A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x - q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)$$

Indication (par D. Dumont et P. Renfer) : Les séries intervenant dans l'identité à démontrer sont liées à celle-ci :

$$R(x) = x + 2\frac{x^2}{2!} + 3^2\frac{x^3}{3!} + \cdots + n^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

dont on sait classiquement qu'elle est solution de l'équation fonctionnelle

$$R(x) = x.exp(R(x)).$$

Ce résultat peut se démontrer par des méthodes d'Analyse classique (théorème de Rouché, ou formule d'inversion de Lagrange), ou par des méthodes combinatoires plus modernes sur les structures arborescentes (composé partitionnel, vertébrés, etc.).
A partir de cette équation fonctionnelle, on peut déduire d'autres identités et parvenir ainsi à l'identité proposée au départ. Un problème qui reste à examiner est de donner une preuve combinatoire directe du résultat.

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^6} + \frac{5x^5}{1-x^{10}} + \cdots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4} + \frac{2^3x^4}{1-x^8} + \frac{3^3x^6}{1-x^{12}} + \frac{4^3x^8}{1-x^{16}} + \cdots$$

PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l'équation

$$x^{x^8} = 2$$

a) pour x réel > 0 ;
b) pour x complexe.

PROBLÈME 61

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit $P(N)$ le produit des chiffres de l'entier naturel N écrit dans le système décimal.
Exemples.— $P(5) = 5$, $P(12) = 2$, $P(275) = 70$, $P(306) = 0$.
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par la récurrence

$$u_{n+1} = u_n + P(u_n),$$

où u_0 est un entier naturel choisi arbitrairement.
1°) Montrer que, quel que soit le choix de u_0, la suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang r.
2°) Que peut-on dire sur l'estimation de ce rang r ?

PROBLÈME 62

Énoncé (proposé par J. Borowczyk) :

Etant donné un triangle (ABC), on désigne par (C) le cercle qui lui est circonscrit et par O son centre. Le cercle inscrit a pour centre I et pour rayon r. Les bissectrices intérieures (AI), (BI), (CI) recoupent (C) respectivement en A', B',C'.
On désigne par F_A, F_B, F_C les symétriques des points A', B',C' par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
On suppose que le triangle (ABC) n'est pas équilatéral. Montrez que :
a) les points F_A, F_B, F_C sont distincts; on désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle $(F_AF_BF_C)$.
b) le cercle (Γ) a pour rayon OI.
c) le cercle (Γ) passe par l'orthocentre H du triangle (ABC) et recoupe ses hauteurs en des points situés à distance $2r$ des sommets.
d) la droite (OH) passe par le centre de (Γ). Caractériser le point diamétralement opposé à H.