POURQUOI DÉMONTRER ?
UN EXEMPLE ALLEMAND

par Richard CABASSUT
Lycée international, Strasbourg

Il est intéressant d'observer les différences dans le rôle joué par la démonstration d'un pays à l'autre. Nous allons ici évoquer quelques exemples concernant un gymnasium allemand à propos des démonstrations sur les calculs d'aires et volumes.

1. Aires et volumes des solides sans calcul intégral

Dans le programme

En étudiant les programmes du gymnasium[1] en Bade-Wurtemberg on observe que dès la **classe 5** (10-11 ans) sont mentionnés les premiers solides, parallélépipède rectangle, cube, sphère, cylindre et pyramide, pour lesquels on découvre les propriétés. Parmi ces propriétés, celles relatives aux longueurs, aux aires et aux volumes ne sont évoquées explicitement que pour le rectangle et le parallélépipède rectangle. En classe 6, on prend connaissance de π à propos du cercle et de l'arc de cercle. Il faut attendre la classe 10 pour évoquer explicitement les volumes et aires de surfaces de solides.

En **classe 10** (15-16 ans) le programme précise

« Calcul sur le cercle, présentation et calculs sur les solides :

Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul. Ils acquièrent les formules de surfaces, en partie également de manière autonome, et les appliquent sans faute. Avec la représentation des figures et des solides les élèves exercent et approfondissent leur capacité de représentation spatiale. »

Le programme énonce : « Volume du prisme, du cylindre à base circulaire, de la pyramide, du cône et de la sphère ». En commentaire de cette partie, il est précisé : « L'introduction de la formule est suffisante au travers des dessins de prise en considérations illustrées de la plausibilité Adapté à des acquisitions autonomes à partir d'extraits du livre de classe. Bonaventura Cavalieri (1598-1647). »

Dans le livre de classe[2]

Dans le plan – cercle et disque –

On démontre que le rapport entre l'aire d'un disque est le carré d'un rayon est constant.[3]

---

[1] On pourra consulter dans le numéro 91 de l'Ouvert l'article *Mathématiques dans un lycée allemand* qui rappelle sommairement quelques caractéristiques de l'enseignement mathématique en Allemagne.

[2] Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Baden-Würtemberg, Klasse 10, Lambacher Schweizer, Ernst Klett Verlag.

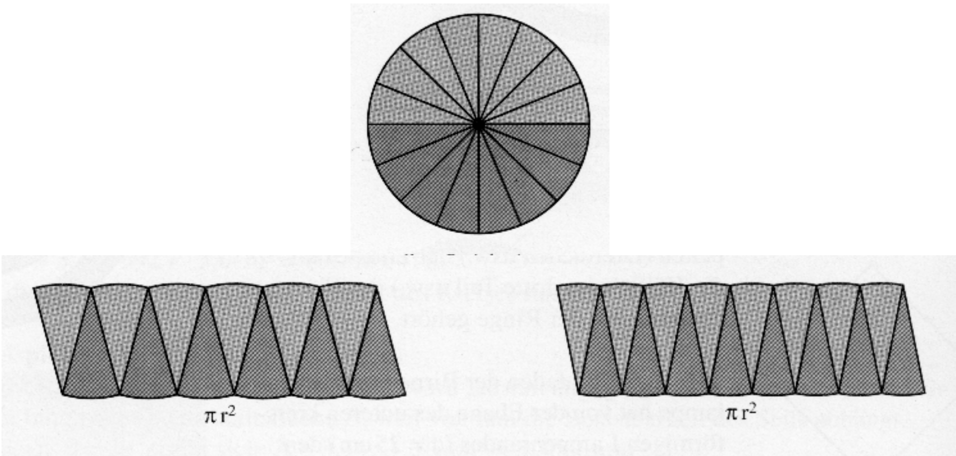
[3] Page 74.

Pour cela on considère deux cercles semblables dans le rapport de leurs rayons. On inscrit dans chacun des cercles un polygone régulier à *n* côtés. Ces deux polygones réguliers sont également semblables dans le rapport des rayons, leurs surfaces sont alors semblables et le rapport de leurs aires est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants. « Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques » que le rapport des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.

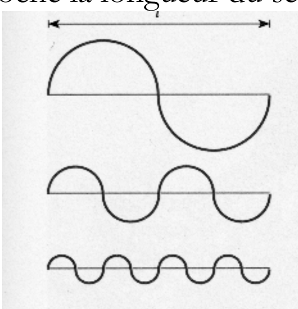
Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède,...)[4]

On démontre ensuite la formule de l'aire du disque[5]. On décompose le disque en 2^n secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci-jointe.

« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon » Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment démontré que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut π fois le diamètre.



On signale cependant par la figure ci-dessous extraite du manuel qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment



[4] Pages 75, 83, 84.

[5] Pages 78 et 79.

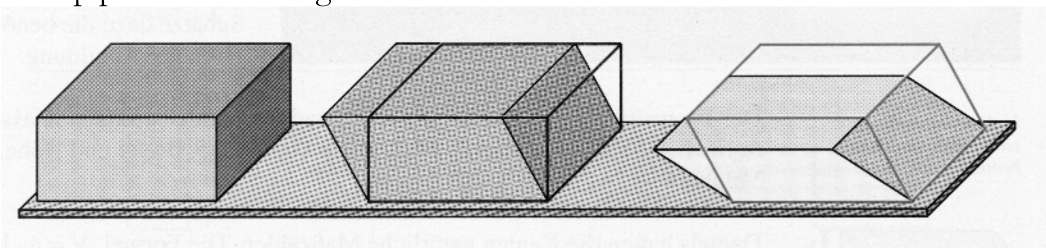
Dans l'espace – volume de solides –

On veut montrer que pour un prisme d'aire de base G et de hauteur h le volume $V=G\times h$.

Parallélépipède rectangle

Les formules de l'aire du rectangle ou du volume du parallélépipède rectangle sont vues en classe 5 (10-11ans) à partir de quadrillage ou de pavage, en admettant la généralisation. Pour le parallélépipède rectangle, la formule de classe 5 donne le volume V en fonction de l'aire de la base G et de la hauteur h correspondante : $V=G\times h$.

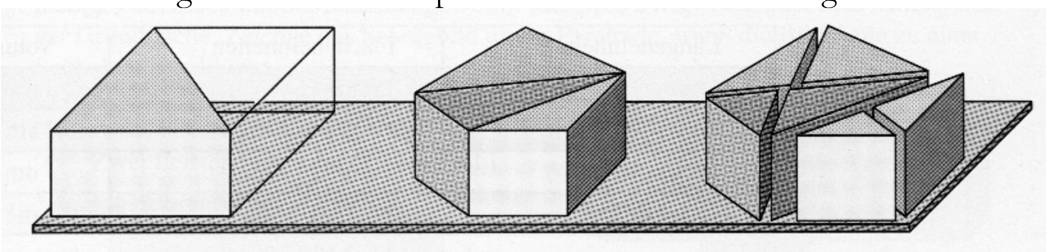
En classe 10, pour la formule du parallélépipède non rectangle, un dessin illustre la technique de l'équidécomposabilité[6] sur un exemple qui ramène en deux étapes à un pavé droit de même volume. La formule précédente se généralise donc au parallélépipède non rectangle.



Prisme

Pour un prisme droit ayant pour base un triangle rectangle, on interprète ce prisme comme une moitié d'un parallélépipède rectangle.

On admet la généralisation à un prisme non droit à base triangulaire.



Pour un prisme droit à base polygonale on décompose sa base polygone en triangles. Chaque triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles, comme suggéré par la figure. Un prisme droit à base polygonale et de hauteur h se décompose donc en prismes droits à base triangle rectangle et de même hauteur h. *« Ces bases (triangle rectangle) ont pour aires $G_1, G_2, \ldots, G_n$ alors le volume du prisme originel est : $V= G_1\times h + G_2\times h +\ldots+ G_n\times h = (G_1+ G_2 +\ldots+ G_n)\times h = G\times h$ et ceci est valable également pour les prismes inclinés. »*

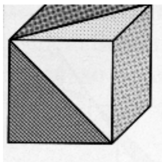
Pyramide[7]

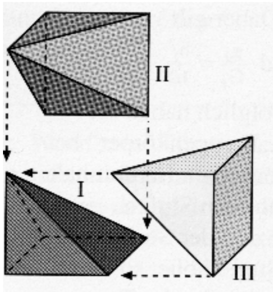
[6] Deux polyèdres sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polyèdres isométriques. Ils ont alors le même volume. Dans le plan, deux polygones sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polygones isométriques. Ils ont alors la même aire

[7] Page 105 à 107.

Un cas particulier

Un cas des plus simples est celui de la pyramide incluse dans un cube. La figure ci-contre montre que le cube se décompose en trois pyramides. Ces pyramides sont isométriques : elles ont la même aire de base G et la même hauteur h si le cube est d'aire de base G et de hauteur h. Chaque pyramide a le volume $V = \frac{1}{3}\ G\times h$.



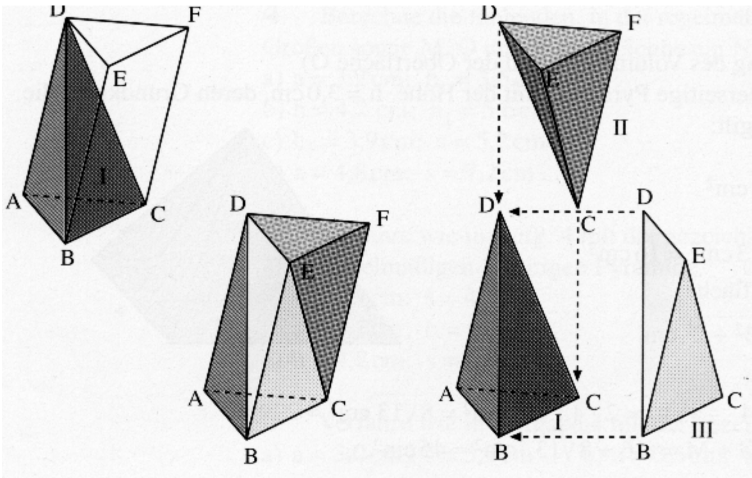


Cas général

Dans la suite on essaie, avec d'autres pyramides, de procéder de manière analogue.

Pour déterminer le volume d'une pyramide de base polygonale, on décompose la base en triangles et on est ramené ainsi au calcul du volume d'une pyramide à base triangulaire ou tétraèdre.

Tétraèdre

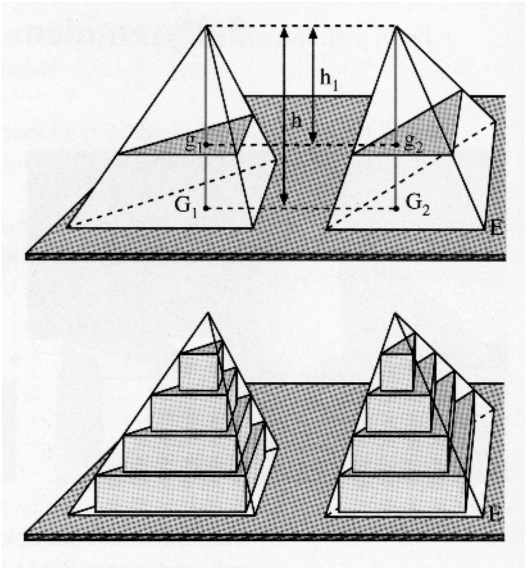


On détermine le volume d'un tétraèdre I de hauteur h et d'aire de base G. Par translation de la base le long d'un côté on génère un prisme, que l'on décompose en trois tétraèdres I, II et III comme suggéré par la figure. Ces tétraèdres ont même aire de base et même hauteur d'après le raisonnement suivant.

I et II ont leurs bases ABC et DEF isométriques et de hauteurs issues respectivement de D et C de même longueur.

II et III ont leurs bases respectives CEF et BCE isométriques et leurs hauteurs issues de D de même longueur.

Des tétraèdres de même aire de base et même hauteur ont-ils même volume ?



Dans la figure ci-dessus, on coupe les deux tétraèdres d'aires de base G_1 et et G_2 égales par un plan parallèle au plan E contenant leurs bases et on obtient des surfaces d'aires respectives g_1 et g_2, intersection. du plan E et des tétraèdres. Les surfaces d'intersection sont semblables aux surfaces de base des tétraèdres respectifs . Ainsi :

$$\frac{g_1}{G_1} = \frac{h_1^2}{h^2} \text{ et } \frac{g_2}{G_2} = \frac{h_1^2}{h^2}.$$

On déduit : $g_1=g_2$. Puis on considère le « solides en escalier » dont les marches ont même hauteur et par conséquent même volume (puisque même aire de base). Ceci est valable pour tout nombre de marches.

« On augmente le nombre de marches et on diminue la hauteur des marches de telle manière que le volume du « solide en escalier » diffère, aussi peu que souhaité, du volume du tétraèdre. Ainsi le volume des deux tétraèdres ne peut pas être différent. »

On vient de démontrer que les volumes des deux tétraèdres de même aire de base et de même hauteur sont égaux. En conséquence les tétraèdres I, II et III ont même volume, égal au tiers du volume du prisme.

Théorème : Une pyramide d'aire de base G et de hauteur h a pour volume V avec

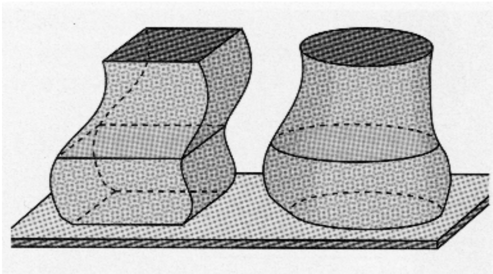
$$V = \frac{1}{3} G\times h .$$

On a démontré que si deux tétraèdres ont la même hauteur, des bases dans le même plan et des sections, par des plans parallèles à leurs bases, de même aire, alors ces tétraèdres ont même volume. Cette propriété se généralise et donne le théorème suivant :

Théorème de Cavalieri [8]:

Si les surfaces d'intersection de deux solides avec un plan E ont des aires égales ainsi qu'avec tout plan parallèle au plan E, alors les solides ont même volume.

[8] Page 107.



Avec le théorème de Cavalieri on peut parfois pour des solides de formes différentes formes prouver qu'ils ont même volume.

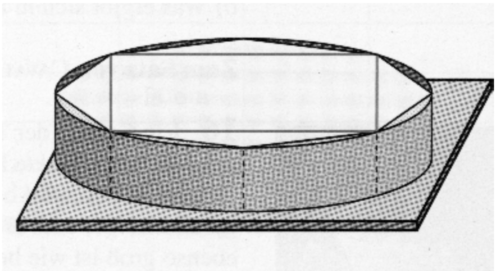
Cylindre [9]

On inscrit dans un cylindre droit un prisme droit ayant pour base un polygone régulier à n côtés comme suggéré par la figure.

« Par augmentation du nombre n de côtés du polygone, le volume $V_n=G_n \times h$ du prisme s'approche aussi précisément que souhaité du volume du cylindre. En effet l'aire G_n du polygone s'approche aussi près que souhaité de l'aire $G=\pi r^2$. »

(Cette approximation du cercle par un polygone régulier inscrit a été étudiée dans une précédente leçon[10]). Ainsi le volume du cylindre droit vaut : $V=\pi r^2 h$.

Pour un cylindre incliné, *le théorème de Cavalieri* permet de montrer l'égalité avec le volume d'un cylindre droit de même hauteur et même aire de base.

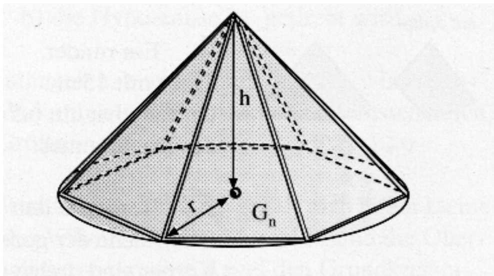


Cône

La méthode est analogue à celle du cylindre. Dans un cône, on considère la pyramide de même sommet que le cône mais dont la base est un polygone régulier d'aire G_n inscrit dans la base d'aire G du cône (comme pour la base du cylindre). *En augmentant n, l'aire de base G_n de la pyramide approche aussi près que souhaité l'aire $G=\pi r^2$ de la base du cône. Or les deux solides ont même hauteur et le volume de la pyramide vaut $V=\frac{1}{3} G_n h$, il s'ensuit que le volume du cône vaut $V=\frac{1}{3}G h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.*

[9] Page 110.

[10] On rend compte de cette démonstration dans le numéro 91 de l'Ouvert, page 18, dans l'article *Mathématiques dans un lycée allemand.*



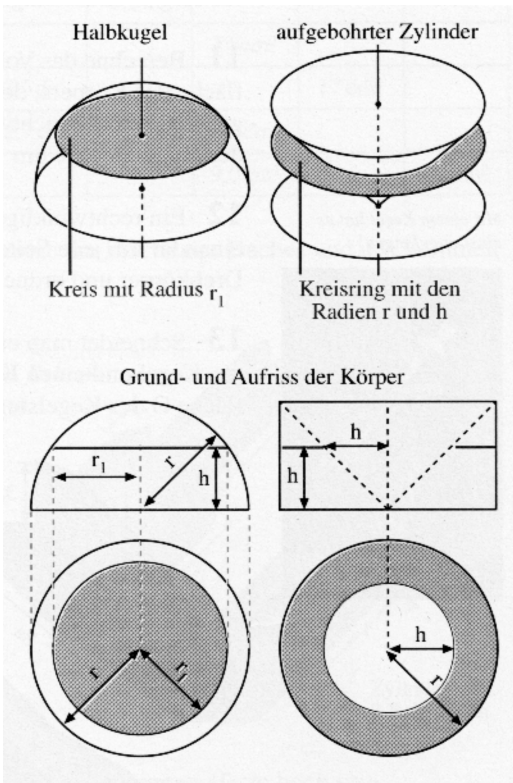
Sphère

Pour déterminer le volume V d'une sphère de rayon r, on utilise le théorème de Cavalieri. On considère une demi-sphère comme suggéré par la figure ci-jointe. La demi-sphère, de hauteur h, est coupée par un plan en un cercle de rayon r_1 et d'aire A. Alors $r_1^2=r^2-h^2$ et on obtient : $A=\pi\ r_1^2=\pi r^2-\pi h^2$. A est également l'aire d'un anneau circulaire de cercle extérieur de rayon r et de cercle intérieur h. Aussi cherche-t-on un solide de hauteur h et de surface de section un tel anneau circulaire. Ce solide s'obtient quand on enlève d'un cylindre de rayon r et de hauteur r un cône de même rayon et de même hauteur.

Si on coupe la demi-sphère et ce solide par un plan parallèle à leurs bases (situées sur un même plan), à une hauteur h, les surfaces de sections ont même aire. D'après le *théorème de Cavalieri*, la demi-sphère et le solide précédent ont même volume :

$$\frac{1}{2}V = \pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Le volume d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$.



2. Aires et volumes des solides avec le calcul intégral

Dans le programme

Le calcul intégral est introduit dans le Bade-Wurtemberg dans un programme qui couvre les deux dernières années de scolarité avant le baccalauréat, à savoir les classes 12 et 13. On distingue deux programmes : un programme de mathématique de base (Grundkurs) et un programme de mathématiques approfondies (Leistungskurs).

Mathématiques de base

« Chapitre : Introduction au calcul intégral. Le concept de contenu motivé intuitivement du 1er cycle du secondaire va être précisé. Les élèves s'aperçoivent que la relation entre le calcul intégral et le calcul différentiel permet dans bien des cas le calcul simple d'intégrales. Ils peuvent maintenant calculer également l'aire d'une surface délimitée par des courbes » … « Calcul d'aires et de volumes de solides ayant un axe de révolution. La rotation autour de l'axe (Ox) est suffisante. Interdisciplinarité avec la Physique, cours de base, chapitre 1 : énergie des champs électriques) »

« Chapitre : Approfondissement du calcul différentiel et intégral dans le cas de fonctions particulières ». Pour les fonctions rationnelles et exponentielle : calculs d'aires et de volumes.

Mathématiques approfondies

On retrouve les mêmes formulations précédentes du programme de mathématiques de base. S'y ajoute « le cas échéant le calcul de valeurs approchées à l'aide d'un calculateur »

Dans le livre de classe

Nous proposons des extraits du livre de mathématiques approfondies[11], plus complet que le livre de mathématiques de base[12].

Interprétation comme limite d'une aire délimitée par une fonction bord [13]:

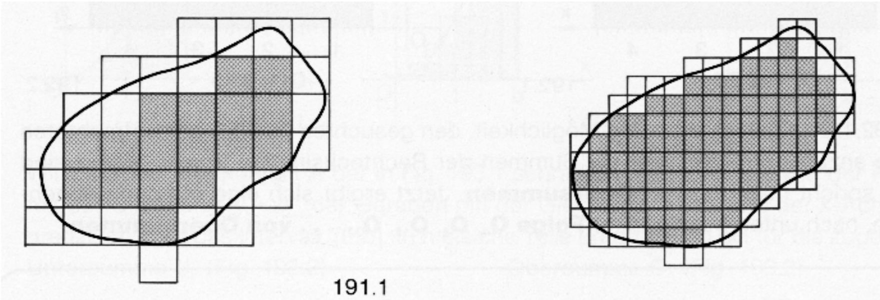
On expose, en s'appuyant sur une analogie avec la méthode de quadrillage (pour l'encadrement des aires), la méthode des rectangles qui définit une suite (U_n) de sommes d'aires de rectangle inférieures et une suite (O_n) de sommes d'aires de rectangle supérieures à l'aire déterminée par la fonction bord f, aire qui s'obtient comme limite commune de ces deux suites. Cet exposé, plus détaillé dans le livre de mathématiques approfondies, s'appuie essentiellement sur les figures qui illustrent des cas particuliers.

---

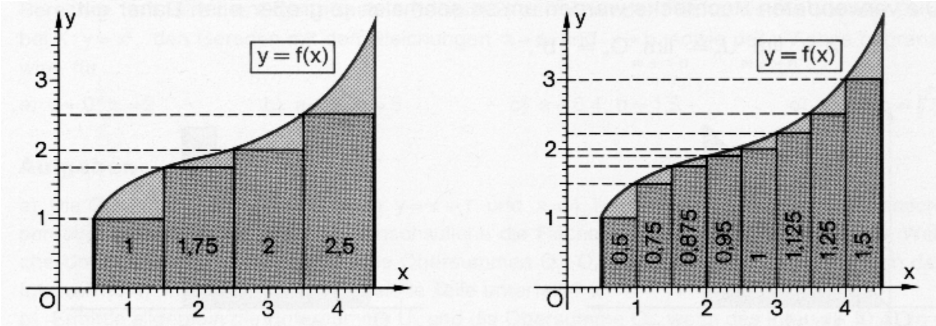
[11] Lambacher Schweizer, Analysis, Leistungskurs, Klett Verlag, 1990.

[12] Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkurs,, Klett Verlag, 1990.

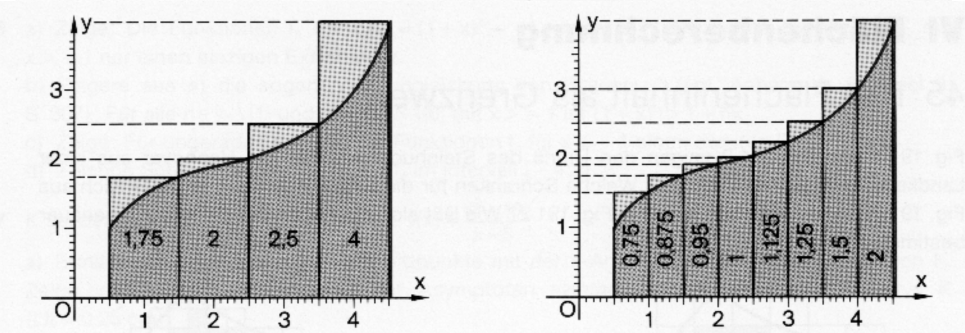
[13] Pages191 et 192.



191.1



$U_4 = 7,25$ 191.3 $U_8 = 7,95$ 191.4



$O_4 = 10,25$ 192.1 $O_8 = 9,45$ 192.2

Des études plus rigoureuses des suites majorant et minorant sont effectuées sur des exemples en utilisant le calcul des limites.

Fonction aire déterminée par la fonction bord f :[14]

« De manière générale soit une fonction f définie sur l'intervalle [a ; b] telle que $f(x) \geq 0$ sur [a ; b]. La surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ; x] a une aire A(x) Alors la fonction $x \mapsto A(x)$ est appelée **fonction aire déterminée par la fonction bord f** sur [a ; b]. » Si $c \in [a ; b]$, on note $A_c(x)$ l'aire de la surface précédente limitée à l'intervalle [c ; b].

Théorème : Si A_a est la fonction aire de la fonction bord f continue sur [a ; b], alors la fonction A_a est différentiable et on a : $A_a'(x) = f(x)$.

On observe la validité de ce théorème sur deux exemples où f est une fonction affine. Puis « on étudie maintenant, si cela est généralisable. On suppose que la fonction bord f est continue sur [a ;b]. Alors le taux différentiel de A_a en x est $\frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h}$. Dans ce cas $A_a(x+h) - A_a(x)$ pour $h > 0$ s'interprète comme l'aire

[14] Page 195.

de la surface de la figure comprise coloré en rouge[15] et de largeur h. Si M est le maximum et m le minimum de la fonction f sur [x ; x+h], alors on a :

$$m\times h \leq A_a(x+h) - A_a(x) \leq M\times h \quad \text{ou encore} \quad m \leq \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq M .$$

Cet encadrement est encore valable pour h < 0. (Justification ?) Pour h tend vers 0, comme f est continue, aussi bien m que M tendent également vers f(x). Ainsi la conjecture A'(x)=f(x) est vérifiée. »

Puis le livre définit une intégrale et établit le théorème affirmant que deux primitives sur un intervalle d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Calcul d'aires [16]

Puis est énoncé le

Théorème fondamental de l'aire : Si F est une primitive sur [a ; b] de la fonction continue f avec $f(x) \geq 0$, alors l'aire $A_a(b)$ de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ; b] vaut : $A_a(b)=F(b) - F(a)$.

Ce théorème est justifié par le raisonnement suivant .

« Comme pour tous les x de [a ; b] la fonction A_a est différentiable (et donc également continue) et comme $\lim\limits_{x\to a} A_a(x) = 0$, alors A_a est la primitive de f qui s'annule en a. Si on a trouvé une primitive F, alors $A_a(x) = F(x)+c$, alors $F(a)+c = 0$ et $c = - F(a)$.

Ainsi $A_a(x) = F(x) - F(a)$.

Intégrales

Dans la suite du cours[17] est donnée une définition plus formelle et plus générale des suites (U_n) et (O_n) à partir d'une subdivision $a = x_0 < x_1 <...< x_n = b$ quelconque en n sous-intervalles d'un intervalle [a ; b] pour une fonction continue f.

« $U_n=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})$ et $O_n=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(x_n - x_{n-1})$ où m_i minimum et M_i maximum de f sur $[x_i ; x_{i+1}]$. »

La convergence des suites vers une limite commune, indépendante de ma subdivision choisie, est admise. Cette limite commune est définie comme l'**intégrale** de **a** à **b** de **f.**

On démontre alors l'inégalité de la moyenne.

On définit ensuite la fonction $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ dont on montre la dérivabilité sur l'intervalle J lorsque f est continue et a élément de J avec $I_a'(x)=f(x)$ sur J.

« $\dfrac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \dfrac{1}{h}\left[\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right] = \dfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

Comme f est continue, entre x et x+h f admet un minimum m et un maximum M. d'après l'inégalité de la moyenne :

pour h > 0 , $m\times h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M\times h$ et

pour h < 0 , $m\times(- h) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M\times(-h)$ soit dans les deux cas,

[15] Ce qui correspond sur notre illustration à la portion de surface de bord f sur [x ;x+h].

[16] Page 202.

[17] Page 209.

$$m \leq \frac{1}{h} \times \int_{x}^{x+h} f(t)dt \ \leq M$$

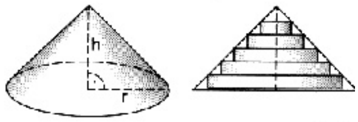
Quand h tend vers 0, comme f est continue, alors m aussi bien que M convergent vers f(x). Donc I_a est différentiable et $I_a'(x)=f(x)$ »

Ce théorème montre que « pour la fonction donnée f, la fonction intégrale I_a est une primitive de f. Si F est une primitive connue de f, alors $I_a(x)=F(x)+c$. Comme $I_a(a)=0$, $c=-F(a)$ et ainsi $I_a(x)=F(x)-F(a)$. En particulier $I_a(b)=F(b)-F(a)$. »

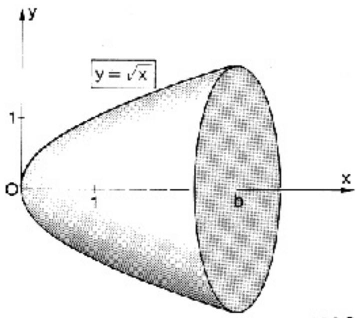
On a donc démontré le *théorème fondamental du calcul intégral et différentiel :*[18]

« Si f est continue sur un intervalle J et si F est une primitive de f, alors pour tout a et tout b de J, on a : $\int_{a}^{b} f(t)dt \ = F(b) - F(a)$ ».

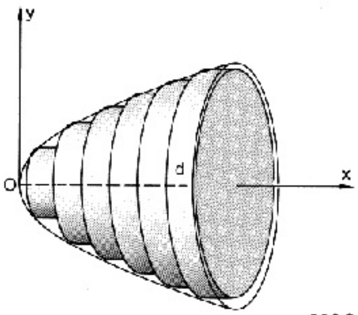
Application au calcul de volumes :[19]



226.



226.2



226.3

On commence en exercice à décomposer le volume d'un cône par une suite somme des volumes de tranches cylindriques comme suggéré par la figure 226 et à calculer la limite de cette suite.

On considère le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction f sur [a,b] représentée dans (Oxy) autour de l'axe (Ox). On s'appuie sur la

[18] Page 219.
[19] Page 226 à 227.

figure 226.2 représentant le cas particulier $f(x)=\sqrt{x}$. « Dans ce solide on inscrit ou on circonscrit n tranches cylindriques de même épaisseur (figure 226.3) ; on obtient une somme inférieure U ou O supérieure à V. Une section orthogonale à l'axe (Ox) produit une surface de section d'aire q(x) telle que :…

$U=q(0)\,d + q(d)\,d + q(2d)\,d + \ldots + q((n-1)d)\,d$ et

$U= q(d)\,d + q(2d)\,d + q(3d)\,d + \ldots + q(n\,d)\,d$.

Le volume V recherché se trouve être la limite des suites de sommes inférieures U et sommes supérieures O quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction section $x \mapsto q(x)$. »

Par rotation $q(x)=\pi(f(x))^2$. On obtient ainsi le

Théorème : Si f est une fonction continue sur [a ; b], alors le solide déterminé par la rotation de la courbe de f sur [a ; b] autour de l'axe (Ox) admet pour volume :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

On généralise le théorème précédent

Théorème : Si pour solide les aires de sections orthogonales à l'axe (Ox) forment une fonction continue q sur [a ; b], le volume de ce solide est : $V = \int_a^b q(x)dx$.

Remarque : Ce théorème confirme **le principe de Cavalieri ;** des solides ont même volume si les sections à même distance d'un plan déterminé ont même aire .

3. Pourquoi démontrer ?

Nous allons engager le débat sur le thème « pourquoi démontrer » au vu des exemples précédents et des pratiques françaises suggérées dans les projets de nouveaux programmes de seconde pour la rentrée 2000-2001 et première scientifique pour la rentrée 2001-2002. Rappelons un passage[20] intéressant concernant la démonstration en série scientifique :

« Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration tout à fait académique ; en analyse par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'étude, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées (au sens *bourbakiste* du terme) : la nature et le niveau d'étude des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des preuves conçues et exposées à l'aide de graphiques (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). »

Examinons quelques rôles de la démonstration sans prétendre être exhaustif.

Démontrer pour valider

Un des premiers rôles de la démonstration en mathématiques est d'établir la vérité d'une proposition par l'application de raisonnements utilisant la logique mathématique

[20] Projet de programme de série scientifique S, paragraphe *généralités à propos d'une formation scientifique en première et terminale S.*

traditionnelle (avec son principe de non contradiction et ses valeurs exclusives de vérité : vrai ou faux) et les théorèmes et axiomes de la théorie dans laquelle on travaille.

Une des qualités que doit avoir une démonstration pour valider est la **rigueur** : rigueur dans les pas de raisonnements déductifs employés et rigueur dans les conditions d'applications des théorèmes, axiomes et définitions de la théorie. Une démonstration qui manque de rigueur reste une démonstration, mais avec des défauts qui peuvent éventuellement la rendre inexacte.

Observons qu'en situation d'enseignement les axiomes et les théorèmes de la théorie ne sont pas toujours connus clairement. Comment est défini l'espace et ses objets dans l'enseignement secondaire ? Quels sont les théorèmes de la géométrie de l'espace supposés connus des élèves ? Les réponses à ces deux questions ne sont pas claires dans l'enseignement secondaire français.

Remarquons ensuite qu'en cours de mathématiques la démonstration n'est pas le seul mode de validation d'un énoncé. L'**argument d'autorité** est bien souvent utilisé comme mode de validation. En France la plupart des théorèmes de cours sont admis. L'autorité du professeur donne à un énoncé le statut de théorème et le déclare vrai. S'il vient à l'idée d'un élève de vouloir mettre en cause ce contrat didactique il peut se voir répliquer : « ce n'est pas au programme » ou « vous verrez plus tard ». L'argument d'autorité peut intervenir de manière plus subtile. Ainsi dans les exemples précédents, pour démontrer les formules de volumes de solide, il est utilisé le principe de Cavalieri, qui est admis. C'est l'autorité du livre qui invoque le théorème de Cavalieri, jusque là inconnu des élèves, et qui l'admet.

Mais la démonstration n'a pas pour seul rôle de valider, témoin les nouvelles démonstrations de théorèmes déjà démontrés. Le rôle de ces nouvelles démonstrations n'est pas de démontrer la vérité d'un résultat puisque celui-ci est déjà avéré vrai. Nous allons donc examiner maintenant quelques autres rôles de la démonstration au travers des exemples précédents.

Démontrer pour expliquer

Dans les précédents exemples, différentes méthodes sont présentées : en classe 10 équidécomposabilité pour le parallélépipède, la pyramide, et le tétraèdre ; méthode des indivisibles pour le tétraèdre ; principe de Cavalieri pour le tétraèdre et la sphère ; en classe 13 méthode des rectangles .

Certaines de ces méthodes, notamment en classe 10, ne sont pas reprises en exercices. Elles peuvent cependant être réinvesties dans d'autres démonstration du cours. Elles ne sont pas exigibles. Leur but est d'éclairer sur la démarche de la démonstration.

Démontrer pour apprendre

Le programme de classe 10 indique clairement qu'on met en place une propédeutique à l'enseignement des limites. La **rigueur formelle** n'est pas encore mise en place et les justifications ne sont pas explicitées : *« Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques » que le rapports des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.* ou bien *« On choisit un nombre* *de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon »* . Cependant la démarche des limites est présentée. Parfois on signale les problématiques sous-jacentes, comme dans le cas où on illustre qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.

On retrouve cette démarche avec la méthode des indivisibles, utilisée en classe 10 pour la pyramide. Elle prépare à la méthode des rectangles du calcul intégral vue en classe 13. La méthode des rectangles est présentée au cours de démonstrations et est réutilisée au cours d'exercices.

De même le principe de Cavalieri vu en classe 10 pour le tétraèdre et la sphère est démontré rigoureusement en classe 13 avec le calcul intégral.

En classe 13, les démonstrations sur les aires et les volumes sont plus formelles, et plus abstraites, en utilisant notamment les concepts du calcul différentiel (limite, continuité, suite). Elle continue l'apprentissage au formalisme et à l'abstraction.

Démonstration et communication

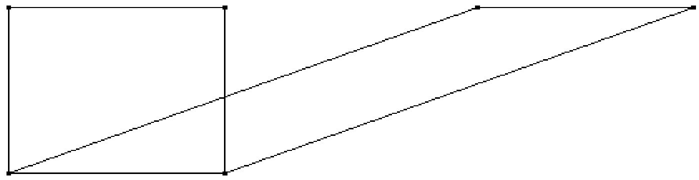
Beaucoup des démonstrations précédentes peuvent être réalisées avec une prise de note réduite, soit en s'appuyant sur le texte du livre à commenter, soit par la pratique d'un débat oral. La pratique de démonstration où la production d'écrit est minorée et où la forme dialoguée est mise en valeur permet de travailler plus facilement, grâce au débat en direct, sur les précisions de niveau de rigueur et de niveau de problématique. Le travail, sur un texte écrit que l'on n'a pas produit, est également un entraînement à la compréhension écrite et à la pratique des textes mathématiques dont les qualités abstraites et formelles sont spécifiques.

Démonstration et formation à la rigueur

La rigueur d'une démonstration ne réside pas seulement dans l'explicitation complète de toutes les étapes de la démonstration. Elle consiste dans la précision du niveau d'explicitation ou de problématique d'un pas de démonstration . Parfois on préfère un niveau bas pour ne pas « semer le trouble » chez l'élève pour qu'il puisse se concentrer sur les grandes idées de la démonstration. Le niveau zéro de l'explicitation étant la démonstration admise. L'élève se concentre sur le seul énoncé du théorème. A trop utiliser cette technique, qui au départ veut défendre la rigueur en ne démontrant pas ce qu'on ne peut pas rigoureusement démontrer, on risque d'induire des attitudes ne percevant pas la nécessité de démontrer pour valider.

Il convient donc de préciser le niveau d'explicitation de rigueur en précisant clairement ce qui est admis, ce à quoi on se limite, ce dont on admet la généralisation.

Il faut également préciser le niveau de problématique d'une technique de démonstration. Par exemple dans la démonstration sur le volume du parallépipède utilisant la méthode d'équidécomposabilité, on ne signale pas à l'élève que l'équi-décomposabilité n'est pas aussi simple que le dessin le laisse paraître. Le dessin ci-dessous montre un parallélogramme dont une base et une hauteur ont même longueur que celles du rectangle; mais ce rectangle et ce parallélogramme ne sont pas équidécomposables en une seule étape comme suggéré par le dessin extrait du manuel.



De même [21]à propos des indivisibles, on peut évoquer les paradoxes étudiés par Torricelli. Torricelli propose un exemple de découpage de la sphère en surfaces indivisibles conduisant à des paradoxes[22]. De même à propos des volumes de solides de révolution on peut évoquer des partitions de solides en surfaces qui conduisent à de fausses intégrales [23]. Il paraît souhaitable d'indiquer que les techniques sont plus complexes qu'il n'y paraît pour inciter les élèves à la vigilance, notamment en leur livrant quelques paradoxes quand ils sont en état de les recevoir.

Enfin dans l'exemple précédent de la démonstration du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, l'affirmation que le maximum et le minimum sur une subdivision [x, x+h] converge vers f(x) lorsque h tend vers 0 ne paraît pas aussi simple à démontrer que suggéré.

Autres formes de validation

D'autres formes de validations[24] ne respectent pas les critères de la démonstration mathématiques :

- les validations utilisant l'argument d'autorité : on a vu précédemment qu'en cours de mathématiques cet argument peut être utilisé par le professeur ou par le livre ;
- les validations utilisant l'argument de plausibilité : on valide dans un contexte particulier (contexte de la figure, vérifier les premiers cas, ...) et on généralise par plausibilité ; ce type d'argument est fréquemment utilisé dans l'introduction à l'enseignement des limites ;
- les validations préformelles utilisant une argumentation pragmatique : les arguments dépendent de la situation et de l'observation (par exemple la technique d'équidécomposabilité dépend de la figure).

Un certain nombre de démonstrations précédentes relèvent de ces validations et ne constituent pas des démonstrations mathématiques formelles et déductives.

C'est pourquoi il est important de préciser aux élèves quel est le statut de la validation utilisée et d'indiquer clairement la frontière entre une validation non mathématique et une validation mathématique, et pour cette dernière les niveaux de rigueur ou de problématique exigés .

---

[21] TORRICELLI, *Campo di Tartuffi* XVII^e, traduit par DE GANDT F., dans *Les indivisibles et Torricelli*, séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences de l'Université de Nice.

[22] SCHNEIDER Maggy, *Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides* , dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, pp 248-249.

[23] SCHNEIDER Maggy, *Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides*, dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, p.272.

[24] Begründen und Argumentieren-Formen, Darstellung und Allgmeingultigkeit, in Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Tietze, Klika, Wolpers, pp 158-159.

Il semblerait qu'en Allemagne les démonstrations de résultats de cours soient plus répandues qu'en France. Ces démonstrations remplissent des fonctions qui sont plutôt assumées par des exercices et des activités en France. Mais en démontrant beaucoup de résultats de cours n'est-ce pas aussi un choix culturel : insister sur la démonstration comme démarche spécifique de la pensée mathématique appliquée à une construction élémentaire des objets mathématiques, en déconnectant cette démarche de tout contexte local lié à la résolution d'un problème donné isolé ou à une situation d'évaluation.