UN EXEMPLE D'ÉQUATION QUADRATIQUE CHEZ AL-KHOWARIZMI

Daniel BERTHE

Cet atelier est avant tout un hommage à mon ami et directeur de recherche, le professeur Norreddine Mahammed, décédé en 1994. Je me suis en grande partie inspiré de ses travaux[1].

Mon propos sera court puisqu'il ne portera que sur un exemple d'une des équations quadratiques données par Mohammed Al-Khowarizmi, membre de la Maison de la Sagesse de Bagdad au début du neuvième siècle de notre ère.

Dans son livre[2], traduit par *Court traité sur le calcul de l'algèbre et de la muqābala*, Al-Khowarizmi montre que toutes les équations du premier et du second degrés se ramènent à six types dont cinq sont des équations quadratiques, *i. e.* des équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Signalons que toutes les questions traitées le sont sans l'utilisation de symboles ; la racine cherchée (notre *x*) s'appelle *šay'* (la chose) et la quantité connue *dirham*.

L'équation du premier degré est du type $ax = c$. Les cinq types d'équations quadratiques sont[3] :

$$\begin{array}{lr} (1) & ax^2 = bx \\ (2) & ax^2 = c \\ (3) & x^2 + bx = c \\ (4) & x^2 + c = bx \\ (5) & bx + c = x^2 \end{array}$$

Précisons que s'il faut employer les deux opérations de ǧabr et de muqābala pour se ramener à l'un des ces types, Al-Khowarizmi n'entre pas dans les détails ; nous pouvons donc supposer que ces processus étaient connus à l'époque.

Exemple :
A. De quel type est l'équation $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ *?*

[1] Norreddine Mahammed, *Sur la résolution des équations algébriques*, USTL, IREM de Lille, 1995.
[2] Une copie manuscrite datant de 1342 se trouve à la bibliothèque de l'Université d'Oxford.
[3] Nous utiliserons nos notations modernes pour plus de clarté.

L'équation $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ devient

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Par ğabr (opération de passage d'un terme négatif d'un membre à l'autre de l'équation), on a alors

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x.$$

Par muqābala (opération de réduction des termes semblables de l'équation), on a ensuite

$$2x^2 + 42 = 20x.$$

On obtient enfin, par division par 2, l'équation

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Cette équation est du type (4).

B. Comment travaille Al-Khowarizmi ?

Précisons avant toute chose que les nombres négatifs ne sont pas pris en considération à cette époque et que les résultats obtenus par les travaux d'Al-Khowarizmi sont ensuite utilisés à la résolution de problèmes de la vie quotidienne ou de géométrie.

D'abord, **Al-Khowarizmi prend en compte l'équation algébrique en tant que telle.** À la manière babylonienne, il donne les calculs à effectuer pour trouver les solutions, à savoir :

« Divise en deux les racines : ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même : tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au carré : il reste 4 ; extrais la racine – cela donne 2 – et retire-la de la moitié des racines, c'est-à-dire de 5 : il reste 3 ; c'est la racine carrée que tu cherches. Si tu le désires ajoute cela à la moitié des racines : cela te donne 7 qui est la racine carrée que tu cherches. »

Après avoir fait ce travail, **Al-Khowarizmi « démontre » ces résultats en utilisant des méthodes géométriques qui s'appuient sur l'œuvre d'Euclide[4] :**

Notons x l'une des racines cherchées. Rappelons que l'équation $x^2 + 21 = 10x$ est de la forme $x^2 - bx + c = 0$, avec ici b = 10 et c = 21.

Construisons[5] une longueur AB = 10 et son milieu C : déterminer x, c'est trouver un point M de AC (avec AM = x) tel que x^2 = (AMHK), avec AMHK carré, et

[4] Les segments seront notés sans nos habituels crochets.
[5] Notons que toutes les constructions sont possibles à la règle et au compas.

$\mathrm{AM}^2 + 21 = x^2 + 21 = 10x$ = (ABLK), où ABLK est un rectangle. Le problème équivaut à

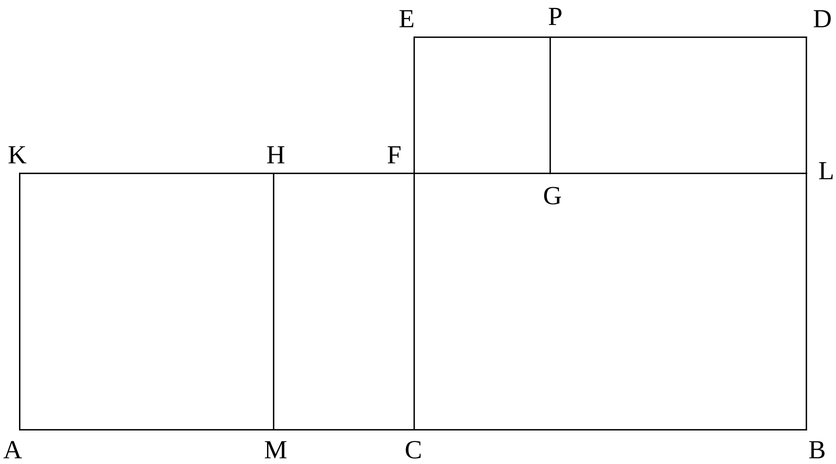
$$x\,(10 - x) = (\mathrm{MBLH}) = 21.$$

Construisons les carrés CBDE et EFGP, où F est l'intersection de CE et KL. Puisque FG = FE = EC – FC = $10:2 - x$, alors FH = FG, et les rectangles HMCF et PGLD sont égaux. Par conséquent,

$$(\mathrm{EFGP}) = (\mathrm{ECBD}) – [(\mathrm{FCBL}) + (\mathrm{PGLD})]$$

devient

$$(\mathrm{EFGP}) = (\mathrm{ECBD}) – [(\mathrm{FCBL}) + (\mathrm{HMCF})] = (\mathrm{ECBD}) – (\mathrm{HMBL}).$$



EFGP = $\mathrm{EF}^2 = (10:2 - x)^2$ donne alors

$$(10:2 - x)^2 = 10^2:4 - 21,$$

et comme x = AM = CF = CE – EF, nous avons bien

$$x = 10:2 - \sqrt{(10^2:4 - 21)} = 5 - \sqrt{(100:4 - 21)} = 5 - \sqrt{(25 - 21)} = 5 - 2 = 3.$$

L'autre racine est obtenue en ajoutant HF à FL. Remarquons en effet que dans ce type d'équation de la forme habituelle $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$, la somme des racines est égale à 10, *i. e.* AB.

En guise de conclusion, nous dirons qu'à travers son ouvrage *Al-Kitāb al-muhṯaṣar fī hisāb al-ğabr wa-l-muqābala*, Al-Khowarizmi nous montre qu'il a su interpréter algébriquement la géométrie des *Éléments* comme une géométrie conduisant à des problèmes des deux premiers degrés.