

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU TRIANGLE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

Sur proposition de Jacques BOROWCZYK, professeur de mathématiques à l'IUFM d'Orléans-Tours, nous publions la traduction française d'un article paru en 1958 dans la revue internationale *L'enseignement Mathématique* tome IV p. 178-211, sous le titre Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene.

Plusieurs raisons nous ont conduit à publier cette traduction :

- L'article en question est très souvent cité dans diverses revues de mathématiques, particulièrement le *Bulletin Vert* de l'APMEP. Or de moins en moins de lecteurs de ces revues lisent l'allemand, il peut être utile de mettre à leur disposition une version française.
- Cet article ouvre sur une pratique de la géométrie dans le plan complexe qui, si elle est bien connue sur le plan de ses principes théoriques, est rarement poussée aussi loin dans ses applications. Les étudiants de CAPES et d'agrégation y trouveront une mine d'idées et d'exercices pour la préparation de leurs concours.
- C'est aussi pour la revue **L'OUVERT** une manière de célébrer le récent centième anniversaire de la première parution d'un « confrère » apprécié dans le monde entier *L'enseignement Mathématique* dont le premier numéro a été publié en 1899 sous la direction ou le patronage de mathématiciens tels FEHR et LAISANT (directeurs) et POINCARÉ, PICARD, etc.

Quelques mots sur l'auteur Jos. E. HOFMANN (1900-1973) qui n'est nullement un inconnu pour les historiens des mathématiques. Son article présente d'ailleurs cette originalité que tous les théorèmes étudiés sont annotés par des références historiques précises et multiples, renvoyant les théorèmes classiques de la géométrie du triangle à leurs véritables auteurs.

Joseph Ehrenfried HOFMANN est surtout connu pour ses travaux sur l'invention et le développement du calcul infinitésimal, particulièrement dans l'étude des travaux de LEIBNIZ et BERNOULLI. Les deux textes : Die Entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672-1676) et Leibniz in Paris sont bien connus.

La présente traduction a été assurée par Lisiane NIVELLE, dans le cadre du module M19 de professionnalisation de la maîtrise de mathématiques (mention Ingénierie mathématique) de l'université de Tours. La traduction a été revue par Mme Colette BLOCH (IREM de Poitiers), nous la remercions vivement.

Les figures ont dû être reprises : ce travail a été assuré par Bruno BERNARDOFF, notre nouveau collaborateur à **L'OUVERT**, dont nous apprécions la performance technique.

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU TRIANGLE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

Quelques questions de géométrie élémentaire du triangle se traitent de façon particulièrement simple sous forme vectorielle si le centre du cercle circonscrit au triangle est employé comme point de référence. Prenons le rayon du cercle circonscrit comme unité, alors les vecteurs a, b, c désignant également les sommets du triangle sont des vecteurs unité, que nous écrivons de façon appropriée à l'aide de nombres complexes. Si on représente un point du cercle unité par le nombre complexe $\tilde{z}$ alors on note $\bar{\tilde{z}}$ son symétrique par rapport à l'axe réel. Les exemples qui suivent montrent comment on peut utiliser de façon simple et efficace l'interprétation vectorielle et la relation $\bar{\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}}$.

1. Au sujet de l'orthocentre, du cercle d'Euler * et problèmes apparentés.

(1,1) Soient a, b, c les vecteurs désignant les sommets d'un triangle inscrit dans le cercle unité (fig. 1). Alors $(a + b)$ est le symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport à la corde $[ab]$; ainsi le vecteur $(a + b)$ est perpendiculaire à cette corde. Complétons à présent le parallélogramme de sommets $(a + b), c$ et O avec le point donné par le vecteur $a + b + c = d$ qui se trouve sur la diagonale issue de O du parallélogramme. Par conséquent, la droite (cd) se trouve être la hauteur du triangle issue de c coupant la droite (ab) . Puisque l'addition vectorielle est commutative et associative, d se trouve être aussi sur les hauteurs issues de a et coupant (bc) et de b coupant (ca) . Cela montre que les trois

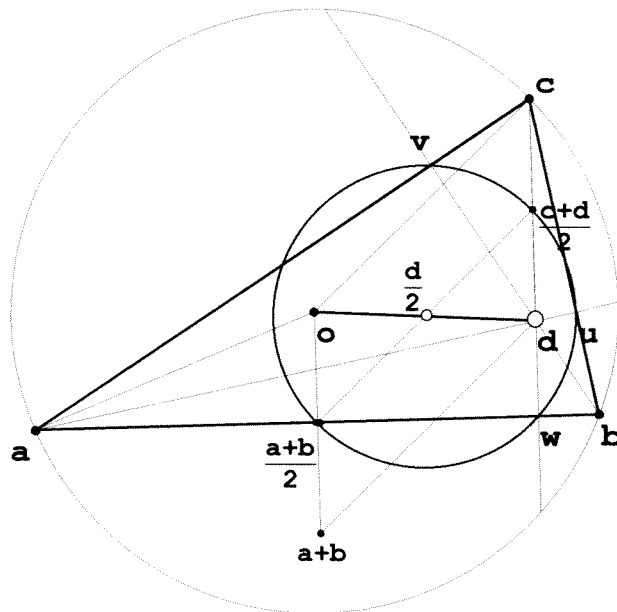


FIGURE 1

Cercle circonscrit, orthocentre et cercle d'Euler

* N.D.T. : Outre-Rhin, le cercle d'Euler est appelé *cercle de Feuerbach*, en hommage à FEUERBACH qui a démontré, en 1822, que ce cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits du triangle abc . Cf. A. GRAMAIN : *Géométrie élémentaire* – HERMANN.

hauteurs du triangle se coupent en *un* point, à savoir l'orthocentre $d = a + b + c$. Si nous faisons un instant, abstraction du cercle circonscrit, les quatre points a, b, c, d jouent exactement le même rôle : chacun d'eux est un orthocentre du triangle déterminé par les trois autres points. Nous parlons de manière appropriée de *quatre points orthogonalement liés* ou de *quadrangle orthocentrique*.

(1,2) À présent, soit $\frac{a+b}{2}$ le milieu de la corde $[ab]$ et du segment $[O, a+b]$. La droite passant par $\frac{a+b}{2}$ de vecteur directeur c rencontre $[cd]$, la section d'une hauteur, en son milieu $\frac{c+d}{2}$, et $\frac{d}{2}$ est le centre du parallélogramme déterminé par $O, a+b, d, c$. Par suite, le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\frac{d}{2}$, le milieu du segment $[Od]$, passe par les milieux $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ des côtés du triangle abc , par les milieux $\frac{a+d}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{c+d}{2}$ des « parties supérieures des hauteurs » (c'est-à-dire les segments d'extrémités d et respectivement a, b, c), et par les pieds des hauteurs u, v, w du triangle ; on l'appelle cercle d'EULER du triangle abc ¹. Autrement dit :

Soient les quatre points a, b, c, d orthogonalement liés, alors les quatre triangles déterminés par trois de ces points ont le même cercle d'EULER. Celui-ci passe d'une part par les six milieux des côtés de chaque quadrilatère complet formé par ces points, d'autre part par les pieds des hauteurs des triangles.

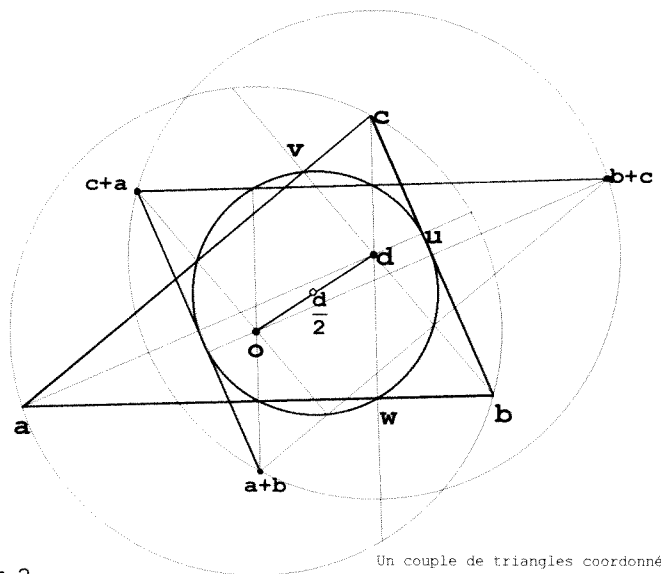


FIGURE 2

(1,3) Ajoutons encore aux sommets a, b, c, d de la fig. 1 les points $(b+c), (c+a), (a+b)$ (fig. 2), alors ces points se trouvent sur le cercle unité centré en d . Ce sont les sommets d'un nouveau triangle qui est le symétrique par rapport à $\frac{d}{2}$ du triangle abc précédent et dont O est l'orthocentre. Ainsi, les points $O, (b+c), (c+a), (a+b)$ sont liés orthogonalement ; les milieux des côtés du triangle abc

¹ K. W. FEUERBACH : *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren*. Nürnberg, 1822. Pour en savoir plus, cf. J. S. MACKAY : *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 11, 1893, p. 19 et suivantes, et J. LANGE : *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*, programme de Berlin, 1894 ; et également M. SIMON : *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jb.*, compte rendu annuel de la Fédération des Mathématiciens allemands, supplément I, Leipzig, 1906, p. 124-130, et M. ZACCHARIAS dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.*, III AB 9, Leipzig, 1914.

sont les milieux des parties supérieures des hauteurs du triangle $(b + c, c + a, a + b)$ et réciproquement. Nous avons alors huit triangles qui admettent le même cercle d'EULER passant par douze points particuliers. La droite passant par les centres O et d des deux cercles congruents est la droite d'EULER² des deux triangles. Les centres de gravité $\frac{d}{3}$ du triangle d'origine et $\frac{2d}{3}$ du triangle associé sont aussi situés sur cette droite.

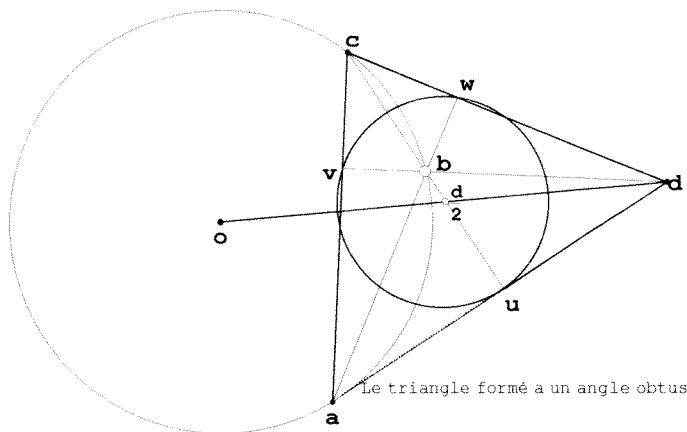


FIGURE 3

(1,4) Si deux des cinq points $O, \frac{d}{3}, \frac{d}{2}, \frac{2d}{3}, d$ sont connus, alors on en déduit les autres. En outre, si nous connaissons aussi le rayon du cercle d'EULER ou d'un des deux cercles circonscrits, alors ces trois cercles nous sont connus avec leurs centres. À une réserve près, indiquée plus loin, il y a une infinité de triangles abc , qui sont inscrits dans le cercle centré en O et ont d pour orthocentre. Choisissons par exemple le sommet c sur le cercle centré en O , alors le sommet opposé $(a + b)$ est déterminé sur le cercle centré en d comme le symétrique de c par rapport à $\frac{d}{2}$. Les parallèles (cd) et $(O, a+b)$ rencontrent le cercle d'EULER aux sommets d'un rectangle, dont les autres côtés portent les autres sommets a, b (respectivement $(b+c), (c+a)$) des triangles associés.

Si le triangle abc est *acutangle*, d se trouve à l'intérieur du cercle circonscrit centré en O . Si le triangle est *rectangle*, d se trouve sur le cercle circonscrit. Dans ce cas, le cercle d'EULER et le cercle circonscrit de centre d sont tangents, et la longueur $|Od|$ est le diamètre du cercle d'EULER. Si le triangle abc a un angle obtus, d se trouve hors du cercle centré en O , mais de sorte que le cercle d'EULER coupe le cercle circonscrit. La figure 3 montre comment est alors la configuration.

(1,5) Comme les triangles bcd, cad, abd et abc engendrés par les points orthogonalement liés a, b, c, d ont le même cercle d'EULER, leurs cercles circonscrits sont *congruents*. Les centres de ces cercles circonscrits sont les points associés $(b + c), (c + a), (a + b), O$, qui, de leur côté, sont également orthogonalement liés et qui

² L. EULER : *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, novi commentarii Ac. sc. Petrop., 11 (1765), p. 103-123 et surtout 114 ; *Opera omnia*, XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich, 1953, p. 139-157 et surtout 149. Le traité fut présenté à l'Académie de Saint-Petersbourg le 21 déc. 1763 en style ancien.

forment quatre triangles dont les cercles circonscrits sont congruents comme les précédents et ont pour centres les points a, b, c, d . Les huit cercles ainsi engendrés se coupent toujours à trois en chacun des points orthogonalement liés de ces deux paires de quadruplets.

L'équivalence des quatre points orthogonalement liés a, b, c, d se montre particulièrement bien avec le principe du triangle de HOLZ³ :

Les trois vecteurs partant d'un sommet et allant vers les autres sommets peuvent toujours être joints, en ajoutant l'un de ces vecteurs au bout d'un des deux autres mais en sens inverse, pour former une ligne brisée en trois parties, inscrite dans le cercle unité et dont les extrémités sont diamétralement opposées sur ce cercle.

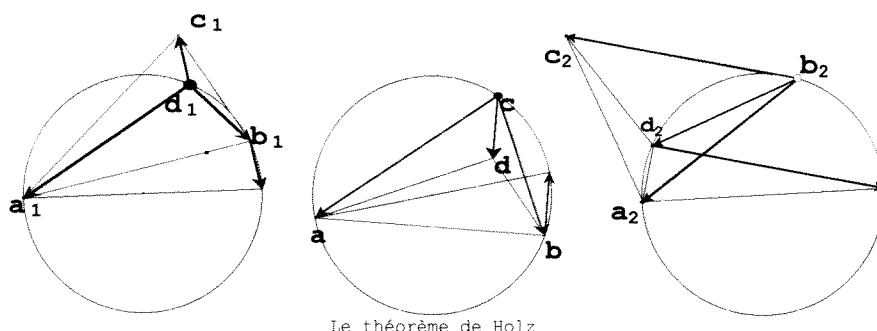


FIGURE 4

Si le quadruplet orthogonalement lié est déterminé à partir des longueurs des vecteurs, il en résulte une équation de degré 3 pour le diamètre du cercle dans lequel la ligne brisée peut être encastrée⁴. Cette équation a trois solutions réelles ; la disposition (leur ordre étant permutable) des vecteurs dans ces cercles est précisément illustrée de trois manières à la fig. 4⁵.

³ K. B. HOLZ : *Das ebene obere Dreieck*, Hagen i. W., 1944. Cf. aussi L. BIEBERBACH : *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Bâle, 1952, p. 114-115 et 156.

⁴ Le problème de l'encastrement est aujourd'hui cité de façon générale selon I. NEWTON : *Arithmetica universalis*, ch. XIII, 8^e/10^e conférence de 1675-76, éd. W. WHISTON, Cambridge, 1707, p. 97-113, ainsi par ex. chez H. DÖRRIE : *Mathematische Miniaturen*, Breslau, 1943, p. 31. Ce n'est pourtant pas tiré de NEWTON, mais de Fr. van SCHOOTEN : *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus...*, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden, 1646, p. 102-108 et 111-117, réimprimé dans une forme corrigée dans R. DESCARTES : *Géométrie*, éd. Fr. van Schooten, I, Amsterdam, 1659, p. 354-359 et 361-367. Ceci a sans doute servi de modèle à Newton qui possédait cette édition de la *Géométrie*.

Fixons par ex. $|bc| = u, |ca| = v, |ab| = w$, alors l'équation cubique (déjà présente chez Schooten) s'écrit

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)x + 2uvw.$$

⁵ Ces trois cas se présentent aussi chez SCHOOTEN⁴ et NEWTON⁴. L'élégante résolution cinématique de BIEBERBACH³, p. 115-116, au moyen d'une feuille transparente et d'un compas s'avère aussi, à bien y regarder, être une variante de la résolution de SCHOOTEN. Ce travail se trouve en annexe à Fr. VIÈTE : *Supplementum geometriae*, Tours, 1593, réimprimé dans les *Opera*, éd. Fr. van Schooten, Leiden, 1646, à l'occasion d'une insertion en rapport avec la trisection de l'angle.

2. De l'égalité des arcs.

(2,1) Soient (ab) et (cd) deux cordes parallèles du cercle unité (fig. 5), alors les arcs de cercle entre ces parallèles ont la même mesure. Orientons-les dans le sens positif inverse des aiguilles d'une montre ; alors, avec les notations de la figure, on a $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$, donc

$$\boxed{ab = cd}.$$

Abaissons par exemple la perpendiculaire issue de c à (ab) , elle rencontre le cercle en $-d = -\frac{ab}{c}$.

(2,2) Désormais, nous avons les points a, b, c sur le cercle unité (fig. 6) ; les hauteurs du triangle abc coupent le cercle, respectivement aux points $p = -\frac{bc}{a}$, $q = -\frac{ca}{b}$, $r = -\frac{ab}{c}$. Or on a par exemple

$\frac{c}{p} = -\frac{a}{b} = \frac{q}{c}$. Il en résulte que la droite (rv) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{prq}$.

Par conséquent, les hauteurs du triangle abc sont les bissectrices intérieures des angles du triangle adjoint pqr , et l'orthocentre du triangle initial est en même temps le centre du cercle inscrit du

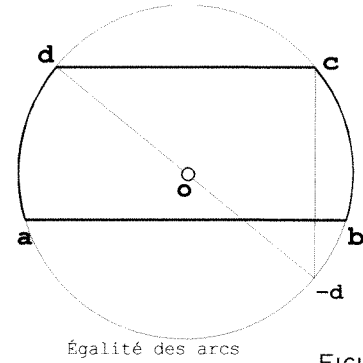


FIGURE 5

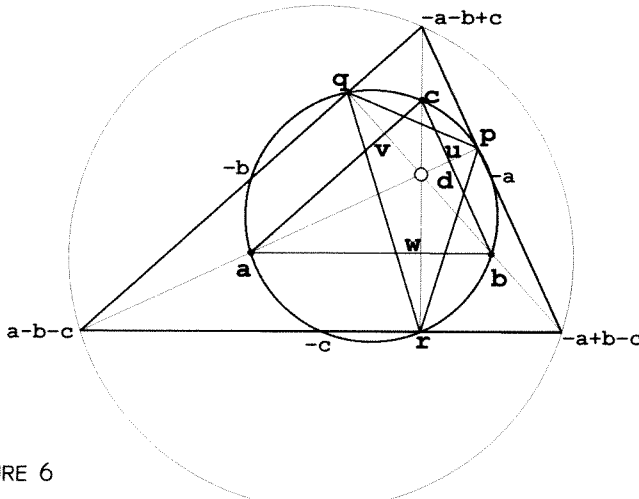


FIGURE 6

Triangle et triangle adjoint

nouveau triangle ⁶.

En outre, soit w (cf. (1,2)) le milieu du segment $[dr]$; ainsi $w = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right)$, etc., et $d - w = \frac{ab + cd}{2c}$, etc.

(2,3) À présent, construisons encore les points $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$, symétriques respectifs par rapport à O des points a, b, c . Après cela, la droite $(-c, r)$ par exemple est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{prq}$. Ajoutons aussi les autres bissectrices extérieures $(-a, p)$, $(-b, q)$ du triangle pqr ; un triangle en résulte, semblable au triangle abc par l'homothétie de centre d et de rapport 2. Maintenant, prenons par exemple le sommet $-a - b + c$ à la place de c ; alors, c est le milieu du segment $[-a - b + c, d]$. Le cercle initial est le cercle d'EULER de ce triangle agrandi, dont le cercle circonscrit est de rayon 2. Par ce moyen, nous sommes revenus d'une autre manière aux premiers résultats.

⁶ Cf. Ph. NAUDÉ dans les *Miscellanea Berolinensia* 5, 1737, p. 17, ou bien FEUERBACH ¹ : § 24.

Nous pouvons aussi exprimer les résultats sans fraction en remplaçant p par p^2 , q par q^2 et r par r^2 . Alors nous devons aussi remplacer a par $-qr$, b par $-rp$ et c par $-pq$ et nous obtenons le centre du cercle inscrit sous la forme $-(qr + rp + pq)$, les centres des cercles exinscrits sous la forme $(-qr + rp + pq)$, $(qr - rp + pq)$, $(qr + rp - pq)$.

3. À propos du coefficient directeur et de l'équation de droite.

(3,1) Soient les points a, b sur le cercle unité; traçons le diamètre parallèle à la corde $[ab]$, passant par le centre O du cercle, d'extrémités x et $-x$. Ainsi, on a $-x^2 = ab$. Le produit ab est appelé le *coefficient directeur* de la corde $[ab]$. Les cordes ayant le même coefficient directeur sont parallèles.

Comme exemple d'application, traitons le théorème de la droite de WALLACE⁷ :

Soient quatre points a, b, c, d sur le cercle unité, alors les perpendiculaires aux côtés (bc) , (ca) , (ab) du triangle abc passant par d rencontrent ces côtés respectivement aux points

$$u = \frac{1}{2} \left(b + c + d - \frac{bc}{d} \right), v = \frac{1}{2} \left(c + a + d - \frac{ca}{d} \right),$$

$$w = \frac{1}{2} \left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right).$$

Nous affirmons :

Les points u, v, w sont situés sur une seule et même droite, la droite de WALLACE du triangle abc par rapport au point d appartenant au cercle circonscrit au triangle.

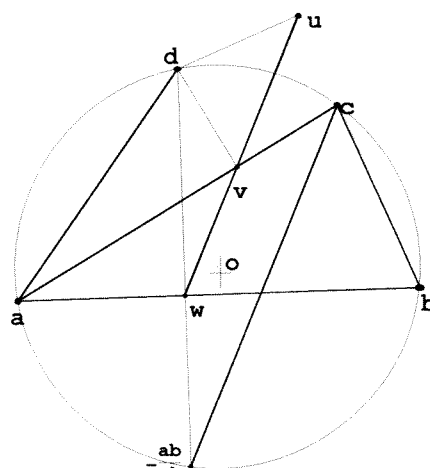
Par exemple, $amvd$ est un quadrilatère inscriptible mais non inscrit dans le cercle unité. Par suite,

$$\widehat{dav} = \widehat{dvw}$$

La parallèle à (vw) passant par c coupe la droite (dw) sous le même angle. Ce point d'intersection se trouve sur le cercle unité. Étant donné que (ab) et (dw) sont perpendiculaires, le point d'intersection est représenté par $-\frac{ab}{d}$. Le coefficient directeur de la droite (vw) est donc $-\frac{abc}{d}$. Ce terme est

symétrique en a, b, c . C'est pourquoi les trois droites (vw) , (wu) , (uv) ont le même coefficient directeur ; en conséquence, elles coïncident.

(3,2) Soient a, b deux points sur le pourtour du cercle unité et z un point qui n'est pas situé sur la droite (ab) (fig. 8). Ajoutons ensuite $(a+b)$ à a, O, b pour avoir un losange et plaçons s le symétrique de z par rapport à la diagonale $(O, a+b)$ du losange. Tandis que nous formons les vecteurs



Droite de Wallace

FIGURE 7

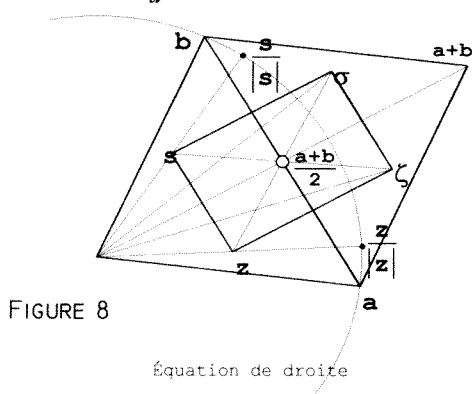


FIGURE 8

Équation de droite

⁷ W. WALLACE dans Th. LEYBOURNE : *Mathematical repository* (old series) 2, 1798, p. 111.

N.D.T. : Cette droite est plus couramment dite « de SIMSON » dans la littérature française.

unité $\frac{s}{|s|}$ et $\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|}$, nous obtenons les points d'intersection des vecteurs s et $\bar{z}$ (ou de leurs prolongements sur le cercle) avec le cercle unité. Le segment joignant les extrémités de ces vecteurs unité est parallèle à la corde $[ab]$; ainsi, on a

$$\frac{s}{|s|} \times \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = ab. \text{ Or, on a } |s| = |\bar{z}| ; \text{ par conséquent, } |s| \times |\bar{z}| = \bar{z}\bar{z} ; \text{ d'où } \boxed{s = ab\bar{z}} .$$

Maintenant, construisons le symétrique de $\bar{z}$ par rapport au point $\frac{a+b}{2}$ milieu de la corde $[ab]$, qui est $\sigma = a + b - \bar{z}$ et le symétrique de s par rapport au même point, qui est $\boxed{\zeta = a + b - ab\bar{z}}$.

Donc f est en même temps le symétrique de $\bar{z}$ par rapport à la corde $[ab]$. Le point $\bar{z}$ est *sur* cette corde si et seulement si $\sigma = \bar{z}$.

Par suite, $\boxed{\bar{z} + ab\bar{z} = a + b}$ est l'équation de la droite (ab) . Le membre de gauche

$\bar{z} + ab\bar{z}$ est appelé la *partie directrice* ; elle est déterminée précisément par le coefficient directeur. Le membre de droite est appelé le *terme constant*. Il est déterminé dans l'équation par la place des extrémités de la corde $[ab]$ (ou d'une manière plus générale : d'un point connu de la droite). Cela fournit – vu que nous pouvons remplacer $\bar{z}$ aussi bien par a que par b – une vérification.

(3,3) Revenons à présent sur la droite de WALLACE (3,1). La partie directrice de son équation est $\bar{z} - \frac{abc}{d} \bar{z}$; on trouve le terme constant en faisant par exemple

$\bar{z} = u$. Nous obtenons après une transformation aisée

$$\boxed{\bar{z} - \frac{abc}{d} \bar{z} = \frac{1}{2} \left[(a + b + c + d) - \frac{abc}{d} (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) \right]}$$

Cette équation est symétrique en a, b, c ; c'est pourquoi la droite qu'elle représente passe non seulement par u , mais aussi par v et w . Naturellement, cela se vérifie aussi par le calcul. En outre, le point $t = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ se trouve sur la droite de WALLACE. Ici, $\frac{1}{2}(a + b + c)$ est le centre du cercle d'EULER du triangle abc ; pour finir, on dispose le vecteur $\frac{d}{2}$ de longueur $\frac{1}{2}$ en ce point. Dès lors, t est situé sur ce cercle d'EULER, mais aussi sur le cercle d'EULER des triangles bcd, cad, abd .

Dans un quadrilatère inscrit, on considère pour chaque sommet la droite de WALLACE relative au triangle formé par les trois autres sommets ; les quatre droites ainsi engendrées passent par un seul et même point, à savoir le point commun d'intersection des cercles d'EULER de ces quatre triangles⁸.

⁸ Problème de E. LEMOINE dans les *Nouv. annal.* (2) 8, 1867, p. 47.

4. Autres exemples d'application.

(4,1) Nous affirmons :

Les parallèles respectives aux bissectrices intérieures d'un triangle passant par les milieux des côtés de celui-ci se coupent en un même point.

Comme à la fin de (2,2), désignons les sommets du triangle inscrit dans le cercle unité par p^2, q^2, r^2 . Par suite, les milieux des arcs opposés aux sommets sur le cercle unité sont notés $-qr, -rp, -pq$.⁹ La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{q^2 p^2 r^2}$ passe

par p^2 et $-qr$; elle a ainsi pour partie directrice $\zeta - p^2 q r \bar{\zeta}$. La parallèle à cette bissectrice passant par le milieu du côté opposé $\frac{1}{2} (q^2 + r^2)$ a pour équation :

$$\zeta - p^2 q r \bar{\zeta} = \frac{1}{2} (q^2 + r^2 - p^2 \frac{r}{q} - p^2 \frac{q}{r}).$$

De même :

$$\zeta - p q^2 r \bar{\zeta} = \frac{1}{2} (p^2 + r^2 - q^2 \frac{r}{p} - q^2 \frac{p}{r}).$$

En soustrayant la première équation multipliée par q de la seconde multipliée par p et en divisant par $p - q$, nous obtenons :

$$\zeta = \frac{1}{2} (p^2 + q^2 + r^2 + q r + r p + p q).$$

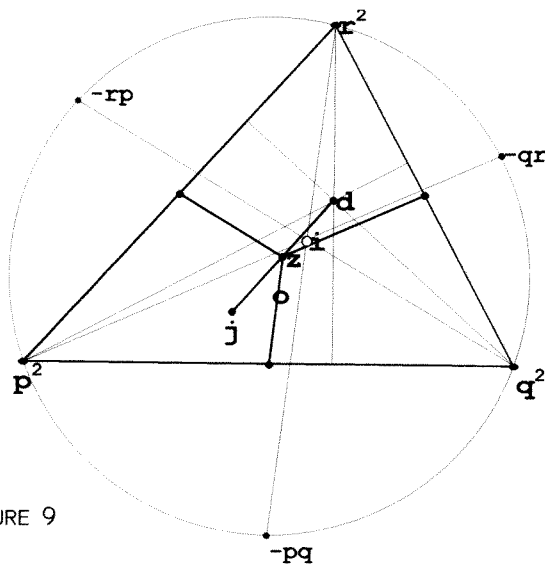


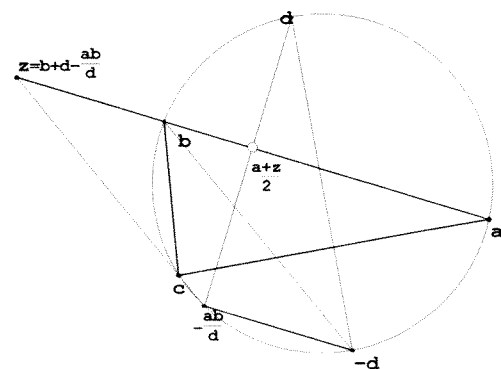
FIGURE 9

Trois droites qui passent par un point

Cette expression est construite symétriquement en p, q, r ; par conséquent, ζ se trouve sur les trois parallèles aux bissectrices.

Construisons le symétrique du centre du cercle inscrit $i = -(qr + rp + pq)$ par rapport au centre O du cercle circonscrit, à savoir $j = -i$; alors ζ est placé au milieu du segment $[jd]$ où $d = (p^2 + q^2 + r^2)$ est l'orthocentre du triangle. Des relations semblables s'appliquent aussi à l'ensemble des bissectrices extérieures.

(4,2) Dans un traité d'ARCHIMÈDE devenu accessible seulement depuis 1927



La prémisses d'Archimède

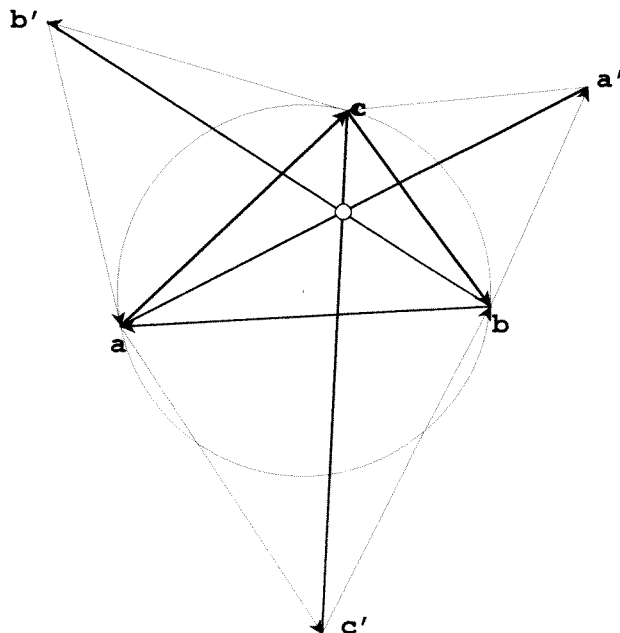
FIGURE 10

⁹ Hofmann n'évoque pas l'ambiguïté de signe qui existe sur les racines carrées des nombres complexes p^2, q^2 et r^2 . Il faut choisir par exemple q et r de façon que $\frac{p^2 + q^2}{-qr}$ soit positif (ndlr).

après avoir été traduit de l'arabe ¹⁰, on trouve le théorème suivant qui est équivalent au théorème d'addition des fonctions trigonométriques :

Sur le cercle unité se trouvent quatre points a, b, c, d , de sorte que d est le milieu de l'arc $\widehat{abc}$. Alors la perpendiculaire issue de d à la plus longue des cordes $[ab]$ et $[ac]$ partage en deux parties égales la somme $|ab| + |bc|$ des longueurs de ces cordes (fig.10).

Supposons qu'on ait $|ab| > |bc|$. Comme d coupe l'arc $\widehat{abc}$ en deux parties égales, on a $c = \frac{d^2}{a}$. Prolongeons la corde $[ab]$ au-delà de b jusqu'à ε de sorte que $|b\varepsilon| = |bc|$, alors (εc) est parallèle à la bissectrice intérieure $(b, -d)$ de l'angle $\widehat{abc}$. La perpendiculaire à (ab) issue de d rencontre le cercle encore une fois en $-\frac{ab}{d}$. Comme les cordes $[bc]$ et $[-d, -\frac{ab}{d}]$ sont entre des cordes parallèles du cercle, elles sont de même longueur. En outre, comme $(-\frac{ab}{d}, -d, b, \varepsilon)$ est un parallélogramme, on a $\varepsilon - b = -\frac{ab}{d} + d$; donc $\varepsilon = b + d - \frac{ab}{d}$. Par suite, $\frac{a + \varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right)$ est le milieu du segment $[a\varepsilon] = [ab] \cup [b\varepsilon]$ avec $|a\varepsilon| = |ab| + |b\varepsilon| = |ab| + |bc|$. D'après (2,2), ce point est aussi le pied de la perpendiculaire à (ab) issue de d . Par ce moyen, le théorème, connu sous le nom de prémisses d'ARCHIMÈDE, est démontré.



Le point de Fermat

FIGURE 11

(4,3) Soient a, b, c les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors $b = a\varepsilon, c = a\varepsilon^2$ où

$\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \bar{\varepsilon}$ sont les racines troisièmes de l'unité.

Soient maintenant u, v deux points quelconques du plan complexe, alors ils sont complétés en un triangle équilatéral, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, par ce point w pour lequel on a $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0$.

¹⁰ C. SCHOY : *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Bīrūnī...*, éd. J. Ruska & H. Wieleitner, Hanovre, 1927, p. 3. Sur la portée de la prémisses d'Archimède, cf. J. TROPKE dans *Archiv f. Geschichte d. Math., d. Nat. u. d. Technik* 10, 1928, p. 430-462, en particulier p. 433-436.

Donnons-nous un triangle abc orienté dans le sens des aiguilles d'une montre inscrit dans le cercle unité, et construisons des triangles équilatéraux sur ses côtés à l'extérieur. Leurs sommets libres a' , b' , c' doivent être associés respectivement avec les côtés $[cb]$, $[ac]$, $[ab]$, pour que nous obtenions des triangles équilatéraux orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sur lesquels nous pouvons appliquer la formule ci-dessus.

$$\text{Il s'ensuit } \begin{cases} a' = -\varepsilon^2 b - \varepsilon c \\ b' = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a \\ c' = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a - a' = a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c = t \\ b - b' = b + \varepsilon^2 c + \varepsilon a = t\varepsilon \\ c - c' = c + \varepsilon^2 a + \varepsilon b = t\varepsilon^2 \end{cases}.$$

Il en résulte que les vecteurs $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ sont de même longueur et forment deux à deux un angle de $\frac{2\pi}{3}$.

La parallèle à la droite (aa') passant par l'origine coupe le cercle unité aux points $\frac{t}{|t|}$ et $-\frac{t}{|t|}$; de cette manière, le coefficient directeur de cette droite est égal à $-\frac{t^2}{|t|^2} = -\frac{t}{\bar{t}}$ et l'équation de la

droite (aa') est $\bar{t}(\bar{z} - a) = t(\bar{z} - \bar{a})$, correspondant à l'équation de (bb') qui est $\varepsilon^2 \bar{t}(\bar{z} - b) = \varepsilon t(\bar{z} - \bar{b})$ et à l'équation de (cc') qui est

$$\varepsilon \bar{t}(\bar{z} - c) = \varepsilon^2 t(\bar{z} - \bar{c}).$$

Si on additionne ces trois équations, alors les deux membres s'annulent; donc la troisième équation résulte des deux premières et, de ce fait, les trois droites passent par le même point $\bar{z}$ connu sous le nom de point de FERMAT du triangle¹¹. Il se trouve à l'intérieur du triangle si chacun des trois angles est plus petit que $\frac{2\pi}{3}$.

(4,4) Les points d'intersection des trisectrices intérieures d'un triangle les plus proches des côtés sont les sommets d'un triangle équilatéral. Pour montrer ce théorème intéressant qui a produit toute une littérature¹², nous désignerons les sommets du triangle inscrit

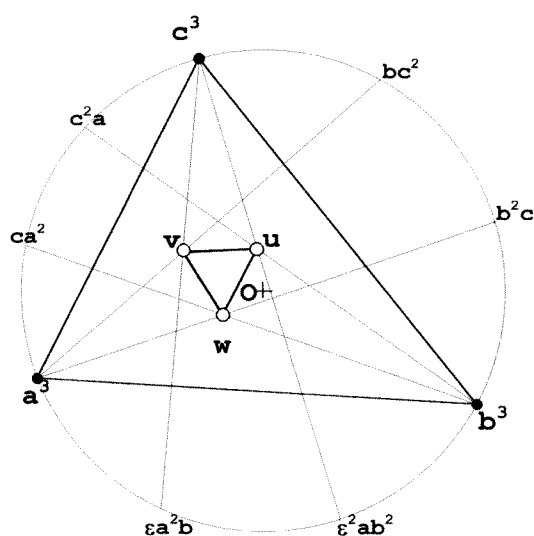


Illustration du théorème de Morley

¹¹ Le point de FERMAT (N.D.T. : dit aussi de TORRICELLI) a été découvert par TORRICELLI, en rapport avec le problème de FERMAT selon TORRICELLI (P. DE FERMAT : *Œuvres* I, éd. P. Tannery – Ch. Henry, Paris, 1891, p. 153 ; cf. *Œuvres* V, éd. C. de Waard, Paris, 1922, p. 127-128, et E. TORRICELLI : *Opere* III, éd. G. Vassura, Faenza, 1919, p. 425-431).

¹² Ce théorème fut présenté en 1904 par Fr. MORLEY par lettre à des amis en Angleterre. Il a été imprimé pour la première fois dans W. L. MUIR : *Morley's Trisections Theorem*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. 32, 1913.

dans le cercle unité par a^3, b^3, c^3 , et les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (b^3, c^3) ne comprenant pas a^3 par b^2c et bc^2 , et encore les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (c^3, a^3) ne comprenant pas b^3 par c^2a et ca^2 (fig. 12). Soit t le point d'intersection de la trisectrice de l'angle (b^3, c^3, a^3) la plus proche de a^3 avec le troisième arc, alors on a $\frac{t}{a^3} \times \frac{b^2c}{b^3} \times \frac{c^2a}{c^3} = \varepsilon$, donc $t = \varepsilon a^2b$.

L'autre point de cet arc situé sur la seconde trisectrice est par conséquent $\varepsilon^2 ab^2$. Le point d'intersection w des trisectrices les plus proches de $[a^3, b^3]$ résulte du système d'équations :

$$\begin{cases} w + a^3 b^2 c \bar{w} = a^3 + b^2 c \\ w + a^2 b^3 c \bar{w} = b^3 + a^2 c \end{cases}.$$

Nous éliminons $\bar{w}$ et simplifions par $a - b$.

Ainsi nous trouvons :

$$w = -ab(a + b) + c(a^2 + ab + b^2),$$

de même

$$u = -\varepsilon b c (\varepsilon b + c) + a(\varepsilon^2 b^2 + \varepsilon bc + c^2) \text{ et}$$

$$v = -\varepsilon c a (\varepsilon c + a) + \varepsilon b (\varepsilon^2 c^2 + \varepsilon ac + a^2).$$

À présent, on a $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = abc(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$; c'est pourquoi uvw est effectivement un triangle équilatéral.

5. De la longueur des vecteurs.

(5,1) Soient p et q deux points sur le pourtour du cercle unité, alors le carré de leur distance est déterminé par :

$$|q - p|^2 = (q - p)(\bar{q} - \bar{p}) = \frac{(q - p)^2}{-pq}.$$

Donc la mesure affectée d'un signe de la longueur réelle du vecteur $\vec{pq}$ est :

$$\boxed{|q - p| = \frac{q - p}{\sqrt{-pq}} = |\vec{pq}|}$$

Son signe change quand on échange p et q .

(5,2) Affectons à présent aux sommets d'un triangle inscrit dans le cercle unité les nombres a^2, b^2, c^2 , comme à la fin de (2,3) ; le centre du cercle d'EULER est alors défini par :

$$\frac{d}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

et le centre du cercle inscrit par $i = -(bc + ca + ab)$. Ainsi, on a :

$$\boxed{\frac{d}{2} - i = \frac{(a + b + c)^2}{2} \text{ et } \left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{2abc}}$$

Pour déterminer la mesure de la longueur du rayon du cercle inscrit, abaissons sur la corde (a^2, b^2) , d'équation $\bar{z} + a^2 b^2 \bar{z} = a^2 + b^2$ (cf. (3,2)), la perpendiculaire issue de i . Son équation a pour premier membre $\bar{z} - a^2 b^2 \bar{z}$ et pour terme constant

$i - a^2 b^2 \bar{i} = \frac{(ab - c^2)(a + b)}{c}$. En se débarrassant de $\bar{z}$ par addition des deux équations de droite, on obtient après une transformation facile

$$\bar{z} - i = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{2abc} \text{ et } \rho = \pm \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{2abc}$$

En outre, on a $r = 1$. D'autre part, on a :

$$|i|^2 = \frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)}{abc} = 1 + \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = r^2 \pm 2rp$$

Mais, comme le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit sont au plus distants de r , le signe $+$ ne concorde pas avec ρ . Il en résulte la relation d'EULER ¹³

$$|i|^2 = r^2 - 2rp$$

Si, au lieu du *cercle inscrit*, on considère l'un des *cercles exinscrits*, il faut prendre le signe

$+$ devant $2rp_k$. De plus, nous obtenons : $\left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{r}{2} - \rho \geq 0$

De ce fait, le cercle inscrit est *tangent intérieurement* au cercle d'EULER et est complètement *entouré* par celui-ci. Ce qui se traduit par : « Les *cercles exinscrits* sont tangents extérieurement au cercle d'EULER ¹⁴ ».

(5,3) En plus, il s'ensuit, de façon analogue :

$$\rho_a = - \frac{(b+c)(b-a)(c-a)}{2abc}$$

La formule de STEINER ¹⁵ en résulte après un calcul élémentaire :

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$

Le milieu du côté $[a^2, b^2]$ du triangle est $\frac{a^2 + b^2}{2}$. Par conséquent, la distance du centre du cercle circonscrit à ce côté est égale, avec le signe convenable, à $\pm \frac{a^2 + b^2}{2ab}$.

Ainsi, la somme des distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés est égale à $\frac{(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b}{2abc} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b) - 2abc}{2abc} = \pm r + \rho$

¹³ N.D.T. : HOFMANN écrit ici *relation de CHAPPLE – EULER* et fait référence à :

W. CHAPPLE dans les *Miscellanea curiosa mathematica*, 1, 1746, p. 123 (cité d'après SIMON ¹ p. 140).

¹⁴ EULER ² a certes le calcul de $|i|^2$, mais pas encore la forme $r^2 - 2rp$.

¹⁵ Cette proposition provenant en réalité de FEUERBACH ¹, p. 4, est cependant toujours citée d'après STEINER dans la nouvelle littérature ; ainsi, par exemple, chez DÖRRIE ³, p. 59-60. Mais là, il manque l'indication que la somme est à prendre *algébriquement*.

La somme des distances du centre du cercle circonscrit aux côtés du triangle est donc égale à $r + \rho$ si le triangle est *acutangle* ou *rectangle*. Si le triangle a *un angle obtus*, la distance au plus long des côtés est à *retrancher* de la somme des deux autres distances. $r + \rho$ est donc la somme *algébrique* des distances du centre du cercle circonscrit à chacun des côtés du triangle.

(5,4) Soit $\mathcal{U}$ le cercle circonscrit et $\mathcal{I}$ le cercle inscrit à un triangle, alors il y a une infinité d'autres triangles admettant $\mathcal{U}$ comme cercle circonscrit et $\mathcal{I}$ comme cercle inscrit. Les cercles d'EULER de ces triangles ont tous le même rayon $\frac{r}{2}$; ils sont tangents intérieurement au cercle inscrit. Quand le triangle se déplace dans $\mathcal{U}$ autour de $\mathcal{I}$, le cercle d'EULER tourne autour du cercle inscrit qui reste stable. Son centre reste à la distance constante

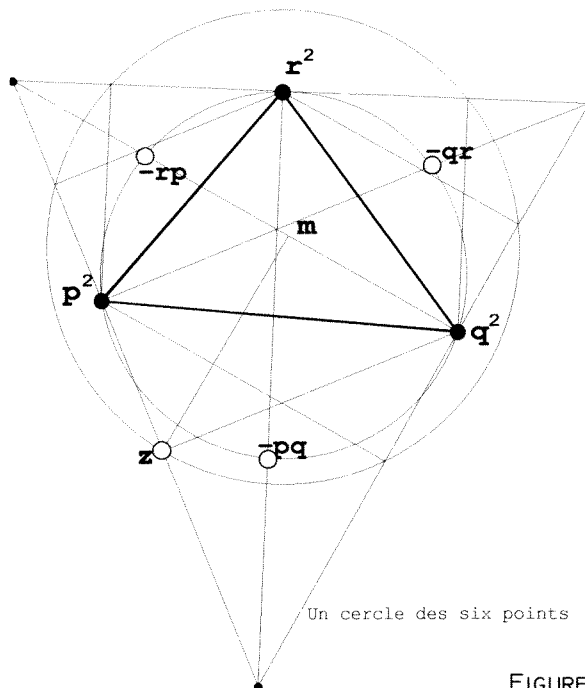


FIGURE 13

$\frac{r}{2} - \rho$ de i et décrit donc un cercle concentrique au cercle inscrit. L'orthocentre du triangle décrit aussi un cercle, dont le centre est le symétrique $2i$ du centre O du cercle circonscrit par rapport à i , et le rayon est égal à $r - 2\rho$.

Ces propriétés sont aussi valables pour les cercles d'EULER et les orthocentres des triangles inscrits dans le cercle $\mathcal{U}$ et ayant un cercle convenable pour cercle exinscrit.

Des relations semblables s'appliquent aussi à l'infinité de cercles inscrits ou de cercles exinscrits des triangles qui ont, comme en (1,4), même cercle circonscrit et même cercle d'EULER ; cependant, cette fois, la valeur de α change constamment.

(5,5) *Les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur ses bissectrices extérieures sont sur un même cercle*¹⁶(fig. 13).

Cette proposition est une conséquence de celle de (4,1). En effet, elle équivaut à la suivante : les six points en question sont à la même distance du point d'intersection $m = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq)$ des parallèles aux bissectrices intérieures du triangle passant par les milieux des côtés.

¹⁶ Théorème d'EUTARIS (pseudonyme de RESTIAU) dans H. VUIBERT : *Journ. Math. Élément.* (Bruxelles), Novembre 1877, cité d'après SIMON¹ p. 135.

Pour le prouver, coupons la bissectrice extérieure $\tilde{z} + p^2 q r \bar{\tilde{z}} = p^2 + q r$ par la perpendiculaire à celle-ci issue de q^2 , à savoir $\tilde{z} - p^2 q r \bar{\tilde{z}} = q^2 - \frac{p^2 r}{q}$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= \frac{1}{2} \left(p^2 + q^2 + q r - p^2 \frac{r}{q} \right) \text{ donc} \\ m - \tilde{z} &= \frac{p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r}{2 q} \text{ et} \\ |m - \tilde{z}|^2 &= \frac{(p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r)(p^2 q + q^2 r + r^2 p + p q r)}{4 p^2 q^2 r^2}\end{aligned}$$

Cette expression est symétrique en p, q, r ; c'est pourquoi tout est démontré. Naturellement, cette proposition varie aussi de façon appropriée selon que l'on prend en compte les bissectrices extérieures ou intérieures.

(5,6) Un peu plus compliquée, et difficilement accessible d'une autre façon, par des moyens élémentaires, est la question suivante ¹⁷ :

Comment résoudre le problème de la construction d'un triangle connaissant le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre ?

Prenons pour origine le centre du cercle circonscrit ; le centre du cercle inscrit est alors défini par i et l'orthocentre par d . Nous obtenons $2i$ et connaissons

$|i|^2 = r(r-2\rho)$ et $|d-2i| = r-2\rho$, donc aussi r et ρ , tous deux constructibles à la règle et au compas. Prenons r pour unité de longueur, on a alors :

$$\begin{aligned}a + b + c &= \sqrt{d-2i} ; bc + ca + ab = -i, \\ abc &= \frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)}{|i|^2} = -\frac{\sqrt{d-2i}}{\overline{i}} \text{ et} \\ \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d \\ b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 = i^2 + \frac{2(d-2i)}{\overline{i}} \\ a^2 b^2 c^2 = \frac{d-2i}{\overline{i}^2} \end{cases}\end{aligned}$$

On est amené à un problème du troisième degré ; les sommets du triangle sur le cercle circonscrit sont les solutions de l'équation cubique :

$$\tilde{z}^3 - d\tilde{z}^2 + \left[i^2 + \frac{2(d-2i)}{\overline{i}} \right] \tilde{z} - \frac{d-2i}{\overline{i}^2} = 0.$$

Comme les coefficients de cette équation peuvent être exprimés rationnellement en fonction de d et i , le triangle est déterminé de façon unique.

6. Les tangentes.

(6,1) Dans l'équation de droite de (3,2), déplaçons le point b sur le cercle unité jusqu'en a , nous obtenons alors l'équation de la tangente en a au cercle unité sous la forme $\boxed{\tilde{z} + a^2 \bar{\tilde{z}} = 2a}$.

¹⁷ Problème d'EULER ³ : *Opera* a.a.0., p. 150-151. Cf. DÖRRIE ³, p. 20-26.

D'après cela, les tangentes au cercle unité en des points a et b du pourtour de ce cercle se coupent au point $\zeta = \frac{2ab}{a+b}$. En outre, ζ est l'image inverse du milieu $\frac{a+b}{2}$ de $[ab]$.

L'équation de la polaire par rapport au cercle unité $\bar{a}\zeta + a\bar{\zeta} = 2$ s'ensuit en divisant par a . Si a est un point *quelconque* du plan, cette équation représente la polaire du point a par rapport au cercle unité. Inversement, soit $p\zeta + q\bar{\zeta} = r$ l'équation d'une droite ne passant pas par l'origine ($r \neq 0$) ; alors, en la multipliant par $\frac{2}{r}$, on obtient l'équation d'une polaire. Puisqu'il y a un réel à droite, il faut que les coefficients de ζ et de $\bar{\zeta}$ soient des complexes conjugués ; le coefficient $\frac{2q}{r} = a$ caractérise le *pôle* de la droite. Par ce moyen, toutes les propriétés des polaires relatives au cercle unité sont immédiatement déductibles. En remplaçant dans le second membre de l'équation de la polaire $+2$ par -2 , on obtient aussi l'équation de l'antipolaire et toutes les propriétés de l'antipolarité.

(6,2) Démontrons tout d'abord le théorème dit de NEWTON ¹⁸ :

La droite passant par les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle passe par le centre de ce cercle.

Soient a, b, c, d les points de contact des quatre tangentes avec le cercle inscrit, considéré comme cercle unité ; ainsi, le milieu de l'une des diagonales est

$$m = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{\sum abc}{(a+b)(c+d)}.$$

Par suite, $m : \bar{m} = \sum abc : \sum a$. Or $m : \bar{m}$ définit la direction du vecteur m et est manifestement construit de façon symétrique en a, b, c, d . Donc les deux vecteurs allant du centre du cercle inscrit aux milieux des diagonales sont colinéaires ; par conséquent, la *droite des milieux* passe par le centre du cercle inscrit.

(6,3) Les tangentes au cercle unité en trois points a, b, c , sommets d'un triangle, se coupent aux points $\frac{2bc}{b+c}, \frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}$. Le centre u du cercle circonscrit au triangle tangentiel se trouve, par exemple, sur la médiatrice du segment $\left[\frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}\right]$. La partie directrice de l'équation de cette médiatrice est $\zeta - a^2\bar{\zeta}$ et le terme constant est

$$\frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} - a^2\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

La médiatrice a donc pour équation :

$$\zeta - a^2\bar{\zeta} = \frac{2a(bc - a^2)}{(a+b)(c+a)}.$$

De même :

¹⁸ Cf. SIMON ¹ p. 162 et DÖRRIE ³ p. 52-54. Ce problème est à relier à la détermination du lieu des centres de toutes les ellipses qui sont inscriptibles dans un quadrilatère convexe. Je n'ai pas pu trouver ce passage chez NEWTON.

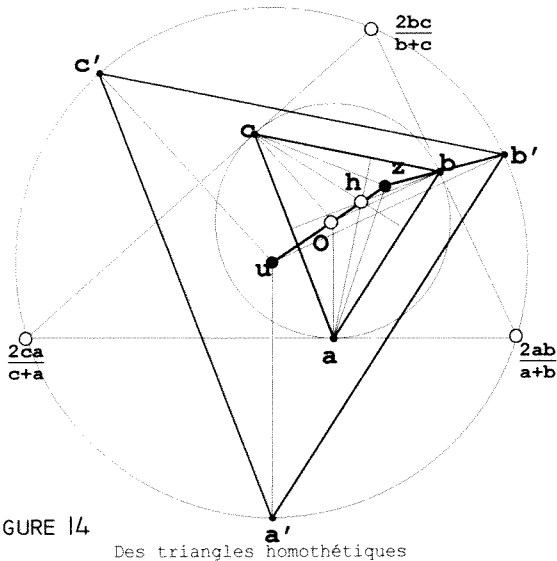


FIGURE 14

Des triangles homothétiques

$$\tilde{z} - b^2 \tilde{z} = \frac{2b(ca - b^2)}{(a+b)(b+c)}.$$

D'où :

$$u = \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \text{ et } \bar{u} = \frac{2(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

et, par exemple,

$$\frac{2bc}{b+c} - u = \frac{2b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

 avec le module $\pm \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

C'est l'expression du rayon r du cercle circonscrit au triangle tangentiel. Elle vérifie encore la relation d'EULER (5,2). Il en ressort que r doit avoir le signe $-$. Donc,

on a $a + b + c = -\frac{\rho u}{r}$. Il s'ensuit que O , le

centre du cercle inscrit dans le triangle tangentiel et en même temps le centre du cercle circonscrit au triangle de départ, partage le segment $[ub]$, où u est le centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel et $b = a + b + c$ l'orthocentre du triangle de départ, dans le rapport $r : \rho$ à partir de u . Cf. fig. 14.

Soit maintenant a' le point d'intersection de la droite passant par u , de vecteur directeur a , avec le cercle circonscrit, alors on a $a' - u = \frac{ar}{\rho}$, donc $a' = \frac{2abc}{(c+a)(a+b)}$, etc. Les rayons $[ua']$, $[ub']$, $[uc']$ sont parallèles aux rayons $[Oa]$, $[Ob]$, $[Oc]$; donc les triangles abc et $a'b'c'$ sont *semblables et semblablement placés*. Le rapport des mesures entre deux segments correspondants des deux figures est $\frac{r}{\rho}$ et le centre de l'homothétie est $\tilde{z} = -u \times \frac{\rho}{r-\rho}$. Par conséquent, $\tilde{z}$ divise extérieurement le segment $[uO]$, prolongé du côté de O , dans le rapport $\frac{r}{\rho}$ à partir de u .

Les points b et $\tilde{z}$ sont fixes quand O et u sont fixes, c'est-à-dire pour tous les triangles inscrits dans le cercle de centre u et circonscrits au cercle de centre O . Les triangles formés par les points de contact des tangentes au cercle inscrit ont un seul et même cercle d'EULER.

(6,4) *Quand un quadrilatère circonscrit est-il en même temps un quadrilatère inscrit, c'est-à-dire bicentrique ?*

Nous partons de quatre points a, b, c, d sur le cercle unité, points de contact des côtés d'un quadrilatère circonscrit à ce cercle. Nous supposons de plus que les cordes $[ac]$ et $[bd]$ se coupent à l'intérieur du cercle (fig. 15). Pour que le quadrilatère soit en même temps *inscriptible*, il faut, par exemple, que les angles des sommets opposés $\frac{2ab}{a+b}$ et $\frac{2cd}{c+d}$ soient supplémentaires, donc que les arcs $\widehat{ab}$ et $\widehat{cd}$ du cercle

unité aient pour somme un demi-cercle. En conséquence, les arcs $\widehat{ab}$ et $\widehat{cd}$ sont égaux, donc $-\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ ou $\boxed{ac + bd = 0}$

Ce qui signifie : *Le quadrilatère des tangentes est inscriptible quand les diagonales du quadrilatère formé dans le cercle inscrit par les points de contact se coupent à angle droit.*

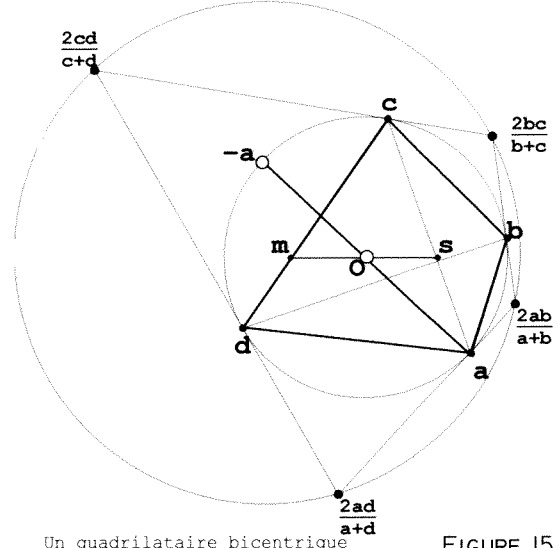
Les équations de ces diagonales sont

$$\tilde{x} + ac\tilde{x} = a + c, \tilde{x} + bd\tilde{x} = b + d \text{ donc}$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ est leur point de concours et en}$$

même temps (cf. (3,3)) le point commun aux cercles d'EULER appartenant aux quatre triangles du cercle inscrit qu'on peut former avec les points a, b, c, d . La réciproque est évidemment vraie :

Si le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère inscrit se trouve sur chacun des cercles d'EULER des quatre triangles formés avec trois des quatre sommets du quadrilatère inscrit, alors les diagonales de ce quadrilatère se coupent à angle droit.



Un quadrilatère bicentrique

FIGURE 15

(6,5) Revenons à présent à notre quadrilatère bicentrique et cherchons le centre m du cercle circonscrit : celui-ci se trouve par exemple sur les médiatrices (cf. (6,3))

$$\tilde{x} - a^2\tilde{x} = \frac{2a(bd - a^2)}{(d+a)(a+b)} \text{ et } \tilde{x} - c^2\tilde{x} = \frac{2c(bd - c^2)}{(b+c)(c+d)} .$$

Compte tenu de $ac + bd = 0$, nous obtenons

$$m = \frac{2abcd \sum a}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

Or, on a

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = (ac+bd)^2 + \sum a^2(bc+cd+db)$$

et

$$\sum a \times \sum abc = 4abcd + \sum a^2(bc+cd+db) ,$$

donc, dans le cas présent, $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = -4abcd + \sum a \times \sum abc$.

En plus, $\sum abc = abcd \times \sum \frac{1}{a} = 2abcd\bar{s}$; ainsi, après un court calcul, on a

$m = s : (\bar{s} - 1)$. De ce fait, le centre O du cercle inscrit, le centre m du cercle circonscrit et le point d'intersection s des diagonales sont sur *une* droite ; O se trouve entre m et s et les longueurs des segments $[mO]$ et $[ms]$ se comportent comme ρ^2 à s^2 .

De plus, on a

$$m\bar{m} = \frac{s\bar{s}}{(s\bar{s} - 1)^2} = \frac{4abcd \sum a \sum abc}{(\sum a \sum abc - 4abcd)^2} = |m|^2 .$$

Pour calculer le rayon r du cercle circonscrit, formons

$$\frac{2ab}{a+b} - m = \frac{2ab(-bcd - acd + abd + abc)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

et sa valeur complexe conjuguée. Il s'ensuit alors après un bref calcul :

$$r^2 = \frac{4abcd(8abcd - \sum a \sum abc)}{(\sum a \sum abc - 4abcd)^2}. \text{ Ainsi, on a :}$$

$$r^2 + |m|^2 = 2 \left(\frac{4abcd}{\sum a \sum abc - 4abcd} \right)^2 \text{ et}$$

$$r^2 - |m|^2 = -2 \times \frac{4abcd}{\sum a \sum abc - abcd} \text{ donc }^{19}$$

$$(r^2 - |m|^2)^2 = -2 \rho^2 (r^2 + |m|^2)^2.$$

Il en résulte le théorème connu :

Si la relation ci-dessus est vérifiée par les rayons r et ρ de deux cercles et la distance $|m|$ de leurs centres, alors il existe une infinité de quadrilatères bicentriques circonscrits au cercle de rayon ρ et inscrits dans le cercle de rayon r ; les segments joignant leurs points de contact avec le cercle inscrit se coupent toujours en un même point s , et même à angle droit.

7. À propos de l'aire des surfaces.

(7,1) Pour déterminer l'aire Δ du triangle dont les côtés sont tangents au cercle unité en a, b, c , calculons tout d'abord la mesure orientée de la longueur des côtés du triangle (cf. fig. 14) : nous formons en effet

$$\frac{2ab}{a+b} - \frac{2ac}{a+c} = \frac{2a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Cette longueur orientée a pour module $\frac{2a(b-c)\sqrt{-1}}{(a+b)(a+c)}$; donc le triangle a pour aire

$$\Delta = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \sqrt{-1}$$

En effet, cette expression est affectée d'un signe et dépend du sens de rotation qui résulte de la suite des sommets choisie. Si les parties réelles et imaginaires des vecteurs unité complexes a, b, c sont *rationnelles*, les longueurs des côtés et l'aire du triangle sont aussi rationnelles ; nous avons donc un triangle de HÉRON devant nous.

(7,2) Après cela, nous prenons comme triangle le triangle de HÉRON de sommets a^2, b^2, c^2 comme à la fin de (2,2). À présent, les mesures orientées des longueurs des côtés sont, conformément à (5,1), $\frac{b^2-c^2}{bc} \sqrt{-1}$ etc. ; ainsi, la moitié de la

somme des côtés est :

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc} \sqrt{-1}.$$

En appliquant la formule de (5,2) pour ρ , on obtient désormais l'aire du triangle sous la forme

$$\Delta = \frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{4a^2b^2c^2\sqrt{-1}}$$

¹⁹ N. FUSS : *Nova Acta Petrop.* 13, vers 1795-96, édité en 1802, p. 166.

(7,3) La formule du triangle sert à définir l'aire F de la surface d'un quadrilatère de sommets a^2, b^2, c^2, d^2 . Comme nous tenons compte du sens de rotation des triangles $a^2 b^2 c^2$ et $a^2 c^2 d^2$, nous obtenons comme aire

$$\begin{aligned} F &= \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{4a^2b^2c^2\sqrt{-1}} + \frac{(a^2-c^2)(c^2-d^2)(d^2-a^2)}{4a^2c^2d^2\sqrt{-1}} \\ &= -\frac{(a^2-c^2)(b^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2)}{4a^2b^2c^2d^2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Il faut que les côtés du quadrilatère soient orientés de la sorte :

$$\frac{a^2-b^2}{ab}\sqrt{-1}; \frac{b^2-c^2}{bc}\sqrt{-1}; \frac{c^2-d^2}{cd}\sqrt{-1}; \frac{a^2-d^2}{ad}\sqrt{-1}.$$

Ensuite nous obtenons comme somme de la moitié des côtés d'après cette suite dont nous soustrayons toujours l'un des côtés :

$$\begin{aligned} &\frac{(ac-bd)(a+c)(b-d)}{-2abcd\sqrt{-1}}, & \frac{(ac+bd)(a+c)(b+d)}{-2abcd\sqrt{-1}}, \\ &\frac{(ac-bd)(a-c)(b+d)}{-2abcd\sqrt{-1}}, & \frac{(ac+bd)(a-c)(b-d)}{2abcd\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Nous passons de la première expression (dont le calcul est immédiat) à la deuxième en remplaçant b par $-b$, de celle-ci à la suivante en remplaçant c par $-c$, et finalement de celle-ci à la dernière en remplaçant d par $-d$. En multipliant les quatre dernières expressions, nous obtenons le carré de F ; par ce moyen, nous trouvons la formule connue de l'aire pour un quadrilatère ²⁰.

(7,4) L'aire de la surface du triangle uvw inscrit dans le cercle unité peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{4uvw\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u^2 & 1 & u \\ v^2 & 1 & v \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u & \bar{u} & 1 \\ v & \bar{v} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \end{vmatrix}$$

Cette formule est encore vraie si u, v, w sont trois points *quelconques* n'étant *plus* situés sur le pourtour du cercle unité. Nous les utilisons pour démontrer le théorème de PASCAL ²¹ :

Les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle se coupent en des points alignés (fig. 16).

Soient a, b, c, d, e, f les sommets de l'hexagone, les points d'intersection des droites joignant les sommets opposés sont

$$u = (bc) \cap (ef); v = (cd) \cap (fa); w = (de) \cap (ab).$$

Les équations des droites (bc) et (ef) sont respectivement

²⁰ La formule de l'aire des surfaces a été présentée pour la première fois par les Hindous puis, sous leur influence, par les Arabes. En Occident, elle se trouve indépendamment de ces prédécesseurs dans l'édition en latin, étudiée et complétée par W. SNELL, de Ludolf VAN CEULEN : *De arithmetische en geometrische Fundamenten*, Leiden, 1615, ² 1619. Cf. aussi J. TROPFKE : *Geschichte der Elementarmathematik*, IV³, Berlin, 1940, p. 150-168.

²¹ Ce théorème apparaît déjà dans *Essay pour les coniques* de 1640 (forme primitive), puis sous sa forme actuelle dans la version définitive des *Conica* (1654) dont l'impression en 1676 se fit sur la base d'un rapport de LEIBNIZ ; égarée chez le typographe, cette version n'a jamais été publiée.

$$\bar{z} + bc\bar{z} = b + c \text{ et } \bar{z} + ef\bar{z} = e + f.$$

Par suite, leur point d'intersection u est caractérisé par

$$u(bc - ef) = bc(e + f) - ef(b + c);$$

$$\bar{u}(bc - ef) = (b + c) - (e + f)$$

Par conséquent, l'aire du triangle uvw est proportionnelle à :

$$\begin{vmatrix} bc(e+f)-ef(b+c) & (b+c)-(e+f) & bc-ef \\ cd(f+a)-fa(c+d) & (c+d)-(f+a) & cd-fa \\ de(a+b)-ab(d+e) & (d+e)-(a+b) & de-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-f & b-e & 0 \\ 0 & d-a & c-f \\ d-a & 0 & e-b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} be & 1 & b \\ cf & 1 & f \\ da & 1 & d \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant de ce produit est égal à zéro ; donc l'aire du triangle uvw est nulle. De ce fait, les points u, v, w se trouvent vraiment sur une droite, comme affirmé.

En projetant cette figure, à partir d'un point non situé dans le plan du cercle, sur un plan non parallèle au plan du cercle, nous obtenons le théorème général de PASCAL pour les sections coniques.

(7,5) Si d'aventure on interprète les points e, c, a , respectivement liés aux points b, f, d par homographie sur le cercle, alors la droite de PASCAL passant par les points u, v, w de la fig. 16 est l'axe de cette homographie ; ses points d'intersection x, y avec le cercle

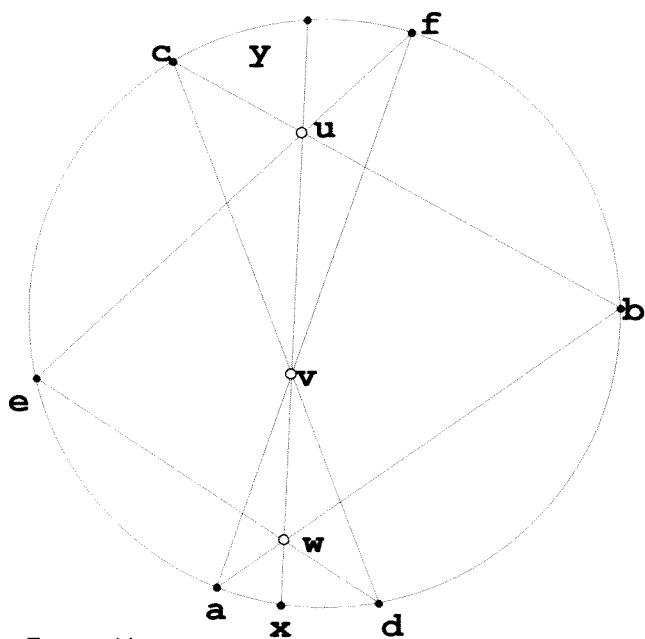


FIGURE 16

Théorème de Pascal

unité

sont les points fixes de l'homographie. On utilise cette propriété pour résoudre par exemple le problème dit d'OTTOJANO ²² :

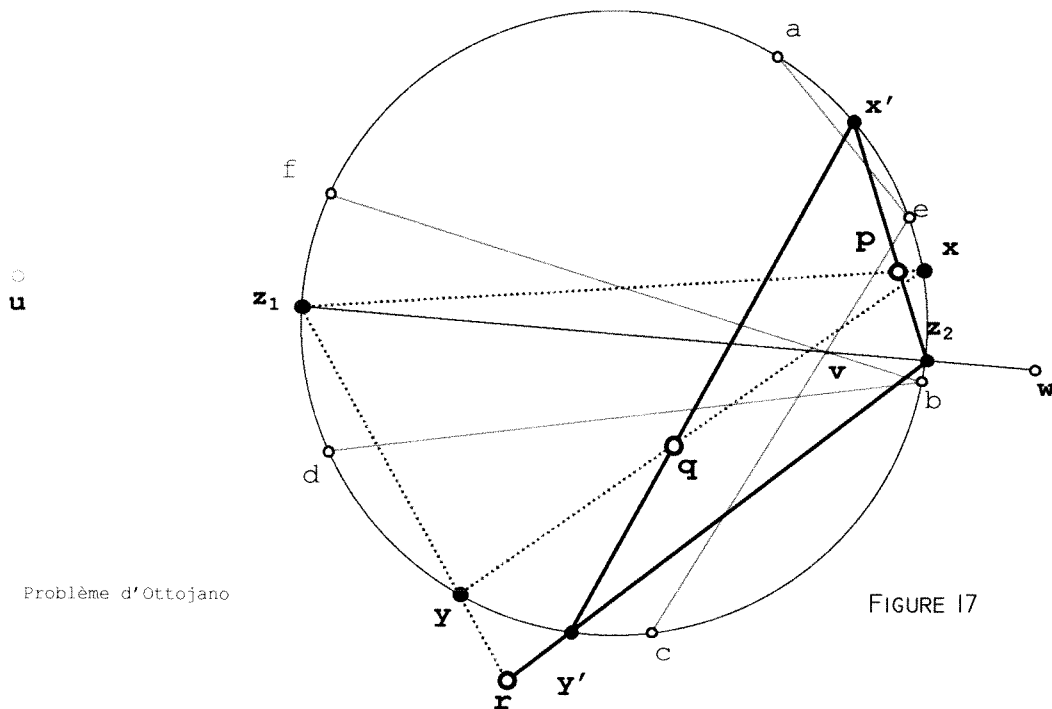
Étant donné un cercle et trois points non situés sur ce cercle, déterminer un triangle inscrit dont chaque côté (éventuellement prolongé) passe par un de ces points.

On prend pour cercle le cercle unité ; soient p, q, r les points distincts deux à deux, soient x, y, z les sommets recherchés du triangle. Il faut donc résoudre les trois équations : $p + yz\bar{p} = y + z$, $q + zx\bar{q} = z + x$, $r + xy\bar{r} = x + y$.

²² Ce problème (pour trois points placés sur une droite) tire son origine des *Tactiones* perdues d'APOLLONIUS, sur lesquelles nous connaissons plus de détails par PAPPUS : *Collectiones*, VII, prop. 117. Le problème plus général fut posé par G. CRAMER dont l'élève G. F. M. SALVEMINI DE CASTILLON travailla à sa résolution à partir de 1742 et publia en 1776 une géométrie élémentaire. Le problème pour un polygone à n sommets fut résolu par A. GIORDANO alors âgé de 16 ans à partir d'Ottojano en rattachement à PAPPUS. Cf. M. BRÜCKNER : *Das Ottojanosche Problem*, Programm, Zwickau, 1892, et TROPFKE ¹⁹, p.125.

Grâce aux deux premières équations, on peut exprimer x et y comme des fonctions linéaires de z ; en remplaçant dans la troisième équation, nous obtenons ainsi une équation quadratique en z qui peut être mise sous la forme $z + m\bar{z} = n$ après division par z et, de cette manière, représenter une droite. Dont les points d'intersection avec le cercle unité fournissent les deux valeurs recherchées z_1 et z_2 .

Dans le cas présent, nous construisons le plus convenablement possible trois couples de points de l'homographie sur le cercle déterminée par l'arrangement z_1, p, y, r, x, q, z_2 . Nous caractérisons les points allant de pair z_1 et z_2 respectivement avec e, c, a et b, f, d . L'axe de cette homographie est la droite mentionnée ci-dessus. La réalisation bien connue est représentée sur la fig. 17. La mise en équation montre



que le problème peut être transposé du triangle à un polygone à n sommets inscrit dans le cercle et conduit encore à une équation quadratique. Par une homographie appropriée, on arrive à généraliser et à traiter des sections coniques.

Ces quelques essais sont destinés à montrer comment l'idée mentionnée au début – employer des nombres complexes en relation avec le cercle unité – peut être exploitée efficacement. Il existe beaucoup d'autres applications élémentaires mais, comme il ne s'agissait que de préciser l'idée, nous ne poursuivrons pas plus loin.