Une question de Walter Rudin
L'intégrale de Riemann et la convergence dominée

Olivier GEBUHRER [1]
ULP Strasbourg

1 Introduction

Dans l'un de ses classiques , – et à mon point de vue, pour certains d'entre eux, indépassables – Walter Rudin pose le problème suivant : [2]
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer, sans recouvrir au **moindre élément** de **théorie de la mesure**, que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.[3]

Avec l'humour et la perspicacité qui le caractérisent, Walter Rudin ajoute : *«Ceci vise à vous impressionner par la puissance de l'intégrale de Lebesgue»*. Un instant de réflexion suffit à se convaincre de la force de cette suggestion. Si, en effet, l'on dispose du théorème de convergence dominée (de Lebesgue), la question n'en est pas une et on n'oserait pas la poser à un examen de licence.

Un nouvel instant de réflexion ouvre cependant un abîme (relatif!) et c'est l'objet de cette note que de l'explorer en détail. Si en effet, la convergence dominée est autorisée, alors la condition «f_n continue pour tout n» n'a **rien à voir** dans la question. Si la question posée par Walter Rudin a un sens, on doit la reformuler comme suit : *Si les f_n sont continues, leur intégrale est une intégrale de Riemann* et se pose alors l'alternative suivante :

– ou bien la convergence des intégrales ne peut s'obtenir dans le cadre Riemann et il convient de comprendre pourquoi.

– ou bien on peut obtenir cette convergence, dans le cadre Riemann, et il convient d'en donner une preuve, la plus simple possible, si l'on veut que la comparaison ait un sens.

Walter Rudin ne se contente pas de poser la question. Il donne une référence de preuve. Toujours dans un esprit de comparaison, nous donnons cette preuve plus loin. J'ai consulté cette référence, il y a bien longtemps, après de vaines tentatives de résoudre par moi-même la question posée. Grande fut, je l'avoue, ma déception à la lecture de cette preuve, ce qui me laissa pour longtemps dans la certitude que telle n'était pas celle à laquelle convie Walter Rudin, malgré son appréciation élogieuse (a nice proof!).

L'objet de cette note est donc, entre autres, de donner une autre preuve inédite, celle là, avec comme contraintes de n'utiliser que les propriétés des fonctions continues et bien sûr, les propriétés de l'intégrale de Riemann. Le résultat est étonnant et l'effet de comparaison *"With the power of Lebesgue integral"* garanti.

[2]Real and Complex Analysis Mc Graw Hill Ed. - Analyse réelle et complexe Masson 1980.

[3]Dans l'édition française, il s'agit de l'exercice 7 p. 55 du chapitre 2 «Mesures de Borel positives».

2 Pistes et défrichage

Commençons par observer qu'il existe un théorème de la limite monotone, cadre Riemann. Ce théorème est le suivant :

THÉORÈME ·÷·*Si* (f_n) *est une suite de fonctions continues sur* $[0,1]$ *telles que* $f_n \leqslant f_{n+1}$ *pour tout* n *et si* $f = \sup_n f_n = \lim_n f_n$ *est continue, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

On aura reconnu, sous forme à peine déguisée l'énoncé du théorème de Dini :

THÉORÈME ·÷·*Si* (f_n) *est une suite monotone de fonctions* **continues**, *de limite* **continue**, *sur un espace topologique compact, alors la convergence de la suite* (f_n) *est* **uniforme**.

Si on lève l'hypothèse que la limite est continue, le seul recours est le théorème de la limite monotone associée au lemme de Fatou :

$$\int \underline{\lim} f_n dx \leqslant \underline{\lim} \int f_n dx \leqslant \overline{\lim} \int f_n dx \leqslant \int \overline{\lim} f_n dx \quad (f_n \text{ positive mesurable})$$

Nous disons «associée», car le lemme de Fatou nécessite pour sa preuve le théorème de la limite monotone et le lemme de Fatou se réduit à ce dernier pour une suite monotone de fonctions mesurables positives. Observons que déjà à ce point, on peut mesurer la limite de l'intégrale de Riemann.

C'est un exercice chausse trappe classique de proposer : $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ avec une preuve par Dini de la propriété $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = 0$. Bien entendu le calcul direct est trivial. Or la suite (f_n) ne satisfait pas les conditions du théorème de Dini sur $[0,1]$ mais sur tout intervalle $[0,\alpha]$ avec $\alpha < 1$. Ceci suffit pour conclure et montre que l'exemple le plus simple nécessite un long détour si l'on veut rester dans le cadre de Riemann.

Revenons à la question posée initialement; on peut songer éventuellement à utiliser le résultat suivant :
Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe un ensemble $A_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $m({A_\varepsilon}^C) \leqslant \varepsilon$ et tel que sur A_ε, la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

Ce résultat donne aussitôt la conclusion mais son inconvénient majeur pour notre propos est d'utiliser de façon d'ailleurs non complétement triviale, la théorie de la mesure. C'est le théorème d'Egorov.

Il est bien sûr absurde de recourir à de tels raffinements puisque, nous l'avons vu, la convergence dominée suffit ici de façon triviale. Néanmoins ce résultat indique qu'il doit y avoir un moyen de se rapprocher de la convergence uniforme, lorsque les fonctions de la suite (f_n) sont continues, et c'est la seule «vraie»propriété de l'intégrale de Riemann.

Il faut donc faire intervenir de façon décisive la continuité. Or, une autre piste de réflexion se présente :

LEMME ·÷·*Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues sur* $[0,1]$*, simplement convergente en tout point de* $[0,1]$*. Alors, si* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$*, l'ensemble des points de continuité de* f *est dense dans* $[0,1]$.

Avant tout commentaire, donnons la preuve de ce lemme pour la commodité du lecteur :

Démonstration ·÷·Si $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\Gamma_{p,n} = \{x \in [0,1] \quad \backslash \quad \forall q \leqslant p, |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}.$$

$\Gamma_{p,n}$ est fermé pour $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ car les f_n sont continues. Soit Ω un ouvert non vide de $[0,1]$. Alors $\Omega = \bigcup_p (\Omega \cap \Gamma_{p,n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, pour tout $x \in [0,1]$, donc en particulier si $x \in \Omega$, il existe un entier $p = p(x)$ tel que $|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 1/n$ pour $q \geqslant p(x)$, par hypothèse. Donc, pour n fixé la suite $(\Omega \cup \Gamma_{p,n})_p$ est une suite de fermés de Ω admettant Ω pour réunion.

Comme Ω possède la propriété de Baire (ouvert d'espace topologique admettant la propriété de Baire), l'un au moins des $\Omega \cap \Gamma_{p,n}$ est d'intérieur non vide relativement à Ω. Donc on vient de voir que $U_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\Gamma}_{p,n}$ est un ouvert dense de $[0,1]$.

Soit $x \in U_n$; pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un intervalle ouvert $I_x^n(\varepsilon)$ centré au point x, contenu dans $\Gamma_{p(x),n}$ tel que

$$|f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } y \in I_x^n(\varepsilon) \text{ (par continuité des } f_n)$$

Or

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_{p(x)}(x)| + |f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| + |f_{p(x)}(y) - f(y)| \\ &\leqslant 2/n + \varepsilon \quad \text{si} \quad y \in I_x^n(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si Ωf désigne l'oscillation de f, en tout point x, on a $\Omega f(x) = \inf_{V(x)\in\mathcal{V}(x)} \delta[f(V(x))]$ où $\delta(A)$ désigne le diamètre de la partie A ($\delta(A) = \sup_{x\in A} |x-y|$) et où $\mathcal{V}(x)$ désigne une base de voisinages de x. De ce qui précède, on déduit donc que $\Omega f(x) \leqslant \frac{4}{n}$, si $x \in U_n$.

Par propriété de Baire, $\Gamma = \bigcap_n U_n$ est une partie dense de $[0,1]$ et sur $\Gamma, \Omega f$ est identiquement nulle. C'est un exercice élémentaire de prouver que

$$\Omega f(x) = \overline{\lim_{y\to x}} f(y) - \underline{\lim_{y\to x}} f(y) \quad ,$$

de sorte que f est continue sur Γ et le lemme est prouvé $\square$.

Ce lemme donne en un sens le **meilleur** résultat possible. **Ce n'est pas du tout la version topologique du théorème d'Egorov** car on ne contrôle pas la mesure de Γ qui peut être très petite a priori (de même que dans le théorème d'Egorov les propriétés topologiques du bon ensemble A_ε sont perdues !).

Quel usage peut-on faire de ce lemme ? A priori, aucun, pour notre propos, car notre hyptohèse est que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc le problème des points de continuité de la limite n'est pas posé : la limite est par hypothèse continue. A première vue, par conséquent, il semble que l'on aboutisse à l'impasse.

Or, comme on va le voir, ce qui importe dans le lemme, c'est moins le résultat, intéressant en soi, mais inutile ici, que ce que dit la preuve qui n'est autre que l'une des innombrables variantes du **principe de condensation des singularités**.

3 La preuve de l'intervention des limites : la convergence dominée cadre Riemann

On commence par faire l'observation d'apparence triviale suivante : supposons que $f_n(1) = f_n(0) = 0$ pour tout entier n et prolongeons les fonctions f_n par 0 en dehors de $I = [0, 1]$. On se convainc aisément que cela ne restreint pas la généralité du problème.

Si maintenant φ est une fonction continue positive d'intégrale égale à 1, à support compact dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n * \varphi(x)dx = (\int_0^1 f_n(x)dx).(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt)$$

où l'on a évidemment noté $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt$.

Tout ceci a un sens dans le cadre Riemann et le théorème de Fubini s'applique dans ce cadre dès que f et φ sont continues à support compact. *On vient d'introduire un paramètre souple dans un problème d'apparence rigide.*

Posons alors $K_\varphi(f)(x) = f * \varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, f et φ continues à support compact, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1, \varphi \geqslant 0$. Nous avons :

$$|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x-t) - \varphi(y-t)||f(t)|dt.$$

Par uniforme continuité de φ sur le support de f, on déduit que si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut trouver un voisinage de x, $I_x(\varepsilon)$ tel que :
Si $y \in I_x(\varepsilon)$, on ait $|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$. Si, en outre on suppose $0 \leqslant f \leqslant 1$, (il suffirait ici d'avoir $|f| \leqslant M$) et à support dans un compact fixe (ici $[0, 1]$) et si $[a, b]$ est un intervalle contenant $[0, 1]$, alors

$$|K_\varphi(f)(x) - K_\varphi(f)(y)| \leqslant \varepsilon M(b-a)$$

pour tout $y \in I_x(\varepsilon)$ et toute f telle que $|f| \leqslant M$, $supp f \subset [a, b]$. Il en résulte que pour φ fixée, l'ensemble $\{K_\varphi(f)\}$ où f parcourt l'ensemble des fonctions continues telles que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $supp f \subset [0, 1]$ est équicontinu sur $\mathbb{R}$.

Cette observation a la conséquence suivante :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ telle que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout n (prolongées par 0 hors de $[0, 1]$)et telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout n. Alors si φ est continue sur $\mathbb{R}$ positive, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$, φ à support compact, la suite $K_\varphi(f_n)$ admet une suite extraite uniformément convergente sur Γ où Γ est un intervalle compact contenant le support des $f_n * \varphi$ ($\Gamma \subset [0, 1] + supp\varphi$).

Ce résultat n'est autre que le théorème d'Ascoli caractérisant les parties compactes dans l'espace des fonctions continues sur un espace topologiques compact (pour la convergence uniforme sur cet espace).

Si maintenant, on prouve que pour toute φ fixée comme précédemment (ou une φ cela suffirait), toute suite extraite de $K_\varphi(f_n)$ possède une suite extraite uniformément convergente vers 0 sur Γ, on concluera par la remarque anodine du début de ce paragraphe :
$\lim\limits_{h\to\infty} K_\varphi(f_n) = 0$ uniformément sur Γ implique

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\varphi(f_n)(x)dx = 0 = \lim_{h\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Ce schéma est naturellement trop beau pour être vrai. Il donne néanmoins l'idée de la preuve qui suit.

Pour le moment, on n'a exploité que la DOMINATION des f_n.
Le fait que $\lim\limits_{h\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ n'est pas intervenu.

Observons que $0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant 1$, donc si $\alpha_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, il existe une suite extraite (α_{n_k}) de α_n qui converge vers $\alpha \in [0,1]$. Supposons que pour une telle suite extraite, $\alpha > 0$. On va montrer que cette hypothèse est absurde, la conclusion s'ensuivra.

Nous sommes donc ramené à la situation suivante :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$,
$f_n(0) = f_n(1) = 0$, $supp f_n \subset [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \alpha > 0$.

De la preuve du lemme exposé au §2, on tire la conséquence suivante; pour cela on adopte les notations du §2 et on rappelle un résultat intermédiaire.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$, alors $U_n = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\Gamma}_{p,n}$ est un ouvert dense de $[0,1]$ où

$\Gamma_{p,n} = \{x \in [0,1], \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 1/n \text{ pour } q \geqslant p\}$.

LEMME ·÷·*Pour tout entier n fixé, pour tout $\gamma > 0$, pour tout $x \in U_n$, il existe un intervalle $I_x^n(\gamma)$ centré au point x, tel que si $y \in I_x^n(\gamma)$,*

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma \,\text{pour}\, q \geqslant p(x)$$

où $p(x)$ est un entier tel que $x \in \overset{\circ}{\Gamma}_{p(x),n}$.

Démonstration ·÷·Ceci résulte de l'inégalité :

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant |f_q(x) - f_{p(x)}(x)| + |f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| + |f_{p(x)}(y) - f_q(y)|.$$

En utilisant la continuité de $f_{p(x)}$ on déduit l'existence d'un intervalle ouvert $I_x^n(\gamma)$ contenu dans $\overset{\circ}{\Gamma}_{p(x),n}$ tel que :

$$|f_{p(x)}(x) - f_{p(x)}(y)| \leqslant \gamma \,\text{si}\, y \in I_x^n(\gamma).$$

Donc, si $y \in I_x^n(\gamma)$, on a :

$$|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma \quad \text{pour} \quad q \geqslant p(x),$$

comme annoncé $\square$.

Soit maintenant $\{\varphi_k\}$ une suite de fonctions continues positives d'intégrales égales à 1, à support dans un voisinage de 0, disons $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. C'est une «approximation de l'unité»et clairement pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|t|\geqslant\alpha} \varphi_k(t)dt = 0.$$

Considérons $f_q * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}} f_q(x-t)\varphi_k(t)dt$. On a :

$$f_q * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}} [f_q(x-t) - f_q(x)]\varphi_k(t)dt + f_q(x)$$

Pour x fixé dans U_n, soit $I_x^n(\gamma)$ un intervalle ouvert centré en x, tel que $|f_q(x) - f_q(y)| \leqslant 2/n + \gamma$ pour $q \geqslant p(x)$ et $y \in I_x^n(\gamma)$. Alors :

$$\begin{aligned}|f_q*\varphi_k(x)| &\leqslant \int_{I_0^n(\gamma)} |f_q(x-t)-f_q(x)|\varphi_k(t)dt + \int_{[I_0^n(\gamma)]^C} |f_q(x-t)-f_q(x)|\varphi_k(t)dt + f_q(x) \\ &\leqslant (2/n+\gamma) + 2\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt + f_q(x)\end{aligned}$$

où, comme il se doit, on a écrit $I_x^n(\gamma) = x + I_0^n(\gamma)$ où maintenant $I_0^n(\gamma)$ est un intervalle ouvert centré en O et A^C désigne le complémentaire de A .

Si $\gamma > 0$ est fixé, il existe $k(\gamma)$ tel que si $k \geqslant k(\gamma)$ on ait :

$$2\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt \leqslant \gamma.$$

(en fait, avec nos hypothèses $\int_{[I_0^n(\gamma)]^C} \varphi_k(t)dt = 0$).

Fixant alors un tel k, on a :

$$|f_q * \varphi_k(x)| \leqslant 2/n + 2\gamma + f_q(x) \quad \text{pour}\, q \geqslant p(x)$$

et compte tenu du fait que $\lim\limits_{q\to\infty} f_q(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on peut de plus supposer que $f_q(x) \leqslant \gamma$ si $q \geqslant p(x,\gamma)$.

En résumé, si k est fixé $\geqslant k(\gamma)$ et si $q \geqslant p(x,\gamma)$:

$$|f_q * \varphi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma \quad \text{si } x \in U_n$$

Or, pour k fixé il existe une suite extraite $(f_{q_r} * \varphi_k)_r$ de $(f_q * \varphi_k)$ qui converge uniformément vers Ψ_k.

On a donc $|\Psi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma$ si $x \in U_n$. Comme U_n est dense dans $[0,1]$, $|\Psi_k(x)| \leqslant 2/n + 3\gamma$ si $x \in [0,1]$ par continuité des Ψ_k.
De plus, $supp\Psi \subset [1-1/k, 1+1/k]$ et sur ce support $0 \leqslant \Psi_k \leqslant 1$.

De sorte que,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{q_r} * \varphi_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \Psi_k(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant (2/n+3\gamma)+2/k.$$

En prenant k assez grand on a donc :

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant 2/n+4\gamma \quad \text{pour tout } n.$$

Donc $\lim\limits_{r\to\infty}\int_0^1 f_{q_r}(x)dx \leqslant 4\gamma$. Comme $4\gamma < \alpha$ si γ est assez petit on en déduit la contradiction cherchée. C'est la preuve cherchée, sous réserve de simplifications mineures possibles. La clé de la convergense dominée selon Riemann est donc, comme on devait s'y attendre, le théorème d'Ascoli. Pourquoi devait-on s'y attendre ? Parce que la convergence dominée est un théorème de compacité dans l'espace $L^1([0,1],dx)$ (par exemple) dont la philosophie est très proche de celle d'Ascoli (l'équicontinuité est remplacée par l'équiintégrabilité)

4 Voici maintenant la preuve citée en référence par Walter Rudin

On note I l'intégrale de Riemann sur $[0,1]$: $I(f)=\int_0^1 f(x)dx$.

LEMME ·÷·*Soit* $|f| \leqslant \sum |f_n|$ *alors* $I(|f|) \leqslant \sum\limits_n I(|f_n|)$, f *et* f_n *continues sur* $[0,1]$.

Démonstration ·÷·On a $|f(x)| \leqslant \sum_1^{N(x)} |f_n(x)|+\varepsilon$, où $\varepsilon>0$ est fixé. Cette inégalité a lieu dans un voisinage $U(x)$de x, par continuité. Par compacité de $[0,1]$, en posant $N=\sup N(x_i)$, on a :

$$|f| \leqslant \sum_1^N |f_n| + \varepsilon$$

Donc :

$$I(|f|) \leqslant \sum_{n=1}^N I(|f_n]) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^\infty I(|f_n|)+\varepsilon$$

D'où le résultat $\square$.

Soit maintenant (f_n) suite de fonctions continues sur $[0,1]$ avec $f_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ (simplement sur $[0,1]$) et $0 \leqslant f_n \leqslant 1$. Tout revient à voir que si $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = L$ alors $L=0$. En effet, $0 \leqslant I(f_n) \leqslant 1$ donc existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} I(f_{n_k}) = L$. Si on prouve que $L=0$ on aura montré que de toute suite extraite de $\alpha_n = I(f_n)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers 0. Il en résulte que $\alpha_n \to 0$.

On considère donc une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $s \leqslant f_n \leqslant M$ pour tout n, $f_n \to 0$ simplement sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{h\to\infty} I(f_n) = L$. On va prouver que $L=0$. Posons $K_n = CO[f_m : m \geqslant n]$ où CO désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble entre crochets. Si $g_n \in K_n$ pour tout n, alors la suite (g_n) satisfait les mêmes propriétés que (f_n).

Posons $d_n = \inf[||g||_2 : g \in K_n]$ où $||g||_2 = [I(|g|^2)]^{1/2}$. Alors, comme $K_{n+1} \subset K_n$ $d_n \leqslant d_{n+1} \leqslant M$ pour tout n. Donc $d = \lim_{h\to\infty} d_n$ existe. Soit $g_n \in K_n$ telle que $||g_n||_2 \leqslant d_n + 1/n$.

LEMME ·÷·

$$\lim_{m,n\to\infty} ||g_n - g_m||_2 = 0$$

Démonstration ·÷·

Résulte de l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} ||g_n - g_m||_2^2 &= 2\{||g_n||_2^2 + ||g_m||_2^2\} - 4||\frac{1}{2}(g_n + g_m)||_2^2 \\ &\leqslant 2\{(d_n + \frac{1}{n})^2 + (d_m + \frac{1}{m})^2\} - 4d_m^2 \text{si } m \geqslant n \end{aligned}$$

D'où la conclusion $\square$.

Soit alors (h_n) une suite extraite de (g_n) telle que

$$\sum_1^\infty ||h_n - h_{n+1}||_2 < +\infty$$

ce qui est évidemment possible.

Clairement, (h_n) satisfait aux mêmes hypothèses que (f_n) : $\lim_{n\to\infty} I(h_n) = L$. Comme $h_n \to 0$ partout, on a $h_n = \sum_{m\geqslant n} h_m - h_{m+1}$ pour tout n.

Donc $|h_n| \leqslant \sum_n^\infty |h_m - h_{m+1}|$ et par le lemme initial,

$$0 \leqslant |I(h_n)| \leqslant I(|h_n|) \leqslant \sum_n^\infty I(|h_n - h_{m+1}|) \leqslant \sum_n^\infty ||h_m - h_{m+1}||_2.$$

D'où la conclusion $L = 0$.

Laissons à chacun sa liberté d'appréciation. Mon opinion est que la preuve précédente, outre son caractère aussi peu naturel que possible, contient une évidente supercherie : on travaille fictivement dans $L^2([0,1], dx)$!!. Autrement dit, la preuve est contruite en utilisant les propriétés de $L^2([0,1], dx)$ puis en ne gardant que celles qui sont réellement nécessaires pour le problème posé. Je ne peux pas penser que c'est à ce genre de preuve que W. Rubin pouvait songer. Vos commentaires sont les bienvenus.

5 Ultimes remarques

Les puristes remarqueront que la version Riemann de la convergence dominée exige ici $|f_n| \leqslant M$ sur $[0,1]$ et non pas $|f_n| \leqslant g$ où g est Riemann intégrable sur $[0,1]$, indépendante de n. Or ce dernier énoncé est illusoire : comme on le sait, une fonction bornée est Riemann intégrable si et seulement si elle est continue presque partout.

Les fonctions non bornées échappent à l'intégrale de Riemann. Un théorème qui demanderait de vérifier que la fonction dominante g soit continue presque partout (en excluant les trivialités telles que g continue par morceaux) donc de vraies singularités pour g n'aurait évidemment AUCUN INTÉRÊT.

C'est pourquoi la version RAISONNABLE Riemann s'écrit

$$|f_n| \leqslant g \quad \text{où g est continue}$$

Mais dans ce cas g est bornée sur le compact considéré et on est ramené à l'énoncé initial. Par quelque bout qu'on la prenne, l'intégrale de Riemann est réellement IMPRATICABLE pour les besoins de l'analyse. J'insiste donc à nouveau ici : au prix d'efforts pédagogiques sérieux le XXI^{e} siècle devra se passer de cette notion qui n'offre d'intérêt qu'historique. Et il est absolument faux qu'elle soit plus simple à enseigner que l'intégrale de Lebesgue. Au demeurant, il est notoire qu'il n'existe pas chez Riemann l'embryon du début d'une théorie d'intégrale. Cela ne diminue en rien son génie.