Dauben 1979]*.

En fin de compte des applications élégantes et puissantes résultant de la théorie des ensembles ont réhabilité pour le moins quelques traits décisifs de la vision cantorienne de l'infini mathématique.

Un article récent de la recherche sur les techniques d'achèvement de preuve pour Système de Réécriture de Termes (la SRT joue un rôle important en informatique théorique en particulier en déduction automatique et spécifications de données abstraites) commence comme suit : *[Dershowitz 1993]* p. 243

« Cantor inventa les nombres ordinaux

$0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, \omega, \omega+1, \dots$

$\omega 2, \dots, \omega n, \dots, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega \uparrow n$

$\dots, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_0^{\varepsilon_0}, \dots, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots$, *et ainsi de suite.*

Chaque ordinal est plus grand que tous ceux qui le précèdent et il est habituellement défini comme leur réunion à tous :

ω	= *l'ensemble de tous les entiers naturels* ;
$\omega 2$	$= \omega \cup \{\omega+n \mid n \in \omega\}$;
ωn	$= \cup_{i<n} \omega_i$;
ω^2	$= \cup_{n\in\omega} \omega n$;
$\omega \uparrow n$	$= \cup_{i<n} \omega \uparrow i$;
ε_0	$= \cup_{n\in\omega} \omega \uparrow n = \omega^{\varepsilon_0}$;
$\varepsilon_0^{\varepsilon_0}$	$= \omega^{\varepsilon_0^2}$;
ε_1	$= \cup_{n\in\omega} \varepsilon_0 \uparrow n$.

La notation $\alpha \uparrow n$ représente une tour de n étages α. »

Après cette introduction des plus succincte et transparente au ordinaux infinis de Cantor, l'auteur démontre, le tout en six pages seulement, comment la descente ordinale peut être utilisée pour prouver la finitude pour les SRT spécifiques. Le problème général de finitude pour le SRT (qui est bien sûr une spécialisation du problème de l'arrêt des machines de Turing) est indécidable.

La descente ordinale est un cas particulier de la descente selon un ensemble partiellement ordonné (dite selon les arbres). Une des idées les plus fructueuses de Cantor a été la notion de bon ordre BO, i.e. d'ensemble linéairement ordonné satisfaisant à la condition de descente finie DF, i.e. qui se termine après un nombre fini d'étapes de sous-suites descendantes (les ordinaux sont bien sûr des BO spéciaux). Le principal mérite de la condition DF est l'extension du mécanisme d'induction mathématique au delà des nombres naturels jusqu'à chaque BO et en particulier jusqu'à chaque ordinal.

Notez qu'on considère que « Cantor inventa ou créa mais ne découvrit point » les nombres ordinaux. Plus tard Gehrard Gentzen *[Gentzen 1936]* découvrit que, en supposant la validité de la loi d'induction mathématique sur le segment ordinal $[0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \varepsilon_0]$, on peut prouver la consistance de l'arithmétique de Peano. Alors une interprétation générale remarquable des ordinaux explicitement définis dénombrables comme notations symboliques succinctes pour les structures algorithmiques avec boucles multiples furent données par Alan Turing [Turing 1950], et son approche a contribué substantiellement au développement de la théorie moderne de la vérification des programmes.

Même avant Turing, et corroborant *[Grenzen 1936]*, Reuben L. Goldstein a construit une fonction arithmétique vraiment élémentaire $n \mapsto g(n)$ dont la structure mime la hiérarchie transfinie de Cantor jusqu'à ε_0 ,et dont les itérées $g^k(n)$ finalement terminent à 0 pour tout n . Cependant, avec n croissant, il leur faut en effet très longtemps pour arriver à 0, ce qui signifie que la fonction $K(n) = \mathbf{min}(k\,;\, g^k(n)=0)$ croît si vite qu'une preuve de ce fait nécessite une induction mathématique à travers les nombres transfinis jusqu'à ε_0 *[Goldstein 1944]*. Le cas est devenu un paradigme d'une confirmation indépendante de l'existence d'une totalité infinie à travers son usage obligatoire dans la preuve d'un théorème élémentaire.

En tête, Harvey Friedman découvrit une version de type fini appelée FFF du théorème de Kruskal concernant les suites infinies d'arbres finis. La démonstration de la dénombrabilité FFF requiert la récurrence mathématique jusqu'au premier ordinal dénombrable imprédicatif Γ_0 *[Gallier 1991]*. L'imprédicativité de Γ_0 signifie qu'en particulier on ne peut lui trouver de formule récursive transfinie explicite comme celle pour $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_{\varepsilon_0}$.

C'est sûr, *« après que Cantor ait créé les ordinaux, il les a découverts »* !

De plus Friedman propose que toute totalité infinie nouvellement inventée doit être redécouverte à travers son usage nécessaire dans une solution naturelle d'une finitude naturelle i.e. problème de théorie des nombres ou combinatoire.

« Depuis au moins 20 ans la question principale en théorie des nombres est de savoir quelle théorie abstraite joue un rôle peu ou prou dans la formulation des résultats » [Friedman 1981] p. 192.

Nous sommes prêt pour les surprises qui suivent principalement dans les sections 9 et 10).

4. Survol du paradis de Cantor avec un de ses dadas

« Nous disons que les propriétés des grands cardinaux sont un axiome fort de l'infini. L'adaptation des axiomes forts de l'infini est ainsi une aventure théologique impliquant des questions fondamentales de croyance concernant la vérité sur l'univers.

C'est une analogie plaisante : pour un vrai croyant, connaître dans les règles le mont Everest c'est gravir lentement et péniblement une de ses sinistre face, escalader les rochers dans la neige et la gadoue, avec une confiance déclinante et un scepticisme croissant sur la possibilité de jamais atteindre les hauteurs. Mais en ces jours de progrès rapide de la technologie, pourquoi ne pas monter en hélicoptère, survoler le sommet et contempler le royaume de l'air raréfié tout comme on boirait une tasse de thé. » [Kanamory, Magidor 1978] pp. 103-104

Enhardi par les confirmations remarquables de Gentzen, Goodstein, Turing, Friedman et les autres, un timide compagnon mathématicien est finalement près à croire au transfini et à suivre l'invitation amicale à contempler en paix la beauté qui inspire le respect de l'univers du transfini :

« Cela m'apparaît comme le fruit le plus admirable de l'intellect mathématique et en général comme l'une des plus grandes réalisations de l'activité humaine de pure rationalité. » [Hilbert 1925] p. 373

Partant du niveau 0 notre hélicoptère passe les nombres naturels et entre dans la région des ordinaux infinis (dénombrables) décrits ci-dessus section 3 :

$\omega, \omega+1, \omega 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \ldots$ et ainsi de suite.

Pour monter davantage, on imposera que tous les ordinaux que l'on peut compter (fini ou dénombrable) sont suivi par le premier ordinal que l'on ne peut compter ω_1 qui à son tour est suivi de ω_2, le premier ordinal au delà de ω_1 qui n'est pas équipotent à ω_1, etc. :

$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega = \omega_0, \ldots, \omega_1, \ldots, \omega_2, \ldots$, et ainsi de suite.

Pour accélérer l'ascension, on introduit les valeurs absolues des ordinaux au sens de la théorie des ensembles, dits cardinaux avec disons $|\omega_0| = \aleph_0$. La notion est fondée sur la relation d'équivalence introduite par Cantor et appelée correspondance biunivoque ou équipotence. Des ordinaux différents mais équipotents correspondent à un cardinal comme disons $\aleph 0$ correspond à ω … en résumé pour tous les ordinaux dénombrables :

$$\begin{array}{ccccccc} 0, 1, \ldots, & \omega = \omega_0, & \ldots, & \omega_1, & \ldots, & \omega_2, & \ldots, \text{ et ainsi de suite} \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \aleph_0 & & \aleph_1 & & \aleph_2 & \end{array}$$

Il y a déjà de fortes présomptions d'existence des totalités infinies. Chaque pas derrière le dernier « et ainsi de suite » impliquant une nouvelle notion, une nouvelle construction, une nouvelle aventure théologique. *[Kanamory, Magidor 1978]* p. 104

Ici se trouve la carte la plus moderne et la plus générale (empruntée à *[Jech 1995]* p. 414 avec des modifications mineures) du paradis montagneux de Cantor :

FIGURE 1

Les guides expérimentés dirige l'attention du spectateur qui les accompagne sur deux faits remarquables du splendide paysage transfini. Premièrement l'univers infini a un toit appelé *plafond de l'inconsistance*. (Lequel propose que les bases axiomatiques du paradis de Cantor s'émiettent sous chaque nouvel étage que l'on rajouterai à son sommet. Ces bases sont ZFC, les axiomes de Zermolo-Frankel augmenté de l'axiome du choix). Deuxièmement fait remarquable du paradis de Cantor, sa structure linéairement ordonnée :

« *Comme notre édifice croît, nous dirons comment un à un les grands cardinaux tombent à leur place en hiérarchie linéaire. C'est spécialement remarquable au regard des idées apparemment disparates qui ont motivées leurs formulation. Comme le remarque Friedman, cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque part un mystère ... Autrement dit, y-a-t-il une hiérarchie des principes de théorie des ensembles dans une autre galaxie basée sur ZFC, disjointe et incomparable à nos grands cardinaux ? [Kanamory, Magidor 1978]* p. 104

Notre rapide survol de l'atmosphère raréfié et avec lui la bonne tasse de thé est terminé, nous quittons notre amical hélicoptère avec des sensations diverses. C'était beau, bien sûr, et de ce fait très rassurant de côtoyer de telles lumières dans une aventure à vous couper le souffle, à l'instar de Saunders Mac Lane et de rencontrer là nos vieux copains les nombres naturels qui restent gentiment entre les deux premiers niveaux de notre montagne transfinie 0 et $\aleph_0$. Après tout, ce n'est pas pour nous surprendre : Mac Lane a toujours été franc sur ses préférences fondamentales *[Mac Lane 1986]* et son intérêt pour un bon passe-temps *[Mac Lane 1994]*, de plus l'ascension linéairement transfinie est quelque part modélisée par les nombres naturels !

Mais nos guides assument (ou peut-être esquivent-ils la question ?) que toutes les totalités infinies existantes ou imaginaires sont quelque part sur la pente en dehors des pâturages. Alors, ***question fréquente*** : *Où peut-on localiser le continu c dans le paysage surréaliste du transfini ?*

Tout le monde sait que Cantor a cru dur comme fer démasquer c dans le mystérieux $\aleph_1$ [2]. Durant le voyage notre plouc mathématicien aurait quelque part entendu dire que Kurt Gödel était enclin à croire que le continu était plutôt du côté de $\aleph_2$, le second cardinal indénombrable *[Moore 1993]* p. 175. Comme on nous le raconte, un article récent, qui se réfère *aux évidences actuelles accumulées par trente ans de considérations effrénées [Judah, Roslanowski 1993]* p. 375, tend à confirmer l'intuition de Gödel et reposant sur les travaux précédents, développe une machinerie sophistiquée en direction de la preuve hypothétique de la conjecture de Gödel.

Malheureusement les guides de voyages officiels sont soit silencieux sur ce sujet soit pire encore évasif à l'envie :

« *En dépit des efforts de Cantor lui-même et des autres, la question ... restera sans réponse jusqu'à l'apparition des méthodes de la logique moderne* » *[Jech 1995]* p. 409.

Ils oublient juste d'ajouter qu'elle restera irrésolue à tout jamais : il a été démontré que l'hypothèse du continu ne peut ni être démontrée (la célèbre méthode forcing de Paul Cohen) *[Cohen 1966]*, ni rejetée *[Gödel 1964]* dans la théorie des ensembles ZF.

[2] C'est la version ordinale de l'hypothèse du continu de Cantor, CH. La version cardinale (faible) ne dépend pas de la hiérarchie ordinale, et déclare simplement que tout sous-ensemble infini d'un ensemble continu est équipotent à l'ensemble des nombres naturels ou à l' ensemble continu lui-même.

Pire encore *« l'hypothèse du continu généralisée peut tomber en défaut n'importe où »[Foreman, Woodin 1991]* ... Parlez-moi d'autre chose, enrage emphatiquement Mac Lane :

« J'admire les réalisations de Gödel mais je trouve très futile de s'émerveiller à l'heure actuelle de ce qu'il imagina être le cardinal réel du continu. Ces spécialistes sérieux qui cherchent encore ce cardinal devraient se rappeler l'infâme image du philosophe – un aveugle dans une cave noire cherchant un chat noir qui n'y est pas ». [Mac Lane 1992] p. 121

Le dessin humoristique suivant[3] illustre cette discussion amicale sur la nature de l'infini mathématique :

FIGURE 2

5. Mais comment savoir si toutes ces nouvelles totalités infinies existent réellement ?

« Il suffit de penser qu' en mathématiques, modèle de vérité et de confiance, les véritables notions et déductions que chacun apprend, enseigne et utilise, conduisent à des absurdités. Où peut-on trouver ailleurs, vérité et confiance si même les mathématiques se trompent. » [Hilbert 1925] p. 375

De retour à la maison du splendide voyage transfini, avec sa confiance durement ébranlée, on doit affronter l'amère vérité : la première crise provoquée par la théorie des ensembles, celle des paradoxes logiques (dans les termes de Hilbert des *« absurdités »*) a laissé la place à une crise moderne de *l'arbitraire* des points de vue sur le transfini et des notions et constructions formelles extrêmement compliquées construites sur ces points de vue. Nulle part en mathématiques (ou, pour ce problème, dans les sciences naturelles) il n'est nécessaire de *croire aveuglément* en autant d'inventions conceptuelles et de constructions infinies sans *aucun* bénéfice de clarification et/ou de confirmation *[Maddy 1988]*.

Sa sobriété mathématique naïve usuelle intacte, notre cousin de la campagne mathématique timidement mais distinctement s'exprime :

Question fréquente : *Émotions et guides de voyage à part, existent-ils bien réellement ? !*

Tous les nouvelles totalités infinies découvertes par Cantor et après lui ont-elles *« la même exigence forte d'exister »* (une paraphrase de *[Barwise 1975]* p. 113) que le dénombrable et le continu connus déjà des grecs ? En d'autres termes quelles sont nos raisons d'être confiant dans leur existence, comme nous le sommes dans celle des nombres naturels ω et du continu $\mathfrak{c}$? Pour Georg Cantor *[Dauben 1979]* pp. 132-133, et David Hilbert *[Hilbert 1925]* pp. 375-376, la réponse *in extremis* était franche et généreuse : tous les objets mathématiques, dont les définitions ne contredisent pas le cadre formel de la théorie, existent. En d'autres mots, *la consistance* est la seule condition d'existence.

D'un autre côté, pour Luitzen Brouwer et Henri Poincaré, aucune des nouvelles totalités infinies non dénombrables n'existe *en matière de principe*, parce qu'aucun n'a été proprement défini : les définitions avancées n'ont pas satisfait quelques critères *a priori* de

---

[3] Emprunté au International Herald Tribune, November 18, 1993 et légèrement modifié avec sa permission et nous les en remercions. Le dessin original, crée par KAL, représente « Washington traversant le `dinnerware » dans un « Thème de l'histoire US représenté par Disney ». La réplique « Cela m'inquiète » est de KAL.

correction *philosophique*, par exemple elles emploient *le principe du tiers exclu*, ou manquent de *prédicativité*. Ici couve un feu plus moderne, le violent démenti de la générosité existentielle de Cantor et de Hilbert :

« *Au début de ce siècle un principe démocratique auto-destructif était avancé en mathématiques (spécialement par Hilbert), accordant que tous les systèmes d'axiomes avaient le même droit d'être analysés, et la valeur de l'œuvre mathématique est déterminée, non pas par sa signification et son utilité comme dans les autres sciences, mais sa seule difficulté, comme dans l'alpinisme. Ce principe conduisit rapidement les mathématiciens à rompre avec la physique et à se séparer de toutes les autres sciences. Aux yeux de tous les gens normaux, ils s'étaient enfermés dans la sinistre caste sacerdotale d'une religion mourante, comme les Druides.* » *[Arnold 1995]* pp.7-8.

La persistance de telles attitudes extrêmes, mutuellement (et violemment) incompatibles explique comment la question est devenue l'otage de la guerre des habitudes mathématiques et des goûts philosophiques.

L' atmosphère entourant, depuis le début *[Dauben 1979]* ; *[Moore 1982]* ;*[van Dalen 1990]*, ce problème extrêmement difficile était, et reste encore, si dogmatique, les arguments étaient, et restent encore, si personnels et arbitraires que les gens qui préfèrent coller à leur intérêts théoriques ensemblistes sont devenus en quelque sorte cyniques à ce sujet. Quelques uns sont partis après leurs mises à mort formelles, s'étant libérés eux-mêmes de toute chaîne ontologique ; comme Craig Smorynski l'a exprimé sans charité :

« *Le sujet a attiré les carriéristes, qui étaient entraînés à résoudre des problèmes, à réduire tout ce qui n'était pas difficile, et qui n'ont reçu aucun enseignement au sujet de l'histoire ou de la philosophie de leur sujet et qui ont appris rapidement que de telles connaissances ne serviraient pas leurs carrières.* » *[Smorynski, 1988]* p.13.

D'autres reconnaissent la légitimité du problème, seulement pour le formuler immédiatement à la manière « pas demandé, pas dit » :

« *La question « les grands cardinaux, qui sont-ils donc ? » est, quoique indécidable (sauf sil n'y en a aucun), sûrement naturelle. Non que ces énormes inaccessibles existent évidemment ; mais si la prudence était exigée, il fallait en tenir compte beaucoup plus tôt. L'inaccessible fait ressentir quelques inquiétudes à quiconque s'est réjoui des applications répétées indéfiniment de l'opération ensemble des parties.* » *[Dodd 1982]* p. xxii.

(Par suite, anticipant les délibérations suivantes, le présent auteur qui ne s'est jamais « *réjoui des applications répétées indéfiniment de l'opération ensemble des parties*» *[Belaga 1988]*, et ceci, en accord avec *[Dodd 1982]*, est d'une façon ou d'une autre, qualifié pour ressentir les inquiétudes au sujet de nouvelles totalités infinies).

Clairement, l'enjeu est tel qu'on doit comprendre et respecter profondément (mais pas nécessairement partager) l'indignation de Kurt Gödel, qui avait écrit il y a plus de trente ans :

« *L'intuitionnisme de Brouwer est absolument destructif dans ses résultats. La théorie complète des* $\aleph$ *plus grand que* $\aleph_1$ *est rejeté comme sans signification* » *[Gödel 1964]* p.257.

6. Pire encore : l'infini mathématique existe-t-il tout à fait ?

« *C'est sûr, la discussion des paradoxes de la théorie des ensembles a mené la recherche sur les bases des mathématiques loin du point de vue classique sur la nature des mathématiques si passionnément défendu par Cantor. Intuitionnistes et formalistes sont réunis dans leurs efforts pour éliminer tous les éléments métaphysiques des fondements des sciences exactes ... Georges Cantor, formé dans Platon et les scolastiques, a pensé différemment le problème, ... C'est la partie tragique de la vie de notre investigateur, si plein de* *déceptions, que sa propre théorie a donné naissance à un nouveau concept mathématique qui, pour de bonnes raisons, fait un sort au fondement des sciences exactes sur la métaphysique.* » *[Meschovski 1964]* pp. 94-95

Ainsi, avant notre tentative pour réfléchir sur le problème existentiel ci-dessus, on peut être confronté à un autre, bien plus redoutable :

Question fréquente : *L'infini mathématique existe-t-il tout à fait ? Ou en d'autres mots : peut-on « réellement savoir » quelque chose à propos de l'infini ?*

Les réponses des deux écoles modernes dominantes de la pensée, *formalisme et constructivisme,* qui se partagent la majorité des votes des membres de la communauté mathématiques philosophiquement affiliés, varient d'un doux « vraiment pas grand chose » au sans excuse « rien, ne vous ridiculisez pas » (Nous nous excusons auprès du lecteur *Platoniste* ou d'obédience *idéaliste* de le classer dans une minorité idéologique, et nous l'implorons de patienter un moment en ligne. Quant aux *nominalistes* et autres *pragmatiques*, ils n'ont de toute façon, rien à faire ici).

La dernière raison, *intuitionniste* ou *constructiviste*, est philosophique, et même religieuse : l'intelligence d'un homme en tant qu'être purement fini ne peut avoir aucun accès sûr à l'infini. En poussant la vision originale et profonde de Brouwer dans ses limites presque absurdes, Errett Bischop revendique :

« *Notre point de vue est de décrire les opérations mathématiques qui peuvent être obtenues par des êtres finis, des mathématiques humaines en bref. Par contraste, les mathématiques classiques se préoccupent des opérations qui peuvent être obtenues par Dieu.* » *[Bishop 1985]* p. 9

Et « *si Dieu a besoin de ses propres mathématiques, laissez le faire lui-même.* » *[Bishop, Bridges 1985]* p. 5.

Bien sûr, tous les constructivistes ne peuvent aisément avaler cette marque brutale de la philosophie intuitionniste ; Hermann Weyl, jadis, a été d'une autre opinion :

« *Les mathématiques ont été appelées la science de l'infini. En fait, le mathématicien invente des constructions finies par lesquelles les questions sont décidées par leur nature en rapport avec l'infini. C'est sa gloire.* » *[Weyl, 1985]* p. 12.

Comme pour l'école *formaliste,* dont la *raison d'être* historique a été le besoin urgent de défendre la *Mère Patrie* mathématique depuis l'attaque de l'intuitionnisme, au vu de ce que raconte le premier épigraphe de David Hilbert du présent article, on pourrait s'attendre à ce que l'infini soit défendu avec, au moins, autant de cœur que Weyl … C'est surprenant, mais la défense de Hilbert contre la critique de Brouwer des fondements des mathématiques classiques a été basée sur un déni de *« l'existence réelle »* de l'infini pour le moins aussi précipité que celui de Bishop *[Hilbert 1925]* p. 392.

Encore, l'honneur douteux d'affirmer clairement et définitivement la mort du *formalisme* de l'infini, et de son propre aveu, en l'absence de toute conviction philosophique inspiratrice, est finalement revenu à Abraham Robinson (qui aussi, a juste poussé la vision originale des fondateurs jusqu'aux limites de absurde) :

« *Ma position concernant les fondements des Mathématiques est basé sur les deux principaux points ou principes suivants.*

(i) *Les totalités infinies n'existent dans aucun sens du terme (c'est-à-dire ni réellement ni idéalement). Plus précisément, toute mention, ou prétendue mention, des totalités infinies est, littéralement,* ***dénué de sens****.*

(ii) *Néanmoins, nous pouvons continuer à faire des Mathématiques « comme d'habitude », c'est-à-dire, nous pourrions agir* ***comme si*** *les totalités infinis existaient réellement.* » *[Robinson 1965],* p 230.

Deux « mérites » de cette fameuse doctrine portent sur le sujet de l'étude présente. Premièrement, il plagie, avec des corrections mineures, une autre célèbre maxime : cela, de toutes les choses ... de la *Physique* Aristotélicienne[4] !
Deuxièmement, le principe de Robinson est l'affirmation que le *formalisme à la Robinson* de Hilbert et l'inhérent dans sa vision schizophrénique de la théorie et pratique mathématique est devenue une pensée mathématique normative.

7. Existence du Continuum : de Zénon à Cantor, et après.

« Pour moi le point essentiel est l'existence des totalités infinis. L'attitude vers les ensembles infinis a traditionnellement été la grande ligne de partage entre mathématiciens. » [Cohen 1971] p. 10

Laissez nous résumer ici en quelques mots la plus importante des leçons de notre brève visite dans le paradis cantorien et post-cantorien. La logique *intrinsèque* et la beauté étourdissante *de la théorie supérieure des ensembles* sont là ... mais aussi sa

« tendance déconcertante à produire des résultats indépendants plutôt que des théorèmes dans le sens usuel. La préoccupation de la « consistance » plutôt que la « vérité » qui en découle, semble donner au sujet un air d'irréalité. » [Shelah 1992] p 197.

C'est cet « *air d'irréalité* », troublé par notre ignorance persistante, après un siècle d'efforts ardus et sophistiqués, de la nature *ordinale* du continuum, qui nourrit la discorde dramatique et préjudiciable des appréciations des réalisations de la théorie des ensembles dans un large contexte mathématique, scientifique, philosophique, et culturel.

Dit plus simplement : une *théorie des ensembles naïve* est-elle semblable à *Anabase* de Xénophon, le récit franc et brillant d'une aventure humaine *réelle*, et sa *théorie supérieure des ensembles* semblable à la saga de Tolkien, une *fantaisie* sophistiquée et captivante qui mêle (c'est-à-dire utilise et abuse) les éléments de base (batailles entre héros et voyous) de la première histoire ? Et, pour chercher à sortir de cette « confusion » infinie, comment pourrait-on formellement saisir la différence *sémantique* tellement subtile entre les différents niveaux de la *théorie des ensembles,* qui sont intimement liés, étant du point de vue *syntactique* "indiscernablement" « vrai » et du point de vue *mathématique* également « beau » et « fructueux » ?
Ce qui suit résume les grandes lignes des trois aperçus (un par section, sections 7à9, commençant donc ici) sur les principales difficultés ontologiques de la *théorie supérieure des ensembles* qui, nous l'espérons, pourrait conduire un jour à une stratégie valide pour la recherche de l'infini.

Pour commencer, survolons rapidement l'histoire étonnante du continuum. En faisant la connaissance de ω et $\mathfrak{c}$ *expérimentalement*, les grecs ont été absolument fascinés par les différences évidentes de ces deux infinis tant dans leurs « *origines* » que dans

---

[4] En fait (l'auteur du présent article le sait bien), ni Abraham Robinson, ni aucune autre source ne mentionne la similarité frappante entre l'esprit et la lettre des principes de Robinson et le passage suivant de la *Physique* d' Aristote. Nous proposons la traduction : « Notre exposé ne doit rien aux études des mathématiciens, en réfutant l'existence actuelle de l'infini ... À vrai dire, ils n'ont pas besoin de l'infini et ils ne l'utilisent pas. Ils postulent seulement que la ligne droite finie peut être tracée aussi loin qu'ils le veulent. Il est possible de la diviser dans la proportion de la plus grande quantité ou tout autre valeur de la taille qui vous plaît. Ainsi dans leurs preuves, il ne font pas de différence entre les infinis tant que leur existence est dans la sphère des grandeurs réelles»
Bien sûr l'affirmation d'Aristote est plus consistante et, d'un point de vue plus moderne, plus radicale : dans le langage réactualisé il pourrait être appelé quelque chose comme « critique ultra intuitionniste » *[Yessenin-Volpin 1970]*.

leurs « *natures* », comme il est clair depuis les paradoxes avancés par Zénon d'Élée (environ 464-460 avant J.-C.) *[Bochenski 1970]* p. 26 *[Anglin, Lambek 1995]* pp 54-57.

En particulier, le paradoxe de Zénon « *Achille et la tortue* » démontre clairement la confrontation conceptuelle entre deux différents types d'expériences qui ont conduit à deux différents types de modèles de l'infini. Le premier type est mieux résumé par l'expérience de comptage (à travers des observations de battements de cœur, marchant comme un mouvement pas à pas, construisant des tours, etc.) - la seule *« accumulation de l'infini »* humainement disponible en parties *finies et discrètes*. Le second type peut être observé dans un monde extérieur comme un infini continu (points de l'horizon, le vol d'une flèche, etc.). Zénon doutait clairement que les deux infinis puissent être réconciliés : on peut courir, mais on ne peut pas correctement (c'est-à-dire en dehors d'un paradoxe) « saisir » ce phénomène d'une façon mentale, parce que *notre compréhension est finie et discrète*, alors que notre mouvement (un mystère en lui-même) est, comme le ciel lui-même, *continu.*[5] Cela ne signifie pas, bien sûr, que Zénon doutait de l'*existence* du continu. Bien sûr, Cantor a résolu un aspect particulier du paradoxe[6] de Zénon en inventant un univers mathématique absolument nouveau, sa *théorie des ensembles*, indisponible pour Zénon, où les relations entre deux « habitats » infinis, antérieurement incompatibles peuvent être conceptualisées avec succès, et alors formellement étudiées et comprises.

Pour le meilleur et pour le pire, cela n'a pas été la fin de notre histoire. Tombant dans un piège encore plus profond, que celui de Zénon, Cantor « *se libéra de toutes les chaînes et manipula le concept d'ensemble sans aucune restriction* » *[Weyl 1949]*, p.50 ; (Hermann Weyl désapprouve fortement ici l'usage sans limite de l'axiome de l'ensemble des parties de Cantor, PSA *(Power Set Axiom)* ; nous trouvons sa *critique* très convaincante, section 8). En fait, Cantor a inventé les ordinaux transfinis, sections 3 et4, et a utilisé les itérations transfinies de PSA, avec la perspective explicite de faire exactement ce que Zénon réalisa qu'il était incapable de faire : précisément de « compter » le continu !

La situation qui en résulte dans la théorie des ensembles surpasse de loin dans sa discordance tous les précédents grecs connus[7]. En particulier, le clivage entre les exposés discrets (ou *pythagoriciens*, comme Ronald Jensen a choisi de l'appeler *[Jensen 1995]* p 401) et continus ((*newtoniens*, en accord avec Jensen) du monde est devenu encore plus précis et incompatible.

[5] Plus de deux mille ans plus tard, apparemment la même intuition a motivé les efforts de Brouwer pour redéfinir le continu mathématiques de Cantor *[Brouwer 1981]*. D'un autre côté, en accord avec la bible, quelques milliers d'années avant Zénon, le peuple de Shinar n'a pas eu de tels scrupules :
« *Et il disait : Viens, laisse nous construire une ville, et une tour, dont le sommet atteindra le ciel* » *[Genèse 11 :4]*
Ils se sont, bien entendu, trompé... Encore que, certains l'affirment, la théorie moderne des ensembles est loin d'être complètement à l'abri d'une telle folie impérieuse.

[6] D'autres aspects de ce paradoxe sont encore vivement discutés par les philosophes. Ainsi, par exemple, Henri Bergson (1859-1941) discute minutieusement et « explique » avec force le paradoxe de Zénon de nouveau dans son livre *[Bergson 1959]* pp 1259, 1376, 1377.

[7] *« Une « crise de fondation » eut lieu déjà dans les mathématiques grecques, causée par la découverte pythagoricienne des quantités incommensurables. C'était Eudoxe qui procura de nouvelles fondations, et depuis lors les mathématiques grecques ont été inébranlable. Si on lit les livres de mathématiques modernes, il est normalement dit que quelque chose de très similaire est arrivé dans les mathématiques modernes. »* *[Lorenzen 1958]* p 241.

Mathématiquement, le continu, comme *nous* le savons, est bien plus que sa définition en théorie des ensembles c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles du dénombrables, $\mathfrak{c} = 2^{\omega} = \mathfrak{P}(\omega)$. La découverte la plus frappante et la plus importante de Cantor impliquant que $\mathfrak{c}$ soit une totalité infinie indénombrable : $\mathfrak{c} > \omega$. C'est une aire de jeu pour les intuitions mathématiques profondes conduisant à des théories mathématiques magnifiques, de l'analyse à la théorie analytique des nombres et à la géométrie. Ainsi, on peut affirmer, de manière informelle mais sans ambiguïté, que l'*existence* du continu précède ontologiquement, et ne peut pas être réduit au PSA de Cantor, ou la définition de l'ensembles des parties d'un ensemble, $\mathfrak{c} = 2^{\omega} = \mathfrak{P}(\omega)$. De plus, l'existence indépendante et les propriétés des totalités ω et $\mathfrak{c}$ impliquent conceptuellement ici la construction de $\mathfrak{P}(\omega)$.

8. Les principes sur l'au-delà des limites supérieures par Cantor

« Bien sûr la nécessité mathématique d'appliquer l'ensemble des parties au ensembles infinis ne veut rien dire sur la légitimité de cette application… Ce n'est pas un argument de dire : nous avons une image intuitive du continu parfaitement claire, et le principe de l'ensemble des parties nous permet de la comprendre théoriquement. L'argument serait plutôt le suivant : comme nous le pressentions, le principe de l'ensemble des parties (ou les principes qui l'impliquent) a été révélé dans nos tentatives de clarifier notre image intuitive du continu ; dans la mesure où nos tentatives sont couronnées de succès, le principe d'ensemble des parties s'en trouve conforté. » [Hallet 1984] pp. 212-213

Pour simplifier quelque peu, on peut affirmer (bien qu'ils ne le racontent jamais dans les livres scolaires) que la théorie des ensembles de Cantor et de tous ceux qui suivirent est érigée sur (les spécialisations et généralisations de-) les principes méta philosophiques fondamentaux suivants pour l'extension des totalités infinies, le principe d'accessibilité ultime de Cantor pour chaque ensemble inaccessible et l'axiome d'ensemble des parties de Cantor.

Principe d'accessibilité ultime de Cantor pour chaque ensemble inaccessible.

FIGURE 3

Le monde de théorie des ensembles qui vous entoure a sa limite itérative, et au-delà de cette limite commence un nouveau monde. Ainsi approchons nous de ces limites itératives et jetons un regard sur l'au-delà !

L'esprit de cette démarche est bien figuré par l'ancienne gravure représentée ci-contre.

Ainsi Cantor étendit la procédure de recensement de la section 3 au-delà du dénombrable, en récoltant dans son panier tous les ordinaux recevables, appelés nombre de Cantor de première classe. Il lui suffit d'être un ordinal, et il doit être par définition plus grand que tout nombre de première classe, – ainsi le plus petit ordinal non-dénombrable $\omega_1 = \pounds(\omega)$ ($\pounds$ représente l'opération de limite transfinie, notation personnelle). Tous les ordinaux qui suivent ω_1 qui lui sont équipotents forment la seconde classe de Cantor suivie par $\omega_2 = \pounds(\omega_1)$, … , « et ainsi de suite » ! Cantor a cru que se déplaçant le long de cette échelle croissante on passait nécessairement par le continu et même qu'on le dépassait largement … Cela ouvrait d'excitantes possibilités d'incorporer élégamment le second principe d'une grande force :

Axiome de l'ensemble des parties de Cantor

Le continu peut être atteint depuis une totalité infinie « bien plus petite » – les dénombrables– avec l'opération d'ensemble des parties. Appliquons itérativement cette opération, à travers les échelles transfinies construites avec le premier principe !

On ne peut sous-estimer toute l'importance de ces principes pour la théorie des ensembles. En fait, rarement dans l'histoire des sciences ou des mathématiques on peut trouver théorie si vaste et complète, avec une telle prédominance, à la fois conceptuelle et formelle, de seulement deux idées et quant à cela, fortement controversées !

9. Doutes, dénégations et confirmations de l'existence des totalités infinies

« … même sans regarder la nécessité intrinsèque de créer quelques nouveaux axiomes, et même dans le cas où en fin de compte un tel axiome n'a pas cette nécessité, la décision probable sur ses vérités est possible ainsi … en étudiant ses succès … Il se pourrait qu'il existe des axiomes si nombreux dans leurs conséquences vérifiables, mettant en peine lumière le champ tout entier, et produisant des méthodes si puissantes pour résoudre les problèmes (et même les résoudre constructivement …) que … ils seraient forcément enfin acceptés comme toute théorie physique bien établie » [Gödel 1964] p. 261

Regardons les règles cantoriennes et post-cantoriennes de fabrications de nouvelles totalités infinies comme des conjectures, semblable à celles de la physique des particules élémentaires, quand les propriétés des particules existantes étaient utilisées pour conjecturer une théorie globale (et peut-être paradoxale) et inventer des particules nouvelles hypothétiques (peut-être avec des propriétés inhabituelles). Alors, comme le suggéra Kurt Gödel (cf. l'épigraphe ci-dessus), l'existence réelle des particules inventées serait confirmer par des preuves expérimentales tangibles :

Le critère de l'existence réelle de nouvelle totalité infinie définie dans un cadre axiomatique fixé : cette totalité doit être pertinente et indispensable (rasoir d'Okham).

(CRE0) *Son existence est confirmée directement en exhibant un vrai théorème vérifiable de théorie des nombres, combinatoire, etc. qui nécessite manifestement dans sa preuve l'induction mathématique étendue à cette totalité infinie particulière.*

La suite peut être vue comme preuve de confirmation :

(CRE1) *La totalité est l'objet d'une riche et belle théorie pleine de facettes.*

(CRE2) *Cette théorie interagit de manière fructueuse avec les théories des autres domaines mathématiques et y trouve des applications non triviales et intéressantes.*

La suite est une recommandation pour l'utilisateur du rasoir :

(CREU) *Une utilisation indulgente, généreuse et précautionneuse de la critique ci-dessus est conseillée. Cependant, jusqu'à ce que l'existence d'une totalité infinie ait été confirmée indépendamment, elle traînera une existence purement formelle, restant ouverte aux différentes interprétations, critiques et même à un rejet complet.*

Bien sûr, l'absence actuelle d'une telle confirmation ne doit pas donner à quiconque le droit d'appliquer le rasoir d'Okham comme la hache du boucher, en déclarant la recherche en théorie des ensembles non pertinente ou d'essayer d'obtenir son internement dans un asile d'aliénés *[Mac Lane 1992]* p. 121 (citée section 4).

10. Un scénario apocalyptique : qu'arrivera-t-il si les cardinaux de Mahlo existent réellement ?!

Néanmoins on arguera ci-dessous que l'utilisation obligatoire de la théorie supérieure des ensembles en mathématiques du fini doit être encore établie. En outre il y a des raisons de croire qu'on peut développer les mathématiques appliquées aux sciences en ignorant la théorie supérieure des ensembles... Autrement dit, l'infini actuel n'est pas indispensable aux mathématiques du monde physique. *[Feferman 1987]* p. 153

Harvey Friedman a proposé une puissante spécification du critère ci-dessus, *[Friedman 1986]* p. 192 (cité à la fin de la section 3) : une totalité infinie peut être démontrée par son utilisation obligée dans une branche mathématique bien établie. Ainsi comme nous l'avons vu ci-dessus, les ordinaux dénombrables ε_0 et Γ_0 sont clairement d'une indispensable utilité dans la combinatoire élémentaire. Mais les cardinaux ou ordinaux indénombrables reçoivent-ils confirmation semblable de leur existence ?

La réponse de cet auteur est : aucune et c'est dommage.

En fait, certains sont convaincus que la remarquable confirmation finitiste de Harvey Friedman (le premier ordinal imprédicativement dénombrable) montre que « l'obligation d'existence de Γ_0 implique l'obligation de l'(existence du premier) indénombrable ordinal ω_1. » *[Smorinski 1982]* p. 186

Cependant, avec tout le respect du à Friedman pour sa remarquable découverte disons clairement que le résultat en question démontre seulement que la prédicativité est un concept trop restreint pour permettre de formaliser pleinement la notion de fini et élémentaire ; bien sûr c'est en lui-même une réalisation remarquable ! Pourtant on reste encore très loin (plus précisément infiniment loin) de l'utilisation nécessaire du premier ordinal indénombrable ω_1.

Maintenant, si on ne peut prouver que même l'indénombrable minimal de Cantor existe indépendamment pourquoi ne pas essayer d'aller plus loin à la recherche d'une nouvelle totalité infinie énorme et pleine d'utilité mathématique, dont l'existence justifierait radicalement tous les types mineurs derrière lui, y compris ω_1 ? C'est ce qui est caché en particulier dans l'affirmation radicale suivante :

« Ici nous donnons l'utilisation obligatoire de l'extension de la théorie abstraite des ensembles dans un contexte mathématique fini ... En fait ces extensions de la théorie abstraite des ensembles vont significativement au-delà de la structure axiomatique communément acceptée pour les mathématiques (comme celui formalisé par ZFC), et sont fondées sur l'existence des cardinaux de Mahlo d'ordre fini ... Ceux-ci sont parmi les dénommés grands cardinaux inférieurs ... Nous croyons que cet exemple est suffisamment convaincant pour révéler pour la première fois une possibilité réaliste sinon une probabilité que la puissante théorie abstraite des ensembles joue un rôle essentiel dans une variété de plusieurs contextes mathématiques finis standards. Bien sûr cela donnera naissance à une crise fondamentale d'une magnitude sans précédent puisque nous n'avons aucun moyen de nous convaincre de l'exactitude de la cohérence des quelques principes de théorie des ensembles, manquant de confiance en notre pauvre intuition sur ces principes. » [Friedman 1986] p. 93

Cette déclaration dramatique faite il y a dix ans est restée depuis lors ni commentée, ni justifiée ou expliquée par Friedman ou ses successeurs et admirateurs. La raison en est que, demande exagérée, l'existence d'un cardinal de Mahlo est nécessaire pour prouver le théorème combinatoire de Friedman. Une explication naturelle est peut être l'extrême faiblesse du système axiomatique fondamental. (Un phénomène opposé rapporté par *[Simpson 1984]* est discuté dans *[Sommer 1998]*).

11. Remarque et conclusion

Il ne subsiste aucun doute que les témoignages ci-dessus et les critiques de la théorie des ensembles moderne apportent avec eux la responsabilité scientifique et morale de proposer une sortie ontologique digne pour la recherche liée à ce sujet qui a produit depuis presque un siècle un monde d'une beauté exceptionnelle fait de résultats difficiles et de théories profondes. Que signifient ces faits mathématiques si les totalités infinies décrites sont préprogrammées et n'existent que « sur le papier » ? Une tentative d'explication est avancée par Stephen Simpson :

« Seuls les premiers bas niveaux de la hiérarchie cumulative porte quelque ressemblance à la réalité extérieure. Le reste est une vaste extrapolation fondée sur le modèle brut de processus de pensée abstraite. Gödel lui-même finira par en convenir comme beaucoup. » [Simpson 1988] p. 362

Autrement dit, la recherche relative à ZF peut être vue comme un exercice sophistiqué et répété qui stimule l'adresse de notre imagination inductive et itérative. D'autres interprétations sont possibles comme celles qui mènent à des applications inconnues dans de futures philosophies du raisonnement et de l'informatique.

En disant au revoir à notre bon lecteur, nous le quittons en lui octroyant le privilège de décider à quelle catégorie appartient l'auteur de cette présente étude : est-il un inventeur, un découvreur, un détracteur, un défenseur, un maître, une victime, un utilisateur ou un spectateur de l'infini mathématique ?

Et vous qui me lisez, qui êtes-vous ?

FIGURE 4

_____**??????????????????????????????????????**
» _____***inconsistency***
» » _____$j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$
» » » _____***huge***
» » » » _____***supercompact***
» » » » » _____***Woodin***
» » » » » » _____$o(\kappa) = \kappa^{++}$
» » » » » » » _____$o(\kappa) = 2$
» » » » » » » » _____***measurable***
» » » » » » » » » _____***Ramsey***
» » » » » » » » » » _____$0^{\#}$
» » » » » » » » » » » _____***weakly compact***
» » » » » » » » » » » » _____***Mahlo***
» » » » » » » » » » » » » _____***inaccessible***
» » » » » » » » » » » » » » _____$\aleph_1$
» » » » » » » » » » » » » » » _____$\aleph_0$
» » » » » » » » » » » » » » » » _____0