LES CARRÉS MAGIQUES
DANS LA TRADITION MATHÉMATIQUE ARABE

Yves MARTIN

L'atelier a été conçu en trois parties :

• On a commencé par la présentation de la récente traduction et édition d'un manuscrit arabe du XIII[e] *s. intitulé « L'arrangement harmonieux des nombres ». Cette première partie a été l'occasion de donner un aperçu historique sur les carrés magiques, avant d'entrer dans le détail de quelques constructions du manuscrit.*

• Une deuxième partie a proposé une approche plus contemporaine, orientée vers des concepts de structure des carrés magiques, sur la base des décompositions par congruence initiées par Euler, et jusqu'à la théorie des corps.

• Une troisième partie a proposé l'utilisation d'un logiciel de manipulation des carrés magiques et d'étude des structures ainsi engendrées. Cette partie n'a pas été reproduite ici ; toutefois, le logiciel (pour Macintosh, avec une prise en main d'une quarantaine de pages), et plus de 400 fichiers de carrés magiques sont disponibles sur le site de l'IUFM de La Réunion (http://www.reunion.iufm.fr/).

PARTIE I. « L'ARRANGEMENT HARMONIEUX DES NOMBRES »

Définitions de base

Un tableau de dimension n (*i. e*. une matrice carrée d'ordre n) sera dit *magique* si la somme de ses lignes, de ses colonnes, et de ses deux diagonales est constante.

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

Un carré magique « de Bachet »

Si de plus, ce tableau ne contient que les nombres entiers de 1 à n^2, tous les termes étant différents, on parle alors de *carré magique*. La *somme magique* d'un carré magique de dimension n est $s_n = n(n^2+1)/2$.

On dira aussi d'un tableau magique qu'il vérifie la *contrainte du carré,* pour dire que, la magicité étant préalablement connue, on sait de plus que c'est un carré magique, c'est-à-dire qu'il comporte tous les nombres de 1 à n^2. Deux carrés (ou tableaux) magiques seront dits *isométriques* si l'on peut passer de l'un à l'autre par l'une des isométries du carré.

La notion de magicité s'étend aux autres diagonales. Quand un tableau magique vérifie cette propriété (avec la même somme) pour les diagonales secondaires, on parle de tableaux *panmagiques* ou encore de « carrés magiques diaboliques » (terminologie de Bachet).

Quelques dates

• Le carré magique de dimension 3 est connu en Chine vers – 2200.

• On note une pratique régulière des carrés magiques (CM dans la suite) en Chine et en Inde par des méthodes relativement lourdes.

• Forte implantation de la pratique des constructions des CM dans le monde arabe à partir du X^e s.

• Introduction en Europe par Moschopoulos (1420).

• La méthode « traditionnelle » du cas impair (cf. carré ci-dessus), due au père jésuite François Spinula (1562), est généralement attribuée à Bachet de Méziriac.

• Frénicle dénombre les 880 CM d'ordre 4, et propose un classement (1693).

• L'édition de l'ouvrage *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* de Bachet de Méziriac (1612) a fortement popularisé le thème des CM.

• Utilisation d'arguments algébriques à partir d'Euler. Conjecture d'Euler dite « des 36 officiers » pour $n = 4k + 2$, sur l'inexistence de CM composés de deux carrés latins ; on appelle de tels carrés des carrés *eulériens*. Un autre thème d'étude est celui de la recherche de carrés latins *auto-orthogonaux,* c'est-à-dire réalisant un CM avec leur propre transposition.

• Preuve de la conjecture pour $n = 6$ par Tarry (1898).

• Non-existence des CM diaboliques en dimension impaire (1899).

• Les constructions de Margossian (1920) permettent d'assurer qu'il existe des CM diagonaux – ou pandiagonaux – pour toute dimension impaire autre que 3 et pour toute dimension multiple de 4.

• Infirmation de la conjecture d'Euler pour $n > 6$ par Bose, Parker, Shrikhande (1959).

• Réalisation d'un carré latin auto-orthogonal en dimension 10 par Heydayat (1971).

• Dénombrement des 275 305 224 CM de dimension 5 par Schroeppel (1973).

• Utilisation des corps finis pour la résolution de certaines questions théoriques par Bouteloup (1991).

Nous reviendrons sur certaines de ces notions, et sur d'autres, dans la seconde partie de cet exposé.

Les écrits arabes sur les CM

<table>
<tr><td colspan="3">Les héritages du monde arabe après la fondation de Bagdad (762)
(essor du savoir scientifique par un travail de synthèse et de traduction)</td></tr>
<tr><td>Mésopotamien
• Équations et systèmes d'équations de degrés 1 et 2</td><td>Indien
• Système de numération
• Arithmétique</td><td>Grec
• Fondements du raisonnement mathématique
(axiome / définition / théorème)</td></tr>
</table>

On signale les premières traces d'études arabes sur les CM vers le VII^e s., et l'existence d'un traité complet au IX^e s, dû à Thabit ibn Qurra (836-901). Ensuite, dès le X^e s., deux textes ont été conservés :

• *Introduction à l'arithmétique* (al Ankati, 987) : cet ouvrage est une traduction d'un ouvrage du grec Nicomaque, auquel l'auteur a ajouté lui-même un chapitre sur la construction des CM.

• *Traité sur les carrés magiques* (Abul Wafa al Buzjani, 940-997). Dans ce traité, tous les procédés sont expliqués, mais ils sont longs et fastidieux. Les règles générales sont clairement issues de nombreux exemples.

Les CM sont aussi régulièrement mentionnés dans les traités alchimistes, qui leur attribuent des vertus ; par exemple, à propos du CM 3 : « On trace cette figure sur deux vases de terre où l'on n'a jamais versé d'eau. On les place sous les pieds de la femme en couches. Si elle regarde ces vases avec attention, elle sera aussitôt délivrée. » (Souffi Ghazzali, 1058-1111).

État des connaissances au X^e s.

• CM à bordure pour tout ordre à partir du CM 3 ou d'un CM 4 de départ.

• « Produit » de CM pour des ordres composés soit impairs, soit multiples de 4, soit encore multiples de 6 (autres que 6).

• Quelques procédés directs pour les dimensions impaires ou multiples de 4.

Le manuscrit de « L'arrangement harmonieux des nombres »

• Date de 1250 (ou antérieur) – traduction française de Jacques Sesiano en 1996.

• Compilation de très nombreuses méthodes connues.

• Ignore toutefois les dimensions $4k + 2$ pourtant abordées avec succès pour certains ordres ($8k + 2$) dès le milieu du XI^e s., et systématiquement résolues, pour tout ordre, au début du XII^e s.

• Les méthodes présentées sont encore lourdes et fastidieuses. Les mêmes constructions seront exposées de manière plus élémentaire dans les siècles suivants, avant même l'apparition de notations algébriques.

Exemple 1 : méthode des bordures pour une dimension impaire, de l'intérieur vers l'extérieur

Par *méthode des bordures*, on entend les méthodes qui construisent des CM tels que si on supprime les lignes et colonnes extérieures, le tableau restant est encore magique. Un carré est dit, par extension, *à bordures concentriques* quand cette méthode est itérée à chaque rang depuis un carré de départ de dimension 3 ou 4. Ce sont de telles méthodes, connues depuis le X^{e} s. que l'on aborde dans les deux premiers exemples. On y verra en particulier combien les explications, en l'absence d'arguments algébriques, sont nécessairement lourdes.

• Étape 1 : « on place le milieu au milieu ». Par *milieu*, on entendra le nombre central $(n^2+1)/2$ puisque nous sommes ici en dimension impaire.

• Étape 2 : « puis ses deux plus proches, obliquement sur une diagonale ». Sous-entendu symétriques, dans les cases adjacentes au centre (quatre choix : deux pour les diagonales, deux pour la place de ces nombres).

• Étape 3 : « puis on place celui qui précède le moindre à côté de lui ». Par exemple, ci-dessous, on place le 3 à côté du 4. Notons qu'il y a deux possibilités pour ce « à côté » : horizontalement ou verticalement.

• Étape 4 : « on place ensuite le précédent dans la case correspondante du cavalier, et le précédent dans la case correspondante du cavalier ». On notera que pour le cas de la dimension 3, il y a unicité de ces deux positions.

• Étape 5 : « ensuite, on place les nombres supérieurs qui leur sont complémentaires en face ». L'auteur précise ce qu'il entend par *complémentaires* : ce sont deux nombres qui « ont leur distance au moyen la même et leur somme égale au double du moyen », en d'autres termes deux nombres a et a' tels que $a+a'=n^2+1$. Le terme « en face », qui n'est pas défini dans le texte, s'interprète par une symétrie centrale par rapport au centre du carré.

Si on applique les étapes 1 à 5 à la dimension 3, on remplit le CM dans l'une de ses huit isométries, car il y a quatre choix possibles dans l'étape 2 et deux dans l'étape 3. Cette méthode a pu être définie car l'unique CM3 est symétrique.

4		
	5	
		6

Étapes 1 et 2

4		*2*
3	**5**	
	1	**6**

Étapes 3 et 4

4	*9*	**2**
3	**5**	*7*
8	**1**	**6**

Étape 5

Pour les autres dimensions, après avoir construit de cette façon un centre symétrique, l'auteur poursuit ainsi :

• Étape 6 : « Prenant les nombres inférieurs qui restent, dans l'ordre décroissant, on place, alternativement :

- Les pairs dans la rangée supérieure [ci-dessous 8].
- Les impairs correspondants dans la rangée de gauche [ci-dessous 7].

Dans les deux cas, en partant de la case contiguë à la médiane et se dirigeant vers l'angle supérieur gauche.

- On place alors le nombre atteint – toujours pair – dans ledit angle [6]. »

	12	*17*	*10*	
	11	*13*	*15*	
	16	*9*	*14*	

Étapes 1 à 5

6	*8*			*4*
7	**12**	**17**	**10**	
5	**11**	**13**	**15**	
	16	**9**	**14**	*1*
		3	*2*	

Étapes 6 à 8

6	**8**	*23*	*24*	**4**
7	**12**	**17**	**10**	*19*
5	**11**	**13**	**15**	*21*
25	**16**	**9**	**14**	**1**
22	*18*	**3**	**2**	*20*

Étape 10

• Étape 7 : « On place le précédent au milieu de la rangée de gauche [5], le précédent dans l'angle supérieur droit [4], le précédent au milieu de la rangée inférieure [3]. »

• Étape 8 : « Ensuite, on place la suite des pairs restants dans la rangée inférieure [2] et les impairs à droite [1], dans les deux cas, en partant de la case contiguë à la médiane et se dirigeant vers l'angle inférieur droit. »

• Étape 9 : « Répétant ceci pour toutes les bordures, les nombres inférieurs parviennent à leurs termes. » Il s'agit des étapes 6 à 8, voir illustration ci-dessous.

• Étape 10 : « Ensuite, on place les complémentaires en face d'eux. »

Remarque de l'auteur (anonyme) du manuscrit : l'ordre du carré occupe alors le milieu de la rangée de gauche de la bordure et le 1 la case juste au-dessus de l'angle inférieur droit. On notera aussi que l'on peut partiellement inverser les étapes 9 et 10, comme ci-dessous pour la dimension 7 :

		24	*29*	*22*		
		23	*25*	*27*		
		28	*21*	*26*		

Étapes 1 à 5

	18	*20*	*35*	*36*	*16*	
	19	**24**	**29**	**22**	*31*	
	17	**23**	**25**	**27**	*33*	
	37	**28**	**21**	**26**	*13*	
	34	*30*	*15*	*14*	*32*	

Étapes 6 à 8 et 10

8	*10*	*12*				*6*
9	**18**	**20**	**35**	**36**	**16**	
11	**19**	**24**	**29**	**22**	**31**	
7	**17**	**23**	**25**	**27**	**33**	
	37	**28**	**21**	**26**	**13**	*3*
	34	**30**	**15**	**14**	**32**	*1*
			5	*4*	*2*	

Puis à nouveau l'étape 9

8	**10**	**12**	*45*	*46*	*48*	**6**
9	**18**	**20**	**35**	**36**	**16**	*41*
11	**19**	**24**	**29**	**22**	**31**	*39*
7	**17**	**23**	**25**	**27**	**33**	*43*
47	**37**	**28**	**21**	**26**	**13**	**3**
49	**34**	**30**	**15**	**14**	**32**	**1**
44	*40*	*38*	**5**	**4**	**2**	*42*

Et l'étape 10

On voit, sur cette méthode de construction, le type de démarches déployées pour construire les CM : n'ayant aucun outil de symbolisation, ces méthodes sont découvertes par expérimentation, et vérification sur de grandes dimensions, comme l'atteste le traité de Abul Wafa al Buzjani.

Exemple 2 : méthode des bordures pour une dimension impaire, de l'extérieur vers l'intérieur

Les commentaires sont proposés pour une dimension n. Le *plus petit extrême* est 1 à la première étape ; il est défini par l'algorithme pour les autres étapes.

• Étape 1 : « On place le plus petit extrême dans la case médiane de la rangée de droite, le suivant dans la case suivante en descendant, ainsi jusqu'à l'angle inférieur droit que l'on ne remplit pas. »

• Étape 2 : « On place le suivant dans l'angle inférieur gauche et les suivants dans les cases suivantes de la rangée inférieure jusqu'à la case médiane, que l'on ne remplit pas. »

• Étape 3 : « On place le suivant au milieu de la rangée supérieure [c'est l'ordre n du carré], le suivant au dessus de la case médiane de la rangée de gauche, et les suivants au dessus, en montant jusqu'à l'angle supérieur gauche que l'on remplit. »

• Étape 4 : « On place le suivant dans la case suivant [à droite] la case médiane de la rangée supérieure et ainsi de suite jusqu'à la case voisine de l'angle supérieur droit. » On arrive ainsi au nombre $2n - 2$, sauf pour $n = 3$ pour lequel cette étape n'existe pas.

• Étape 5 : « On procède ainsi pour chaque bordure, le nombre inférieur atteint servant de "petit extrême" jusqu'à l'ordre 3 que l'on construit ainsi. »

• Étape 6 : « Ensuite on place les compléments en face, de la manière connue. »

• Étape 7 : « Reste le nombre médian que l'on place au centre. »

4	*3*	
		1
2		

7		*5*	*8*	
6				
				1
				2
3	*4*			

10			*7*	*11*	*12*	
9						
8						
						1
						2
						3
4	*5*	*6*				

Les étapes 1 à 4 de cette méthode pour n = 3, 5 et 7

4	**3**	
		1
2		

7		**5**	**8**	
6	*12*	*11*		
			9	**1**
	10			**2**
3	**4**			

10			**7**	**11**	**12**	
9	*19*		*17*	*20*		
8	*18*	*24*	*23*			
				21	*13*	**1**
		22			*14*	**2**
	15	*16*				**3**
4	**5**	**6**				

L'étape 5 pour n = 3, 5, 7

4	**3**	*8*
9	*5*	**1**
2	*7*	*6*

7	*22*	**5**	**8**	*23*
6	**12**	**11**	*16*	*20*
25	*17*	*13*	**9**	**1**
24	**10**	*15*	*14*	**2**
3	**4**	*21*	*18*	*19*

10	*45*	*44*	**7**	**11**	**12**	*46*
9	**19**	*34*	**17**	**20**	*35*	*41*
8	**18**	**24**	**23**	*28*	*32*	*42*
49	*37*	*29*	*25*	**21**	**13**	**1**
48	*36*	**22**	*27*	*26*	**14**	**2**
47	**15**	**16**	*33*	*30*	*31*	**3**
4	**5**	**6**	*43*	*39*	*38*	*40*

Les CM produits par cette méthode

L'auteur précise les variantes possibles dans la technique de remplissage, comme la simple inversion des étapes 5 et 6, mais aussi quelques variantes de construction comme des inversions de parcours d'une partie des nombres.

Exemple 3 : méthode de séparation des pairs et des impairs

Ce thème de regroupement des nombres pairs et des impairs dans des parties particulières du carré est un classique de la science de « L'arrangement harmonieux des nombres ». La méthode du manuscrit que nous décrivons maintenant illustre la difficulté de décrire des algorithmes un peu plus complexes que ceux déjà vus : cela donne une construction particulièrement lourde qui montre combien il a dû être difficile de dégager de telles constructions. Nous avons retenu cette méthode car nous allons voir qu'en sachant sortir du carré, une autre description, infiniment plus simple, aboutit exactement à la même construction. Entre les deux méthodes, il y a un peu plus de deux siècles de pratique sur les CM.

L'illustration de la méthode est faite pour la dimension 7. Les parenthèses sont des commentaires sur l'illustration pour une compréhension plus rapide du texte original.

1) Placement des impairs :

« On les place comme s'ils étaient des nombres consécutifs en les disposant dans les cases du carré intérieur dont les lignes et les colonnes sont obliques.

On commence avec 1 à la case médiane de la rangée supérieure, et en se déplaçant en suivant l'oblique vers la case médiane de la rangée de gauche. Puis on continue suivant l'oblique, la dernière ligne étant celle qui joint la case médiane de la rangée de droite à la case médiane de la rangée inférieure. »

			1			
		3	9	15		
	5	11	17	23	29	
7	13	19	25	31	37	43
	21	27	33	39	45	
		35	41	47		
			49			

2) Placement des pairs dans les quatre triangles :

• Étape 1 : « On remplit d'abord la base du triangle inférieur droit, donc la ligne oblique majeure de ce triangle [2, 4, 6 sur l'illustration ci-dessous]. »

• Étape 2 : « Puis on prend le nombre qui est dans la première case de cette base [ici le nombre 2] et l'on procède comme si on allait disposer les nombres consécutifs dans les cases consécutives en commençant avec lui et en se dirigeant vers la gauche dans la rangée horizontale jusqu'à ce que l'on parvienne à la case supérieure de la base du triangle inférieur gauche, on y place le nombre atteint qui sera toujours pair [ici 8].

Ensuite on prend le pair suivant, on le place au début de la seconde ligne du triangle inférieur droit et l'on applique la méthode précédente [comprendre les étapes 1 et 2 : on place les nombres 10 et 12 par l'étape 1 et le nombre 16 par l'étape 2. En fait, on reprend cette étape plusieurs fois pour conclure à :] Lorsque l'on a fait ceci, on a rempli le triangle inférieur droit [une dernière application donne 18 et 24], mais il reste des cases vides dans le triangle inférieur gauche que l'on va remplir maintenant. La méthode est la suivante : »

			1			
		3	**9**	**15**		
	5	**11**	**17**	**23**	**29**	
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	*2*
		35	**41**	**47**	*4*	
			49	*6*		

Étapes 1 et 2 appliquées une première fois

			1			
		3	**9**	**15**		
	5	**11**	**17**	**23**	**29**	
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	**2**
16		**35**	**41**	**47**	**4**	*10*
			49	**6**	*12*	

Puis une deuxième fois

			1			
		3	**9**	**15**		
	5	**11**	**17**	**23**	**29**	
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	*2*
16		**35**	**41**	**47**	*4*	*10*
24			**49**	*6*	*12*	*18*

Et une troisième fois

• Étape 3 : « On prend le contenu des deux extrémités de la rangée inférieure, on en fait la somme. Il en résulte un nombre [dans l'exemple, 24 + 18 = 42]. On place alors dans la case voisine de l'extrémité de gauche un nombre qui, joint au nombre qui est dans la case voisine de l'extrémité de droite, produise ledit nombre [soit 42 – 12 = 30]. On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait rempli la rangée inférieure [ici, l'étape suivante est 42 – 6 = 36]. »

• Étape 4 : « Ensuite, on procède de la même façon avec la rangée immédiatement supérieure [ici, 16 + 10 – 4 = 22]. On continue et l'on procède ainsi jusqu'à ce que l'on ait rempli les deux triangles inférieurs avec la moitié des pairs. »

			1			
		3	**9**	**15**		
	5	**11**	**17**	**23**	**29**	
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	**2**
16	*22*	**35**	**41**	**47**	**4**	**10**
24	*30*	*36*	**49**	**6**	**12**	**18**

Étapes 3 (nombres 30 et 36) et 4 (nombre 22)

32	*38*	*44*	**1**	*14*	*20*	*26*
40	*46*	**3**	**9**	**15**	*28*	*34*
48	**5**	**11**	**17**	**23**	**29**	*42*
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	**2**
16	**22**	**35**	**41**	**47**	**4**	**10**
24	**30**	**36**	**49**	**6**	**12**	**18**

Puis l'étape finale

• Étape 5 : « On place alors les pairs complémentaires dans les cases correspondantes des deux triangles supérieurs. » L'auteur précise ce que sont les cases *correspondantes* : les cases correspondantes de celles qui sont par exemple au-dessous de la case médiane de la rangée de droite sont celles au-dessus de la case médiane de la rangée de gauche, chacune étant associée à son homologue et réciproquement. Autrement dit, il s'agit d'une symétrie centrale et donc, par construction, le CM produit est symétrique.

Cette méthode, comme nous l'avons signalé, a été décrite plus tard d'une manière bien plus efficace, que chacun sera à même d'apprécier sur l'illustration :

			1						
		3	**9**	**15**					
	5	**11**	**17**	**23**	**29**				
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**			
	21	**27**	**33**	**39**	**45**	*2*	*8*		
		35	**41**	**47**	*4*	*10*	*16*	*22*	
			49	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*
				14	*20*	*26*	*32*	*38*	*44*
					28	*34*	*40*	*46*	
						42	*48*		

32	*38*	*44*	**1**	*14*	*20*	*26*
40	*46*	**3**	**9**	**15**	*28*	*34*
48	**5**	**11**	**17**	**23**	**29**	*42*
7	**13**	**19**	**25**	**31**	**37**	**43**
8	**21**	**27**	**33**	**39**	**45**	*2*
16	*22*	**35**	**41**	**47**	*4*	*10*
24	*30*	*36*	**49**	*6*	*12*	*18*

PARTIE II. STRUCTURES DES CARRÉS MAGIQUES

C'est Euler qui eut l'idée de décomposer un CM en deux composantes, que nous appellerons par la suite I et J (I à gauche, J à droite), le CM s'écrivant alors [I, J]. Les composantes sont définies par une variante sur le reste de la division euclidienne : en notant a_{uv} les éléments du CM, i_{uv} ceux de la composante I et j_{uv} ceux de J, on écrit de manière unique : $a_{uv} = (i_{uv} - 1)\,n + j_{uv}$, où les éléments des composantes prennent les valeurs 1 à n. Il en résulte que les composantes d'un CM vérifient ce que l'on appellera l'*injection faible*, à savoir que chaque nombre de 1 à n doit apparaître nécessairement n fois dans chaque composante.

Étant donné deux composantes I et J, pour avoir un CM [I, J], il faut vérifier à la fois :

- que [I, J] soit un tableau magique,
- que I et J soient en injection.

Euler a appelé *carrés latins* les composantes qui sont à lignes et colonnes de somme constante (*i. e.* les tableaux magiques sur lesquels on a enlevé la contrainte des deux diagonales). Et il s'est intéressé à ceux des CM composés de deux carrés latins, CM que l'on qualifie depuis d'*eulériens.*

Nous aurons un point de vue légèrement différent, en étudiant les différents cas possibles : soit les composantes sont elles-mêmes des tableaux magiques (en fait, dès que l'une l'est, l'autre l'est aussi) soit les composantes ne sont pas magiques. Dans le premier cas, on parlera de composantes *régulières* et de CM *régulier*, dans le second cas, de composantes *irrégulières* et de CM *irrégulier*. Pour chaque *séquence* (on entend par là, ligne, colonne ou diagonale principale ou secondaire), on parlera aussi de régularité ou d'irrégularité.

1	12	6	15
14	7	9	4
11	2	16	5
8	13	3	10

Le carré magique

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

Composante I

1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2

Composante J

CM à magicité et à diabolicité régulières

Dans chacune des deux situations de régularité et d'irrégularité, on rencontre un cas particulier intéressant, extrémal en terme de régularité, qui va être décrit ci-dessous.

Dans le cas de la régularité, on dira qu'une séquence est *simple* si elle comporte tous les nombres de 1 à n (et donc chacun une fois). Une composante sera dite *simple* si toutes ses $2n + 2$ séquences (n lignes, n colonnes et deux diagonales) sont simples. Un CM sera dit *simple* si ses deux composantes sont simples. Si une seule composante est simple, on parlera de CM *semi-simple* (à gauche ou à droite). À noter qu'un CM semi-simple, et *a fortiori* un simple, est toujours régulier.

Exemples : l'exemple ci-dessus illustre le cas d'un CM à magicité simple et à diabolicité régulière. Ci-dessous, on a un CM de dimension 5 ayant le maximum de lignes et colonnes irrégulières. Les nombres (0, 1 ou – 1) à côté des composantes indiquent, pour la composante I, la différence à la somme régulière $n(n+1)/2$, et pour la composante J, cette différence divisée par n. On montrerait qu'en dimension 4, la seule possibilité d'irrégularité est sur les diagonales.

8	12	11	19	15
25	23	3	4	10
1	22	16	9	17
7	6	21	13	18
24	2	14	20	5

	2	3	3	4	3	0
	5	5	1	1	2	1
	1	5	4	2	4	-1
	2	2	5	3	4	-1
	5	1	3	4	1	1
0	0	-1	-1	1	1	0

	3	2	1	4	5	0
	5	3	3	4	5	1
	1	2	1	4	2	-1
	2	1	1	3	3	-1
	4	2	4	5	5	1
0	0	-1	-1	1	1	0

Magicité irrégulière maximale en dimension 5

La simplicité (CM simples) existe dès la dimension 4, mais n'existe pas pour la dimension 6 (c'est une conséquence du problème des 36 officiers). On construit aisément des CM simples de dimension première impaire autre que 3. Il est assez facile aussi d'en construire en dimension $4p$. Pour les nombres impairs composés, la construction est aisée si le nombre n'est pas simplement multiple de 3. Il est également facile de construire des CM simples de dimension 9.

Si la simplicité confère une sorte d'ordre maximal pour la magicité d'un carré, on peut envisager un point de vue symétrique, et mettre en évidence un désordre maximal dans la magicité. Ainsi, on dira qu'une composante est *totalement irrégulière* si elle ne comporte que des séquences irrégulières. Un CM sera aussi *totalement irrégulier* si ses composantes le sont (une seule suffit, l'autre l'est alors aussi). La recherche de CM totalement irréguliers dans les petites dimensions n'est pas aisée, alors qu'il est plus facile d'en construire pour des dimensions plus grandes.

Voici un exemple de CM totalement irrégulier en dimension 6 (la plus petite dimension pour laquelle il en existe). On peut par exemple vérifier sur l'une des deux composantes qu'aucune séquence n'est de somme 21 (la somme « régulière » pour les composantes).

1	16	14	32	19	29
36	35	3	2	5	30
24	6	33	34	10	4
27	9	15	13	25	22
12	17	20	23	21	18
11	28	26	7	31	8

	1	3	3	6	4	5	-1
	6	6	1	1	1	5	1
	4	1	6	6	2	1	1
	5	2	3	3	5	4	-1
	2	3	4	4	4	3	1
	2	5	5	2	6	2	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

	1	4	2	2	1	5	-1
	6	5	3	2	5	6	1
	6	6	3	4	4	4	1
	3	3	3	1	1	4	-1
	6	5	2	5	3	6	1
	5	4	2	1	1	2	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

CM totalement irrégulier en dimension 6 (la plus petite possible)

Ce CM, produit par l'auteur en 1987, avait nécessité environ une trentaine d'heures de calculs sur les micro-ordinateurs de l'époque. La plus petite dimension impaire pour l'irrégularité totale est naturellement le nombre impair suivant. En voici un exemple, obtenu dans des conditions semblables :

2	4	48	27	49	42	3
1	9	36	19	38	29	43
37	35	23	14	12	13	41
15	33	24	30	32	25	16
31	34	17	28	26	21	18
45	40	22	10	11	39	8
44	20	5	47	7	6	46

	1	1	7	4	7	6	1	1
	1	2	6	3	6	5	7	-2
	6	5	4	2	2	2	6	1
	3	5	4	5	5	4	3	-1
	5	5	3	4	4	3	3	1
	7	6	4	2	2	6	2	-1
	7	3	1	7	1	1	7	1
-1	-2	1	-1	1	1	1	-1	-1

	2	4	6	6	7	7	3	1
	1	2	1	5	3	1	1	-2
	2	7	2	7	5	6	6	1
	1	5	3	2	4	4	2	-1
	3	6	3	7	5	7	4	1
	3	5	1	3	4	4	1	-1
	2	6	5	5	7	6	4	1
-1	-2	1	-1	1	1	1	-1	-1

CM totalement irrégulier en dimension 7 (la plus petite impaire possible)

Pour ce qui est de ces structures, on peut ensuite s'intéresser à d'autres cas limites, mélangeant magicité et diabolicité, par exemple soit de magicité simple à diabolicité irrégulière, soit encore de magicité et diabolicité totalement irrégulières. Pour ce dernier cas particulier de structure, nous n'avons pas d'exemple à proposer, même si les techniques de duplication devraient permettre d'en produire plus ou moins facilement en dimension 16 par exemple.

Voici, pour le premier cas, un exemple de CM à magicité simple et à diabolicité irrégulière. Les nombres en marge du tableau (–1, 0, 1) sont les différences à la somme régulière des composantes, avec la variante sur les composantes I et J déjà mentionnée, pour les diagonales secondaires descendantes (verticalement) et montantes (horizontalement). Le nombre sur une ligne ou une colonne correspond à cette différence pour la diagonale secondaire du tableau contenant le terme juste à gauche ou au-dessus de ce nombre.

1	10	19	28	37	46	63	56
30	21	64	55	2	9	44	35
45	38	15	8	49	58	27	20
50	57	36	43	22	29	16	7
24	31	6	13	60	51	34	41
59	52	25	18	47	40	5	14
12	3	42	33	32	23	54	61
39	48	53	62	11	4	17	26

1	2	3	4	5	6	8	7	1
4	3	8	7	1	2	6	5	0
6	5	2	1	7	8	4	3	-1
7	8	5	6	3	4	2	1	0
3	4	1	2	8	7	5	6	-1
8	7	4	3	6	5	1	2	0
2	1	6	5	4	3	7	8	1
5	6	7	8	2	1	3	4	D
M	-1	0	1	0	1	0	-1	Irr I

1	2	3	4	5	6	7	8	1
6	5	8	7	2	1	4	3	0
5	6	7	8	1	2	3	4	-1
2	1	4	3	6	5	8	7	0
8	7	6	5	4	3	2	1	-1
3	4	1	2	7	8	5	6	0
4	3	2	1	8	7	6	5	1
7	8	5	6	3	4	1	2	D
M	-1	0	1	0	1	0	-1	Irr J

Exemple de structure magique simple à diabolicité irrégulière

Auto-contrainte

Une composante sera dite *auto-contrainte* si elle est « en injection », c'est-à-dire si elle forme un CM avec l'une de ses sept isométriques (l'identité ne pouvant être prise en compte). Il est facile de construire des composantes auto-contraintes. Un CM sera dit *auto-contraint* s'il est issu de deux composantes qui le sont (entre elles). C'est le cas du CM de l'exemple, de séparation des pairs et des impairs, du manuscrit arabe, dont la décomposition est donnée sur la page suivante.

Les CM produits par l'auto-contrainte sont nécessairement réguliers, et on voit que cette notion est une extension des composantes « auto-orthogonales » que sont – dans la littérature consacrée aux CM – les composantes latines en injection avec leur transposée, l'extension se faisant dans deux directions, la première parce que les composantes ne sont pas nécessairement, comme les carrés latins, à lignes et à colonnes simples, et la seconde parce que toutes les isométries sont prises en compte.

5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3

4	3	2	1	7	6	5
5	4	3	2	1	7	6
6	5	4	3	2	1	7
7	6	5	4	3	2	1
1	7	6	5	4	3	2
2	1	7	6	5	4	3
3	2	1	7	6	5	4

Décomposition de l'exemple 3 du manuscrit arabe :
la composante J est le symétrique de I par rapport à la médiatrice verticale

L'analyse de l'auto-contrainte révèle bien des surprises, car nombre de composantes sont auto-contraintes de multiples façons. Par exemple, en notant $a' = 8 - a$, et de même pour b', c' et d', les deux composantes suivantes sont chacune auto-contraintes dans quatre isométries Elles sont toutes les deux à magicité régulière, la seconde sans aucune ligne ou colonne simple, et les deux sont de plus diaboliques à diabolicité simple.

a	a'	a	a'	a	a'	a	a'
b	b'	b	b'	b	b'	b	b'
a'	a	a'	a	a'	a	a'	a
b'	b	b'	b	b'	b	b'	b
c	c'	c	c'	c	c'	c	c'
d	d'	d	d'	d	d'	d	d'
c'	c	c'	c	c'	c	c'	c
d'	d	d'	d	d'	d	d'	d

a	a'	c'	c	c'	c	a	a'
b	b'	d'	d	d'	d	b	b'
a'	a	c	c'	c	c'	a'	a
b'	b	d	d'	d	d'	b'	b
a	a'	c'	c	c'	c	a	a'
b	b'	d'	d	d'	d	b	b'
a'	a	c	c'	c	c'	a'	a
b'	b	d	d'	d	d'	b'	b

Dans le cas impair, où en plus on dispose de la transformation de Bachet pour toute composante régulière diabolique (voir plus loin), on obtient des résultats encore plus surprenants.

Ainsi la composante suivante (à gauche), régulière et à diabolicité simple est à la fois auto-contrainte dans quatre isométries, mais de plus en injection – donc réalise un CM – avec les huit (les huit !) isométries de sa transformée de Bachet (composante de droite).

6	1	6	1	8	1	8	6	8
7	5	7	5	3	5	3	7	3
2	9	2	9	4	9	4	2	4
6	1	6	1	8	1	8	6	8
7	5	7	5	3	5	3	7	3
2	9	2	9	4	9	4	2	4
6	1	6	1	8	1	8	6	8
7	5	7	5	3	5	3	7	3
2	9	2	9	4	9	4	2	4

4	6	5	9	8	7	2	1	3
9	3	2	1	5	4	6	7	9
5	4	8	7	9	1	3	2	6
2	1	3	4	6	5	9	8	7
6	7	9	8	3	2	1	5	4
3	2	6	5	4	8	7	9	1
9	8	7	2	1	3	4	6	5
1	5	4	6	7	9	8	3	2
7	9	1	3	2	6	5	4	8

Auto-contrainte faible

Toutefois, l'auto-contrainte peut masquer encore des constructions. Ainsi, on peut construire des CM à partir d'une composante auto-contrainte en voilant cette propriété : soit J un isométrique de I qui fasse de [I, J] un CM. Si J est simple, par exemple (mais ce n'est pas nécessaire), en prenant une permutation de ses éléments, l'auto-contrainte disparaît. Dans cette situation, on parlera de composantes *faiblement auto-contraintes* ou encore ACF – et AC pour auto-contrainte.

Autrement dit : s'il existe une permutation ß des éléments de $\{1 \ldots n\}$ et s une isométrie du carré telles que l'on ait I = ß(s(J)) (avec des conventions évidentes), on dira que I et J sont faiblement auto-contraintes.

Pour illustrer une structure, on s'efforcera, dans la mesure du possible, de construire des CM qui ne soient pas faiblement auto-contraints (dans la suite : non ACF). Souvent on construit des CM non ACF mais formés de deux composantes chacune AC.

Voici un exemple de dimension 12. On peut bien sûr en trouver dans des dimensions plus petites. Mais cet exemple, outre l'avantage d'illustrer notre propos, donne un exemple de composante eulérienne auto-orthogonale de cette dimension, pour laquelle, dans son ouvrage sur les CM, Jacques Bouteloup posait la question de l'existence (p. 123). Le CM est accompagné de ses composantes dont on vérifiera qu'elles réalisent chacune un CM avec sa transposée. Les deux composantes étant simples, il est facile de vérifier que le CM de départ est non ACF.

1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144
112	99	50	73	36	129	47	142	18	8	67	89
102	116	65	91	23	135	12	124	82	57	25	38
21	10	132	143	103	86	113	61	44	30	52	75
130	141	88	63	42	109	32	98	5	19	84	59
29	43	119	108	2	80	13	54	136	123	93	70
68	90	133	122	81	4	58	15	120	107	41	31
60	83	7	17	111	45	100	33	85	62	138	128
74	49	45	34	64	24	87	11	127	137	104	114
39	28	78	56	121	101	134	115	71	96	22	9
139	125	20	6	94	35	69	48	51	76	110	97
95	72	106	117	140	55	126	77	26	37	3	16

CM12 simple formé de deux composantes non ACF, chacune étant néanmoins auto-contrainte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	9	5	7	3	11	4	12	2	1	6	8
9	10	6	8	2	12	1	11	7	5	3	4
2	1	11	12	9	8	10	6	4	3	5	7
11	12	8	6	4	10	3	9	1	2	7	5
3	4	10	9	1	7	2	5	12	11	8	6
6	8	12	11	7	1	5	2	10	9	4	3
5	7	1	2	10	4	9	3	8	6	12	11
7	5	4	3	6	2	8	1	11	12	9	10
4	3	7	5	11	9	12	10	6	8	2	1
12	11	2	1	8	3	6	4	5	7	10	9
8	6	9	10	12	5	11	7	3	4	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	3	2	1	12	9	11	10	6	8	7	5
6	8	5	7	11	3	12	4	10	9	1	2
9	10	12	11	7	2	5	1	8	6	4	3
10	9	4	3	6	1	8	2	5	7	12	11
5	7	11	12	2	8	1	6	4	3	9	10
8	6	1	2	9	4	10	3	12	11	5	7
12	11	7	5	3	9	4	9	1	2	6	8
2	1	9	10	4	12	3	11	7	5	8	6
3	4	6	8	1	5	2	7	11	12	10	9
7	5	8	6	10	11	9	12	3	4	2	1
11	12	10	9	8	7	6	5	2	1	3	4

Composante I (gauche) et J (droite) du CM précédent

La transformée de Bachet

Ci-dessous, la décomposition du « carré canonique » : la composante J est la transposée de I. De plus, en dimension impaire, les médiatrices sont régulières et les diagonales, principales et secondaires sont simples, autrement dit, on a les $2n + 2$ séquences magiques qu'il suffit de réorganiser pour le transformer en CM : la méthode de construction de – ou redécouverte par – Bachet consiste à transformer les lignes en diagonales, et les diagonales en lignes : comme les médiatrices sont régulières, on peut espérer un tableau ayant ses diagonales magiques.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

La démarche technique n'est pas rappelée en détail ici, elle est décrite et largement généralisée dans les ouvrages consacrés aux CM. Le CM obtenu pour la dimension 5 est la première figure d'illustration de cet article.

Cette construction a l'intérêt de donner une méthode de transformation d'un CM diabolique qui inverse lignes et colonnes en diagonales. En voici un exemple en dimension 5 avec la transformée de Bachet, et la double transformée qui réarrange les lignes et colonnes de façon à avoir toujours un CM :

1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8

21	18	15	7	4
12	9	1	23	20
3	25	17	14	6
19	11	8	5	22
10	2	24	16	13

24	12	5	18	6
20	8	21	14	2
11	4	17	10	23
7	25	13	1	19
3	16	9	22	15

Une étude détaillée de la double transformée permettrait de généraliser cette démarche (en dehors de la diabolicité) et d'aboutir à la notion de « manipulation interne » des CM. Rappelons que nous avons vu une composante en dimension 9 qui est en injection avec les huit isométriques de sa propre transformée de Bachet.

PARTIE III. PROLONGEMENT

La troisième partie de l'atelier a été consacrée à la manipulation d'un logiciel analysant les CM sur la base des notions définies sans la partie II. Il est plus intéressant de manipuler directement les structures magiques (et voir les outils d'analyse conclure) que de procéder à des vérifications manuelles.

Ne pouvant transcrire de manière satisfaisante cette partie d'approche interactive sur les CM, nous proposons à la place au lecteur d'aller un peu plus loin dans l'analyse de certaines constructions magiques, et en particulier de la relation entre les CM symétriques et diaboliques. L'idée sous-jacente à ce paragraphe est de chercher une sorte de transformation « à la Bachet » pour la dimension paire, et en particulier pour les dimensions multiples de 4 relativement à la diabolicité. En effet, en dimension simplement paire ($n \equiv 2$ (4)), il n'existe ni structure symétrique, ni structure diabolique. En voici une preuve rapide (celle sur la diabolicité date de 1919) :

Non-existence de CM symétrique en dimension simplement paire

	A			**B**	
	C			**D**	

Soit $n = 2p$. On définit quatre zones A, B, C, D, de sommes s(A), s(B), s(C), s(D). En sommant les zones A et C, on a la moitié des colonnes et en sommant les zones A et B, on a la moitié des lignes. Cela suffit pour conclure que, si chaque ligne et colonne est magique, les quatre zones A, B, C, D ont même somme, chacune étant le quart de la somme totale. Or cette somme totale vaut $2p^2(n^2+1)$, qui n'est pas multiple de 4 si p est impair.

Non-existence de CM diabolique en dimension simplement paire

Toujours avec $n = 2p$, découpons cette fois le tableau de $4p^2$ cases en p^2 blocs de quatre cases au lieu de quatre blocs de p^2 cases comme ci-dessus. Les blocs sont ici composés de cases non contiguës. Ces zones A, B, C et D sont repérées par les lettres a, b, c, d sur le schéma de la page suivante. En sommant les éléments des zones A et B, on a la moitié des lignes, et en sommant les éléments des zones A et C, la moitié des colonnes. On a donc s(B) = s(C).

Supposons de plus le tableau diabolique, alors en sommant les éléments des zones A et D, on a la moitié des diagonales (montantes ou descendantes), et en sommant les éléments des zones B et C, on a l'autre moitié des diagonales. Ainsi $s(B)+s(C)=pn(n^2+1)/2$, et ce nombre est toujours entier. Comme s(B) = s(C), on a $s(B)=pn(n^2+1)/4$ qui, lui, est demi entier si p est impair. Ainsi, pour un CM où s(B) est entier, la structure diabolique est impossible. (Remarque : on peut modifier la démarche pour éviter le raisonnement par l'absurde.)

a	b	a	b	a	b	a	b
c	d	c	d	c	d	c	d
a	b	a	b	a	b	a	b
c	d	c	d	c	d	c	d
a	b	a	b	a	b	a	b
c	d	c	d	c	d	c	d
a	b	a	b	a	b	a	b
c	d	c	d	c	d	c	d

Schéma illustrant la non diabolicité en dimension simplement paire

Dans toute la suite de cette partie, la dimension paire sera toujours une dimension multiple de 4 afin que les structures de symétrie et de diabolicité existent pour les CM.

Passage de la symétrie à la diabolicité

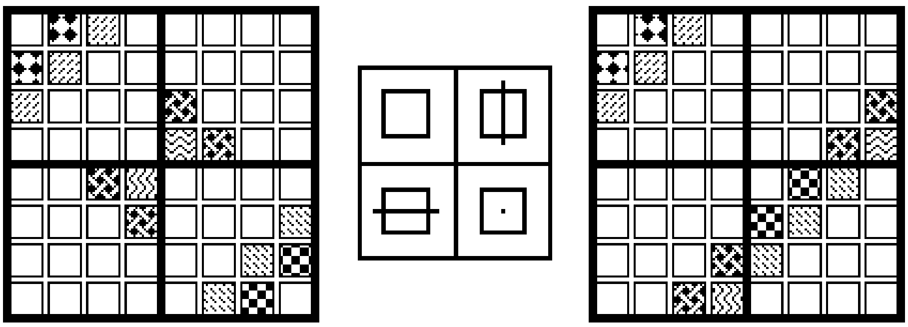
Soit un tableau symétrique (à gauche), on lui fait subit la transformation suivante, dite « transformation diabolique » :

• identité sur le quadrant supérieur gauche ;

• symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice verticale sur le quadrant supérieur droit ;

• symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice horizontale sur le quadrant inférieur gauche ;

• symétrie centrale sur le quadrant inférieur droit.



Transformation d'un CM symétrique en CM diabolique

Il est facile de vérifier que cette opération transforme un CM symétrique en CM diabolique. Ainsi, l'existence de CM diaboliques, pour les dimensions multiples de 4, est une conséquence de l'existence de CM symétriques pour cette dimension. Voici un exemple, en dimension 12 :

8	134	125	35	1	127	118	28	6	132	123	33
107	53	62	80	100	46	55	73	105	51	60	78
71	89	98	44	64	82	91	37	69	87	96	42
116	26	17	143	109	19	10	136	114	24	15	141
3	129	120	30	5	131	122	32	7	133	124	34
102	48	57	75	104	50	59	77	106	52	61	79
66	84	93	39	68	86	95	41	70	88	97	43
111	21	12	138	113	23	14	140	115	25	16	142
4	130	121	31	9	135	126	36	2	128	119	29
103	49	58	76	108	54	63	81	101	47	56	74
67	85	94	40	72	90	99	45	65	83	92	38
112	22	13	139	117	27	18	144	110	20	11	137

Un CM symétrique régulier en dimension 12

Ce CM a toutes ses séquences de magicité régulières non simples. Sa composante gauche est elle aussi à séquences régulières non simples, elle n'est pas auto-contrainte, donc le carré non plus, elle est en injection avec seulement la symétrie centrale de l'autre composante. La composante droite est à colonnes régulières non simples, les lignes et les diagonales principales sont simples. Elle est auto-contrainte dans les deux rotations. Aucune des deux composantes n'est diabolique.

8	134	125	35	1	127	33	123	132	6	28	118
107	53	62	80	100	46	78	60	51	105	73	55
71	89	98	44	64	82	42	96	87	69	37	91
116	26	17	143	109	19	141	15	24	114	136	10
3	129	120	30	5	131	34	124	133	7	32	122
102	48	57	75	104	50	79	61	52	106	77	59
112	22	13	139	117	27	137	11	20	110	144	18
67	85	94	40	72	90	38	92	83	65	45	99
103	49	58	76	108	54	74	56	47	101	81	63
4	130	121	31	9	135	29	119	128	2	36	126
111	21	12	138	113	23	142	16	25	115	140	14
66	84	93	39	68	86	43	97	88	70	41	95

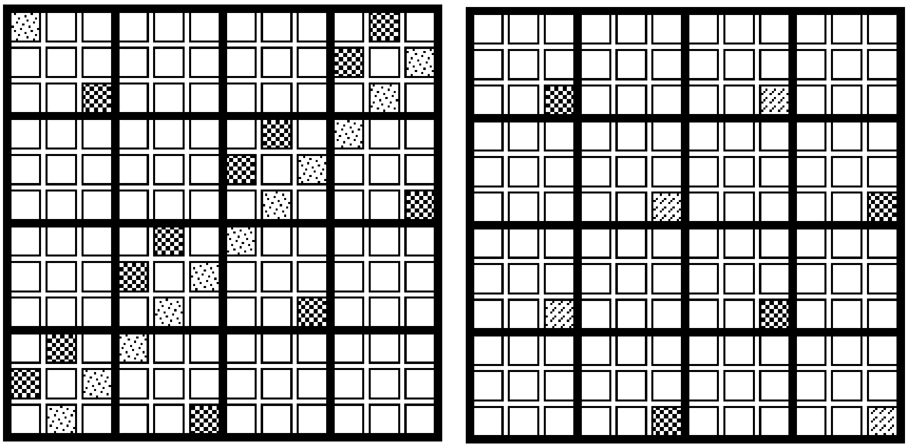
Sa transformation en CM diabolique

Le CM obtenu est formé de deux composantes dont aucune n'est auto-contrainte et qui ne sont en injection entre elles que dans cette seule configuration. Seules, une diagonale montante et une descendante de chaque composante sont simples, toutes les autres sont régulières non simples.

Mais on peut aller plus loin, et s'intéresser à l'application des isométries du carré dans les quadrants internes des CM à différents niveaux de profondeur.

Dans la suite, on appellera *isométrie interne de degré k*, en dimension $n = 2^p q$, l'isométrie du même nom appliquée à chacun des 2^{2k} blocs carrés qui composent le carré. Les isométries ordinaires du carré sont celles de degré 0 ; les isométries internes de la transformation diabolique sont celles de degré 1, elles s'appliquent sur les quatre quadrants. Les isométries qui s'appliqueraient sur seize quarts de quadrants seraient des isométries de degré 2.

Observons déjà le cas de l'application de la symétrie centrale au degré 2. Chacun retrouvera facilement ce résultat :



Conditions pour que la structure CMD soit invariante par la symétrie centrale interne de degré 2

Propriété - définition :

Un CM diabolique de dimension paire n = 4q reste diabolique par une symétrie centrale appliquée, de manière interne, au degré 2 si et seulement si :

Pour i et j variant de1 à q, et pour u, v, k variant de 1 à 4, on a les égalités suivantes :

$$\sum_{u+v\equiv k\,(4)} a_{(u-1)q+i,\,(v-1)q+j} = \sum_{u+v\equiv k\,(4)} a_{(4-u)q+i,\,(4-v)q+j} \text{ (diagonales descendantes),}$$

$$\sum_{u-v\equiv k\,(4)} a_{(u-1)q+i,\,(v-1)q+j} = \sum_{u-v\equiv k\,(4)} a_{(4-u)q+i,\,(4-v)q+j} \text{ (diagonales montantes).}$$

Ces égalités définissent des couples de quadruplets. Quand elles seront vérifiées, on parlera de tableaux à *quadruplets correspondants égaux*.

Si on s'intéresse aux seules isométries internes que sont la symétrie centrale et les symétries orthogonales par rapport aux médiatrices des côtés, on obtient un résultat intéressant : si le tableau est à quadruplets correspondants égaux, ces trois isométries, au degré 1 et 2 conservent la diabolicité. Quelques cas particuliers sont intéressants, comme celui-ci :

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	P	Q

Le carré de départ

s(F)	s(E)	s(H)	s(G)
s(B)	s(A)	s(D)	s(C)
s(N)	s(M)	s(Q)	s(P)
s(J)	s(I)	s(L)	s(K)

La symétrie centrale au degré 1

F	E	H	G
B	A	D	C
N	M	Q	P
J	I	L	K

La symétrie centrale au degré 2

Composition de symétries centrales à différents degrés sur un CMD de dimension paire

Dans l'exemple ci-dessus, une symétrie centrale appliquée au degré 1, suivie d'une symétrie centrale appliquée au degré 2 permet de conclure que l'échange terme à terme, dans chaque quadrant, des quarts de quadrants symétriques conserve la diabolicité. En voici une illustration :

35	50	24	45	11	26	64	5
17	47	14	28	57	7	38	52
10	32	61	3	34	56	21	43
63	6	36	49	23	46	12	25
40	53	19	42	16	29	59	2
22	44	9	31	62	4	33	55
13	27	58	8	37	51	18	48
60	1	39	54	20	41	15	30

61	3	10	32	21	43	34	56
36	49	63	6	12	25	23	46
24	45	35	50	64	5	11	26
14	28	17	47	38	52	57	7
58	8	13	27	18	48	37	51
39	54	60	1	15	30	20	41
19	42	40	53	59	2	16	29
9	31	22	44	33	55	62	4

Regardons de même un exemple avec les symétries orthogonales qui permettent d'intervertir des blocs, en dimension 12 :

1	134	3	136	5	138	12	143	10	141	8	139
24	131	22	129	20	127	13	122	15	124	17	126
133	2	135	4	137	6	144	11	142	9	140	7
132	23	130	21	128	19	121	14	123	16	125	18
25	110	27	112	29	114	36	119	34	117	32	115
48	107	46	105	44	103	37	98	39	100	41	102
109	26	111	28	113	30	120	35	118	33	116	31
108	47	106	45	104	43	97	38	99	40	101	42
49	86	51	88	53	90	60	95	58	93	56	91
72	83	70	81	68	79	61	74	63	76	65	78
85	50	87	52	89	54	96	59	94	57	92	55
84	71	82	69	80	67	73	62	75	64	77	66

CMD à quadruplets correspondants égaux, mais non constants…

136	5	138	1	134	3	141	8	139	12	143	10
129	20	127	24	131	22	124	17	126	13	122	15
4	137	6	133	2	135	9	140	7	144	11	142
21	128	19	132	23	130	16	125	18	121	14	123
112	29	114	25	110	27	117	32	115	36	119	34
105	44	103	48	107	46	100	41	102	37	98	39
28	113	30	109	26	111	33	116	31	120	35	118
45	104	43	108	47	106	40	101	42	97	38	99
88	53	90	49	86	51	93	56	91	60	95	58
81	68	79	72	83	70	76	65	78	61	74	63
52	89	54	85	50	87	57	92	55	96	59	94
69	80	67	84	71	82	64	77	66	73	62	75

... et sa transformation par deux isométries internes de degrés différents : échange des colonnes

De nombreux autres développements sont possibles autour de ces thèmes. Ces quelques points ont permis d’illustrer la richesse spécifique du cas particulier de la régularité des CM, en dehors du contexte historique des carrés latins et eulériens.

Terminons en donnant deux exemples possibles de structures symboliques de composantes à quadruplets correspondants égaux en dimension 12 (rappelons qu'une lettre primée correspond au complémentaire de la même lettre non primée).

a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'
b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'
a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a
b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b
c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'
d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'
c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c
d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d
e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'
f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'
e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e
f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f

a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'
b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'
c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'
d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'
e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'
f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'
a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a	a'	a
b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b	b'	b
c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c	c'	c
d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d
e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e	e'	e
f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f

Ces deux structures sont auto-contraintes dans quatre isométries : les symétries par rapport aux deux diagonales et les deux rotations. Telles quelles, elles ne sont pas en injection entre elles, mais le sont dans les quatre mêmes isométries que leur auto-contrainte. Elles sont aussi à diabolicité simple.

BIBLIOGRAPHIE

On s'est limité ici à des ouvrages actuellement disponibles. Celui de Jacques Bouteloup comprend une bibliographie plus complète, mais les ouvrages qu'il cite sont épuisés depuis longtemps.

1) Pour ce qui est de la partie historique de cet atelier, l'ouvrage utilisé est :

• *Un traité médiéval sur les carrés magiques : « De l'arrangement harmonieux des nombres »*, trad. et éd. de Jacques SESIANO, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1996.

Ouvrage bilingue français-arabe. De nombreuses notes font de cet ouvrage, au delà de la traduction française d'un manuscrit – ce qui est déjà très riche –, un état de l'art au XIII^e^ s. dans la culture arabe, agrémenté d'une comparaison avec certaines méthodes européennes du XVI^e^ s. Un travail remarquable.

Si l'ouvrage n'a pas une approche typiquement mathématique comme celui de Jacques Bouteloup, l'auteur n'hésite pas à traduire, dans ses notes, les constructions proposées – parfois assez obscures – en notations algébriques pour les rendre plus accessibles au lecteur.

On pourra consulter aussi :

• *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Jean-Luc CHABERT *et al*., Belin, Paris, 1994, chap. 2 : Les carrés magiques.

Une trentaine de pages assez détaillées sur l'historique des carrés magiques, avec des extraits de textes originaux et une bibliographie conséquente.

2) Pour une approche plus technique des CM :

• *Carrés Magiques, Carrés Latins et Eulériens*, Jacques BOUTELOUP, Éditions du Choix, Argenteuil, 1991.

Reprend des démonstrations qui sont (bibliographiquement) difficilement accessibles. Des études complètes, utilisant la congruence, mais aussi la théorie des corps. Donne également des résultats sur des travaux récents : sans aucun doute le premier ouvrage à consulter.

• *Les carrés magiques de 5*, Bernard GERVAIS, Eyrolles, Paris, 1998.

Ouvrage grand public sur les CM d'ordre 5, avec des démonstrations très illustrées. Cet ouvrage introduit le concept de mosaïque magique qui aboutit à « une vision complémentaire, originale et inattendue du problème des carrés magiques et des mosaïques magiques ».

• *Magic Squares and Cubes*, William H. BENSON, Dover, New York.

• *New Recreation with Magic Squares*, William H. BENSON et Oswald JACOBY, Dover, New York, 1976.

Benson avait construit le premier carré « trimagique » … en 1949. La *bimagie* est celle d'un CM dont le tableau des carrés est aussi magique. La *trimagie* … vous aurez compris.

Ces deux ouvrages offrent quelques autres aspects non abordés par Jacques Bouteloup, comme les duplications de Strachey, les CM diaboliques de Stern, les constructions de La Hire.