

# DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AU FORMALISME DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Jacques HARTHONG <sup>1</sup>  
ENSP Strasbourg

## 1 Présentation générale

Je suis physicien et non historien des mathématiques. Mais c'est dans l'histoire des mathématiques que je cherche un élément de réponse à une question importante pour la Physique: *D'où vient le formalisme mathématique de la Mécanique quantique?* On sait que ce formalisme a pour l'essentiel été proposé par Johann von Neumann dans son livre *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* publié en 1932. Sur cette question, tous les faits historiques sont bien connus et les sources aisément accessibles: le formalisme de von Neumann n'a pas été construit à partir des lois de la nature nouvellement découvertes, mais à partir des travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen. Je voudrais montrer qu'il y a là une *étrangeté historique*, et essayer de la comprendre.

L'étrangeté historique consiste en ceci: les travaux des mathématiciens de Göttingen sont le résultat d'une longue évolution qui pour des raisons évidentes de causalité ne peut pas avoir été influencée par la Mécanique quantique. Je vais donc décrire cette évolution pour répondre à la question: *comment se fait-il qu'après avoir suivi une logique étrangère à des phénomènes encore inconnus, on soit comme par hasard parvenu à un résultat qui coïncide presque parfaitement avec les besoins d'une théorie future et imprévisible, et qu'en outre on y soit parvenu juste au bon moment?*

C'est la *logique* de l'évolution qui m'intéresse ici; le déroulement historique est connu (Hellinger 1935, Dieudonné 1981): le processus aurait commencé avec les travaux de Fourier sur la chaleur, puis à travers ceux de Sturm et Liouville a conduit aux équations intégrales; ces dernières ont joué un rôle important au cours du XIX<sup>e</sup> siècle en électrostatique, (ce qui a donné chez les mathématiciens le *problème de Dirichlet* par exemple); puis vers 1900, Ivar Fredholm a trouvé la solution générale des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x)$$

ce qui a conduit les mathématiciens de Göttingen à la notion d'espace de Hilbert et à leurs applications aux équations aux dérivées partielles, à la théorie spectrale des opérateurs, etc.

Il n'y a évidemment pas une origine précise de l'analyse fonctionnelle, c'est seulement la présentation de Hellinger et Dieudonné qui commence avec les travaux de Fourier sur les séries trigonométriques, puis de Sturm et Liouville sur les équations

---

1. © L'OUVERT 100 ( 2000)

intégrales. Le choix d'une telle "origine" est toujours arbitraire: il fallait bien commencer quelque part si on ne voulait pas remonter à la création du monde. Cependant on ne devra pas oublier que l'idée de la représentation des fonctions sous forme de séries trigonométriques est dûe à Daniel Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, cinquante ans avant Fourier. Il me sera d'autant plus difficile d'oublier Daniel Bernoulli que les vibrations joueront, pour mon propos, un rôle plus crucial que la propagation de la chaleur.

Je vais présenter cette lente évolution des idées en accéléré, pour faire apparaître sa logique. Puis on examinera si elle est vraiment étrangère à tout ce qui aurait pu avoir un rapport même lointain avec la future Mécanique quantique, et on découvrira que cette dernière avait un ancêtre qui a joué un certain rôle dans l'histoire qui nous intéresse ici.

En ce qui concerne le problème de "l'étrangeté" du formalisme de von Neumann, le doute s'était installé immédiatement sous la forme du classique "Grand débat sur la théorie quantique": le Bon Dieu ne joue pas aux dés, etc. Ce débat est aujourd'hui dépassé, et le problème discuté ici est tout autre: il ne s'agit pas de contester le formalisme de la Mécanique quantique. Beaucoup d'auteurs l'ont déjà contesté, dont aucun n'a proposé mieux. Beaucoup d'autres en *cherchent* un meilleur, mais aucun ne s'est encore dégagé. L'activité de critique est vaine si elle ne s'accompagne pas d'une alternative. La bonne critique sera fournie par celui qui trouvera la bonne solution. Je laisse donc ce "Grand débat" de côté; il s'agira ici uniquement de cette étrange coïncidence que *les théoriciens de la Mécanique quantique ont trouvé les outils mathématiques qu'il leur fallait en quelque sorte "clés en main" dans le livre de Courant et Hilbert "Methoden der mathematischen Physik", dont la première édition a paru en 1924, c'est-à-dire juste au moment où la Mécanique quantique allait naître.*

Certains faits cependant atténuent ce mystère: par exemple, le formalisme de von Neumann ne suffit pas pour l'électrodynamique quantique et ses diverses généralisations, et surtout pas en conservant la cohérence et la rigueur qu'il avait dans l'œuvre originale. C'est pourquoi, depuis les premières tentatives de Dirac, le formalisme de la théorie quantique des champs s'est progressivement éloigné de celui qu'avait proposé von Neumann. À première vue, ce dernier constat pourrait étayer la thèse que le formalisme de von Neumann a été provisoirement emprunté "parce que les travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen étaient là", et qu'on s'en est ensuite progressivement et assez rapidement éloigné. Avec cette thèse le mystère serait levé, puisqu'il n'y aurait plus d'adéquation. L'allégorie suivante fera peut-être mieux comprendre la situation: un homme (nommé Erwin) veut ouvrir une porte mais n'a pas la clé; il cherche rapidement dans ses poches un objet pour crocheter la serrure et trouve un clou qui lui permet d'ouvrir; cependant, derrière la première porte il y en a d'autres que le clou ne permet pas d'ouvrir et il doit alors limer des clés spécialement selon les différentes serrures. Il n'y aurait là rien d'étrange. Le mystère serait qu'Erwin possédât déjà un trousseau de clés *indépendant* du lieu, et s'aperçoive que les clés de ce trousseau ouvrent les portes une à une.

Toutefois, les difficultés de l'électrodynamique quantique ne suffisent pas à régler le problème, car le formalisme de von Neumann reste quand même la base de la

Mécanique quantique, et continue (sous une forme évidemment simplifiée pour des raisons pédagogiques) d'être enseigné dans les cours d'initiation. S'il en est ainsi, ce n'est pas seulement par conservatisme, mais parce que réellement il fonctionne remarquablement bien sur les problèmes tels que l'atome d'hydrogène, l'oscillateur quantique, l'effet tunnel, etc. En outre, il est vrai que l'électrodynamique quantique et ses diverses succédanées s'en éloignent, mais en gardant le cœur: le champ de forces est toujours une superposition d'oscillateurs auxquels on applique bel et bien l'outil de von Neumann, même si on doit beaucoup bricoler ensuite. Donc le trousseau qu'Erwin avait dans sa poche permet effectivement d'ouvrir les portes; il faut limer un peu mais ça marche.

Si ce genre de situation était habituel, c'est-à-dire si l'Histoire nous avait habitués à ce que, par une sorte d'harmonie préétablie, les mathématiques fournissent toujours aux physiciens les outils dont ils ont besoin juste au moment où ils en ont besoin, alors le cas de J. von Neumann ne serait pas étrange, mais normal, et les remarques précédentes n'auraient pas de sens. Or l'Histoire nous a habitués à l'inverse. Le formalisme de la théorie électromagnétique s'est construit lentement *à partir des propriétés des champs*, au fur et à mesure qu'on les découvrait. Le rotationnel d'un champ, le flux à travers une surface, la formule de Green, etc, sont des concepts mathématiques directement issus de la nécessité d'écrire sous une forme mathématique des lois qu'on *venait* de découvrir: il suffit pour s'en convaincre de comparer la formulation mathématique des lois dans les mémoires d'Ampère [1823], de Green [1828], de Beer (environs de 1850 et en particulier [1856]), et enfin dans le *Traité* de Maxwell [1873]. Dans la préface de ce *Traité* on trouve d'ailleurs des témoignages directs et explicites de l'antériorité des lois physiques sur les formulations mathématiques:

J'ai ainsi reconnu que plusieurs des plus fécondes méthodes de recherche découvertes par les mathématiciens pouvaient recevoir, au moyen d'idées dérivées de celles de Faraday, une forme bien préférable à leur expression primitive.

C'est pourquoi on réalisera pleinement l'étrangeté historique que je signalais en essayant d'imaginer que le calcul des fluxions ait été élaboré — dans la continuité des œuvres d'Appolonios de Pergè et d'Archimède de Syracuse sur les coniques — par un prestigieux groupe de mathématiciens établi à Prague depuis 1550; que Kepler ait trouvé dans un livre publié par ce groupe en 1604 tous les outils mathématiques pour écrire la loi des aires sous forme différentielle; et qu'il lui aie suffi d'aller consulter l'un d'entre eux pour qu'il l'aide à résoudre cette équation. Ou encore, on peut essayer d'imaginer que le Calcul vectoriel ait été entièrement élaboré par Laplace et Fourier, juste avant les travaux d'Ampère.

À ma connaissance, cette étrangeté n'a pas frappé les historiens, et c'est pourquoi j'écris cette communication. Certes, la lente maturation des idées qui commence avec la théorie des cordes vibrantes de Jean d'Alembert, Daniel Bernoulli, et Leonhardt Euler (1745 – 1755), et se poursuit jusqu'à la synthèse par les mathématiciens de Göttingen, publiée par Hilbert sous le titre *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (1904 – 1907), a été maintes fois décrite et commentée. Hilbert lui-même, dans l'introduction de son ouvrage de 1912, survole cette évolution historique des idées, et met en avant une certaine logique d'évolution. Celle-ci est

reprise et développée par Ernst Hellinger dans une contribution incluse dans *Hilberts gesammelte Abhandlungen* [1935].

Cette *logique historique* est aujourd'hui une tradition et constitue la base de l'*Histoire de l'Analyse fonctionnelle*. Un ouvrage excellent sur ce sujet, qui fait d'ailleurs autorité, est *History of Functional Analysis* de J. Dieudonné (1981). Cet ouvrage reprend la logique historique décelée par Hilbert et Hellinger, et considère les travaux de Sturm et Liouville comme le commencement de l'Analyse fonctionnelle, sans doute parce que les développements en séries de fonctions arbitraires, qui généralisent les développements en séries de fonctions trigonométriques de Joseph Fourier, sont un premier pas vers une conception où les fonctions sont considérées comme un élément générique d'un espace, et non plus comme la donnée concrète d'une expression analytique particulière.

Malheureusement le livre de Dieudonné appartient à une époque où la science est cloisonnée en disciplines étanches. Le fait que Fourier, Poisson, Sturm, et Liouville cherchaient à résoudre le problème de la propagation de la chaleur est évacué, tout comme le fait que l'importance croissante des équations intégrales au cours du XIX<sup>e</sup> siècle est motivée par l'électromagnétisme. La trace laissée à l'intérieur des mathématiques par ce dernier y apparaît sous la forme de problèmes posés par Gauss; ainsi Dieudonné parle du problème de Dirichlet sans expliquer son origine; de même les nombreux travaux sur l'électrostatique, et utilisant des développements en série ou des équations intégrales, sont ignorés. Enfin, il n'y a évidemment pas un mot sur les rapports entre les espaces de Hilbert et la Mécanique quantique, pas même dans le chapitre "Applications de l'Analyse fonctionnelle". Dans de telles présentations de l'Histoire, le mystère mentionné plus haut ne peut pas être perçu, et toute l'évolution historique semble déterminée téléologiquement, ou par la simple tendance spontanée des mathématiciens à la généralisation des concepts. Ce défaut très courant a souvent été dénoncé par les historiens et je ne m'y attarde pas; mais il m'oblige, pour montrer le mystère, à reprendre la description de l'évolution historique sans évacuer ces aspects essentiels. C'est pourquoi ce survol sera rapide.

## 2 La méthode de séparation des variables

On sait que la grande découverte de Fourier est la *formule d'inversion* qui permet d'exprimer les coefficients de Fourier par l'intégrale bien connue. Pour résoudre le problème de la propagation de la chaleur, Fourier applique la *méthode de séparation des variables*, qui consiste à chercher la solution sous forme de série trigonométrique. Cette méthode, appliquée à l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 . \quad (1.1.)$$

était une invention de Daniel Bernoulli, mais ce dernier ne possédait pas la formule d'inversion, qui justement fait toute la puissance du procédé.

On pourra se souvenir à ce propos de la longue discussion qui eut lieu au siècle précédant Fourier entre Jean d'Alembert, Daniel Bernoulli, et Leonhardt Euler, le premier soutenant que la solution est de la forme  $f(x - vt) + g(x + vt)$ , mais avec

des fonctions  $f$  et  $g$  forcément données par une expression analytique, Daniel Bernoulli lui opposant que la solution devait, pour des raisons physiques, être une série trigonométrique, et enfin Euler qui ne voyait pas pourquoi les fonctions  $f$  et  $g$  de d'Alembert devraient être ainsi restreintes, puisque la corde peut, à l'instant initial de la vibration, recevoir n'importe quelle forme permise par la géométrie.<sup>2</sup>

Pour notre propos la théorie des vibrations est bien plus essentielle que celle de la chaleur, et c'est pourquoi nous allons d'abord rappeler la méthode des séries trigonométriques dans le contexte de la théorie des cordes vibrantes, qui est d'ailleurs son contexte d'origine. Il ne s'agit que d'un rappel (car reprendre toute l'histoire mènerait trop loin), puis nous reviendrons à la théorie de la chaleur.

La théorie des cordes ou des membranes vibrantes est d'autant plus essentielle (pour notre propos ici), que l'équation (1.1) ne décrit pas seulement la vibration d'une membrane; elle décrit *n'importe quelle vibration*, aussi bien celle de l'air que celle de l'éther. Ainsi les modes de vibration acoustiques ou électromagnétiques sont eux aussi décrits par cette équation, qui sera appelée plus tard "équation de Helmholtz", dans le contexte de l'électromagnétisme (encore inexistant du temps de Fourier) et de l'acoustique. Ce point est essentiel pour notre argumentation car le problème de la vibration électromagnétique dans une cavité contient en germe la future Mécanique quantique. Mais voyons d'abord cela comme Euler, Bernoulli et Fourier ont pu le voir.

Proposons-nous de résoudre l'équation (1.1) sur un rectangle de longueur  $p$  (selon la coordonnée  $x$ ) et de largeur  $q$  (selon la coordonnée  $y$ ) par la méthode de Bernoulli (Le rectangle est choisi parce que c'est le plus simple et suffit pour comprendre l'idée générale). On cherche donc d'abord des solutions sous la forme  $f(x) \cdot g(y)$ , et on constate que l'on doit avoir  $f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$  et  $g(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$ . Pour que l'équation (1.1) soit satisfaite par le produit  $f(x) \cdot g(y)$ , il faut que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2 \quad (1.2)$$

mais les constantes  $A, B, C, D$  sont arbitraires. Si on impose à la solution des valeurs données a priori sur le bord du rectangle, les constantes  $A, B, C, D$  seront déterminées par les "coefficients de Fourier". Un cas particulièrement simple est celui où la solution doit être nulle sur tout le bord: dans ce cas, les constantes  $A, B, C, D$  ne sont pas déterminées de manière unique, mais il y a les contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi}{p} n & A &= 0 \\ \beta &= \frac{2\pi}{q} m & C &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $m$  et  $n$  sont des entiers vérifiant (1.2), c'est-à-dire

$$\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}; \quad (1.4)$$

les constantes  $B$  et  $D$  restent cependant arbitraires.

---

2. Fourier mit tout le monde d'accord en montrant que les *fonctions arbitraires* d'Euler pouvaient s'écrire comme séries trigonométriques. Le lecteur intéressé par cet épisode historique pourra consulter le livre de Youschkevitch *Le concept de fonction* (voir bibliographie).

Ainsi l'équation (1.1) n'a de solutions nulles sur le bord que si  $k$  appartient à une famille discrète de valeurs ("valeurs propres"), données par (1.4).

Leonhardt Euler a montré une propriété analogue pour les solutions de (1.1) qui sont nulles sur un cercle au lieu d'un rectangle: les valeurs discrètes de  $k$  sont alors déterminées à partir des zéros des fonctions de Bessel  $J_0, J_1, J_2, \dots$

La signification électromagnétique de l'équation (1.1) est que le domaine est une cavité à l'intérieur de laquelle le champ vibre avec une fréquence  $k$ . La condition que le potentiel est nul sur le bord signifie que le domaine est une cavité creusée dans un conducteur parfait (un métal). Le fait mathématique que les solutions nulles au bord de l'équation (1.1) ne peuvent exister que pour des valeurs discrètes de  $k$ , signifie donc que dans une cavité entourée d'un milieu conducteur, le champ électromagnétique ne peut vibrer qu'à certaines fréquences discrètes. Ainsi, le problème de la cavité, capital pour l'électromagnétisme, est mathématiquement identique au problème de la vibration d'une membrane; identique aussi au problème de la cavité acoustique (tuyau d'orgue par exemple) qui sera étudié par Helmholtz; et analogue — ou apparenté — au problème de la diffusion de la chaleur le long d'une tringle ou d'une tôle, résolu par Joseph Fourier, que nous allons aborder maintenant.

### 3 La théorie analytique de la chaleur

Les méthodes que Daniel Bernoulli et Leonhardt Euler avaient essayées avec succès pour les cordes vibrantes ou les membranes ont en effet été reprises par Joseph Fourier, pour traiter cette fois le problème de la propagation de la chaleur par conduction dans un milieu matériel. C'est à cette occasion que Fourier va créer la théorie des *séries de Fourier* et prouvera ainsi la justesse des visions de Daniel Bernoulli sur l'universalité des solutions trigonométriques.

Les travaux de Fourier sur la conduction de la chaleur ont commencé dès la fin des années 1790. Toutefois leur présentation à l'Académie date de 1807, et c'est le traité publié en 1822 chez l'éditeur Firmin Didot qui nous servira de référence.

Dans le *discours préliminaire* (préface) de son ouvrage, Fourier motive ses recherches sur la chaleur et les situe par rapport à la philosophie naturelle, en disant que la chaleur est un phénomène à part:

Galilée, premier inventeur des théories dynamiques, découvrit les lois du mouvement des corps graves. Newton embrassa dans cette science nouvelle tout le système de l'univers. Les successeurs de ces philosophes ont donné à ces théories une étendue et une perfection admirables; ils nous ont appris que les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales, qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. On a reconnu que les mêmes principes règlent le mouvement des astres, leur forme, les inégalités de leurs cours, l'équilibre et les oscillations des mers, les vibrations harmoniques de l'air et des corps sonores, la transmission de la lumière, les actions capillaires, les ondulations des liquides, enfin, les effets les plus composés de toutes les forces naturelles (...)

Mais, quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre

Ayant fait remarquer qu'on ne connaît pas encore les lois mathématiques générales de la chaleur, Fourier poursuit:

J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour; je les ai tous observés de nouveau, dans le cours de plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.

(...) J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action [de la chaleur] se résolvent en un très petit nombre de faits généraux et simples; et par là, toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'Analyse mathématique. J'en ai conclu que, pour déterminer en nombre les mouvements les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, de la *recevoir* ou de la *transmettre* à travers leur superficie, et de la *conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement et qu'elle apprend à mesurer.

Ainsi Fourier a reconnu par l'expérience trois grandeurs qu'il faudra *mesurer*, tout le reste étant affaire d'Analyse mathématique. Il situe donc la théorie analytique de la chaleur dans le cadre de la philosophie naturelle: la physique de la chaleur est donc analogue à la Mécanique céleste, où il faut mesurer les masses et la constante  $G$  de la gravitation, la suite étant affaire d'Analyse mathématique; ou à la physique des cordes vibrantes, où il faut mesurer la tension, la masse, et la longueur; etc. etc.

Les trois grandeurs reconnues par Fourier sont

— la faculté de contenir la chaleur, aujourd'hui appelée *chaleur spécifique*, et désignée par  $C$ : "le coefficient  $C$  désigne ce qu'il faut de chaleur pour élever de la température 0 à la température 1 un poids déterminé qui sert d'unité"

— de la recevoir ou de la transmettre à travers leur superficie, le *coefficient de dissipation*, désigné par  $h$ : "la surface extérieure du solide ayant une température  $V$ , laisse échapper dans l'air [supposé à 0°] une quantité de chaleur proportionnelle à cette température et à l'étendue  $S$  de la surface; cette quantité a pour valeur  $h \cdot S \cdot V$ ".

— et de la conduire dans l'intérieur de la masse, ou *conductibilité*, désignée dans la suite par  $K$ .

Pour éviter toute confusion, il est sans doute utile de noter ceci: la chaleur spécifique est rapportée à la masse et non au volume. C'est pourquoi la chaleur *volumique* (rapportée au volume) sera désignée par  $CD$ , où  $D$  est la densité du corps.

Le problème le plus simple et le plus typique est celui d'une tringle, et on s'y limitera puisqu'il contient toutes les idées essentielles. Si  $x$  représente l'abscisse le long de la tringle et  $t$  le temps, soit  $u(t, x)$  la température au point  $x$  de la tringle à l'instant  $t$ . L'évolution de la température au cours du temps est alors décrite par l'équation aux dérivées partielles

$$CD \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.)$$

où  $C$  est la chaleur spécifique du matériau dont la tringle est faite,  $D$  la densité, et  $K$  la conductibilité du matériau. Le problème n'est bien posé que si cette équation s'accompagne des *conditions aux limites* suivantes: a)  $\forall t \geq 0, u(t, 0) = 0$ ; b)  $\forall t \geq 0, u(t, L) = 0$ ; c)  $\forall x, 0 \leq x \leq L, u(0, x) = f(x)$ , Les conditions a) et b) fixent

la température aux extrémités de la tringle à tout instant, et la condition c) fixe la distribution initiale tout au long de la tringle. L'équation (2.1) est correcte si la tringle est parfaitement isolée et qu'il n'y a aucune dissipation de chaleur dans le milieu environnant sinon le second membre doit être diminué de  $C^{te} \cdot u$  pour en tenir compte, mais pour les besoins de ce résumé le cas simple (2.1) suffit.

Cette équation est analogue à (1.1): elle n'en diffère essentiellement que par le fait que la dérivée par rapport au temps  $y$  est du premier ordre alors que dans (1.1) elle est du second ordre; le procédé de la séparation des variables s'applique donc de la même façon, de sorte que le raisonnement suivi par Fourier est simplement repris de Daniel Bernoulli. L'innovation qui conduit à la théorie des séries de Fourier intervient à propos de la troisième condition aux limites, celle qui donne la solution pour  $t = 0$ . En effet, la distribution des températures évolue au cours du temps, mais à partir d'un état initial: au départ, on a chauffé la tringle (avec une flamme par exemple) donc

$$c) \forall x, 0 \leq x \leq L, u(0, x) = f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction donnée au départ, qui décrit l'état initial de la tringle. Or, étant donné qu'on a trouvé, à partir des conditions a) et b), que les solutions possibles de (2.1) sont de la forme

$$B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\} \quad (2.2.)$$

on obtiendra la solution la plus générale de (2.1) avec les conditions a) et b) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\} \quad (2.3.)$$

qui dépend des constantes arbitraires  $B_1, B_2, B_3, \dots$ . Si cette solution doit en outre satisfaire à c), il faut avoir

$$\forall x, 0 \leq x \leq L, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.4.)$$

autrement dit, il faut, pour déterminer les constantes arbitraires  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , "trouver le développement en série de Fourier de  $f(x)$ ".

## 4 Le problème de Sturm-Liouville

Les travaux de Fourier sur la chaleur ont inspiré un très grand nombre de contributions et c'était à Paris au début du siècle le sujet majeur, car l'électromagnétisme était encore peu développé. Sur la voie qui conduira à la notion d'*espace de Hilbert*, une étape essentielle, reconnue par tous les historiens, va être le problème de Sturm-Liouville. Le but avoué de Charles Sturm et Joseph Liouville était d'étendre la méthode de Fourier rappelée ci-dessus au cas où les coefficients  $C, D$ , ou  $K$  de l'équation (2.1) dépendent de la coordonnée  $x$ , c'est-à-dire au cas où la tringle est inhomogène. Le premier mémoire présenté sur le sujet par Liouville en 1836 commence comme ceci:

Lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, placée dans un milieu entretenu à  $0^\circ$ , on tombe sur l'équation aux différences partielles

$$(1) \quad g \frac{du}{dt} = \frac{d(k \frac{du}{dx})}{dx} - l u .$$

Dans cette équation qui doit servir à déterminer la température  $u$  de chaque point en fonction du temps  $t$  et de l'abscisse  $x$  de ce point, les trois lettres  $g$ ,  $k$ ,  $l$  représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure, et le pouvoir émissif; et, puisque la barre est hétérogène, on doit les regarder, non comme des constantes, mais comme des quantités variables données pour chaque valeur de  $x$ . Si les abscisses des deux extrémités de la barre sont  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$ , on a de plus deux conditions définies de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} - h u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{du}{dx} + H u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{cases}$$

$h$  et  $H$  étant des constantes qui peuvent avoir des valeurs quelconques depuis 0 jusqu'à  $+\infty$ . Enfin, on doit avoir

$$(3) \quad u = f(x) \quad \text{pour } t = 0 ,$$

$f(x)$  étant une fonction arbitraire qui représente l'état initial des températures et qui satisfait aux deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} - h f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{df(x)}{dx} + H f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

lesquelles se déduisent, en posant  $t = 0$ , des équations (2) que nous avons regardées comme ayant lieu pour la valeur générale de  $u$  dont  $f(x)$  n'est qu'un cas particulier.

Puis Liouville présente la méthode de résolution qui est exactement la méthode de Fourier décrite plus haut:

Pour former la valeur de  $u$  qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions définies (2) et (3), on est conduit à développer la fonction  $f(x)$  en une série dont les termes successifs diffèrent l'un de l'autre par un paramètre  $r$  et ont la propriété de satisfaire à la fois à l'équation différentielle générale

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V ,$$

et aux conditions particulières,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - h V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{dV}{dx} + H V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}. \end{aligned}$$

La nouveauté capitale est ici que les fonctions  $V_r$  sont des fonctions *spécifiques* du problème, qui changent si les fonctions données  $g(x)$ ,  $k(x)$ ,  $l(x)$  changent. Si

les fonctions données sont constantes, alors les fonctions  $V_r$  seront des fonctions trigonométriques comme chez Fourier; mais si la tringle est hétérogène, ce seront des fonctions nouvelles, pour lesquelles il n'y a pas de formule analytique qui les exprimerait à l'aide des fonctions connues.

Au moment où Liouville publie ces lignes, ces fonctions  $V_r$  avaient été étudiées par son ami Charles-François Sturm depuis dix ans. L'essentiel du travail de Sturm avait été publié l'année précédente dans le même Journal, édité par Liouville (une partie des mémoires originaux de Sturm est perdue). Voici ce que Sturm en dit dans cette publication:

La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de formes diverses et aux petits mouvements oscillatoires des corps solides élastiques, des corps flexibles, des liquides et des fluides élastiques, conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre [à coefficients variables] (...). On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les fonctions dont je me suis occupé ont, comme on le verra, des analogies remarquables avec les sinus et les exponentielles, et peuvent, dans certains cas, être évaluées numériquement avec une approximation suffisante à l'aide des tables logarithmiques et trigonométriques.

Autrement dit, pour chaque cas particulier où les fonctions  $g$ ,  $k$ ,  $l$  sont données, il est possible de trouver des fonctions spécifiques  $V_n(x)$ , qui sont analogues aux fonctions  $v_n(x) = \sin(\frac{\pi}{L} n x)$ , et qui permettent d'appliquer la même méthode que Fourier: au lieu de développer la fonction  $f(x)$  (l'état initial de la tringle) en série de sinus, on la développera en série de  $V_n$ . Les fonctions sinus sont les  $V_n$  du cas particulier où les fonctions  $g$ ,  $k$ ,  $l$  sont constantes.

L'équation obtenue après séparation des variables

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V ,$$

mentionnée dans la citation ci-dessus de Liouville fournit des solutions  $V$  pour un *continuum* de valeurs de  $r$  mais, tout comme dans le problème de Fourier, les fonc-

tions  $V_r$  correspondantes ne satisferont les conditions aux limites en  $x = \mathbf{x}$  et  $x = \mathbf{X}$  que pour des valeurs discrètes de  $r$ .

Sturm et Liouville démontreront alors “par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes”, les propriétés *utiles* des fonctions  $V_n$  (les  $V_r$  pour  $r = r_n$ ): possibilité de développer n’importe quelle fonction  $f(x)$  en “série de Fourier”  $\sum a_n V_n$ , expression intégrale des coefficients  $a_n$ , orthogonalité<sup>3</sup> des  $V_n$ . Leurs démonstrations n’étaient pas toutes absolument rigoureuses et la critique de ces démonstrations fait aussi partie de la logique historique.

Je n’ai pas la place pour exposer et critiquer leurs démonstrations, mais je choisis un exemple particulièrement intéressant. Dans son premier mémoire, Liouville propose une démonstration. Il annonce ceci:

On peut voir, dans l’ouvrage de M. Poisson sur la chaleur, comment on est porté, par la marche même du calcul, à admettre la possibilité de ce développement [celui dont il est question, le développement en série “de Fourier” selon les fonctions  $V_n$ ] pour une fonction quelconque  $f(x)$ ; mais jusqu’à ce jour il a paru difficile d’établir cette possibilité directement et d’une manière rigoureuse. Je me propose de donner ici une méthode très simple pour y parvenir. Je considère en elle-même la série par laquelle les géomètres ont représenté le développement de  $f(x)$  dont il est question: sans rien supposer a priori sur l’origine de cette série ni sur sa nature, j’en cherche la valeur, et je trouve que cette valeur est précisément  $f(x)$ , du moins lorsque la variable  $x$  est comprise entre les limites  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$ .

La démonstration dont parle Liouville n’était pas vraiment correcte et sa critique a été déterminante pour la compréhension des espaces fonctionnels. Elle contient l’idée des *familles totales*, mais je renvoie à la littérature (notamment l’ouvrage de Dieudonné) pour le complément d’information.

## 5 Les équations intégrales

Dans la littérature scientifique du XIX<sup>e</sup> siècle, les séries obtenues par itération à partir d’une équation intégrale (méthode des approximations successives), sont souvent appelées séries de Beer–Neumann. Carl Neumann semble être le premier à en avoir fourni une théorie générale et rigoureuse selon les canons mathématiques; A. Beer est connu pour en avoir répandu l’usage en électromagnétisme, à partir de “raisonnements de physicien”; l’idée d’y recourir (pour le “problème de Dirichlet”) avait été proposée par Gauss. Cette littérature semble avoir ignoré le travail de Liouville. En examinant les textes de cette époque intermédiaire ( $\sim 1830 - 1860$ ), il ne faut surtout pas oublier que l’électromagnétisme n’avait pas encore pris la forme achevée que lui a donné Maxwell dans son *Traité* de 1873, et qui est encore enseignée aujourd’hui.

Pour donner une idée du rôle donné à cette époque aux équations intégrales, voici un extrait d’un court article de A. Beer [1856], où il étudie le potentiel électrostatique

---

3. Il s’agit de l’orthogonalité *avant la lettre*; le terme orthogonalité a été introduit en 1904 par Erhard Schmidt et implique une perception géométrique. Cette idée de Schmidt, de l’analogie entre le produit scalaire euclidien et l’intégrale  $\int f(x) g(x) dx$ , est une étape essentielle de la *logique historique*. Pour une étude historique spéciale de cette notion d’orthogonalité, voir Jean-Luc Dorier 1996.

à l'intérieur d'une surface *conductrice*, si les charges qui le créent sont toutes sur cette surface:

Si maintenant le corps portant les charges est entièrement situé à l'extérieur de la surface  $S$ , alors l'expression  $\Delta V$  devient nulle dans toute la région entourée par ce corps, et on a, selon la formule de Green bien connue, en tout point de ladite région:

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\partial(\frac{V}{4\pi r})}{r} \cdot dS + V' \\ V' &= - \int V \cdot \partial(\frac{1}{4\pi r}) \cdot dS \end{aligned} \tag{4.1.}$$

[le symbole  $\partial$  désigne ici la dérivée normale sur  $S$ ] La fonction  $V$  est de toute évidence elle-même un potentiel. et l'expression  $\Delta V'$  s'annule partout à l'intérieur de  $S$ .

Il est clair que si dans la première équation ci-dessus, on substitue à  $V'$  son expression donnée dans la deuxième, on obtient une équation intégrale. Beer en propose la résolution par itération, et prouve la convergence du procédé à partir d'arguments physiques. Dans ce contexte l'équation intégrale est beaucoup plus parlante que l'équation différentielle, car elle exprime directement la rétroaction du potentiel sur les charges: la surface  $S$  étant conductrice, les charges (qui ne peuvent en sortir, mais peuvent se déplacer le long de celle-ci) sont influencées par le potentiel global, ce qui les déplace et modifie en retour ledit potentiel.

On reconnaîtra aussi dans cette citation le *problème de la cavité*, déjà mentionné plus haut; mais dans cet exemple Beer n'étudie que le potentiel électrostatique et non les vibrations. Le problème des *vibrations* dans une cavité n'a jamais reçu, au long du XIX<sup>e</sup> siècle une importance comparable aux problèmes *électrostatiques* (problèmes dits "de Dirichlet" ou "de Neumann"). Il n'a donc jamais eu le privilège d'être le guide ou le modèle des géomètres au cours de la longue évolution historique que j'essaie de retracer. Mais il a toujours été présent, soit sous des formes déguisées comme par exemple celui de la membrane, soit comme tel avec une importance modeste.

Ces questions semblent à première vue tout à fait étrangères à la future Mécanique quantique, et bien sûr c'est cela qui donne le sentiment de l'*étrangeté historique* signalée en introduction. On verra l'écart apparent se creuser encore avec la suite de l'histoire, car à partir du moment où Gauss, Neumann, etc, ont donné au problème une vie mathématique autonome, l'évolution ultérieure devait logiquement devenir encore plus indépendante.

Or cet écart n'est qu'apparent: la Mécanique quantique *semble* avoir trouvé par miracle les bases mathématiques qu'il lui fallait; mais c'est tout simplement parce que la Mécanique quantique prend en compte les propriétés *ondulatoires* des très petites particules, et que toutes les ondes (qu'elles soient acoustiques, électromagnétiques, électroniques) sont décrites mathématiquement par les mêmes équations, qui sont aussi celles d'une membrane. L'atome d'hydrogène est *physiquement* analogue à la cavité électromagnétique, qui est elle-même *physiquement* analogue à la membrane étudiée jadis par Leonhardt Euler. Nous y reviendrons dans la conclusion.

Dans l'Histoire des équations intégrales telle qu'elle est perçue par la tradition des

mathématiques pures, une étape importante est la méthode de résolution proposée par Ivar Fredholm [1903]. Ce travail est à juste titre célèbre et il est inutile de le décrire en détail pour notre propos; je me contente d'en rappeler l'idée de base.

Fredholm propose de résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x) \quad (4.2)$$

d'une manière analogue à la résolution des systèmes de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues par la méthode des déterminants de Cramer, et introduit pour cela les équivalents *fonctionnels* de ces déterminants. Voici ce qu'écrit Fredholm au début de son article (troisième page):

... il existe une quantité  $D_f$  qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (4.2) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équations linéaires.

Pour définir  $D_f$  j'introduis la notation abrégée

$$f \left( \begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{array} \right) = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (4.3.)$$

et je pose

$$\begin{aligned} D_f &= 1 + \int_0^1 f(x, x) dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 f \left( \begin{array}{c} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{array} \right) dx_1 dx_2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int f \left( \begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.4.)$$

La méthode de Fredholm se comprend aisément si on discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  par les points  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \frac{1}{n}$ ,  $a_2 = \frac{2}{n}$ , ...  $a_n = 1$ : l'intégrale de (4.2) devient une somme finie, et l'équation (4.2) un système de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues dont la matrice est  $I + F$ ,  $I$  étant la matrice unité et  $F$  la matrice provenant de la discrétisation de  $f$ , dont les éléments sont  $F_{i,j} = f(a_i, a_j)$ . Toutes les formules de Fredholm s'obtiennent alors comme les limites quand  $n$  tend vers l'infini des formules de résolution de Cramer. Cet aspect est totalement occulté dans l'article de Fredholm, mais restitué dans l'exposé qu'en fera Hilbert peu après (*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*); nous y reviendrons à la section 5 ci-après. On voit ici que les méthodes heuristiques de l'électromagnétisme sont loin; le travail de Fredholm est celui d'un mathématicien qui suit la logique propre de son domaine: résoudre un problème légué par les Anciens. Ce problème est résolu selon les canons, désormais fixés, de ce qu'on appelle déjà la *mathématique pure*: la discrétisation est occultée afin d'accentuer l'aspect purement déductif de l'exposé; la question *pratique* du calcul numérique effectif n'est même pas posée et le simple fait d'avoir pu *écrire* la formule de résolution dans le langage de l'analyse suffit pour que le problème soit considéré comme définitivement résolu. Pourtant l'expression (4.4) qui donne le déterminant, tout comme les formules explicites de résolution données plus loin (dans l'article de Fredholm) sont inutilisables pour le

calcul numérique, car l'algorithme optimal pour résoudre numériquement un système linéaire est celui du pivot de Gauss et surtout pas celui de Cramer; sans compter la manière de discrétiser l'intégrale.

L'étude entreprise ici sur une période qui couvre un siècle met en évidence un phénomène connu, mais peu discuté de l'évolution historique, qui est la spécialisation. Vers 1900, celle-ci était encore bien loin des extrêmes qu'on observe aujourd'hui, mais déjà visible. Les travaux de Bernoulli et d'Euler sur les membranes, ceux de Fourier, puis de Sturm et Liouville, sur la chaleur, ceux de Gauss sur l'électrostatique, étaient des travaux de physique mathématique motivés par la *philosophie naturelle*; ce faisant, ils ont légué à la postérité des problèmes issus de ces recherches, mais formulés d'une manière purement mathématique qui les rend autonomes par rapport à leur origine: les fonctions de Bessel, les séries de Fourier, les valeurs propres, le problème de Dirichlet, les équations intégrales, etc. Ces problèmes peuvent alors mener leur vie propre dans l'Histoire des mathématiques pures, comme le montre très clairement le travail de Fredholm (c'est ce qui a parfois conduit à l'illusion que cette Histoire se passait dans le ciel des idées). Toutefois ces problèmes peuvent conserver au cours du temps un contenu *physique* lié à leur origine, qui pendant longtemps restera en arrière-plan, au point de n'apparaître aux yeux des contemporains que comme un cas d'application tout à fait contingent, voire oublié. Jusqu'au jour où, la Physique redécouvrant le même phénomène dans une autre région de la Nature, les solutions apportées entretemps par les mathématiciens sembleront relever du miracle ou de l'harmonie préétablie.

## 6 La synthèse de Göttingen

Le texte fondateur de Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, commence par exposer le travail de Fredholm (qui venait d'être publié dans *Acta Mathematica*). Cela montre l'importance énorme que lui donnait Hilbert. La motivation subjective de Hilbert (nous l'examinerons plus loin) est toutefois étrangère aux problèmes qui sont à l'origine de ce grand courant que nous suivons depuis Bernoulli, Euler, Fourier. Ce n'est pas parce que la théorie de Fredholm apporte enfin la solution à des vieux problèmes sur la vibration des membranes, la diffusion de la chaleur, ou la cavité électromagnétique que Hilbert lui fait cet honneur. De toute façon la théorie de Fredholm n'apporte rien à la résolution effective de ces problèmes: les équations intégrales n'intéressaient les physiciens Liouville, Gauss, ou Beer que comme outil pour *calculer* les solutions, et nous avons vu que pour *calculer*, la méthode de Fredholm est inutilisable. En réalité, la principale découverte de Fredholm est le théorème suivant (11<sup>e</sup> page de son article)

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation*

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (5.1.)$$

*c'est que  $D_f = 0$  [ $D_f$  est défini par (4.4)]. Si  $n$  est l'ordre du premier mineur de  $D_f$  qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède  $n$  solutions linéairement indépendantes.*



Ces solutions linéairement indépendantes liées aux valeurs  $\lambda_n$  sont la généralisation des fonctions  $V_r$  de Sturm et Liouville. Les problèmes de membrane et de cavité électromagnétique sont le plus souvent présentés sous forme d'équation différentielle (équation des ondes telle que 1.1), mais comme l'avaient compris Sturm et Liouville, un problème différentiel *avec* conditions aux limites est équivalent à une équation intégrale, de sorte que cette *alternative de Fredholm* s'y applique. Un calcul assez simple montre par exemple que les deux problèmes suivants sont exactement équivalents:

— premier problème: trouver une fonction  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  telle que

$$\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = \chi(x) \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 0 ; \quad (5.4.)$$

— deuxième problème: trouver une fonction  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  telle que

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy = \psi(x) . \quad (5.5.)$$

Il suffit pour cela que l'on prenne

$$f(x, y) = \kappa(x, y)q(y) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^1 \kappa(x, y)\chi(y) dy \quad (5.6.)$$

avec

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5.7.)$$

En effet, ce choix judicieux de  $\kappa$  entraîne que l'équation intégrale (5.5) — compte tenu de (5.6) — est exactement équivalente à l'équation différentielle *plus* les deux conditions  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = 0$ .

On voit que l'équation intégrale (5.5) est exactement de la forme (4.2) étudiée par Fredholm (le cas d'un intervalle quelconque  $[a, b]$  au lieu de  $[0, 1]$ , s'y ramène par une transformation élémentaire).

On comprend aisément que la même équivalence entre problème différentiel avec conditions au bord et équation intégrale subsiste en dimensions deux, trois, ... Quoique Fredholm n'ait pas évoqué ce cas dans son article, sa méthode s'appliquerait de la même façon avec des intégrales doubles, triples, ... La discrétisation serait plus compliquée, mais le principe reste le même.

Par exemple le problème de la cavité électromagnétique s'écrit sous sa forme différentielle:

Trouver les modes de vibration du potentiel  $V$  tels que

$$\Delta V + k^2 V = 0 \quad (5.8.)$$

dans le domaine tridimensionnel (la cavité)  $\Omega$ , et tels que  $V$  soit nul sur le bord  $\partial\Omega$ .

En effet, introduisons le noyau résolvant  $P(x, \xi)$  du problème associé de Dirichlet: si  $h_0(\xi)$  est une fonction continue donnée sur  $\partial\Omega$ , la fonction

$$h(x) = \iint_{\partial\Omega} P(x, \xi) h_0(\xi) d\xi \quad (5.9.)$$

sera son prolongement harmonique dans  $\Omega$  ( $d\xi$  étant la mesure-aire sur  $\partial\Omega$ ). Alors, si on pose

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r(x, y)} - \iint_{\partial\Omega} \frac{P(x, \xi)}{r(\xi, y)} d\xi \right], \quad (5.10.)$$

où  $r(x, y)$  est la distance euclidienne de  $x$  à  $y$ , le problème différentiel ci-dessus sera exactement équivalent à l'équation intégrale suivante:

$$V(x) + k^2 \iiint_{\Omega} \kappa(x, y) V(y) = 0 \quad (5.11.)$$

Le noyau  $\kappa(x, y)$  défini en (5.10) devient infini pour  $x = y$ , contrairement à ce qui se produit en dimension 1 avec (5.7). Mais cette singularité est intégrable et par conséquent la théorie de Fredholm peut s'appliquer avec des adaptations mineures. Comme cela avait été rappelé plus haut, le procédé de Fredholm est *sans intérêt* pour le calcul numérique, et de ce point de vue la forme différentielle sera souvent la plus efficace. Mais on voit qu'*en principe*, tous les problèmes classiques (membrane, chaleur, cavité électromagnétique, problème de Dirichlet, etc) peuvent être résolus dans le cadre proposé dans *Grundzüge...* ou *Methoden der mathematischen Physik*, c'est-à-dire sans l'intégrale de Lebesgue ni les espaces  $L_2$ . Il en sera de même pour la Mécanique quantique.

Hilbert s'est exprimé à cette époque sur le sens qu'il entendait donner à la grande synthèse de tous ces problèmes classiques sous l'emblème des équations intégrales: *l'unification de l'algèbre et de l'analyse*. En effet, la similitude entre la méthode de Fredholm pour les équations intégrales et celle de Cramer pour les systèmes de dimension finie doit conduire naturellement à une méthode unique et universelle, que la discrétisation avec passage à la limite met bien en évidence. Voici sa vision [1909]:

*Das genannte Problem der Bestimmung unendlichvieler Unbekannter aus unendlichvielen Gleichungen erscheint auf den ersten Blick wegen seiner Allgemeinheit undankbar und unzugänglich; bei einer Beschäftigung damit droht die Gefahr, daß wir uns in zu schwierige oder vage und weitschichtige Betrachtungsweisen verlieren ohne entsprechenden Gewinn für tiefere Probleme. Aber wenn wir uns durch solche Erwägungen nicht beirren lassen, geht es uns wie Siegfried, vor dem die Feuerzauber von selber zurückweichen und als Lohn winkt uns entgegen der schöne Preis einer methodisch-einheitlichen Gestaltung von Algebra und Analysis.*

4

---

4. **Traduction:** Ce problème de la détermination d'une infinité d'inconnues à partir d'une infinité d'équations, à cause de sa généralité, semble à première vue ingrat et inextricable; en voulant le traiter on s'expose au danger de se perdre dans des considérations trop compliquées, ou trop vagues, ou trop vastes, de sorte que les efforts consentis pour gagner une perception plus profonde des problèmes seraient disproportionnés. Mais si nous ne nous laissons pas détourner par de tels scrupules, il nous arrivera ce qui est arrivé à Siegfried, qui a vu le feu enchanté reculer devant lui et en récompense nous verrons scintiller le merveilleux trésor d'une *formulation unifiée de l'Algèbre et de l'Analyse*.

## 7 Conclusion

La synthèse de tous les problèmes étudiés de manière éparses par les mathématiciens au cours du XIX<sup>e</sup> siècle sous la bannière des équations intégrales n'est en réalité qu'une couverture logique<sup>5</sup> qui cache peut-être le sens réel de ces problèmes, mais ne le supprime pas. Tout comme la forme d'un tumulus celtique est encore reconnaissable sous la végétation, ou les configurations de MSDOS sous les systèmes d'exploitation les plus récents et les plus sophistiqués.

Voici maintenant Schrödinger qui arrive en 1926 avec une logique entièrement étrangère à celle affichée par Hilbert (unification de l'Algèbre et de l'Analyse):

L'analogie entre la mécanique et l'optique signalée par Hamilton ne concerne que l'optique *géométrique*; en effet, d'après cette analogie, à toute *trajectoire* du point représentatif dans l'espace de configuration correspond un *rayon de lumière* et cette dernière notion ne peut être définie sans ambiguïté qu'en optique géométrique. (...) Cette notion, et avec elle toute la mécanique classique, subsistent comme approximations, valables seulement dans le cas où les dimensions de la trajectoire sont grandes par rapport à la longueur d'onde. Au contraire, pour le cas des mouvements "micromécaniques", les équations fondamentales de la mécanique sont tout aussi peu utilisables que l'optique géométrique pour le traitement des problèmes de diffraction; par analogie avec ce qui se passe en optique, les équations fondamentales doivent être remplacées par une seule *équation d'ondes* dans l'espace de configuration. (page XIX dans la réédition Gabay)

Pour aider le lecteur non physicien, il sera peut-être utile ici de rappeler rapidement comment on en est venu à découvrir les phénomènes quantiques. Le fait flagrant était que les atomes de la matière, chauffés (par exemple dans les étoiles), émettent de la lumière uniquement à des fréquences caractéristiques de chaque atome particulier. Ce phénomène est physiquement analogue aux fréquences propres d'une cavité électromagnétique, mais cette analogie n'a pas été perçue aussi facilement. C'est justement Erwin Schrödinger qui en a tiré les conséquences. Dans les atomes les électrons ont un comportement ondulatoire et, s'ils étaient "enfermés dans une cavité", les électrons auraient des fréquences propres comme dans le problème (5.7). Il se trouve que dans les atomes les électrons ne sont pas enfermés dans une cavité qui aurait un bord bien délimité: ils sont confinés par le potentiel coulombien du noyau. Ce que Schrödinger a montré dans ses mémoires, c'est que si on traite le problème d'un électron dans le champ coulombien d'un proton (atome d'hydrogène) en complète analogie avec le problème (5.7), alors on obtient pour valeurs propres exactement les niveaux de Bohr, en parfaite adéquation avec les fréquences d'émission de cet atome.

Très exactement, l'analogie a conduit Schrödinger à l'*équation d'ondes* que voici (pages 2–3 de l'édition Gabay): (...) [l'équation] s'écrit alors dans notre cas:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z^2} - \frac{2m}{K^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0$$

---

5. Il ne faut évidemment pas interpréter cette remarque comme une contestation de l'utilité de cette couverture logique; il s'agit seulement de ne pas ignorer ce qui est en-dessous.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$e$  étant la charge et  $m$  la masse de l'électron.

Ajoutons que  $K$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  et  $E$  l'énergie de l'électron.

Schrödinger indique que

(...) si  $E$  est négatif il n'existe pas de solution, sauf pour une *suite discrète de valeurs* de cette constante. (...) Le spectre discret correspond aux termes de BALMER

Il signale aussi (note au bas de la page 4):

Je suis redevable à HERMANN WEYL des indications nécessaires pour le traitement de l'équation.

D'ailleurs le traité de Courant–Hilbert (qui venait tout juste de paraître chez Julius Springer) est fréquemment cité dans ces mémoires pour les éléments proprement mathématiques (notamment développements en séries de fonctions propres, polynômes d'Hermite, etc).

Après ce survol historique, on arrive enfin à comprendre pourquoi le trousseau de clés d'Erwin Schrödinger ouvre toutes les portes: *en réalité* toutes les serrures de la Nature étaient construites sur le même modèle, mais on ne le savait pas à l'avance. De Bernoulli à Schrödinger, c'est toujours le problème de la membrane, c'est-à-dire celui des ondes, qui reste le paradigme. Non seulement la Mécanique quantique n'en est pas sortie (du moins pas dans sa première mouture, appelée parfois, pour la distinguer, Mécanique ondulatoire), mais elle a même renforcé l'uniformité: avant, on ouvrait les serrures de la mécanique avec d'autres clés que celles de l'électromagnétisme; vers 1925, on a découvert que la même clé ouvrait les deux serrures.

## BIBLIOGRAPHIE

### André-Marie Ampère

1823 *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience.*

Réédition Jacques Gabay, Paris, 1990

### A. Beer

1856 *Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction.* Poggendorffer Annalen der Physik vol **98**, pages 137–142.

### Richard Courant, David Hilbert

1924 *Methoden der mathematischen Physik.* Julius Springer, Berlin

### Jean Dieudonné

1981 *History of Functional Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

### Jean-Luc Dorier

1996 *Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions.* Revue d'histoire des mathématiques, vol **2**, pages 265–307.

### Joseph Fourier

1822 *Théorie analytique de la chaleur.*  
(réédition Jacques Gabay, Paris, 1988).

### Ivar Fredholm

- 1903 *Sur une classe d'équations fonctionnelles.*  
Acta Mathematica, vol **27**, pages 365–390.

**George Green**

- 1828 *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.*  
In *Mathematical Papers of the late George Green*, ed. by N. M. Ferrers, Macmillan and Co, London, 1871.

**Ernst Hellinger**

- 1935 *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme.*  
In *Hilberts Gesammelten Abhandlungen*. Julius Springer, Berlin.

**David Hilbert**

- 1909 *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen.*  
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Band **27**, S 59–74 oder in *Hilberts gesammelten Abhandlungen*, Band III, S 56–72.
- 1912 *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Teubner, Leipzig

**Alexandre Koyre**

- 1961 *La révolution astronomique.* Éd. Hermann, Paris.

**Joseph Liouville**

- 1836 *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.*  
Journal de Liouville, vol **1**, pages 253–265.
- 1837 *Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.*  
Journal de Liouville, vol **2**, pages 16–35.

**James Clerk Maxwell**

- 1873 *Traité d'électricité et de magnétisme.*  
Réédition Jacques Gabay, Paris, 1989

**Carl Gottfried Neumann**

- 1877 *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential.* Teubner, Leipzig

**Johann von Neumann**

- 1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*  
Julius Springer, Berlin

**Erwin Schrödinger**

- 1926 *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire.*  
Traduits en français par Al. Proca, Félix Alcan, Paris, 1933 et réédition Jacques Gabay, Paris, 1988.

**Charles-François Sturm**

- 1836 *Mémoire sur les équations différentielles du second ordre.* Journal de Liouville, vol **1**, pages 106–168

**Adolf P. Youschkevitch**

- 1976 *The concept of a function up to the middle of 19<sup>th</sup> century.* Archives for history of Exact Sciences vol. **19**, pages 37–85