LE POLYNÔME D'EHRHART

Thomas DELZANT [1]
Irma

Introduction.

On observe (exercice!) que le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de $10, 20, 50$ centimes ou de $1fr$ est

$$P_1(n) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Si l'on exige que dans le paiement on utilise au moins une fois chaque sorte de pièce on trouve :

$$Q_1(n) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(5n-6).$$

Un autre problème amusant a une solution tout à fait semblable : un carré magique de type $(3; n)$ est un tableau constitué de neufs nombres entiers disposés en trois lignes et trois colonnes, de sorte que la somme des nombres situés sur chaque ligne ou chaque colonne soit égale à n. Ainsi le carré $\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$ est magique de somme 15. Il se trouve (Mac Mahon, [MM] par.407), mais cela n'est pas facile à montrer, que le nombre de carrés magiques de type $(3, n)$ est

$$P_2(n) = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4).$$

Exigeons maintenant que dans nos carrés magiques, tous les nombres soient strictement positifs. Le nombre des carrés magiques ainsi décrits devient :

$$Q_2(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4).$$

On voit immédiatement que les fonctions P_i, Q_i sont des polynômes, ce qui n'est nullement évident au départ, mais aussi que ces polynômes satisfont une formule étonnante

$$(!) \quad P_i(n) = (-1)^{degF} Q_i(-n).$$

Entre les années 1955, date de sa première Note aux Compte Rendus de l'Académie des Sciences sur le sujet, et 1964, date de sa Thèse, Eugène Ehrhart va bâtir un cadre théorique pour expliquer ces résultats. La publication du traité *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire* en 1977, couronnera

[1]
Irma, Université Louis Pasteur, 7 rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex.
e-mail : delzant@math.u-strasbg.fr

ce travail. Il introduira un objet - le polynôme d'Ehrhart d'un polyèdre à sommets entiers - et montrera une formule de réciprocité résolvant les problèmes de comptages généraux et généralisant la formule (!) ci-dessus.

Le nom d'Ehrhart est pour toujours attaché à ces deux découvertes.

1 Le polyèdre associé à un système diophantien linéaire.

Pour résoudre le premier problème des pièces de monnaie qui nous a servi d'introduction, il suffit de trouver le nombre de solutions entières du système :

$$X + 2Y + 5Z + 10T = 10n, \;\; X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0.$$

L'idée est alors de considérer le polyèdre convexe Δ_n défini par ces équations dans $\mathbf{R}^4$, ici un simplexe de dimension 3. La remarque est que le nombre de solutions à notre problème monétaire n'est autre que le nombre de points entiers (dont toutes les coordonnées sont entières) dans Δ_n, et que ce polyèdre est obtenu à partir de Δ_1 par une homothétie de rapport n.

Cette méthode s'applique tout aussi bien aux sytèmes de k équations et l inéquations en m inconnues à coefficients entiers de la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} a_{i,j} X_i = b_j n, \;\; 1 \leq j \leq k$$

$$\sum_{1 \leq i \leq m} c_{i,j} X_i \leq d_l n, \;\; 1 \leq j \leq l$$

À ce système, on associe le polyèdre convexe Δ_n de $\mathbf{R}^\mathbf{m}$ défini par les mêmes équations et inéquations, mais où maintenant les X_i sont réels. Posons $\Delta = \Delta_1$, et observons à nouveau que $\Delta_n = n\Delta_1 = n\Delta$. Le *compteur*, c'est-à-dire le nombre de solutions entières de ce système d'équations, n'est autre que le nombre de points entiers dans le polyèdre $n\Delta$. Nous le noterons $P_\Delta(n)$. En général, c'est-à-dire si les équations définissant Δ sont indépendantes, le polyèdre Δ est de dimension $d = m - k$. Comme tous les coefficients définissant Δ sont entiers, il n'est pas très difficile de se convaincre que les points extrémaux de Δ sont à coefficients rationnels. Nous pouvons donc reformuler le problème de comptage :

Déterminer le nombre $P_\Delta(n)$ de points entiers du polyèdre $n\Delta$, où Δ est un polyèdre à sommets rationnels.

Au lieu d'inégalités larges dans le système diophantien considéré, nous aurions pu choisir des inégalités strictes. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, nous aurions remarqué que le nombre de solutions du système obtenu n'est autre que le nombre de points entiers situés à l'intérieur du polyèdre $n\Delta$. Nous le noterons $Q_\Delta(n)$.

2 Le polynôme d'Ehrhart.

On l'aura compris, les deux exemples *élémentaires* de l'introduction sont des corollaires du théorème fondamental d'Ehrhart :

Théorème. *Soit Δ un polyèdre convexe de dimension d à sommets entiers dans $\mathbf{R}^m$. Les compteurs $P_\Delta(n)$ et $Q_\Delta(n)$ [2] du nombre de points entiers situés dans $n\Delta$ et dans son intérieur sont des polynômes de degré d. De plus*

$$P(n) = (-1)^d Q(-n)$$

On trouvera une démonstration de ce résultat dans le livre d'Ehrhart, mais aussi dans [B] ou [St].

Le cas des polyèdres à sommets rationnels est un peu plus délicat ; mais de fait c'est à celui-ci que l'on doit s'attaquer si l'on veut résoudre des problèmes aussi simples que :

Quel le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de $1fr, 2fr, 5fr$ ou $10fr$?

Ehrhart introduit la notion de polynôme arithmétique ou *polar*. Un polynôme arithmétique est la donnée $P = [P_0, P_1, ..., P_{p-1}]$ de p polynômes. Sa valeur à l'entier n est $P(n) = P_{\bar{n}}(n)$, où $\bar{n}$ désigne la réduction de n modulo p ; p s'appelle la pseudo-période de P ; son degré est le maximum du degré des P_i.

Soit Δ un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$ à sommets rationnels. Notons p le ppcm des dénominateurs des coordonnées de ses sommets ; alors $p\Delta$ est à sommets entiers, et donc le théorème d'Ehrhart nous dit qu'il existe un polynôme P_0 tel que le nombre de points entiers situés dans npP_0 soit justement $P_0(np)$. Un phénomène analogue se produit pour l'ensemble des points entiers de $(np\Delta + k)$ pour tout entier k fixé.

Théorème. *Soit Δ un polyèdre convexe à sommets rationnels de $\mathbf{R}^m$ de dimension d, et soit p le plus petit entier positif tel que $p\Delta$ soit à sommets entiers. Les compteurs $P_\Delta(n)$ et, $Q_\Delta(n)$ [(1)] du nombre des points entiers situés dans $n\Delta$ et dans son intérieur, sont des polars de degré d et de période p. De plus*

$$P(n) = (-1)^d Q(-n)$$

Exemples. Montrons comment ces résultats permettent d'étudier les exemples qui nous ont servi d'introduction. Ces exemples sont tirés du livre d'Ehrhart.

Soit Δ un polyèdre convexe à sommets entiers ; notons $P_\Delta(t) = a_d(\Delta)t^d + a_{d-1}(\Delta)t^{d-1} + ... + a_0(\Delta)$. Comment calculer les a_i ?

Notons que $0.\Delta$ ne contient qu'un point du réseau des entiers, l'origine ; on a donc toujours $a_0(\Delta) = 1$. Pour Q nous avons déja convenu que $Q(0) = (-1)^d$ même si cela n'a pas d'interprétation géométrique.

La première méthode pour calculer P_Δ consiste à en évaluer d valeurs distinctes, puis à résoudre le système linéaire en les a_i correspondant.

[2]On convient que $Q(0) = (-1)^d$

Reprenons le premier exemple de cet exposé : quel est le nombre de façons de payer une somme de n francs en utilisant des pièces de $10, 20, 50$ centimes ou 1fr ? Il nous suffit, pour calculer P_1, de déterminer le nombre de solutions pour 1, 2 et 3 francs . On trouve 11, 40 et 98. D'où l'on tire :

$$P_1(n) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Notons qu'il aurait été beaucoup plus malin de calculer le polynôme Q_1, car $Q_1(1) = 0$ $Q_1(2) = 2$ et $Q_1(3) = 15$. D'où :

$$Q_1(n) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(5n-6).$$

Le résultat sur P_1 s'obtient alors en appliquant la formule de dualité.

Appliquons la même méthode pour résoudre le problème du nombre de carrés magiques constitués de tableaux $(3,3)$ dont la somme des lignes ou colonnes est n. Si l'on exige que les coefficients soient strictement positifs, il n'y a aucune solution de somme 1 ou 2 ; il y a une seule solution de somme 3, et on se convainc facilement qu'il y a en 6 de somme 4 (penser au groupe des 6 permutations des 3 lignes). Comme $Q(0) = 1$, on tire $Q(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4)$, puis $P(n) = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4)$. La formule de dualité nous à permis d'éviter d'exhiber les 120 carrés magiques de somme 4 pour déterminer P.

3 Les coefficients du polynôme d'Ehrhart.

La question qui se pose alors naturellement est celle de donner une interprétation géométrique des coefficients du polynôme d'Ehrhart. Connaissant la géométrie de Δ comment calculer $a_i(\Delta)$?

A. La mesure réticulaire et les coefficients de haut degré.

Pour aborder ce problème, Ehrhart introduit une notion utile : *la mesure réticulaire.*

Si un espace vectoriel F de dimension d possède un réseau (un sous groupe isomorphe à $\mathbf{Z^d}$ engendré par une base de F), il est doté d'une mesure, c'est-à-dire d'un déterminant au signe près. En effet, toutes les bases de ce réseau définissent le même déterminant au signe près. Un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R^n}$ engendré par des vecteurs à coordonnées entières est doté d'un réseau -$F \bigcap \mathbf{Z^n}$- donc aussi d'une mesure. Si Δ est un polyèdre convexe à sommets entiers de $\mathbf{R^n}$, les espaces vectoriels sous-jacents aux espaces affines engendrés par les faces sont donc eux aussi dotés d'une mesure : c'est cette mesure qu'Ehrhart appelle la *mesure réticulaire*. Pour toute face Φ de dimension k de Δ, on dispose donc d'une mesure $\mu_k(\Phi)$.

Les deux exemples importants à comprendre sont :

i La mesure réticulaire de Δ : c'est son volume pour la mesure ordinaire de $\mathbf{R^n}$

ii La mesure réticulaire d'une arête $[A, B]$ de Δ : comme A et B sont à coordonnées entières, $B - A$ est un vecteur à coordonnées entières. La mesure réticulaire de

$[A, B]$ est la valeur absolue du pgcd des coordonnées de $B-A$; c'est aussi le nombre de points entiers du segment $[A, B[$.

Le coefficient de plus haut degré du polynôme $P_\Delta(t)$ s'interprète facilement :

$$a_d(\Delta) = \mu_d(\Delta) = \text{Volume}(\Delta)$$

En effet quand n tend vers l'infini, pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^\mathbf{d}$, le nombre de points de Ω à coordonnées dans $\frac{1}{n}\mathbf{Z}^d$ est équivalent à $n^d.Volume(\Omega)$.

Grâce à la formule de dualité, on voit que $2a_{d-1}(\Delta)$ est le terme de plus haut degré dans le polynôme qui compte le nombre de points du bord de Δ. On peut donc interpréter le second coefficient du polynôme d'Ehrhart en terme de la mesure réticulaire de son bord :

$$a_{d-1}(\Delta) = \frac{1}{2}\mu_{d-1}(\partial\Delta).$$

On a alors une description complète du polynôme d'Ehrhart des polygones.

Théorème. *Soit Δ un polygone convexe à sommets entiers ; alors*

$$P_\Delta(t) = Aire(\Delta)t^2 + \frac{1}{2}|\partial\Delta|t + 1,$$

ou $|\partial\Delta|$ désigne le nombre de points entiers du bord de Δ.

Cette formule était connue de Pick à la fin du 19ᵉ siècle.

B Simplexes de $\mathbf{R}^3$ et formule de Mordell-Ehrhart.

Le premier cas vraiment difficile à comprendre est celui de la dimension trois. Il s'agit de calculer $a_1(\Delta)$, où Δ est un polyèdre donné en dimension trois. Ehrhart, réussit, par un véritable tour de force à analyser le cas du simplexe $\Delta_{a,b,c,}$ enveloppe convexe des points $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ de l'espace de dimension 3 ; on suppose que a, b, c sont premiers entre eux deux à deux. [3] La formule obtenue est si difficile à comprendre qu'Ehrhart ne jugea pas utile de l'insérer dans sa thèse. La voici, recopiée de l'exposé de Brion [B] ; elle donne une idée de la complexité du problème.

$$a_1(P) = \frac{1}{12}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{1}{abc}\right) + \frac{a+b+c+3}{4} - s(bc,a) - s(ac,b) - s(ab,c)$$

où $s(p,q)$ est la somme de Dedekind

$$s(p,q) = \sum_{i=1}^{q}\left(\left(\frac{i}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{pi}{q}\right)\right),$$

avec $((x)) = 0$ si x est entier $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ sinon.

C Formule de Weihrauch et Mac Donald.

[3] À vrai dire, dans un article de 1951 Mordell [Mo], avait déja traité le problème.

Avant l'arrivée des méthodes de la géométrie algébrique dans ce problème, un résultat remontant à la fin du 19[e] siècle (1875) retiendra encore notre attention ; il porte en lui le germe des formules générales apparues récemment. Dans un article malheureusemnt méconnu, Weihrauch [W] étudie le *système d'Euler* constitué d'une seule équation en $d+1$ inconnues à coefficients entiers positifs

$$\sum_{0 \leq i \leq d} a_i X_i = n, \quad X_i \geq 0$$

Après des calculs assez impressionants, il en arrive à conjecturer, après l'avoir vérifié pour les valeurs de $d \leq 6$, une formule qui sera établie par I.G. Mac Donald (cette formule fait l'objet d'un paragraphe en appendice du livre d'Ehrhart) ; elle fait intervenir les nombres de Bernoulli.

On suppose les a_i deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, le polar qui compte le nombre de solutions est un polynôme, à une constante périodique près : on peut écrire $P_\Delta(n) = \tilde{P}_\Delta(n) + b_0(n)$, avec $b_0(n) = b_0(\bar{n})$ ou $\bar{n}$ est la réduction de n modulo le ppcm des a_i.

Théorème. *Sous ces hypothèses,*

$$(*) \ \tilde{P}_\Delta(n) = \frac{(n - \sum_{i=1}^{d-1} a_i B^{[i]})^{d-1}}{(d-1)! a_1 \ldots . a_d},$$

avec la convention suivante : en développant le numérateur, on voit apparaître des termes du type

$B^{[1]^{n_1}} \ldots B^{[i]^{n_i}} .. B^{[d]^{n_d}}$ *; on les remplace par* $B_{n_1} \ldots B_{n_i} .. B_{n_d}$, *où* B_k *le k-ième nombre de Bernoulli est défini par la série génératrice :*

$$[*] \ \tau(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=1}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

4 Géométrie algébrique et polynôme d'Ehrhart.

En 1992, Pukhlikov et Khovanskii obtiennent une belle formule pour décrire le polynôme d'Ehrhart de certains polyèdres : on dit que le polyèdre convexe Δ à sommets rationnels de dimension d est non singulier si de chaque sommet de Δ partent exactement d arêtes qui portent une base du réseau des entiers. Considérons les faces $H_1, \ldots . H_p$ de Δ ; celle-ci sont définies par des équations $L_i(x) = h_i^0$, ou les L_i sont des formes linéaires à coefficients entiers dont le pgcd des coordonnées est 1. Ainsi, Δ est défini par $L_i(x) \leq h_i$. Changeons un peu les h_i et considérons le polyèdre $\Delta(h)$ défini par les mêmes équations mais où maintenant $h = (h_1, \ldots . h_p)$ est considéré comme un paramètre. Il n'est pas très difficile de se convaincre que le volume de Δ_h est un polynôme en h. Posons d'autre part,

$$[**] \ \tau(\frac{\partial}{\partial h}) = \prod_{i=1}^{p} \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}}{1 - exp \frac{\partial}{\partial h_i}} = \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i=1}^{+\infty} B_{n_i} \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}^{n_i}}{n_i!} = \sum B_{n_1} \ldots B_{n_i} .. B_{n_d} \frac{\frac{\partial}{\partial h_1}^{n_1}}{n_1!} .. \frac{\frac{\partial}{\partial h_i}^{n_i}}{n_i!} .. \frac{\frac{\partial}{\partial h_d}^{n_d}}{n_d!}$$

On considère cette expression curieuse comme une série formelle d'opérateurs différentiels. On peut donc l'appliquer à un polynôme en les h_i (ici $Vol(\Delta_h)$) en oubliant simplement tous les termes de haut degré. Dans le théorème suivant, on notera l'analogie avec la formule de Weihrauch- Mac Donald.

Théorème. *Le nombre de points entiers de* Δ *est*

$$(**)\ \#\Delta(h_0) = \tau(\frac{\partial}{\partial h})Volume(\Delta_h))(h_0)$$

Malheurement l'hypothèse de non singularité portant sur Δ est extrêmement restrictive : dans le cas de Weihrauch, elle ne s'applique que quand tous les a_i sont égaux, et dans le cas de Mordell-Ehrhart que si $a = b = c$.

La formule de Khovanskii-Pukhlikov peut se démontrer de façon "élémentaire", voir par exemple l'article [B]' ; mais on peut aussi l'obtenir en appliquant le théorème de Riemann-Roch sur une variété torique associée à Δ. L'idée est de construire une variété projective M_Δ à partir du polyèdre Δ. On interprète le nombre de points entiers comme la dimension de l'espace des sections d'un certain fibré. On calcule cette dimension en appliquant le théorème de Riemann-Roch. Un avatar de cette approche est l'interprétation de la formule de dualité d'Ehrhart : dans le langage de la géométrie algébrique c'est une conséquence de la dualité de Serre sur les variétés toriques.

À la fin du 20^e siècle, de nombreux auteurs se sont attachés à supprimer les hypothèses restrictives sur le polyèdre étudié. La grosse difficulté étant que la variété torique associée au problème n'est pas lisse, et dans ce cas, le théorème de Riemann-Roch n'a pas une forme aussi simple à manipuler. Voir [B], [B-V], [D-R], [K-K],[K-P], [M], [P]. Grâce aux travaux de ces auteurs, on dispose maintenant de (plusieurs) formules "explicites" -mais incroyablement difficile à expliciter, voir la formule de Mordell-Ehrhart ci-dessus- permettant de calculer les coefficients $a_k(\Delta)$ en terme de combinaison des mesures réticulaires des faces de dimension inférieure à k de Δ. Ces formules permettent de traiter de façon unifiée les trois cas que nous avons explicités (Mordell-Ehrhart, Weihrauch-Mac Donald et Khovanskii-Pukhlikov). Une conséquence de ces travaux, est l'existence d'un algorithme à temps polynomial pour calculer le polynôme d'Ehrhart [Ba]. Malgré cela, il ne semble pas que l'on sache donner à ce jour une signification géométrique aux coefficients de ce polynôme.

Je remercie Michel Brion pour sa lecture attentive de ce texte ses remarques et corrections, et M. Friedelmeyer, qui en m'encourageant à le rédiger, m'a permis de rendre un hommage -modeste- à Eugène Ehrhart.

Bibliographie.

Il s'agit évidemment d'une bibliographie très sommaire; pour les résultats antérieurs à 1993, on consultera le rapport de M. Brion [B], et sa version *grand public [B']*.

Les travaux d'Ehrhart.

-Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire (Thèse), Journal für die R. und A. Math. Vol 226 (1967) pp1-29 et 30-49.

-*Polynômes arithmétiques et méthodes des polyèdres en combinatoire,* Birkhauser 1977.

Quelques références historiques

[MM] P.A. Mac Mahon *Combinatory Analysis,* 1915.

[Mo] L.J. Mordell, Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, J. Indian Math. Soc. 15, 41-46, 1951

[W] K. Weihrauch, Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremdem Coefficienten. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 20 1875 pp. 97 ff.

Progrès récents sur le polynôme d'Ehrhart. En consultant "Math Sci Net", on se rend compte que plus d'une soixantaine d'articles sont parus depuis une dizaine d'années sur le polynôme d'Ehrhart. On pourra consulter les quelques références suivantes.

[Ba] Barvinok, A. A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed. Math. Oper. Res. 19 (1994), no. 4, 769–779.

[B] Michel Brion. Points entiers dans les polytopes convexes, Séminaire Bourbaki, Astérisque 227, (1995) pp 145. (fait le point sur la question en 1993)

[B]' Michel Brion, Points entiers dans les polytopes convexes, Gazette des mathématiciens (67) SMF 1996.

[B-V] M. Brion et M. Vergne. Lattice points in simple polytopes J. Amer. Math Soc. 10 (1997)

[D-R] R. Diaz, S. Robins. The Ehrhart polynomial of a lattice polytope, Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 1, 237.

[K-K] J.-M Kantor, A. Khovanskii. Une application du théorème de Riemann-Roch combinatoire au polynôme d'Ehrhart des polytopes entiers de $\mathbf{R}^d$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 5, 501–507.

[K-P] A. Khovanskii et A. Pukhlikov Algebra i Analyz 4 (1992)

[M] R. Morelli Adv. Math 100 (1993) n¡2 pp 154-231ff

[P] J. Pommersheim. Toric varieties, lattice points and Dedekind sums.Math. Ann. 295 (1993), no. 1, 1–24.

[St] R.-P. Stanley, Enumerative combinatorics, Vol. I, Cambridge studies in Advanced Math. Vol 49, 1997.