A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

Suggestions de P. Renfer et J. Lefort : a) Une solution f est-elle nécessairement de classe C^∞ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.
b) Construire une suite de fonctions f_n, où f_n est définie sur $[n, n+1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x+1)$. Puis recoller ces fonctions.
c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} sin(\beta x)$, où α et β sont des constantes à déterminer ou à approcher.

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).

2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)$$

Indication (par D. Dumont et P. Renfer) : Les séries intervenant dans l'identité à démontrer sont liées à celle-ci :

$$R(x) = x + 2\frac{x^2}{2!} + 3^2\frac{x^3}{3!} + \cdots + n^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

dont on sait classiquement qu'elle est solution de l'équation fonctionnelle

$$R(x) = x.exp(R(x)).$$

Ce résultat peut se démontrer par des méthodes d'Analyse classique (théorème de Rouché, ou formule d'inversion de Lagrange), ou par des méthodes combinatoires plus modernes sur les structures arborescentes (composé partitionnel, vertébrés, etc.).
A partir de cette équation fonctionnelle, on peut déduire d'autres identités et parvenir ainsi à l'identité proposée au départ. Un problème qui reste à examiner est de donner une preuve combinatoire directe du résultat.

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^6}+\frac{5x^5}{1-x^{10}}+\cdots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4}+\frac{2^3x^4}{1-x^8}+\frac{3^3x^6}{1-x^{12}}+\frac{4^3x^8}{1-x^{16}}+\cdots$$

PROBLÈME 59

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Soit n un entier relatif. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré.

Solution de Daniel Reisz : On cherche une formule du type

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+an+1)^2$$

et on trouve, "bêtement", nous écrit l'auteur de la solution, que $a=3$ convient.
Remarque.— Dans sa lettre, Daniel Reisz nous reproche amicalement de proposer des problèmes qui sont, soit trop faciles comme celui-ci, soit trop difficiles comme la plupart des autres.
Nous sommes ici confrontés au (méta-)problème difficile de trouver des problèmes qui soient à la fois de difficultés moyennes et de conceptions originales. Nous allons tâcher de faire mieux et encourageons nos lecteurs à nous aider à résoudre aussi ce problème-là !

PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l'équation

$$x^{x^8} = 2$$

a) pour x réel > 0 ;
b) pour x complexe.

PROBLÈME 61

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit $P(N)$ le produit des chiffres de l'entier naturel N écrit dans le système décimal.
Exemples.— $P(5)=5$, $P(12)=2$, $P(275)=70$, $P(306)=0$.
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par la récurrence

$$u_{n+1} = u_n + P(u_n),$$

où u_0 est un entier naturel choisi arbitrairement.
1°) Montrer que, quel que soit le choix de u_0, la suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang r.
2°) Que peut-on dire sur l'estimation de ce rang r ?