RELATIONS ENTRE PROCÉDURE ET DÉMONSTRATION : LA MESURE DU CERCLE DANS LES *NEUF CHAPITRES SUR LES PROCÉDURES MATHÉMATIQUES* ET DANS LEUR COMMENTAIRE PAR LIU HUI (IIIe SIÈCLE)[1]

Karine CHEMLA

INTRODUCTION

À la différence des textes grecs que nous connaissons, les textes chinois anciens ne proposent de démonstrations que d'algorithmes. Corrélativement, on y rencontre une pratique différente de la démonstration mathématique, qui semble répondre à d'autres visées, et recourir à d'autres moyens d'expression[2]. Est-ce à dire que toute idée de rigueur en est absente ? En mettant en évidence la finesse d'un raisonnement rédigé au IIIe siècle en vue d'établir la correction d'un algorithme donné pour calculer l'aire du cercle, je montrerai qu'il n'en est rien. Cependant, choisir de ne retenir d'un tel texte que ce qui concerne *notre* exigence de rigueur, c'est projeter une hiérarchie de valeurs, forgée *a priori*, concernant la démonstration, c'est imposer une norme, et c'est donc se priver des moyens d'appréhender dans toutes leurs dimensions les textes au cours desquels, dans une tradition donnée, des mathématiciens ont rencontré la question de savoir pourquoi un énoncé était correct. J'ai préféré opérer autrement : tenant pour acquis que ces textes chinois nous confrontaient avec une pratique singulière de la démonstration, j'ai cherché à la décrire pour elle-même, en prêtant tout particulièrement attention à la manière dont elle s'insérait au cœur de l'activité mathématique. Un fait remarquable s'est alors imposé à moi : loin de constituer deux types de discours opposés l'un à l'autre, algorithmes et démonstrations y présentent une continuité, selon plusieurs modalités. L'examen qui suit nous amènera à rencontrer, dans le contexte d'un algorithme pour le calcul de l'aire du cercle, une démonstration qui satisfait au mieux notre attente en la matière, et nous fournira aussi bien l'occasion de discuter sous deux angles les relations que peuvent entretenir algorithme et démonstration.

---

[1] Je tiens à remercier Dominique Tournès pour avoir organisé ce colloque si bienvenu dans le contexte intellectuel de l'île de La Réunion, pour m'avoir invitée à y participer, pour avoir eu la patience de supporter mes retards et pour avoir contribué de manière plus que substantielle à la préparation de ce texte. Le lecteur trouvera une discussion de points de détail ici laissés de côté dans [Chemla 1996].

[2] J'ai eu l'occasion d'argumenter ces affirmations à plusieurs reprises. Voir en particulier [Chemla 1991] et [Chemla 1992a].

Dans un premier temps, par l'analyse du rapport de la démonstration qui nous occupe avec un algorithme auquel elle donne naissance, nous chercherons à préciser comment une démonstration d'essence elle-même procédurale s'oppose néanmoins à un algorithme proprement dit. Dans un second temps, nous considérerons le rapport de la démonstration au texte de l'algorithme dont elle établit la correction. Cette question ouvre sur le problème herméneutique central des modes de lecture qu'il convient d'appliquer à un texte chinois. Par ailleurs, elle m'amènera à critiquer l'*a priori* selon lequel un énoncé ne serait qu'affirmation, là où sa démonstration ne serait, elle, que raisonnement. Auparavant, pour qu'elle puisse servir de base pour la discussion, nous procéderons à une analyse détaillée du texte chinois. Et puisque mon choix a porté sur une démonstration impliquant de rencontrer l'infini, j'accorderai une attention particulière aux particularités de ce raisonnement en la matière, en esquissant une comparaison avec d'autres démonstrations semblables prélevées dans des textes chinois ou grecs.

I. LA MESURE DU CERCLE

I.a. Le cadre

Dans le premier des *Neuf Chapitres sur les Procédures mathématiques* (ci-dessous abrégé en *Neuf Chapitres*), compilation probablement effectuée un peu avant ou un peu après les débuts de notre ère, la seconde partie, consacrée aux aires, laisse une large place au calcul de l'aire du cercle[3].

Si on laisse de côté le cas du rectangle, dans la mesure où il joue un rôle clef dans l'ensemble du chapitre – ce à quoi fait écho le titre de ce chapitre : « champs rectangulaires » –, on compte sept surfaces de formes différentes, dont les aires sont ici données : le triangle, un quadrilatère particulier, le trapèze[4], le cercle, la calotte sphérique, le segment de cercle, l'anneau circulaire. Dans cet ensemble, le cercle occupe une position centrale, et effectue une démarcation entre les aires rectilignes et les aires circulaires ou sphériques. D'un point de vue plus global, le chapitre présente donc les aires de quatre surfaces rectilignes, en commençant par le cas du rectangle,

---

3 La première partie est, elle, consacrée au calcul fractionnaire. On peut se reporter aux éditions des *Neuf Chapitres* : [Qian 1963], ou [Guo 1990]. Je suivrai ici l'édition de [Qian 1963], p. 103-6, sauf mention contraire. Les commentaires de Liu Hui (III^e siècle) accompagnent le texte des *Neuf Chapitres* dans toutes les éditions des *Neuf Chapitres* qui sont parvenues jusqu'à nous. Il en va de même de tous les Classiques chinois : ils sont en général édités avec les commentaires jugés les plus importants qui en ont été écrits. La préface de ce commentateur aux *Neuf Chapitres* nomme quelques-uns de ceux qui, selon lui, ont participé au travail d'édition de l'ouvrage. Cependant l'auteur ou les auteurs véritables restent, à ce jour, indéterminés. Nous y renverrons par l'expression « l'auteur », sans que cela ait un quelconque sens précis. Les réflexions que je présente ici doivent beaucoup au travail d'édition critique et de traduction des *Neuf chapitres* et de leurs commentaires que j'ai entamé en 1984 avec M. Guo Shuchun (Académie des sciences, Beijing) et qui doit paraître prochainement.

4 Tous les commentateurs s'accordent à reconnaître le triangle et le trapèze, cependant l'interprétation de la troisième forme ne fait pas l'unanimité. Je serais tentée de voir, outre le triangle et le trapèze, la forme qui résulterait de l'accolement de deux trapèzes aux bases de même longueur.

promu en tête de chapitre, et les aires de quatre surfaces circulaires ou sphériques, dont la série débute par le cas du cercle. Cependant, à considérer le plan du chapitre, on constate que, tout comme le rectangle, le cercle reçoit un traitement particulier. En effet, ici comme ailleurs dans les *Neuf Chapitres*, les connaissances mathématiques sont en général présentées dans le cadre de problèmes ou de groupes de problèmes lesquels sont suivis, chaque problème, d'une solution et, chaque groupe de problèmes, d'un algorithme général de résolution. Or cette ordonnance est brisée à deux reprises dans le chapitre 1 : pour l'aire du cercle, qui se voit proposer quatre procédures de calcul, et pour l'aire de l'anneau circulaire[5].

Nous présenterons ici l'ensemble des procédures que les *Neuf Chapitres* donnent pour le calcul de l'aire du cercle, ainsi qu'une analyse des raisonnements par lesquels le commentateur du III^e^ siècle, Liu Hui, les établit.

I.b. Les procédures des *Neuf Chapitres* : le dispositif textuel

Le trente-et-unième problème du premier chapitre demande :

> « Maintenant on a un champ circulaire, de 30 *bu* (pas) de circonférence, de 10 *bu* de diamètre. On demande combien fait le champ. »

Il est surprenant de constater que les données sont ici surabondantes, puisque tant le diamètre que la circonférence sont fournis par l'énoncé du problème. De plus, elles impliquent un rapport de 3 à 1 entre circonférence et diamètre. Faut-il en conclure que l'auteur ne sait ni que diamètre et circonférence ont un lien, ni que leur rapport n'est pas de 3 à 1 ? Nous reviendrons sur ces questions plus loin. Contentons-nous simplement de souligner ici que, si elles se posent, c'est que, parmi les différentes procédures que donne l'ouvrage pour la solution de ce problème, certaines ne recourent qu'à l'une des deux données pour effectuer le calcul. Par ailleurs, Liu Hui fait écho à ce rapport de 1 à 3 que suppose l'énoncé du problème, en débutant sa justification de la correction d'un des algorithmes proposés dans le Classique par la prise en considération de la surface même pour laquelle ces données seraient valables, à savoir l'hexagone régulier inscrit dans le cercle. Mais n'anticipons pas. Il nous faut tout d'abord poursuivre notre lecture du texte.

Dès l'énoncé, l'équipe de commentateurs qui travailla sous la direction de Li Chunfeng au septième siècle[6] réagit ainsi à la donnée de ces nombres :

---

[5] Ceci dit, dans ce dernier cas, nous sommes confrontés à un problème philologique que nous n'aborderons pas ici. Les textes relatifs à la mesure du cercle en Chine que nous discutons ici ont été l'objet de nombreuses publications : on en trouvera une liste en bibliographie.

[6] De même que pour le cas de Liu Hui, les remarques de cette équipe font aussi partie de toutes les éditions de *Neuf Chapitres* qui sont parvenues jusqu'à nous. Par la suite nous désignerons ce commentaire du seul nom de Li Chunfeng.

> « L'idée de la procédure[7] est de prendre comme *Lü* 3 pour la circonférence et 1 pour le diamètre[8] : une circonférence de 30 *bu* correspond à un diamètre de 10 *bu*. Maintenant, en s'appuyant sur les *lü* précis[9], cela correspond à un diamètre de 9 *bu* six-onzièmes de *bu*. »

C'est à la réponse de 75 *bu* donnée par les *Neuf Chapitres* que Liu Hui, quant à lui, répond : « Ceci, avec ma procédure, devrait faire un champ de 71 *bu* cent trois cent cinquante-septièmes de *bu* »[10], tandis que Li Chunfeng reprend : « En s'appuyant sur les *lü* précis, cela fait un champ de 71 *bu* treize vingt-deuxièmes de *bu*. »

Le problème que les *Neuf Chapitres* proposent de résoudre à la suite de celui-ci présente la même structure, à la différence près que la donnée fournie pour le diamètre y est fractionnaire. Telle est la nature des questions pour lesquelles l'ouvrage, selon son mode usuel d'expression, fournit non pas des formules, mais des algorithmes. En effet, c'est à la suite de ces problèmes que les *Neuf Chapitres* énoncent différentes procédures pour le calcul de l'aire du cercle ([Guo 1992], p. 59). Soulignons à nouveau le fait qu'il est rare, dans cet ouvrage, que plusieurs procédures soient ainsi énoncées après un groupe de problèmes semblables.

La première est celle qui donnera lieu au développement le plus consistant de Liu Hui. Si l'on ne tient pas compte des données numériques auxquelles elle s'applique, elle est exacte ([Guo 1983], p. 87). Elle suggère :

---

[7] Comme l'endroit où ce commentaire est inséré tendrait à le laisser penser, le terme « procédure » semble ici pouvoir renvoyer au problème, ou à l'ensemble que constituent le problème et la procédure. Nous avons déjà émis l'hypothèse que les énoncés des problèmes ont pu être conçus, en Chine ancienne, comme étant de nature algorithmique (voir [Chemla 1991]). Certes, ce terme pourrait aussi ne désigner que la procédure donnée immédiatement après pour résoudre le problème, puisqu'elle recourt dans ses calculs, à la suite de celui-ci, au même rapport de 3 à 1. Cependant, elle n'est pas encore énoncée à ce point du texte. On pourrait aussi choisir de comprendre que le terme de procédure renvoie aux nombres qui entrent dans la donnée du rapport entre circonférence et diamètre. Ces entiers permettent d'obtenir les procédures qui calculent le diamètre à partir du cercle ou l'inverse. On rencontrera cet usage du terme *shu* dans la suite. Pareille interprétation retrouverait la continuité entre nombre et procédure dont nous avons esquissé la description dans [Chemla 1992a].

[8] Par manque d'un terme technique français adéquat, nous ne traduisons pas le mot *lü*, qui renvoie à un concept clef dans la mathématique chinoise. Il s'agit d'un nombre en tant qu'il n'est déterminé que relativement à d'autres nombres (voir la note 12). C'est le cas des termes d'un rapport, mais l'extension que peut prendre cette notion déborde largement ce cadre. Voir [Li Jimin 1982] et [Guo 1984a].

[9] Par ce terme technique (*milü*), Li Chunfeng renvoie à un rapport entre la circonférence et le cercle de 22 à 7, attribué à Zu Chongzhi.

[10] Liu Hui utilise tout au long de son commentaire le rapport de 157 à 50 pour représenter le rapport de la circonférence au diamètre. Ces valeurs seront produites par l'algorithme qu'il formera sur la base de sa démonstration. Nous sommes ici dans un cas étonnant, puisque la procédure donnée par les *Neuf Chapitres* est exacte, tandis que les données de l'énoncé posent, elles, problème. Face à ce texte, Liu Hui propose implicitement de nouvelles valeurs des données en modifiant la réponse, mais il conserve l'algorithme. La finalité de son commentaire à suivre est tant de démontrer la correction de l'algorithme que d'éclairer l'origine des nouvelles données qu'il retient. Notons qu'ici deux voies s'ouvrent à lui pour modifier cet énoncé et, partant, la réponse. Soit il considère que la donnée exacte est celle du diamètre, et il est amené à proposer une nouvelle valeur pour la circonférence. Soit il considère au contraire que la donnée exacte est celle de la circonférence, ce qui nécessite alors de modifier la valeur donnée pour le diamètre. La nature de la nouvelle réponse qu'il fournit indique qu'il se place dans ce dernier cas. Il discute de cette alternative dans son commentaire à la seconde procédure que donnent les *Neuf Chapitres*. À nouveau, il semble que, dans le commentaire de Liu Hui, le terme de procédure renvoie soit aux termes du rapport entre diamètre et circonférence, soit à l'ensemble du problème et de l'algorithme.

> « Procédure : la moitié de la circonférence et la moitié du diamètre étant multipliées l'une par l'autre, on obtient les *bu* du produit (*Ji*). »

Il est frappant de constater que le phrasé de cette procédure rappelle, et *c'est le seul du chapitre à rappeler*, le phrasé de la première procédure, fondamentale pour le chapitre 1, celle concernant le champ rectangulaire, qui donne son nom au chapitre. En effet, celle-ci se lit :

> « Procédure des champs rectangulaires : Les quantités (*shu*) de *bu* de la largeur et de la longueur étant multipliées l'une par l'autre, on obtient les *bu* du produit (*Ji*). »[11]

Cette remarque nous donne un nouveau point de vue d'où considérer la donnée, par l'énoncé du problème, du diamètre *et* de la circonférence : ce faisant, les problèmes concernant le rectangle et le cercle sont similaires. Les deux figures qui jouent un rôle particulier dans le chapitre reçoivent des traitements analogues. À nouveau, nous reviendrons sur ce point plus loin. Retenons simplement que nous n'avons plus ici le produit de deux longueurs rectilignes l'une par l'autre, mais d'une longueur courbe par une longueur rectiligne.

La seconde procédure offerte pour calculer l'aire du cercle est également exacte, ce seront les deux seules. Elle s'énonce comme suit : « Autre procédure : Le diamètre et la circonférence étant multipliés l'un par l'autre, diviser par 4. »

Par opposition aux deux premières, les deux procédures données ensuite n'utilisent qu'*une* des données du problème, successivement l'une puis l'autre, et, *corrélativement*, elles sont approchées : « Autre procédure : Le diamètre étant multiplié par lui-même, multiplier par 3 et diviser par 4 » ; « Autre procédure : La circonférence étant multipliée par elle-même, diviser par 12 ». On notera de plus qu'elles sont symétriques l'une de l'autre. À chacune des deux, la réaction des commentateurs est de mettre en évidence la nature de l'approximation en exhibant la figure dont l'aire est ici calculée, puis de proposer cette fois-ci une *autre* procédure, renvoyant à l'usage d'autres valeurs pour les termes du rapport entre circonférence et diamètre. Leurs notes aux deux couples de procédures s'opposent donc en ceci que, pour les premières, ils modifient les données, tandis que pour les secondes, ils modifient les procédures.

Tel est le contexte textuel dans lequel Liu Hui insère, à la suite de l'énoncé de la première procédure, le commentaire que nous analyserons maintenant.

I.c. Le commentaire de Liu Hui à la première procédure

Nous l'avons souligné, l'énoncé de la première procédure reprend la formulation de l'algorithme pour le calcul de l'aire du rectangle qui ouvre les *Neuf Chapitres*. Or

---

[11] La différence de phrasé entre ces deux procédures pour le rectangle et pour le cercle, consistant à mentionner les unités des quantités multipliées dans un cas et pas dans l'autre, a pour conséquence une identité rythmique des deux phrases en chinois.

la première phrase du commentaire de Liu Hui est en fait comme un écho à la corrélation qui se trouve ainsi établie. Ce dernier procède en effet dans un premier temps aux identifications que le parallèle produit :

> « Commentaire : la moitié de la circonférence fait la longueur et la moitié du diamètre la largeur ; par conséquent la largeur et la longueur étant multipliées l'une par l'autre, cela fait les *bu* du produit (*Ji*). »

Ainsi le commentateur renvoie à la recherche d'un rectangle dont les dimensions sont déduites des données du problème et identiques aux termes de la procédure qu'il commente, lequel rectangle aurait même aire que le cercle. Le libellé de la procédure des *Neuf chapitres* présente donc une corrélation frappante avec la direction dans laquelle il s'engage par la suite, en cherchant à transformer le cercle en ce rectangle.

Liu Hui introduit, immédiatement après, une figure qui rend compte des données du problème puisque sa circonférence sera à son diamètre comme 3 à 1, il s'agit de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle donné :

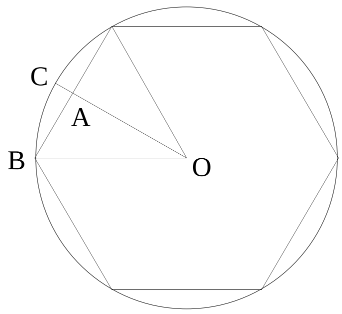


FIG. 1

> « Supposons que le diamètre du cercle soit de 2 *chi* ; les valeurs (*shu*) d'un côté de l'hexagone inscrit dans le cercle et de la moitié du diamètre du cercle sont égales. Correspondant au *lü*[12] du diamètre 1, le *lü* de la circonférence du polygone est 3. »

Que Liu Hui introduise d'emblée la figure, différente de celle du cercle, pour laquelle un rapport de 3 à 1 exprime la relation entre périmètre et diamètre, évoque

[12] Jusqu'à ce point du texte, le commentaire n'a introduit le terme de *lü* que dans des contextes arithmétiques. Voici leur première occurrence en géométrie : contrairement au rectangle, le cercle se voit associer deux longueurs fondamentales qui présentent un rapport constant l'une avec l'autre, ce à quoi renvoie la recherche de représentants entiers de l'un et de l'autre, l'un en relation avec l'autre, c'est-à-dire la recherche de *lü*. On aurait, entre le rectangle et le cercle, la même opposition que celle séparant un couple de deux nombres quelconques du couple que forment le numérateur et le dénominateur d'une fraction. La simple introduction du terme de *lü* transforme la nature de la valeur de 2 *chi*. Par le fait de nommer ainsi les grandeurs considérées, Liu Hui montre que leurs valeurs ne sont à comprendre qu'en relation l'une avec l'autre. N'importe quel exemple numérique renvoie dès lors à tous les autres, le particulier signifie le général. Cet usage des noms comme énonçant des propriétés des réalités auxquelles ils sont attachés est typique de ces textes. Significatif également, ce dispositif où le sens du particulier se propage jusqu'à valoir en toute généralité.

d'autres passages de son commentaire. Souvent, lorsqu'il veut mettre en évidence une erreur dans une procédure des *Neuf Chapitres*, il exhibe l'objet pour lequel la procédure est exacte[13]. Comme la différence entre cet objet et l'objet visé par la procédure est en général manifeste, l'inadéquation entre cette procédure et l'objet pour lequel elle est proposée est établie. Ici, l'hexagone est associé au couple de *lü* (3, 1) ; puisque le cercle a le même diamètre que lui et une circonférence plus grande, il ne peut être lui-même associé à ces valeurs. Cependant ici, contrairement à d'autres passages de son commentaire, Liu Hui ne qualifie pas d'erronées ces données de 3 et de 1. Soulignons le fait qu'en ce cas l'inadéquation se produit, non pas avec la procédure, mais avec les données fournies par l'énoncé du problème.

Or l'hexagone, introduit pour rendre compte des données du problème, va servir de point de départ de la démonstration et en indiquera le nerf : Liu Hui lui applique la première procédure donnée par les *Neuf Chapitres* pour le cercle, et c'est ainsi qu'il amorcera une itération. Les diverses éditions s'accordent pour modifier les lectures de différents matériaux et pour donner le texte comme suit :

> « À nouveau, en s'appuyant sur le dessin, si l'on multiplie par un côté de l'hexagone le demi-diamètre pour un segment, qu'on multiplie par 3, on obtient l'aire (*mi*) du dodécagone. »

Appliquant à l'hexagone la procédure que les *Neuf Chapitres* proposent pour le calcul de l'aire du cercle – à un détail près, sur lequel nous reviendrons –, Liu Hui considère l'aire obtenue : c'est celle d'un dodécagone régulier inscrit au cercle (voir figure 1). Par ce développement à partir de l'hexagone, apparaît une relation *exacte* :

le demi-diamètre multiplié par la demi-circonférence de l'hexagone
=
aire du dodécagone[14].

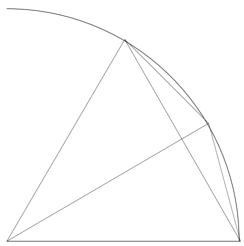


FIG. 2a

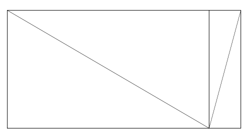


FIG. 2b

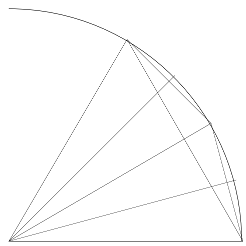


FIG. 2c

[13] On peut penser par exemple à l'extraction de la racine sphérique au chapitre 4 ([Qian 1963], p. 155-158), dont il montre le caractère incorrect en introduisant le solide, différent de la sphère, auquel la procédure correspond. Curieusement, là comme ici, le solide rendant compte des données numériques retenues par les *Neuf chapitres* fournit le point de départ à la démonstration qui mènera effectivement à la sphère.

[14] Notons que cette relation se présente en réalité non pas comme un énoncé d'égalité mais comme un algorithme. C'est un fait typique des *Neuf Chapitres*.

La figure 2 (a & b) montre comment la multiplication, prescrite par Liu Hui, d'un côté de l'hexagone par le rayon du cercle produit deux exemplaires d'un rectangle, de longueur le demi-diamètre, de largeur la moitié du côté de l'hexagone, et dont l'aire est celle de deux portions du dodécagone. Multiplier ensuite par 3 procure toute l'aire du dodécagone, sous la forme du rectangle qui a pour longueur la demi-circonférence de l'hexagone et pour largeur le demi-diamètre ([Guo 1983], p. 86). Par conséquent cette procédure engendre, pour le cas de l'hexagone et du dodécagone, le rectangle dont il est fait mention au début du commentaire.

Il est remarquable que la portion d'hexagone, par la considération de laquelle on débute l'analyse de la procédure attachée au cercle, soit un cas particulier de surface rectiligne présentée avant le cercle, constituée comme elle l'est de la réunion de deux triangles. Or si l'on fait l'hypothèse que Liu Hui a pu vouloir calculer l'aire de l'hexagone par la procédure attachée au triangle elle-même, on s'aperçoit que cela l'aurait amené à appliquer à l'hexagone la procédure donnée pour le cercle, cette fois-ci très exactement. Cette remarque peut nous mettre sur la piste d'une autre manière d'éditer ce passage, qui produit la traduction suivante :

> « À nouveau, en s'appuyant sur le dessin, en multipliant par un demi-côté de l'hexagone le demi-diamètre pour un segment, cela en fait deux morceaux et, en multipliant ceci par six, on obtient l'aire (*mi*) du dodécagone. »[15]

Ma suggestion quant à l'édition du texte, si elle est plus proche du texte original dans la mesure où elle n'en modifie qu'un caractère, a surtout pour avantage que la procédure fait alors sens géométriquement : la multiplication prescrite correspond à la transformation d'un secteur d'hexagone en rectangle[16]. Une continuité est ainsi établie entre triangle, hexagone et cercle. De plus, cette interprétation fait apparaître le triangle comme figure qui articule entre elles les aires rectilignes et les aires circulaires[17].

---

[15] Ainsi, je propose de modifier « un côté de l'hexagone » (*yi mian*) en « un demi-côté de l'hexagone » (*ban mian*). Cette simple transformation amène à multiplier le demi-diamètre par le demi-côté de l'hexagone, conformément à la procédure pour le calcul de l'aire du triangle. On trouve alors, dans le quartier d'hexagone que représente la figure 2a, deux morceaux du dodécagone. Ensuite une simple multiplication par 6 produit tout le dodécagone. En revanche, la multiplication que proposera le texte à l'étape suivante peut rester inchangée : nous verrons qu'elle produit quatre morceaux du 24-gone (voir figure 2c), donc qu'une multiplication par 6 donne à nouveau l'ensemble de ce polygone. Cette lecture est étayée par la suite du commentaire où l'on lira : « Quand avec un côté on multiplie le demi-diamètre, cela revient à trancher le quartier du polygone et chaque morceau est dans tous les cas obtenu deux fois. »

[16] La multiplication par 6 produit ensuite le rectangle auquel correspond tout le dodécagone : par elle, on passe de la transformation en rectangle d'un secteur d'hexagone, soit de deux triangles accolés, à celle de tout l'hexagone. Le fait que, pas à pas, cette procédure fasse ainsi sens correspond bien à ce que nous savons par ailleurs des relations entre la forme des procédures et leur justification, dans le cadre de la géométrie (voir [Chemla 1991]).

[17] Sur la place du triangle dans les édifices géométriques des *Neuf chapitres* ou de Liu Hui, voir [Guo 1983], p. 94-5.

Notons que nous avons ici la première réutilisation d'une notion d'aire, *mi*, que Liu Hui introduit à la suite de la première procédure du livre. En effet, il commente cette procédure, consacrée comme nous l'avons vu au champ rectangulaire, en énonçant :

> « Ce produit (*ji*) est appelé aire du champ (*mi*). Chaque fois que longueur et largeur sont multipliées l'une par l'autre, on appelle cela aire (*mi*). »[18]

Ce terme de *mi*, que le commentateur donne alors comme le nom du produit l'une par l'autre de la longueur et de la largeur, provoque des commentaires animés de Li Chunfeng qui tient, contrairement à ce qu'il comprend de l'intention de Liu Hui, à opposer l'aire en tant que multiplicité d'unités (*ji*) à l'aire en tant qu'elle renvoie à la surface, en un seul tenant (*mi*). Cette distinction renvoie ici en fait à la structure même du commentaire de Liu Hui, nous y reviendrons et, dans le même temps, nous tenterons de préciser ce que notre commentateur du III^e^ siècle a pu vouloir signifier par ce terme ici.

Mais reprenons le cas du cercle. Liu Hui constate ensuite que la même opération est répétable sur le dodécagone et conduit à la *même* relation *exacte*, toujours énoncée sous forme algorithmique, entre le dodécagone et le 24-gone. Les éditions usuelles en donnent :

> « Si, à nouveau, on coupe celui-ci, puis que l'on multiplie par un côté du dodécagone le demi-diamètre pour un segment et qu'on multiplie ceci par 6, alors on obtient l'aire (*mi*) du 24-gone. »

Je propose ici aussi de ne pas modifier le texte original et d'en faire sens, de la même manière que plus haut, comme suit :

> « Si à nouveau on coupe celui-ci, en multipliant par un côté du dodécagone le demi-diamètre pour un segment, cela en fait quatre morceaux et, en multipliant ceci par 6, alors on obtient l'aire (*mi*) du 24-gone. »

C'est alors que s'amorce l'itération qui, en reproduisant cette coupe, amènera à constater que la même relation vaut pour le cercle. Elle s'ancre sur deux remarques fondamentales : la première tient à la validité générale de la relation qui unit le n-gone et le 2n-gone ; la seconde est que ce mouvement du n-gone au 2n-gone nous rapproche du cercle, en un sens très précis[19]. Jusqu'à ce point du texte, les deux in-

[18] Je traduis ici le texte tel qu'on le trouve dans toutes les éditions des *Neuf chapitres* qui sont parvenues jusqu'à nous. [Qian 1963] et [Guo 1990] ne modifient pas le texte. Cependant notons que le commentaire de Li Chunfeng dont nous parlons ci-dessous cite, en le critiquant, un texte différent pour le commentaire de Liu Hui : « Ce produit (*ji*) est pris comme aire du champ (*mi*). Chaque fois que longueur et largeur sont multipliées l'une par l'autre, on appelle cela aire (*mi*). »

[19] Plusieurs textes de l'Antiquité grecque traitant de l'aire du cercle nous sont parvenus. On compte la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide ([Heath 1956], p. 371-8), dont on convient d'attribuer la démonstration à Eudoxe, et l'opuscule d'Archimède intitulé *La mesure du cercle* ([Mugler 1970], p. 135-43 ; [Liu 1984] compare le traitement qu'on y trouve à celui qu'en donne Liu Hui). Mais des fragments mentionnant des traitements pré-eudoxiens de la question, attribués à Hippocrate,

grédients que sont la relation entre diamètre, circonférence d'un n-gone et aire d'un 2n-gone, d'une part, et la découpe qui inscrit des polygones successifs dans le cercle, de l'autre, ont été traités en intime articulation l'un avec l'autre. À présent, ils seront dissociés et traités séparément.

C'est vers la découpe et, partant, vers l'évolution de la relation entre cercle et polygones, que Liu Hui se tourne tout d'abord. Il l'envisage pour elle-même, et ce en deux sens : elle est considérée indépendamment de l'algorithme, et elle est abstraite du cadre concret de la situation présente, puisque c'est plus le processus de doublement des côtés d'un polygone quelconque inscrit au cercle qui est en cause dans le commentaire de Liu Hui que les états successifs engendrés par l'hexagone. Ce point se manifeste dès la phrase suivante, où l'évolution du rapport au cercle est introduite : « Plus l'on coupe fin, plus ce qui est perdu est petit. »[20] Le premier membre de la phrase renvoie à des opérations géométriques, sur le dessin, le second à une mesure. On peut remarquer que, jusqu'alors, il n'avait été question que de calculs d'aire pour les polygones inscrits. La relation de ces polygones au cercle n'a pas été abordée, ni sous un aspect géométrique, ni sous un aspect numérique. Elle sera prise en considération, une fois l'itération lancée. C'est ce vers quoi nous oriente cette

Antiphon et Bryson, sont également disponibles (sur les deux premiers, on peut se reporter à [Knorr 1982] et sur les deux derniers à [Mueller 1982]). Dans cet ensemble, seuls les textes d'Antiphon, d'Euclide et d'Archimède recourent explicitement, comme Liu Hui, à une duplication réitérée des côtés de polygones inscrits dans le cercle pour approcher celui-ci. Euclide comme Archimède prennent comme première figure celle du carré inscrit au cercle, quoique, dans sa dernière proposition, Archimède parte, pour le diviser en deux de manière réitérée, du côté de l'hexagone. Selon les témoignages, qui divergent sur ce point, Antiphon aurait débuté sa déduction à partir du triangle ou du carré. Si Bryson mentionne des polygones inscrits ou circonscrits au cercle, aucune des différentes versions de son raisonnement qui nous sont parvenues ne fait appel à une opération de duplication des côtés. Le texte décrivant les acquis d'Hippocrate, dont la concision rend l'interprétation extrêmement difficile, affirme que celui-ci avait établi la proposition XII.2 d'Euclide ; cependant rien ne nous permet d'établir avec certitude la nature de son raisonnement. S'appuyant sur le fait qu'Antiphon n'était pas mathématicien de métier, Knorr pense pouvoir attribuer à Hippocrate une démonstration qui aurait inspiré Antiphon et qu'il reconstruit. Notons que sa reconstruction l'amène à un texte rappelant le traitement que Liu Hui donne du segment circulaire : par référence au raisonnement pour le cercle, le segment est découpé en la suite de triangles dont la somme des aires fournira à terme son aire ; la démonstration est dans le même temps procédure. Chemin faisant, comparant ces différents textes à celui de Liu Hui, nous constaterons que, si les mêmes idées sont mises en œuvre, les raisonnements qui les impliquent sont de nature différente. Relevons dès à présent que, dans aucune des démonstrations qu'il développe pour les cas du cercle, du segment de cercle ou de la pyramide, Liu Hui ne recourt à l'énoncé de proportions semblables à celles qui structurent les descriptions présentes dans les textes grecs.

20 Ce couple *mi…mi* (plus…plus…) intervient à plusieurs endroits dans le commentaire de Liu Hui, très exactement partout où il y a des procédés qui ne peuvent s'achever au bout d'un nombre fini d'étapes, que ce soit pour la poursuite de l'extraction de la racine d'un nombre entier non carré au-delà du chiffre des unités, ou pour le volume de la pyramide… J'y reviendrai (pour ce qui concerne l'analyse du traitement par Liu Hui du volume de la pyramide, on peut consulter, entre autres : [Wagner 1979], [Guo 1984b], [Li 1990], ou [Chemla 1992b]). Notons que la forme de l'énoncé implique une volonté de préciser que le mouvement des polygones vers le cercle est progressif : en langage moderne nous dirions que la suite des aires des polygones est croissante, ou que la suite des différences de ces aires avec celle du cercle décroît. [A. Volkov 1988] remarque que le terme utilisé pour désigner le fin dans les contextes géométriques est le même que celui auquel a recours Liu Hui, dans le contexte arithmétique des fractions : plus le dénominateur est grand, plus les parts sont fines. Il en déduit la suggestion que ces procédures géométriques sont à lire dans un contexte arithmétique décimal.

dernière affirmation, que Liu Hui précise dans ce qui suit. Elle conduit à une suite de découpes, dont les conséquences seront envisagées, et tout d'abord pour ce qui est de l'évolution de la relation entre polygones et cercle en tant que figures géométriques. Cette relation sera elle-même appréhendée par le biais des rapports qu'entretiennent les *circonférences* de ces figures. Puis Liu Hui prendra en considération ce qui en résulte sur le plan de la relation entre leurs aires, et ce n'est qu'ensuite qu'il se tournera vers le second ingrédient et se demandera ce qu'il en est de la permanence de la formule mise en place.

L'ensemble de ces étapes est amorcé par l'annonce : « Ce que l'on a coupé, on le coupe à nouveau jusqu'à atteindre (*zhi*) ce que l'on ne peut pas couper. » Il est donc prescrit une suite d'actes dont il est dit qu'ils *atteignent* à ce que l'on ne peut couper. Le terme « atteindre » n'est pas là par hasard. Il se présente de manière récurrente dans ce type de raisonnement. On retrouve en effet un énoncé de même nature dans le commentaire qui fait suite à la procédure pour le calcul de l'aire du champ segment : « Ce que l'on a coupé, on le coupe à nouveau, de sorte à atteindre l'extrême du fin »[21]. On retrouve encore ce terme à propos du volume de la pyramide. Ces actes sont-ils pensés en nombre infini[22] ou pas ?, cela renvoie-t-il à l'idée de constituants élémentaires insécables et finis ?, est-ce à dire que l'on procède jusqu'au moment où nos sens, ne distinguant plus la différence, nous donnent les polygones et le cercle comme une seule et même chose[23], ou enfin la donnée de la procédure suffit-elle à produire l'objet ?, il est impossible de déterminer le cas dans lequel on se trouve. La suite du texte apportera des éléments qui permettent de préciser ce point sans toutefois permettre de le trancher.

Quoi qu'il en soit, nous nous trouvons certainement devant un raisonnement *direct*, à la différence des raisonnements par l'absurde que l'on rencontre chez Euclide

21 [Qian 1963], p. 109.

22 [Guo 1983], p. 88-9, [Li 1990], p. 257, [Liu 1993], p. 365-6, optent pour cette interprétation, de même que [Chen 1986] lequel note cependant à quel point le texte est peu explicite et reste à un niveau intuitif (p. 51). C'est un tel procédé que [Knorr 1982] attribue à Hippocrate dans la reconstruction qu'il donne de son raisonnement et qui n'est pas sans évoquer celui que Liu Hui développe dans le cas du segment de cercle. Dans l'interprétation qu'il donne du texte d'Antiphon tel que nous pouvons le connaître par les témoignages de Simplicius et de Thémestius, I. Toth (communication personnelle) pense que ce sophiste recourt, pour atteindre au cercle, à une infinité actuelle de découpes des côtés de polygones successifs. Son argumentation met à profit tant le phrasé du fragment attribué à Antiphon que le contexte : Antiphon ayant vécu à une époque où ces questions étaient au centre des débats et ayant subi l'influence d'Anaxagore, il serait difficile de le créditer d'un traitement naïf du sujet.

23 C'est en faveur de cette dernière hypothèse que penche, semble-t-il, [Lam, Ang, 1986]. Les deux dernières suppositions sont celles que [Knorr 1982] et [Mueller 1982] retiennent dans le cas d'Antiphon, lequel affirmerait qu'en un nombre fini de pas, l'on a épuisé par le polygone l'aire du cercle. La première interprétation plonge le problème dans le domaine des spéculations physiques atomistes, la seconde dans celui du sensible. [Volkov 1994] propose une interprétation nouvelle de ce passage. Partant de la constatation que les calculs subséquents de Liu Hui posent problème, il remarque que, pour une précision donnée, la suite concrète des résultats numériques des aires polygonales se rapprochent dans un premier temps du cercle, puis s'en écartent. Ce point pourrait représenter l'endroit où Liu Hui constate que l'on ne peut plus couper. Pareille interprétation met en valeur le lien indissociable qui pourrait lier l'aspect géométrique et l'aspect numérique ici.

ou chez Archimède pour traiter de problèmes semblables. De plus, il se pourrait que ce raisonnement mette en œuvre une infinité actuelle d'actes, à la différence des méthodes d'exhaustion, *indirectes* et ne recourant qu'à des *infinis potentiels,* d'Euclide et d'Archimède[24]. En revanche, notre texte évoque en cela des fragments pré-eudoxiens comme celui d'Antiphon. Il est difficile d'élaborer des comparaisons dans la mesure où certains des documents grecs dont on dispose semblent trop corrompus pour pouvoir les soutenir, mais, sur la base de l'analyse que nous donnerons du commentaire de Liu Hui, nous esquisserons, dans ce qui suit, des critères de démarcation entre ces deux ensembles de textes.

Quelle que soit la manière dont cette « atteinte » se réalise, tenons-la pour acquise et poursuivons pour l'heure la lecture de notre texte. Les conséquences de cette suite de découpes sont considérées tout d'abord pour ce qui est de la relation entre « ce qui est atteint » et la circonférence du cercle :

> « alors le corps (*ti*)[25] ne fait qu'un (*he*) avec la circonférence du cercle[26], et il n'y a rien qui soit perdu[27] ».

Ainsi ce qui est produit ne fait qu'un avec le cercle par ceci que leurs circonférences s'identifient. Par conséquent, non seulement l'acte, réitéré, nous permet d'atteindre au moment où l'on ne peut plus couper. Mais, de plus, ce qui est alors atteint ne se distingue pas de la circonférence du cercle. Une remarque s'impose ici : il n'est pas dit que la circonférence de ce qui est ainsi construit *est* celle du cercle, mais qu'elle épouse celle du cercle. Le texte ne donne donc pas pour identiques la circonférence du cercle et ce qui est atteint, mais les donne comme faisant corps l'une avec l'autre. Chaque mention de la figure atteinte reprend cette distinction, comme on

---

24 Sur ce point, voir [Chemla 1992b]. Les conclusions qui y sont tirées sur la base du cas de la pyramide restent valables ici.

25 Sur l'histoire de ce concept auquel Liu Hui recourt ici, voir [Friedrich 1987&1989] et [Robinet 1990]. En couple avec *yong* (fonctionnement), ce terme était appelé à devenir une des notions centrales de la philosophie en Chine. Les deux concepts sont articulés l'un à l'autre pour la première fois dans les écrits d'un philosophe du III[e] siècle un peu plus âgé que Liu Hui, Wang Bi. *Ti,* structure dit-on parfois, pourrait renvoyer à l'être constitutif en tant qu'on en donne l'engendrement par une procédure. *Yong* serait sa manifestation, via la procédure. Il est intéressant de constater que le terme de *ti* ne se retrouve pas dans le raisonnement pour le volume de la pyramide, et que ceci peut être corrélé avec une différence importante entre ces deux raisonnements infinitésimaux chez Liu Hui (voir ci-dessous note 38). Nous avons relevé ci-dessus l'expression *mi…mi,* qui se présente dans toutes les situations mathématiques où nous identifions l'intervention d'un nombre infini d'étapes dans une procédure. Lorsqu'il s'agit d'une division ou d'une extraction de racine carrée, le résultat de l'opération qui ne peut être effectuée jusqu'au bout est introduit par le biais d'un nom : on nomme les parts de la fraction, on accompagne le nombre qui n'a pas de racine carrée du terme de « côté de », pour désigner le résultat qui ne peut être obtenu. Ici, en matière de géométrie, on peut introduire une figure, celle du cercle, comme rendant compte, tout en en étant différente, de l'objet qui ne peut être exhibé mais dont la procédure d'engendrement nous est donnée.

26 Comme [Guo 1990], je garde ici le texte original, que [Qian 1963], [Guo 1983], [Chen 1986], [Li 1990] émondent en supprimant le caractère « circonférence » (*zhou*). Il me semble au contraire capital pour la finesse du raisonnement infinitésimal, comme je le soulignerai.

27 Il est difficile de déterminer si ce dernier membre de phrase se rapporte à la circonférence (rien de la circonférence ne serait perdu) ou s'il amorce le raisonnement qui suit et porte sur l'aire ou sur le corps du cercle.

peut en juger par la suite. Par ailleurs, la situation est ici, dans un premier temps, envisagée sur le plan des *figures*, c'est-à-dire de leurs *contours*. Ce n'est *qu'ensuite*, et *sur cette base*, que Liu Hui l'envisagera sur le plan des aires. Il est caractéristique, et c'est un révélateur intéressant de la finesse du raisonnement, que ces plans soient distingués et traités dans cet ordre. Les deux distinctions, entre le cercle et ce qui est atteint d'une part, entre les coïncidences des figures et le fait qu'elles aient même aire d'autre part, nous montrent que Liu Hui ne considère pas comme allant de soi que deux figures dont les contours coïncident de la sorte aient même aire. Observons donc comment les aires sont traitées dans l'étape suivante du raisonnement, et nous y trouverons le sens précis qu'il convient de donner à l'affirmation qui annonçait, pour une finesse croissante, une perte d'aire au contraire s'évanouissant :

> « Si à l'extérieur des côtés du polygone[28], il y a encore du diamètre de reste[29], quand on multiplie par les côtés[30] le diamètre de reste[31] alors l'aire *(mi)*[32] déborde à l'extérieur des segments circulaires. »

---

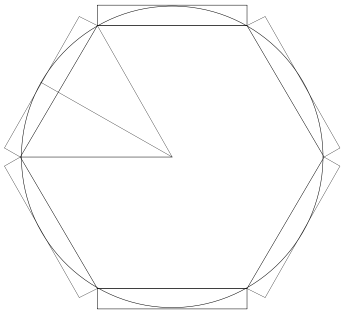
28 Entre le polygone et le cercle donc.

29 Ou : « du rayon qui reste » ; *jing*, qui renvoie à quelque chose de transversal, est le terme que l'on utilise pour désigner le diamètre et, partant, celui qui sert à former l'expression pour le rayon. L'expression « diamètre de reste » renvoie ici à ce qui, du diamètre, n'est pas contenu dans le polygone, soit à la plus grande distance entre circonférences du cercle et du polygone (sur la figure 1, il s'agit du segment AC). La traduction de l'énoncé suit ici la ponctuation de [Guo 1990]. On peut ponctuer ce passage autrement ([Qian 1963] et [Li 1990]) et faire de ce membre de phrase un énoncé à part entière, ce qui donne : « À l'extérieur des côtés du polygone, il y a encore du diamètre de reste. » Le chinois classique ne comportait en effet pas de ponctuation, et selon la manière dont les éditeurs ponctuent, le sens peut parfois subir des variations importantes. Cette dernière option de ponctuation fait de ce qui, pour l'autre interprétation, était une éventualité, quelque chose au contraire de factuel. Il faudrait alors comprendre que tout polygone se distingue du cercle, et que ce fait se manifeste par l'existence de ce diamètre de reste. Cette interprétation a pour conséquence que la figure finale ne devrait pas être prise comme appartenant à la catégorie des polygones. En revanche, l'autre branche de l'alternative oppose le cas où les polygones laissent un diamètre de reste au cas où il n'y a pas de diamètre de reste, qui renverrait à l'étape finale. Les conséquences de ce choix sont donc importantes, pour rendre plus précise notre interprétation de « ce qui est atteint ». Dans un cas, la figure finale ne serait pas un polygone tandis que chaque polygone serait distinct du cercle, alors que, dans l'autre, se trouvent opposés deux genres de polygones. Comme Liu Hui débute la phrase suivante par : « dans le cas où ce polygone atteint un degré de finesse tel que son corps (*ti*) coïncide avec le cercle », il semble que l'on soit dans le premier cas. Notre commentateur opposerait donc les polygones pour lesquels la figure présente un diamètre de reste au polygone dont la circonférence ne fait qu'un avec la circonférence du cercle et qui ne présente pas de diamètre de reste. De ce fait cependant, il resterait une différence irréductible entre le cercle et le polygone qui fait corps avec lui, même s'ils ont la même aire.

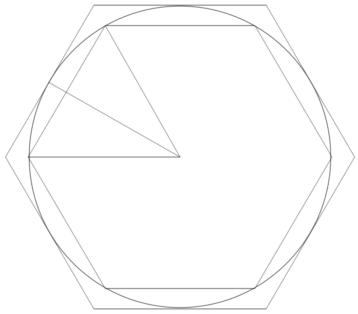
30 Le chinois classique peut ne pas préciser si un nom doit être compris comme un singulier ou comme un pluriel. Ici, dans tout ce qui précède, Liu Hui a noté qu'il multipliait par « un » des côtés, lorsque c'était le cas. Je lis donc ici un pluriel, de même que pour le terme « segments » qui suit. Cette interprétation est confirmée par la suite, où lorsque Liu Hui transforme cette démonstration en procédure, il calcule l'aire globale majorant l'ensemble des segments laissés pour compte.

31 À savoir, multiplier les côtés du polygone par la flèche de même longueur de tous les segments laissés pour compte.

32 Nous voici à nouveau confrontés à ce terme de *mi*, qui présente ici une curieuse combinaison d'aspects arithmétique et géométrique. Le fait que ce *mi* soit produit par une multiplication incite à y voir un concept arithmétique, tandis que le fait qu'il « déborde » à l'extérieur des segments semble indiquer qu'il est envisagé comme étendue. Comment dès lors le traduire, « aire » ou « surface » ? [Lam, Ang 1986] suggèrent de le comprendre comme « aire rectangulaire ». Contentons-nous momentanément de retenir cette ambiguïté qui traverse le texte et retenons provisoirement la traduction d'« aire ». Il me semble en effet que nous avons ici affaire à un concept spécifique, et l'ensemble du



Liu Hui



Archimède

FIG. 3

Ces segments, qui constituent ce qui, de la surface du cercle, n'est pas épuisé par les polygones, sont *dans leur ensemble* recouverts par des rectangles (voir figure 3)[33]. À chaque étape, l'aire globale restante peut donc être évaluée, et même, plus précisément, *majorée*. De plus, et c'est là l'une des caractéristiques capitales du raisonnement, on peut *évaluer ce majorant en fonction du diamètre de reste* de ladite étape, soit du plus grand écart entre les circonférences. L'aire qui majore est mesurée par le produit de ce diamètre de reste et d'une circonférence, tendant à ne faire qu'un avec celle du cercle, donc finie. Ce dernier point, qui n'est toutefois pas précisé dans le texte, est important pour la convergence. L'existence de cette étape, où la décroissance de la différence entre aire du cercle et aire des polygones successifs est *rapportée* à celle des diamètres de reste, est décisive pour la qualité du raisonnement : la différence entre les aires est donnée pour décroître en corrélation avec le diamètre de reste et non pas de manière floue, par référence à la figure. Autrement dit, ce n'est pas la disparition progressive de la surface « différence » de la figure qui sert d'argument à donner la différence des aires comme s'annulant en fin de compte. Notons, par ailleurs, qu'il n'est pas question ici d'un calcul numérique, mais d'un calcul géométrique. Ce n'est pas ainsi que l'aire sera calculée ci-dessous, lors de la transformation de la démonstration en algorithme. La forme de ce calcul est argumentative, liée à son insertion dans le contexte d'une démonstration. Tout le processus ité-

texte nous permettra d'en proposer une interprétation ci-dessous, lorsque nous chercherons à préciser les relations entre algorithme et démonstration.

33 L'aire de chacun des segments restants est majorée par l'aire du rectangle de longueur identique à celle d'un côté du polygone et de largeur égale à ce diamètre de reste. Ce type de majoration diffère de celle proposée par Archimède qui utilise les polygones circonscrits. Notons que la majoration qui en résulte est meilleure puisque le majorant est pour un état donné inférieur chez Liu Hui à celui qu'il est chez Archimède ([Liu 1984], p. 55-6, [Chen 1986]). Voir la figure 3, également. Mais il est frappant qu'en mettant en œuvre ces rectangles, Liu Hui recourt à la même figure qu'Euclide. Les motivations en sont cependant différentes. Pour Liu Hui il s'agira, nous le verrons, de majorer l'aire laissée pour compte par une quantité qui soit fonction de la distance entre les circonférences du cercle et d'un polygone. Les rectangles interviennent chez Euclide en vue de recourir au lemme X.1, le fameux « principe de bissection » : il vise donc à montrer que les triangles ajoutés à chaque étape sur les côtés du polygone de l'étape antérieure mordent de plus de la moitié sur l'aire laissée pour compte. Comme les rectangles constituant le double de ces triangles débordent à l'extérieur des segments négligés à ce point de la procédure, Euclide peut affirmer que tel est bien le cas.

ratif opère en conjonction avec la réduction de ce diamètre de reste, qui servira de critère à l'analyse de l'aire de la figure « finale ».

> « Dans le cas où[34] ce polygone atteint un degré de finesse tel que son corps *(ti*) coïncide avec le cercle[35], alors, à l'extérieur, il n'y a pas de diamètre de reste. Si à l'extérieur il n'y a pas de diamètre de reste, alors l'aire ne déborde pas au dehors. »

On a ici le point clef du raisonnement infinitésimal : Liu Hui effectue une évaluation de l'aire laissée pour compte, en liant la décroissance d'un majorant à celle du diamètre de reste. Et c'est le fait que ce diamètre de reste tende vers zéro qui entraîne, qui assure, l'évanouissement à terme de ce qui, de l'aire du cercle, ne serait pas pris en compte. Donc *ce n'est que parce que les circonférences ne feront qu'un (ce qui a été établi au point précédent) que les aires elles-mêmes ne feront qu'un.* De plus, ces convergences, articulées l'une à l'autre, se produisent donc simultanément. La dépendance des aires vis-à-vis des circonférences est double : le calcul du majorant met en œuvre le diamètre de reste, qui évalue la distance entre les deux contours, et la circonférence d'un polygone qui est d'autant plus proche du cercle que la découpe est fine[36]. Les circonférences sont premières et conditionnent les aires. C'est une conséquence de ce que le fait, pour les figures, de ne faire qu'un par leurs contours soit distingué du fait qu'elles aient même aire. Ainsi le diamètre de reste est l'élément qui permet d'articuler l'un à l'autre, la circonférence, d'une part, et l'aire, de l'autre, aussi bien en tant qu'élément géométrique qu'en tant que nombre. Cependant toutes deux, soulignons-le, sont ici appréhendées sous un biais géométrique abstrait, et non d'un point de vue numérique concret.

Que l'évanouissement à terme de l'aire laissée pour compte dans le cercle soit rendue dépendante de la coïncidence à terme des circonférences, que le passage effectif à la limite – de quelque nature qu'il soit – soit accompagné d'une évaluation de la décroissance du reste, c'est exactement sur ces points que la différence semble cruciale avec le texte pré-eudoxien d'Antiphon[37].

---

34 On peut aussi comprendre : « au moment où … ». Mais, dans les deux cas, l'affirmation porte sur le polygone.

35 Ici encore il est clair que l'objet construit par la procédure itérative n'est pas le cercle, puisqu'il en distingué par le fait qu'on les compare ; il est d'ailleurs dit « polygone ».

36 Liu Hui donne par la suite leur relation comme celle de l'arc à la corde.

37 La confrontation de ce raisonnement à celui que Liu Hui développe dans le cas de la pyramide montre que nous avons affaire ici à un mode stable de démonstration, comparable en ce sens à la manière dont la méthode d'exhaustion se manifeste dans les textes grecs ([Chemla 1992b]). La présence dans les deux cas de cette étape d'évaluation de la décroissance du reste met en évidence le caractère de nécessité qu'elle revêtait probablement aux yeux de Liu Hui. C'est cette stabilité qui donne sa valeur à l'opposition, sur ce point précis, entre le raisonnement de Liu Hui et celui d'Antiphon dont la démarche directe évoque le commentateur chinois, quelle que soit l'interprétation que l'on en donne. Voir [Knorr 1982], en particulier p. 123 *sq.*, et [Müller 1982]. Pour ce qui est de l'autre point d'opposition, nous verrons qu'il est caractéristique au raisonnement concernant le cercle. Nous avons noté que le texte de Liu Hui tout aussi bien que celui d'Antiphon pouvaient, au regard de la manière dont les polygones convergent vers le cercle, s'interpréter de diverses manières. Les commentateurs ([Guo 1983], [Li 1990], [Guo 1992]) qui insistent sur le fait que Liu Hui renvoie à une infinité actuelle de

Liu Hui se tourne maintenant vers le second ingrédient mis en œuvre dans la partie introductive : après avoir établi que circonférence, et *par conséquent* aire, du cercle sont engendrées par la découpe constamment répétée de polygones, il se préoccupe ensuite de ce qui arrive, lors du processus de duplication des côtés, à la *procédure* qu'il a mise en évidence pour le calcul de l'aire du 12-gone et du 24-gone. *Il montre alors que la relation dont elle procède entre circonférence du n-gone, aire du 2n-gone et rayon est correcte à chaque étape, en en déterminant la raison fondamentale, la même à chaque étape et valable quelle que soit l'étape.* Voici son libellé :

> « Quand avec un côté on multiplie le demi-diamètre, cela revient à trancher le quartier du polygone (*gu*) et chaque morceau est obtenu deux fois. »

On semble donc être passé là de la géométrie au calcul. Mais les opérations arithmétiques sont de fait en intime relation avec les opérations géométriques dont nous avons vu plus haut qu'elles engendraient une figure dont la circonférence épouse celle du cercle. En effet, quelle que soit l'étape, la multiplication prescrite d'un côté du n-gone par le rayon a deux effets. D'une part, les quartiers qui constituent le n-gone sont tranchés en deux, ce qui produit les quartiers du 2n-gone de l'étape suivante : c'est là que l'opération arithmétique épouse la découpe géométrique qui effectue la duplication des côtés. D'autre part, la multiplication, nous dit Liu Hui, produit chacun de ces nouveaux quartiers deux fois. C'est pourquoi il faudra diviser le résultat par deux pour obtenir l'aire visée, ce qui correspond au fait de prendre la moitié de la circonférence d'un polygone pour obtenir l'aire du polygone de l'étape suivante. C'est là que sont produits les éléments qui permettront la transformation du polygone en un rectangle dont la longueur vaut la demi-circonférence du polygone de l'étape précédente et la largeur constamment le rayon. Vue du point de vue de la géométrie, la duplication réitérée des côtés, nécessaire à l'approche du cercle, produit à chaque pas des situations géométriques nouvelles, où Liu Hui saisit une propriété permanente qui assure la perpétuation de la relation. La croissance de l'aire du 2n-gone est liée par une relation constante à la croissance de la circonférence du n-gone. De même que, précédemment, chaque énoncé saisissait ce qu'il y avait de commun à toutes les étapes du processus itératif, la formulation que choisit ici Liu Hui renvoie au fait dans toute sa généralité, et c'est ce fait même qui assure la permanence de la formule. Liu Hui peut en conclure :

> « C'est pourquoi quand on multiplie la demi-circonférence par le demi-diamètre, alors cela fait l'aire du cercle. »

Cette conclusion clôt le développement, en en explicitant la finalité : nous aboutissons, à son terme, à établir la correction de la procédure telle qu'elle est donnée dans les *Neuf Chapitres*. Insistons-y : c'est une relation qui passe à la limite. La relation exacte et permanente entre n-gone et 2n-gone se fond dans la procédure visée

découpes par opposition à Antiphon qui n'en effectuerait, lui, qu'un nombre fini, choisissent là un critère de démarcation tributaire des interprétations que l'on peut retenir dans les deux cas.

pour l'aire du cercle. Et tout le raisonnement de Liu Hui met en valeur que le fait que les termes de cette relation passent à la limite est distingué du fait que la relation elle-même y passe[38].

Par ailleurs, la forme de la démonstration de Liu Hui assure que, lorsque le terme de la circonférence ne fait qu'un avec la circonférence du cercle géométriquement, l'aire elle-même est identique à celle du cercle. Ainsi nous savons que dès lors que l'un des termes atteint à celui que nous visons, l'autre ne peut différer de celui que nous attendons. Ici la forme algorithmique de l'énoncé de la relation joue un rôle. Le lien qui unit circonférence du n-gone, rayon et 2n-gone est en effet orienté, de par l'expression procédurale. Nous savons que si la circonférence du polygone épouse géométriquement le cercle, les aires ne se distinguent pas. Cette circonférence étant par conséquent multipliée par le rayon produit une aire qui ne peut différer de celle du cercle. La priorité de la circonférence sur l'aire vient ici faire écho à la différence de leur statut dans l'énoncé de l'algorithme.

Si l'on observe le mouvement d'ensemble du raisonnement, on constatera que Liu Hui transforme la procédure à démontrer pour le calcul de l'aire du cercle en une procédure plus générale qui lie entre eux aire du 2n-gone, circonférence du n-gone ainsi que rayon du cercle, et dont celle-ci procède. La démonstration de cette nouvelle forme de la procédure s'effectue en saisissant la raison qui la sous-tend en toute généralité, indépendamment de la particularité d'une étape donnée. Par opposition à la permanence de cette procédure, la figure relativement à laquelle on l'envisage, elle, se transforme par une duplication des côtés, en parfaite adéquation avec la forme de la procédure et qui l'amène à ne faire qu'un avec le cercle. C'est là, par la même duplication que toutes deux impliquent, que se réarticulent l'une à l'autre la convergence des polygones vers le cercle et la validité de la procédure. Ce qui se transmet lors de l'itération n'est pas la procédure, invariablement exacte quelle que soit l'étape, mais la proximité de plus en grande au cercle jusqu'au moment où le po-

[38] Si nous avons souligné à de multiples reprises la stabilité du mode de raisonnement infinitésimal que Liu Hui met en jeu dans ce cas et dans celui, apparenté, du volume de la pyramide, nous pouvons sur ce dernier point relever une différence. Reprenons en effet le cas du cercle. La démonstration distingue deux temps. Dans le premier elle considère ce vers quoi tendent les termes de la relation (circonférence, puis aire de polygones), dans le second elle considère la relation exacte dans le cas-limite. De plus dans la première partie, l'énoncé selon lequel on atteint la circonférence précède toute évaluation. L'évaluation est effectuée lorsqu'il s'agit de questionner le rapport entre l'aire des polygones et celle du cercle, puis le transport de la relation. La question est donc dissociée en trois temps : les corps atteignent-ils au cercle?, les aires atteignent-elles à l'aire du cercle ?, la validité de l'algorithme suit-elle ce processus ? Dans le cas de la pyramide, les questions de l'atteinte du corps et de l'extension de la validité de l'algorithme sont traitées de concert. Le corps est décomposé en la suite des parties au long desquelles la validité de l'algorithme va s'étendre, d'où son épuisement achève la démonstration de la correction. De plus, c'est l'évanouissement à terme du *volume* laissé pour compte qui nous garantira du fait que l'on peut énoncer la procédure pour le *solide*. Est-ce en relation avec ce fait ?, le terme de *ti* reste absent de ce texte relatif à la pyramide. De manière corrélative, la nature de l'itération est différente dans le cas de la pyramide et dans celui du cercle. Ainsi le second point par lequel le texte de Liu Hui relatif au cercle se démarquait de celui d'Antiphon est spécifique à ce cas et ne se retrouve pas dans le cas de la pyramide.

lygone fait corps avec lui. L'algorithme général, toujours valide en ce cas, même si celui-ci reste indéterminé, se confond alors avec celui qu'il s'agissait de démontrer.

I.d. De la démonstration à l'algorithme

La démonstration de l'algorithme implique un retour sur les termes de « circonférence » et de « diamètre » qu'utilisent les énoncés des problèmes des *Neuf Chapitres*, puisque nous nous sommes, par le raisonnement, éloignés de la figure à laquelle renvoient ses données, à savoir celle de l'hexagone. C'est ce à quoi Liu Hui se consacre ensuite :

> « Ici par circonférence et diamètre, on désigne (*wei*) les valeurs (*shu*) qui atteignent à ce qui est ainsi (*zhi ran*)[39], ce que ne sont pas les *Lü* de 3 pour la circonférence et 1 pour le diamètre. Si la circonférence est de 3, c'est que l'on se conforme au pourtour de l'hexagone qui lui correspond. »

Suit une critique de ceux qui, copiant les erreurs des anciens, ont adopté ces valeurs de 3 et 1, alors qu'elles renvoient à l'hexagone et qu'elle reviennent donc à prendre son côté, à savoir la corde, pour l'arc correspondant. Si Liu Hui reprend ces questions, ce n'est pas tant pour tirer les conclusions de sa démonstration : l'application de la procédure des *Neuf Chapitres*, dans le cadre de la résolution des problèmes, nécessite une valeur du rapport entre circonférence et diamètre. C'est en *transformant* la démonstration précédente en algorithme, afin de la mettre en œuvre numériquement cette fois-ci, que notre commentateur va s'y appliquer. Reprenant le schéma général du raisonnement qui lui permettait de conclure à la correction de la première procédure, il établira ainsi de manière itérative des *lü* approchés, qui rendent compte des nouvelles réponses aux problèmes des *Neuf chapitres* qu'il fournit dans son commentaire. Cependant son calcul s'avérera avoir un second objectif : proposer de nouveaux coefficients pour les deux procédures approchées que donne le Classique (les troisième et quatrième). Il vise donc simultanément à établir les *lü* de la circonférence et du diamètre, d'une part, les *lü* du carré du diamètre et de l'aire du cercle de l'autre, s'en servant dans un cas pour transformer les données du problème, dans l'autre les coefficients de la procédure[40]. Nous nous concentrerons ici sur la nature de la transformation de la démonstration en algorithme.

C'est en utilisant le théorème de Pythagore, objet du dernier des *Neuf chapitres*, que Liu Hui transforme *l'argument* géométrique précédent en une *procédure* qui met à profit le système positionnel décimal et la structure décimale du système des unités de longueurs pour établir *du même pas* les rapports entre aire du cercle et carré de

---

[39] L'expression appelle à commentaire, nous y reviendrons. Notons pour l'heure que l'on y retrouve ici le même verbe d'« atteindre » que celui utilisé plus haut, lorsque Liu Hui décrivait le point ultime de la découpe.

[40] L'objet réel de son commentaire n'est donc pas seulement la procédure mais le couple qu'elle forme avec les données.

son diamètre ainsi qu'entre circonférence et diamètre[41]. Un lien est ainsi mis en évidence entre ces deux rapports.

Le commentaire se présente maintenant en une suite de paragraphes, proposant pour l'essentiel, des calculs identiques les uns aux autres mais permettant successivement de passer de l'hexagone au dodécagone, puis du dodécagone au 24-gone, du 24-gone au 48-gone, et enfin du 48-gone au 96-gone. En voici le schéma tel que le donne le premier paragraphe[42] :

> « Procédure qui consiste à couper l'hexagone pour en faire un dodécagone : Placer le diamètre du cercle, 2 *chi*[43]. Le diviser en 2, cela fait 1 *chi* et donne le côté de l'hexagone qui est dans le cercle. Prendre la moitié du diamètre, 1 *chi,* comme hypoténuse[44], la moitié du côté, 5 *cun*, comme base, et chercher la hauteur qui leur correspond. Le carré de la base (*goumi*), 25 *cun*, étant retranché du carré de l'hypoténuse, il reste 75 *cun*. En extraire la racine carrée en descendant jusqu'aux *miao*, aux *hu*, puis encore une fois *(yi*) rétrograder *(tui*) le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale [de la racine][45]. Le chiffre de la partie décimale qui n'a pas de nom, on le prend comme numérateur, et on prend 10 comme dénominateur, cela fait en simplifiant (*yue*) deux cinquièmes de *hu*. Par conséquent on obtient pour la hauteur 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu,* deux cinquièmes de *hu*. Retrancher ceci du demi-diamètre, il reste 1 *cun* 3 *fen* 3 *li* 9 *hao* 7 *miao* 4 *hu* trois cinquièmes de *hu*[46], que l'on appelle *(wei*) petite base *(xiao gou*)[47]. La moitié du côté du polygone, on l'appelle par suite de nouveau petite hauteur. Chercher l'hypoténuse qui leur correspond. Son carré : 267949193445 *hu*[48], la fraction restante, on l'abandonne. En extraire la racine carrée, cela donne un côté du dodécagone. »

Ainsi, une première application du théorème de Pythagore permet de calculer, à partir du demi-diamètre et du demi-côté du n-gone, la longueur de la perpendiculaire

---

[41] [Liu 1984], p. 54, souligne le peu de moyens mathématiques différents mis en œuvre par l'algorithme pour arriver à ses fins. Il développe une comparaison avec les calculs d'Archimède.

[42] Nous ne nous pencherons pas ici sur la gestion des approximations dans le calcul à proprement parler. Le lecteur trouvera dans [Volkov 1994] une synthèse des travaux antérieurs et une analyse systématique de l'aspect numérique.

[43] Ainsi on revient aux dimensions proposées au début du commentaire et laissées en attente depuis lors, c'est un argument pour considérer le commentaire comme dû à un unique auteur.

[44] Ce problème, comme celui du segment et contrairement à tous les autres, sont résolus par le triangle rectangle, ce qui montre donc l'affinité de cette figure avec les questions relatives au cercle. Les triangles sont introduits, désignés, par le simple fait de nommer deux des trois grandeurs que sont leur base (le côté le plus court de l'angle droit), leur hauteur (le côté le plus long) et leur hypoténuse. Renommer, comme ce sera le cas plus loin, un de ces côtés revient à passer de la prise en considération d'un triangle à un autre.

[45] Cela renvoie à l'algorithme d'extraction de racine, dans la variante qu'en donne Liu Hui dans son commentaire, puisqu'il y propose de trouver les chiffres de la partie décimale (sur ce sujet, le lecteur peut se reporter à [Chemla 1987a&b]). Noter l'emploi du terme technique *tui* (qu'on retrouve dans les textes postérieurs) au lieu de *zhexia* , le terme retenu dans les *Neuf chapitres.* L'ordre de grandeur jusqu'auquel extraire la racine est indiqué avec précision. Étant donnée la manière dont cette quantité est obtenue, la valeur qu'on choisit d'en retenir est par défaut.

[46] Ce nombre est alors forcément par excès.

[47] Cette appellation ne désigne pas un segment précis mais une fonction dans le raisonnement. Au contraire d'une variable instanciée par des valeurs différentes au cours d'un algorithme, on a ici le cas d'un même nombre qui reçoit successivement des noms différents selon les fonctions qu'il joue à des moments successifs de l'algorithme.

[48] Ce nombre est par excès, par calcul, mais comme on néglige la partie fractionnaire, on ne contrôle plus la nature de l'approximation. [Volkov 1994] examine ce point en détail.

abaissée du centre du cercle sur le côté du n-gone (OA sur la figure 1), puis, par soustraction, la flèche d'un segment circulaire que le n-gone découpe dans le cercle (AC). Une seconde application du théorème de Pythagore permet ensuite d'obtenir, sur la base du demi-côté du n-gone (AB) et de la flèche (AC), le carré du côté du 2n-gone (BC). Celui-ci sera immédiatement ensuite réinjecté dans la même procédure, pour obtenir le carré du côté du 4n-gone, et ainsi de suite.

En fait, l'extraction de la racine carrée qui devrait produire le côté du 2n-gone est mentionnée pour l'intelligibilité du calcul, mais elle n'est pas effectuée puisque seul le carré du côté sera utilisé, dans le cadre d'une nouvelle application du théorème de Pythagore, au cours de l'itération de la procédure. On aura en fait besoin du carré de sa moitié, que Liu Hui produit directement en divisant ce carré par 4. Pourtant, au début de l'étape suivante, on lit : « À nouveau, prendre le demi-diamètre comme hypoténuse, la moitié du côté comme base, et chercher la hauteur qui leur correspond. » Mais les calculs reprennent à la valeur du carré du côté. L'algorithme est ici aussi énoncé de sorte que ses calculs soient intelligibles, mais les opérations concrètes reprennent à l'endroit où on les avait arrêtées plus haut. Le calcul réel et le raisonnement algorithmique qui l'accompagne empruntent des chemins différents et se retrouvent aux points de leurs visées communes, qui apparaissent ainsi munies d'une sémantique et d'une valeur. L'algorithme et les raisons de sa correction, données sous forme elle-même algorithmique, ne s'opposent pas.

Observons maintenant la manière dont cette procédure est articulée sur sa conclusion, à savoir sur le calcul des *lü* visés. La répétition d'une sous-procédure, permettant de déduire le côté du 2n-gone à partir de celui du n-gone, en fournit, nous l'avons vu, la trame. Au cours des premières étapes, point n'est question d'un calcul d'aire ou de circonférence. Liu Hui effectue une première addition à la sous-procédure itérée, une fois calculé le côté du 48-gone à partir du celui du 24-gone. Ici, à la différence des étapes précédentes, l'extraction de racine qui produit le côté lui-même, est exécutée. Ce côté est alors multiplié par le demi-diamètre, puis par 24, pour produire, conformément à la relation mise en évidence lors de la démonstration précédente, l'aire du 96-gone, 313 *cun* 584/625 *cun*. À cet endroit du calcul, pour une dernière fois, la sous-procédure que l'algorithme répète est reprise, pour viser le calcul du côté du 96-gone, à nouveau réellement exécuté, et sur cette base, de même que précédemment, le calcul de l'aire du 192-gone. La valeur qui en est obtenue à ce point est de 314 *cun* 64/625 *cun*. Liu Hui, s'écartant alors définitivement de l'itération, se tourne maintenant vers le calcul d'une aire majorant celle du cercle. À cette fin, il reprend l'idée de la démonstration précédente : il majore les aires des segments laissés pour compte si l'on prend l'aire du 96-gone en lieu de celle du cercle par l'aire des rectangles dans lesquels ils sont inscrits. Cependant, si la surface majorante choisie est la même, le calcul de son aire sera effectué par d'autres voies que celles empruntées dans la démonstration. La différence entre les aires du 192-gone et du 96-gone, toutes deux déjà évaluées, fournit l'aire des triangles par lesquels la première forme se démarque de la seconde. Son double fournit exactement l'aire de l'ensemble des rectangles visés. Le calcul du majorant l'évalue alors à 314 *cun* 169/625 *cun*. Liu Hui, constatant que le minorant que représente l'aire du 192-gone et le majorant calculé à partir du 96-gone présentent la même partie entière, 314 *cun*, conserve celle-ci pour représenter le *lü* de l'aire du cercle, en relation avec la valeur de 400 pour le *lü* du carré du diamètre. Pour produire alors un *lü* pour la circonférence, il ne reprend pas le côté du 96-gone. Il inverse plutôt la relation fondamentale que met en œuvre la démonstration et calcule la circonférence en divisant l'aire du 192-gone par le demi-diamètre. Les *lü* qu'il obtient ainsi sont de 157 pour la circonférence et de 50 pour le diamètre.

À ce point du commentaire de Liu Hui, la procédure que proposent les *Neuf chapitres* est démontrée correcte, et de nouveaux termes, plus précis, sont proposés pour former le rapport entre les grandeurs impliquées par le problème, termes que Liu Hui mettra en œuvre comme nous l'avons vu. Sur la base de notre analyse des trois parties du texte, à savoir les énoncés et les procédures des *Neuf chapitres*, la démonstration que Liu Hui fournit à la première, et l'algorithme qu'il en déduit pour le calcul de ses nouveaux *lü*, tournons-nous maintenant sur ce qu'elles peuvent nous dire des relations qu'entretiennent démonstration et procédure dans le Classique et dans son commentaire.

II. ALGORITHME ET DÉMONSTRATION

II.a. Relations entre démonstration et algorithme chez Liu Hui

J'envisagerai dans un premier temps les relations qu'entretiennent la démonstration que Liu Hui donne de la première procédure des *Neuf chapitres* et l'algorithme qu'il met en œuvre par la suite pour préciser les relations entre les entités géométriques en jeu. Deux faits saillants se manifestent d'entrée de jeu. D'une part, la démonstration n'est pas fermée sur elle-même, ne trouve pas son unique fin en elle-même, mais elle ouvre au contraire sur la production d'un nouvel algorithme, dont le texte lui fait suite[49]. D'autre part, l'opposition entre ces deux temps du discours mathématique n'est pas radicale : la démonstration recourt à des opérations, tandis que l'algorithme laisse voir, à l'endroit où il introduit des ingrédients étrangers à la démonstration dont il s'inspire, les raisons de sa correction. Précisons plus avant leurs relations.

Démonstration et algorithme partagent le même dessin (figure 1), qu'un processus itératif transforme, et prennent tous deux leur point de départ dans la figure de l'hexagone. Les acquis de la démonstration servent de base à l'algorithme, qui procède par duplication des côtés et fera usage, lors de ses dernières étapes, de la rela-

[49] Je retrouve en ce cas une des conclusions à laquelle m'avait conduite l'analyse d'autres extraits du commentaire, voir [Chemla 1992a].

tion générale exhibée entre aire du 2n-gone, circonférence du n-gone et rayon du cercle. On reconnaît là les deux temps fondamentaux de la démonstration.

Cependant, dans un premier temps, l'algorithme s'oriente vers le calcul des circonférences successives, ou plus précisément des côtés des différents n-gones. À cet effet, le théorème de Pythagore est introduit, auquel la démonstration ne recourait pas. Par contraste, il apparaît que la démonstration, lorsqu'elle renvoyait à la circonférence dans son entier, ne se préoccupait nullement de sa calculabilité effective. Ce fait souligne que les termes de pareille démonstration prennent leur sens de la figure, et non d'une quelconque valeur numérique qui leur serait attachée. Pourtant, ils y sont impliqués dans des calculs.

Sur un autre plan, l'algorithme est arrêté à un point très précis des calculs : l'on peut alors produire un majorant et un minorant de l'aire du cercle partageant trois chiffres significatifs en commun, ce qui permet de retenir 314 comme *lü* de l'aire du cercle. Pas un résultat numérique superflu n'est mentionné. Pourtant si seuls deux calculs d'aire polygonale sont donnés pour exécutés à cette fin, pour le 96-gone et le 192-gone, il a fallu effectuer d'autres calculs analogues pour déterminer l'étape à laquelle il convenait de s'arrêter. Leurs résultats, inutiles au regard de la visée de l'algorithme, sont passés sous silence ([Li 1990], p. 260). Seule la forme du raisonnement sur lequel l'algorithme se conclut éclaire, par retour, la nature des données numériques qu'il produisait auparavant. Ce détail éclaire la nature extrêmement concertée du texte : il prend la forme la plus épurée possible qui mène au résultat visé.

Ce souci de concision se manifeste également dans la menée des calculs, qui recourent à de nombreuses subtilités en articulant des polygones différents. Dans les premiers temps de l'algorithme numérique, à l'étape n, on part du côté du 3.2^n-gone, puis l'on calcule le diamètre de reste du 3.2^n-gone et le côté du 3.2^{n+1}-gone. Dans un second temps, pour des n plus grands, à l'étape n, on part du côté du 3.2^n-gone, puis l'on calcule le diamètre de reste du 3.2^n-gone, le côté du 3.2^{n+1}-gone, l'aire de quatre quartiers du 3.2^{n+2}-gone (un côté du 3.2^{n+1}-gone fois le rayon), et enfin l'aire totale du 3.2^{n+2}-gone en multipliant par 3.2^n. Notons que, si l'algorithme met en œuvre les idées de la démonstration, il articule, lui, entre eux trois polygones successifs – en fait, le 24-gone, le 48-gone et le 96-gone, puis le 48-gone, le 96-gone et le 192-gone –, tandis que la démonstration n'utilisait l'articulation l'un avec l'autre que de deux tels polygones. De fait, il apparaît ici, par contraste, que si la démonstration mentionne tout d'abord cette articulation, elle disparaît ensuite de l'horizon des préoccupations, puisqu'il ne s'agira plus d'appliquer la relation qui s'enracine dans cette articulation entre le n-gone et le 2n-gone que dans le cas où, la circonférence du polygone ne faisant qu'un avec le cercle, l'aire qu'elle produit ne se distingue pas de celle du cercle.

Mais revenons à l'algorithme : cette articulation de trois polygones successifs a ses raisons dans le calcul numérique. La démarche en est extrêmement fine : si l'on voulait calculer un majorant de la différence entre aire du cercle et aire du 3.2^{n+2}-gone, en l'occurrence le 192-gone, il faudrait calculer le diamètre de reste des deux étapes suivantes, n+1 et n+2 – ici pour le 96-gone et pour le 192-gone. Liu Hui contourne cette lourdeur de deux manières, ce qui lui permet de s'en tenir aux calculs de l'étape n. Tout d'abord, première astuce, il utilise le double de la différence entre les aires connues du 3.2^{n+1}-gone et du 3.2^{n+2}-gone – du 96-gone et du 192-gone – pour fabriquer un majorant de l'aire du cercle à partir de celle du 3.2^{n+1}-gone (il n'utilise donc pas le diamètre de reste, dont il n'aura de ce fait pas à déterminer la valeur). Le double de cette différence fournit en effet l'aire de l'ensemble des rectangles qui majorent la différence entre l'aire du 96-gone et du cercle, sans qu'il y ait besoin ainsi de calculer une étape supplémentaire[50]. De plus, deuxième astuce, il utilise le 3.2^{n+2}-gone pour obtenir un minorant et le 3.2^{n+1}-gone pour obtenir un majorant. Ainsi il peut se contenter de l'étape n pour atteindre une visée, là où une application irréfléchie des idées de la démonstration aurait demandé d'aller jusqu'à l'étape n+2.

L'algorithme met donc en œuvre les idées de la démonstration d'une manière particulière qui les fait se plier aux exigences de concision optimale du calcul. Cette caractéristique peut être mieux mise en valeur par une seconde remarque. Liu Hui ne mentionne ici l'exécution que de deux calculs d'aire, relatifs respectivement au 96-gone et au 192-gone. Or chacun de ces calculs servira à deux fins différentes dans la procédure. Le premier, en donnant l'aire du 96-gone, nous munit de la donnée sur la base de laquelle le majorant sera évalué. Par ailleurs, son résultat nous fournit un des deux ingrédients qui permettra de calculer ce qu'il faut lui ajouter pour obtenir ce majorant. Le second calcul, qui produit l'aire du 192-gone, détermine le second ingrédient : le double de leur différence sera ajouté à l'aire du 96-gone à cette fin. Mais l'aire du 192-gone sera retenue par ailleurs comme le minorant efficace pour arrêter la valeur de 314 comme *lü* de l'aire.

Ainsi démonstration et procédure mettent en œuvre le même élément géométrique pour majorer l'aire des segments circulaires laissés pour compte lorsque l'on considère l'aire d'un polygone en lieu de l'aire du cercle : il s'agit de l'aire de l'ensemble des rectangles dans lesquels ces segments sont inscrits. Cependant, en fonction de la nature différente des contraintes et des visées dans chacun de ces contextes, cet élément géométrique sera envisagé de manière différente. La procédure introduit une nouvelle relation, en donnant l'aire de l'ensemble de ces rectangles pour le n-gone comme le double de la différence entre les aires du 2n-gone et du n-gone. Ce faisant, elle ne contourne pas seulement le calcul du diamètre de reste pour le n-gone. Elle évite également d'utiliser la circonférence du n-gone : de fait cette circonférence sera déduite de la valeur de l'aire du 2n-gone. Cette manière qu'a la procédure de calculer l'aire de l'ensemble des rectangles a pour particularité de faire disparaître toute mention à la circonférence du cercle.

---

50 Ce mode d'utilisation des rectangles nous rappelle l'usage qu'en fait Euclide.

En revanche, dans la démonstration, l'objectif est d'évaluer la décroissance du reste au fur et à mesure que les côtés du polygone se raffinent. Mais, plus encore, il s'agit d'articuler cette décroissance à la manière dont la circonférence des polygones se rapproche de celle du cercle. Le concept de diamètre de reste joue un rôle central dans la rencontre de ces deux exigences. Il permettra d'évaluer la proximité entre les circonférences, s'évanouissant lorsqu'elles coïncident. En ce sens, il permet l'analyse de l'évolution de la figure. Mais de plus il permet de faire dépendre la différence des aires de la distance des circonférences. Et lorsque Liu Hui exprime l'aire de l'ensemble des segments en fonction de ce diamètre de reste, il peut déduire, de la coïncidence des circonférences, l'égalité des aires. La perspective que donnerait sur cette surface le fait d'en calculer l'aire à l'instar de la procédure ne permettrait pas de conclure. Selon qu'elle est impliquée dans un raisonnement ou dans un algorithme, l'aire de cette surface doit être considérée sous des biais différents. Il apparaît ainsi une différence entre *opération-argument* et *opération-calcul*. Ceci renvoie à une différence d'architecture entre démonstration et procédure : le diamètre de reste, qui était la cheville ouvrière du raisonnement infinitésimal, ne joue qu'un rôle auxiliaire dans la procédure de calcul. Autant dans la démonstration, il donnait une évaluation de la distance entre les circonférences et permettait d'exprimer la dépendance de l'évolution des relations entre les aires vis-à-vis de l'évolution des circonférences, autant, dans le calcul, il œuvre, *via* le théorème de Pythagore, à permettre la détermination de la circonférence des polygones. Il y a donc, en fonction des buts, mise en adéquation de la manière d'utiliser les moyens.

Par ailleurs, toujours en contraste avec la procédure, le raisonnement parle du diamètre de reste en tant qu'il se voit sur la figure *indépendamment de sa calculabilité*. Et, par conséquence, il considère l'aire majorante dans ses transformations, de manière abstraite, indépendamment de son calcul effectif. Nous retrouvons en cela une remarque précédente. Les grandeurs sont données par le dessin et l'organisation de leur système y est lu, sans référence à leur valeur. Cette particularité renvoie à une différence dans la nature de l'itération que démonstration et procédure emploient. L'itération porte, dans la démonstration, sur la figure, qu'elle produit : c'est une opération géométrique qui est reprise. L'itération à laquelle recourt la procédure prend pour acquise cette figure et porte sur les calculs : les résultats d'une application de la sous-procédure sont repris comme points de départ de l'application suivante.

Tentons de tirer les conclusions de cette analyse. Il est manifeste que démonstration et procédure présentent ici une certaine continuité. Non pas seulement parce que la procédure repose sur les idées de la démonstration. Mais également parce que, plus généralement, la démonstration met en œuvre des calculs, tandis que l'algorithme reste transparent sur la signification de ses opérations. Cependant cette continuité ne doit pas masquer des différences profondes.

Tout d'abord les termes que ces deux textes mathématiques impliquent sont de nature différente. Les opérations arithmétiques que la démonstration met en œuvre portent sur des termes dont la valeur n'est pas déterminée : termes comme résultats tirent leur signification de la géométrie, à savoir d'une référence à la figure. Leur calculabilité effective, numérique, n'a simplement pas de pertinence dans ce contexte. Les opérations sont effectuées de manière géométrique, dans l'ordre de la sémantique. Ce fait est souligné par la remarque que Liu Hui glisse à la fin de sa démonstration, lorsqu'il constate que les valeurs de la circonférence et du diamètre du cercle auxquelles fait référence l'établissement de la procédure diffèrent de celles auxquelles celle-ci est censée s'appliquer, si l'on suit le Classique. Telles sont les valeurs à entrer dans l'algorithme pour qu'il soit correct : elles doivent « atteindre à ce qui est ainsi ». Mais pareilles valeurs ne sont pas déterminées numériquement, elles n'ont de sens que géométrique. Et il en va de même de la correction de l'algorithme qui les utilise : elle ne peut avoir de pertinence numérique.

Il se fait alors jour une distinction entre deux types d'algorithmes. Appelons le premier algorithme « abstrait » : il se caractérise par le fait que ses opérations établissent des relations entre des objets, sans que ceux-ci aient à être numériquement déterminés, ni que les opérations soient elles-mêmes effectuées. Il nécessite une sémantique pour ses termes de premier niveau et, sur cette base, construit une sémantique pour les termes produits. Ses objets sont ici des réalités de nature géométrique, sur lesquels il propose un mode de calcul abstrait[51]. La forme algorithmique que contient la démonstration elle-même est typiquement de ce premier type. À ce premier type d'algorithme s'oppose un second, que je dirai « numérique » et qui, lui, est à proprement parler de l'ordre du calcul. Son emploi nécessite de ses termes de premier niveau qu'ils soient numériquement déterminés, et les opérations qu'il leur applique sont effectivement exécutées. Il construit ainsi les valeurs numériques des termes construits. La procédure de calcul de *lü* que nous examinons ici serait d'un type mixte, dans la mesure où elle articule sémantique et calcul. Il s'avère ainsi que les deux types ne sont pas exclusifs.

Pour décrire en ces termes l'ensemble du texte de Liu Hui que nous avons analysé, on peut dire que, dans le cadre de sa justification, le commentateur traite l'algorithme des *Neuf chapitres* comme s'il était du premier type. Cependant l'analyse de la situation qu'il produit alors met en évidence les problèmes qui se posent lorsque, comme il le fait ensuite, on le considère sous le second angle. C'est dans ce contexte qu'il effectue sa transformation de la partie algorithmique abstraite de sa démonstration en un algorithme effectivement numérique.

Cette opposition entre deux types d'algorithmes peut être corrélée à des distinctions conceptuelles qui semblent traverser le commentaire. Ainsi c'est à l'univers des algorithmes de premier type qu'il faudrait, semble-t-il, rattacher le concept de *mi*,

[51] [Li 1990] insiste à de multiples reprises (p. 252, 256) sur la nature géométrique de ce premier passage du commentaire. Il souligne en particulier que Liu Hui nous renvoie, jusque dans ses évaluations quantitatives, au dessin.

que nous avons rencontré plus haut. Rappelons que Li Chunfeng l'interprète comme une aire, soit une quantité, mais en tant que cette aire serait déploiement, en un seul tenant. Il se pourrait que telle soit la nature du résultat d'une multiplication, dans le contexte d'un texte comme celui de notre démonstration. Toujours est-il que dès le premier calcul, relatif à l'hexagone, la multiplication de deux longueurs l'une par l'autre produit une aire qui est traitée comme déploiement dans l'espace et non sous les espèces de sa valeur numérique, puisque Liu Hui y reconnaît l'aire (*mi*) du dodécagone[52]. Ainsi, la démonstration travaille avec des longueurs envisagées non pas numériquement mais par référence à une figure. Les multipliant, elle produit des aires à concevoir sous l'angle du déploiement et non sous leur aspect numérique. Par opposition à cela, *ji* désignerait l'aire en tant qu'elle est une quantité et renverrait à l'univers des algorithmes du second type.

Plus généralement, les opérations d'un algorithme peuvent présenter un aspect numérique, ce à quoi renvoie entre autres le résultat (*ji*) de la procédure des *Neuf Chapitres*, et, comme c'est le cas ici, un aspect géométrique de constitution et de manipulation d'aire qu'évoquerait le terme de *mi*. Que l'opération numérique renvoie à *ji* et l'opération sémantique à *mi*, on peut ainsi faire sens de l'interprétation par Li Chunfeng de l'opposition entre ces deux concepts[53]. Nous aurions là un cadre commun pour la description de nos deux textes. Il permet de rendre compte de leur continuité de nature, tout en précisant ce en quoi ils diffèrent. Quoi qu'il en soit, si le terme de *ji* se rencontre dans les *Neuf chapitres* pour désigner le résultat d'une opération, il semble bien que le terme de *mi* ne se présente que dans le cadre du commentaire et soit donc produit dans le même temps que sont explicitées les raisons de la correction des algorithmes, dans un contexte démonstratif donc.

[52] On comprend là toute la difficulté qu'il y a à traduire effectivement le terme de *mi*. Il tient de l'aire comme de la surface, de la quantité et de la forme, ce dont ne rendent pas compte les interprétations qui en font un nombre. Il est surface en tant qu'elle est engendrée par une opération arithmétique abstraite – quoiqu'il ne soit pas nécessairement rectangle. Mais il est tout autant aire, en tant qu'il en est aussi la mesure. Ce sont des figures rectilignes qui permettent d'établir la validité de l'algorithme pour le calcul de l'aire du cercle. Le corrélat en est que pour le triangle comme pour le cercle, et comme pour toute autre surface, la démonstration procède par transformation de la surface en rectangle. Il en va de même en dimension trois, où tous les solides, y compris celui de la pyramide, sont traités par transformation en parallélépipède. Ceci est à corréler probablement à cette double dimension du calcul, abstrait et numérique, que nous avons rencontrée tout au long du texte : que le rectangle soit la figure fondamentale des aires n'est qu'une manière d'indiquer que les aires se calculent par produit de deux dimensions ; le facteur qui intervient renvoie à la transformation qu'il convient d'opérer pour faire apparaître l'aire sous les espèces du rectangle.

[53] On peut, à partir de cette hypothèse, reprendre la critique que Li Chunfeng adresse à Liu Hui au moment où celui-ci introduit, au début de l'ouvrage, le concept de *mi*. Dans l'une comme dans l'autre des versions du texte de Liu Hui, l'association entre *ji* et *mi* qu'établit le premier énoncé (voir ci-dessus) semble avoir pour conséquence une vision purement numérique du concept de *mi*, ce à quoi Li Chunfeng s'oppose. C'est en tant qu'elle est également déploiement dans l'espace que la multiplication de la longueur par la largeur peut, selon lui, recevoir le nom de *mi*. Il est cependant intéressant que l'opposition qu'il élabore permette de rendre compte de l'usage que Liu Hui fait des termes dans son commentaire au calcul de l'aire du cercle, ce qui ne manque pas de soulever des problèmes quant à l'attribution de cette partie du commentaire. J'aurai à revenir sur cette question dans une publication ultérieure.

La distinction de ces deux plans est peut-être ce qui permet également de préciser la signification de l'énoncé de Liu Hui lorsqu'achevant sa démonstration et revenant sur les termes de « circonférence » et de « diamètre », il affirme qu'ils « désignent les quantités qui atteignent à ce qui est ainsi » : il ne s'agit pas de donner ici des valeurs déterminées pour exactes ; au contraire, de même que *mi* est opposé à *ji*, les termes pourraient renvoyer non pas à des valeurs numériques *stricto sensu*, mais à des longueurs de mesure indéterminées. L'énoncé articulerait les deux plans que nous distinguons, et annoncerait le passage de l'un à l'autre.

Cela incite à reprendre la partie infinitésimale de l'argumentation : de même que les diamètre et circonférence sont donnés comme renvoyant à ce qui est ainsi, sur la base de la figure et indépendamment du fait de savoir si de telles quantités sont « exprimables », par référence à leur lien dans une relation, on peut conjecturer que la découpe atteint à ce qui ne fait qu'un avec le cercle par la pensée, et non ni dans le physique, ni dans le sensible. Un lien est ainsi établi entre les deux situations où le même mot d'« atteinte » advient et où il produit le même problème d'interprétation, puisque, dans un cas, les quantités sont actuellement inexprimables toutes deux à la fois, soit incommensurables, tandis que, dans l'autre, la procédure serait, en toute rigueur, actuellement ineffectuable. Ce lien inciterait à opter pour l'interprétation selon laquelle Liu Hui pense à une infinité actuelle de découpes. Il met en lumière, par ailleurs, le fait que lorsque le commentateur dit *shu* (quantité), il ne le considère pas forcément comme effectivement énonçable[54].

II.b. Sens du dispositif textuel des *Neuf chapitres*

La situation précédente nous a permis d'observer les relations concrètes que pouvaient entretenir chez un même auteur les activités mathématiques de démonstration et d'écriture d'algorithme. Examinons à présent les rapports qui unissent la procédure pour le calcul de l'aire du cercle telle qu'on la trouve énoncée dans les *Neuf chapitres* à la démonstration qu'en donne Liu Hui. Que pouvons-nous attendre de cette confrontation ? Il s'agira, pour nous, de mettre à profit cet ensemble d'un texte et de la réaction qu'il suscite chez un commentateur pour poser la question de savoir quel est le contenu du Classique. En d'autres termes, comment lire les *Neuf chapitres* ? Sommes-nous certains *a priori* de la réponse à cette question ?

Projetant sur l'ensemble du Classique et de son commentaire des catégories textuelles familières, on a généralement été tenté de ne voir dans les énoncés du premier que pure assertion, là où le texte du second serait pure démonstration. Pareille hypo-

[54] Cette conclusion est confortée par une déclaration de Liu Hui en conclusion de sa démonstration de la correction de l'algorithme pour le calcul du volume de la pyramide : « Lorsque l'on cherche à aller jusqu'au bout des quantités, dit-il, cela signifie qu'on les déduit à l'aide de la situation, cela n'implique pas de calcul avec les baguettes. » Or, dans cette démonstration, les quantités que l'on diminue de moitié à chaque étape interviennent elles aussi potentiellement, par référence à une figure et non pas dans des calculs effectifs.

thèse a pour conséquence d'opposer l'un et l'autre comme produits par des activités mathématiques de nature différente. Plusieurs éléments me semblent ébranler de telles certitudes et montrer que tant les *Neuf chapitres* que le commentaire mêlent de manière indissociable algorithme et démonstration, selon des modalités en partie différentes. J'argumenterai maintenant ce point pour ce qui concerne le Classique, en tentant de dégager, du commentaire de Liu Hui, les indices qui permettent de reconstruire son mode de lecture des *Neuf chapitres* et, partant, les indices des dimensions démonstratives du Classique[55].

Reprenons donc la démonstration de Liu Hui ainsi que l'algorithme qu'il en déduit. Une relation générale, liant l'aire du 2n-gone, la circonférence du n-gone et le rayon du cercle, y joue un rôle central, nous l'avons vu. Cependant cette relation n'intervient de manière efficace qu'en fin de démonstration, ou en fin de calcul. Il est nécessaire, dans le cas de la démonstration, de pouvoir affirmer sa validité pour le polygone dont la circonférence ne fait qu'un avec celle du cercle, mais dont le rang restera *indéterminé*. On peut ne pas y recourir dans les toutes premières étapes du calcul, mais effectuer les calculs qu'elle permet à partir d'un rang lui-aussi *a priori* indéterminé. En conclusion, sa validité est requise et doit donc être établie au moins pour tous les polygones au delà d'un certain rang. Or Liu Hui, dans sa démonstration, montre la correction de cette relation pour l'hexagone. C'est en fait inutile si l'on vise à l'économie de la démarche, et ce à deux titres. Non pas seulement parce que la relation n'est nécessaire qu'à partir d'un certain rang. Mais également parce que n'importe quel polygone régulier inscrit au cercle pourrait servir de point de départ à son raisonnement. Et si l'on se penche sur le texte de son commentaire, on constate qu'effectivement, après avoir mis en évidence les relations qui unissent hexagone, dodécagone et 24-gone, il traite chaque étape de son raisonnement avec une généralité qui permettrait de la faire porter sur la situation qu'engendrerait un polygone quelconque inscrit au cercle. Pour ce qui est, en effet, d'engendrer ce qui ne fera qu'un avec le corps du cercle, nous avons observé que c'est le fait de la duplication lui-même qui est mis en avant, sans référence à la situation particulière qui prend racine dans l'hexagone. Pour la correction de l'algorithme lui-même, la raison qui en est avancée l'établit en toute généralité comme lien entre un n-gone régulier, le 2n-gone qu'il engendre et le rayon du cercle, sans mention ni de la figure dont on est parti, ni de l'étape à laquelle on se trouve.

On pourra rétorquer que Liu Hui veut commencer par un exemple, qu'il veut illustrer dans un premier temps la relation générale dans une de ses instanciations particulières. D'autres exemples étaient en ce cas disponibles : pourquoi ne pas commencer par le triangle inscrit au cercle, qui mène en une dissection à l'hexagone, ou par le carré inscrit, que Liu Hui considère plus loin dans le même commentaire ? On

[55] J'ai déjà mis en œuvre cette méthode dans [Chemla 1991& 1992a] et les résultats qu'elle produit sur ce nouveau cas de figure me semblent en harmonie avec ces articles précédents.

peut faire valoir que la figure de l'hexagone est celle-là même dont la longueur des côtés ne pose aucun problème. Certes. Cependant, pour ce qui est de la démonstration, aucun calcul numérique n'accompagne l'énoncé de la relation. Quant à l'algorithme, muni comme il l'est du théorème de Pythagore, Liu Hui est en mesure d'accéder facilement au côté du carré inscrit au cercle. Les calculs approchés de racines carrées qui se présentent sont de même nature que ceux auxquels mène l'hexagone dès la seconde étape.

L'ensemble de ces arguments met en valeur le fait que débuter par l'hexagone, comme Liu Hui le choisit, n'est pas aussi naturel qu'il pourrait y paraître au premier abord. Si Liu Hui retient cette figure, il semble bien qu'il s'agisse d'une volonté délibérée, et l'on peut être tenté d'y voir un écho avec les données curieusement surabondantes des problème posés par les *Neuf chapitres*, données qui se trouvent justement renvoyer à cette figure.

Que tire le commentaire de la prise en considération initiale de l'hexagone ? D'une part, l'introduction de l'opération de duplication des côtés, qui commande à la transformation de la figure des polygones inscrits. D'autre part, l'idée de la relation générale entre aire du 2n-gone, circonférence du n-gone et rayon du cercle et sa conséquence qu'est l'articulation du n-gone et du 2n-gone. Ce sont donc les éléments fondamentaux dont la mise en œuvre donnera la démonstration, puis l'algorithme qui lui fait suite.

Comment Liu Hui tire-t-il ces éléments de l'hexagone ? Il applique à l'hexagone la procédure que les *Neuf chapitres* donnent pour le cercle et considère la forme rectiligne obtenue : par transformation, elle donne le dodécagone inscrit au cercle. Or *tous ces ingrédients entrent en écho avec des éléments du dispositif textuel des Neuf chapitres.* La donnée de deux valeurs numériques, là où l'une est suffisante, dans les énoncés de problèmes indique la figure de l'hexagone. La procédure impliquant ces deux données est bien celle pour laquelle Liu Hui développe son plus long commentaire et qu'il applique à la figure qu'indique l'énoncé. Enfin, l'approche de l'aire du cercle par des aires de formes rectilignes est corrélée avec la structure particulière de l'énoncé de la procédure qui, comme nous l'avons souligné, renvoie au rectangle. C'est d'ailleurs dès les premières phrases de son commentaire que Liu Hui réagit à tous ces éléments.

Ce dispositif des *Neuf Chapitres*, de donner deux valeurs et non pas une dans l'énoncé, consiste-t-il à indiquer de manière indirecte l'hexagone comme germe de la justification de la procédure ?, est-ce cela qu'y lit Liu Hui quand il débute ainsi son raisonnement ?, il est permis dans ce contexte de poser ces questions[56]. Faisons donc

[56] D'autres éléments viennent soutenir la nécessité de les poser : peut-on réellement imaginer que les auteurs des *Neuf chapitres* ignorent l'approximation grossière que représente le fait de donner π comme égal à 3 ? Par ailleurs comment se fait-il que, par opposition à Li Chunfeng, Liu Hui ne « corrige » pas les données des énoncés du Classique mais se contente de proposer une autre réponse

l'hypothèse qu'en mentionnant ainsi de manière indirecte la figure de l'hexagone, le Classique indique un chemin, que Liu Hui dégage pour son lecteur et emprunte, pour en développer les conséquences en en abstrayant le schéma et en le traitant en toute généralité.

Quelles sont les effets de pareille hypothèse ? Ils sont multiples et se déploient sur de nombreux plans. Si tel est le cas en effet, sur le plan herméneutique, les *Neuf chapitres* appellent des modes de lecture adéquats, et l'on ne peut se contenter de les traiter comme un manuel contemporain. Par plusieurs biais inattendus pour un lecteur du XXe siècle, ici un dispositif textuel, l'ouvrage pourrait exprimer des significations mathématiques. Sur le plan mathématique, en l'occurrence, les procédures n'auraient pas qu'une signification purement algorithmique, mais l'ensemble des énoncés de problèmes et des procédures du Classique parlerait, en germe, des raisons de leur correction. Les *Neuf chapitres* ne seraient donc pas cet ouvrage entièrement dépourvu d'un intérêt quelconque pour les démonstrations. Mais cet intérêt s'exprimerait par des voies inédites. En tous cas, il se pourrait que le lecteur Liu Hui déchiffre ce sens, et que cette incitation fournisse le point de départ à l'explicitation que constitue son commentaire.

CONCLUSION

On le voit de plusieurs manières sur l'exemple du calcul de l'aire du cercle, tant dans le texte des *Neuf chapitres* que dans le commentaire de Liu Hui, algorithme et démonstration présentent une continuité, entretiennent des relations. Pour ce qui est du Classique, son énoncé de la procédure pourrait pointer vers les raisons de sa correction. Pour ce qui est du commentaire, le développement de la démonstration, d'essence algorithmique, fournit le point de départ à la rédaction d'une procédure, transparente sur la signification de ses étapes. En ce sens, l'activité de démonstration dont témoignent ces textes chinois anciens semble présenter une articulation singulière avec les autres temps de l'activité mathématique. Mais les rapports qu'entretiennent par ailleurs algorithme et démonstration ont mis en valeur qu'il n'était pas d'algorithme qui ne soit que pur calcul. Si tel est son visage dans le domaine numérique, il se pourrait que plus généralement pour des mathématiciens chinois, il ait incarné, en toute abstraction, un aspect de la réalité du changement.

---

aux problèmes ? Les modes d'énonciation indirects sont d'un emploi fréquent dans les textes chinois. Voir F. Jullien, *La valeur allusive,* Publications de l'École Française d'Extrême-Orient, 1985. On en trouve d'autres cas dans les *Neuf chapitres*. La procédure pour le calcul de l'aire du segment pourrait en constituer un autre exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[Bai Shangshu 1982] La théorie géométrique des *Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques* et de Liu Hui, in [Wu Wenjun 1982], p. 137-161.

[Chemla, Karine 1987a] L'aspect algorithmique récurrent dans les mathématiques chinoises : Paysages d'algorithmes, algorithmes de paysages, in Jean Dhombres (éd.), *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences,* 20, p. 86-104.

[Chemla, Karine 1987b] Should they read FORTRAN as if it were English ? *Bulletin of Chinese studies,* 1, n° 2, p. 301-316.

[Chemla, Karine 1991] Theoretical Aspects of the Chinese Algorithmic Tradition (First to Third Century), *Historia Scientiarum,* 42, p. 75-98.

[Chemla, Karine 1992a] Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (3e siècle) aux *Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques* (1er siècle), *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 14, 1992, p. 91-129.

[Chemla, Karine 1992b] Méthodes infinitésimales en Chine et en Grèce anciennes, in Salanskis Jean-Michel, Sinaceur Hourya (éd.), *Le labyrinthe du continu,* Paris, Springer, 1992, p. 31-46.

[Chemla, Karine 1996] Relations between procedure and demonstration. Measuring the circle in the *Nine Chapters on Mathematical Procedures* and their commentary by Liu Hui (3rd century), in H. N. Jahnke, N. Knoche & M. Otte (eds), *History of Mathematics and Education : Ideas and Experiences*, Goettingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1996, p. 69-112.

[Chen Liang-ts'o 1986] Recherches sur le commentaire de Liu Hui à la procédure du champ circulaire des *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, *Recherches sinologiques (Hanxue yanjiu),* 4 (1), p. 47-81 (en chinois).

[Du Shiran 1988] Premières observations sur le livre sur baguettes de bambou *Livre de procédures mathématiques* de la montagne Zhangjia à Jiangling, *Recherches en Histoire des Sciences de la Nature (Ziran Kexueshi Yanjiu),* 7, n° 3, p. 201-204 (en chinois).

[Friedrich, Michael 1987] *Changes in the Concept of t'i-yung: From Divinatory Terms to the Composite Category*, Preprint, International Conference on Chinese Philosophy, San Diego.

[Friedrich, Michael 1989] *Sprache und Denken. Zu einem ungeklärten Verhältnis in der chinesischen Geistesgeschichte, insbesondere im Neukonfuzianismus von Chu Hsi,* Habilitationsschrift, München.

[Guo Shuchun 1983] La théorie des aires de Liu Hui, *Liaoning Shiyuan Xuebao Zirankexueban* (Feuilles sur les sciences de la nature du journal de l'université normale du Liaoning), n° 1, p. 85-96 (en chinois).

[Guo Shuchun 1984a] Analyse du concept de *Lü* dans les *Neuf Chapitres sur Les Procédures Mathématiques* et dans le commentaire de Liu Hui et de son utilisation, *Kejishi Jikan* (Revue d'histoire des sciences et des techniques), 11, p. 21-36 (en chinois).

[Guo Shuchun 1984b] La théorie des volumes de Liu Hui, *Kexueshi Jikan* (Revue d'Histoire des Sciences), 11, Dizhi Chubanshe, Pékin, p. 47-62 (en chinois).

[Guo Shuchun 1990] *Jiu zhang suanshu* (Neuf chapitres sur les procédures mathématiques), Liaoning jiaoyu chubanshe (en chinois).

[Guo Shuchun 1992] *Liu Hui, une grande figure des mathématiques mondiales anciennes*, Shandong kexue jishu chubanshe, 468 p. (en chinois).

[Heath, Thomas L. 1956] *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*, Translation with Introduction and Commentary, Second Edition Unabridged, Dover, vol. 3.

[Knorr, Wilbur 1982] Infinity and Continuity : The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity, in [Kretzmann, Norman (ed.)1982], p. 112-45.

[Kretzmann, Norman (ed.)1982] *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, Cornell University Press.

[Lam Lay Yong, Ang Tian-Se 1986] Circle Measurements in Ancient China, *Historia Mathematica*, 13, p. 325-340.

[Li Jimin 1982] La théorie des rapports dans les *Neuf Chapitres sur les Procédures mathématiques*, dans [Wu Wenjun 1982], p. 228-245.

[Li Jimin 1990] *Recherches sur le classique mathématique oriental* Neuf chapitres sur les procédures mathématiques *et sur son commentaire par Liu Hui*, Shaanxi renmin jiaoyu chubanshe, 492 p. (en chinois).

[Liang Zongju 1980] *Aperçu sur l'histoire mondiale des mathématiques*, Liaoning renmin chubanshe, 538 p (en chinois).

[Liu Dun 1984] Comparaison des recherches d'Archimède et de Liu Hui sur le cercle, preprint d'une conférence présentée en mai 1984 au colloque « Mathématiques traditionnelles et société chinoise », 21 p., publié dans *Ziran Bianzhengfa Tongxun* (Journal of Dialectics of Nature), vol. 7 (1985), nº 1, p. 51-60 (en chinois).

[Liu Dun 1993] *Da zai yanshu*, Liaoning jiaoyu chubanshe, 472 p (en chinois).

[Mikami Yoshio 1910] The circle-squaring of the Chinese, *Bibliotheca Mathematica*, (troisième série), X, p. 193-200.

[Mueller, Ian 1982] Aristotle and the Quadrature of the Circle, in [Kretzmann, Norman (ed.) 1982], p. 146-64.

[Mugler, Charles 1970] *Archimède.* Texte établi et traduit. Tome premier : *De la sphère et du cylindre, la mesure du cercle, sur les conoïdes et les sphéroïdes*, Les Belles Lettres.

[Needham, Joseph (en collaboration avec Wang Ling) 1959] *Science and Civilisation in China*, vol. 3, partie I : Mathematics, p. 1-168.

[Qian Baocong 1923] Les recherches sur π dans les livres mathématiques chinois, *Science (Kexue)*, 8, nº 2 et nº 3 (repris dans [Qian Baocong 1983], *Choix d'articles d'histoire des sciences de Qian Baocong*, Kexue Chubanshe (en chinois), p. 50-74).

[Qian Baocong 1963] *Suanjing shishu* (Les dix classiques de mathématiques), 2 vol., Zhonghua Shuju (en chinois).

[Robinet, Isabelle 1990] Ti, in Sylvain Auroux (éd.), *Encyclopédie philosophique universelle*, vol. 2 : Les notions philosophiques, t. 2, p. 2983-4.

[Schrimpf, Robert 1963] *La collection mathématique « Souan King Che Chou ». Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VII^e^ siècle de notre ère*, Thèse soutenue à l'Université de Rennes.

[Volkov, Alexei 1988] Sur les méthodes infinitésimales pour le calcul du volume d'une pyramide, *State and Society in China*, Résumés des conférences présentées au colloque, Moscou, XIX, t. 1, p. 143-6 (en russe).

[Volkov, Alexei 1994] Calculations of π in China : From Liu Hui to Zu Chongzhi, *Historia Scientiarum*, 4, p. 139-57.

[Wagner, Donald 1979] An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid : Liu Hui, Third Century A.D., *Historia Mathematica*, 6, p. 164-88.

[Wu Wenjun 1982] *Les* Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques *et Liu Hui*, Éditions de l'Université Normale de Beijing (en chinois).

[Wu Wenjun 1982a] Le principe « ce qui sort et ce qui entre se compensent », in [Wu Wenjun 1982], p. 58-75.