HISTOIRE DE LA NUMÉRATION ET DE L'ARITHMÉTIQUE INDIENNES DES ORIGINES AU DOUZIÈME SIÈCLE

Catherine MORICE-SINGH

INTRODUCTION

C'est une approche basée sur la grammaire ou la linguistique que je vais utiliser pour parler de la numération indienne, en m'appuyant sur des travaux effectués par un sanskritiste indien, M. D. Pandit. Mais, avant tout, je voudrais faire quelques remarques sur les problèmes auxquels le chercheur doit faire face en Inde, car, à part des difficultés matérielles comme les fréquentes coupures de courant, l'état poussiéreux des rayonnages dans les bibliothèques, l'absence totale de fichiers parfois, il y a aussi des problèmes plus graves :

• Les documents déjà répertoriés n'ont pas tous été étudiés de façon systématique et objective. Je pense par exemple au Manuscrit de Bakhshālī (manuscrit découvert par un paysan, en 1881, dans un village situé maintenant au Pakistan). A. F. R. Hoernle l'a étudié en 1888, et l'a situé vers le III^e^ ou IV^e^ siècle de notre ère. L'étude a été reprise en 1927 par G. R. Kaye, qui s'est ingénié à vouloir situer ce texte vers le XI^e^ ou XII^e^ siècle et surtout à trouver une origine grecque aux techniques mathématiques qui y apparaissent. Takao Hayashi a récemment procédé à une nouvelle étude[1] de ce manuscrit, en se basant sur sa propre traduction et avec des méthodes solides et objectives. Il propose une date qui paraît plus acceptable : le VII^e^ siècle[2].

• D'autre part, il resterait encore[3] des centaines et des centaines de documents en sanskrit ou dans d'autres langues indiennes, qui n'ont pas été dépouillés et étudiés, et qui dorment dans les bibliothèques. La documentation existante est donc lacunaire, et ces lacunes sont évidemment des obstacles à la compréhension de l'évolution des idées.

• Un troisième problème, qui n'est pas le moindre, est le suivant : l'Inde peut susciter des réactions émotionnelles vives, voire des prises de position extrêmes. Des

---

[1] T. HAYASHI, *The Bakhshālī Manuscript. An ancient Indian mathematical treatise*, Egbert Forster, Groningen, 1995.
[2] T. HAYASHI, *ibid.*, p. 149.
[3] G. MAZARS, L'Inde, dans *Le matin des mathématiciens*, Entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Émile Noël, coll. Regards sur la science, Belin, Paris, 1985, p. 133.

dates sont parfois avancées de façon purement arbitraire, dans le simple but de prouver la supériorité de la civilisation indienne, ou au contraire son infériorité.

En fait, ce problème de la datation est un problème majeur, auquel nous allons nous heurter constamment. Voici un exemple : dans son livre *Ancient Hindu Geometry*, le célèbre historien des sciences B. Datta place le *Taittirīya Saṃhitā* aux environs de 3000 avant J.-C.[4], et G. Ifrah, dans son *Histoire universelle des chiffres*, le place au début de l'ère chrétienne[5]... Plus de 3000 ans d'écart !

Les textes étaient transmis oralement en Inde, depuis la plus haute antiquité. Pour que la transmission des textes sacrés soit inaltérée, différents modes de récitation avaient été mis au point. Ainsi, par comparaison entre deux ou plusieurs modes de récitation, des erreurs éventuelles pouvaient être décelées. L'oralité tient toujours une très grande place en Inde, même de nos jours : un dicton bien connu affirme que la science livresque « est comme l'argent dans la poche d'autrui ; on ne l'a pas sous la main en cas de besoin »[6]. Dans ces conditions, il est évident que toute affirmation devra être présentée avec précaution et modération.

PREMIÈRE PARTIE
L'EXPRESSION DES NOMBRES AVANT NOTRE ÈRE

I. LA NUMÉRATION DANS LES TEXTES LES PLUS ANCIENS

A. Les Védas

Nous allons chercher les premiers éléments de l'histoire de la numération indienne dans les textes les plus anciens de l'Inde : les Védas. Ces textes ne sont pas des traités de mathématiques ou d'astronomie ; ce sont des collections d'hymnes religieux, de chants et de formules liturgiques, écrits en sanskrit védique. Malgré tout, les Védas laissent apparaître une conscience du nombre assez développée puisque :
• des noms de professions comme menuisier, forgeron, barbier, vannier, cordier, blanchisseur, etc., y sont cités, et indiquent donc une activité commerciale certaine ;
• dans la langue elle-même, le sanskrit védique, il y a trois nombres : singulier, duel et pluriel ; un nom au singulier ne sera jamais précédé de *ekaḥ* (un), de même qu'un nom au duel ne sera jamais précédé de *dvau* (deux) ;
• en métrique, les vers sont classés selon le nombre de syllabes qu'ils contiennent[7].

---

[4] B. DATTA, *Ancient Hindu Geometry. The science of the sulba*, Cosmo Publications, New-Delhi, 1993, p. 60.
[5] G. IFRAH, *Histoire Universelle des Chiffres*, coll. Bouquins, R. Laffont, Paris, 1994, t. 2, p. 102.
[6] P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit*, coll. Que sais-je ?, P.U.F., Paris, 1992, p. 69.
[7] A. A. MACDONELL, *A Vedic Grammar for Students*, Oxford University Press, Delhi, 1987 (réimpression), p. 436 : « The main principle governing Vedic metre (the source of all later Indian versification) is measurement by number of syllabes. »

Le plus ancien des Védas, le *Ṛg Veda*, est en général situé vers 1500 avant J.-C. par les historiens. Mais à l'heure actuelle, plusieurs chercheurs réfutent cette date. Par exemple, David Frawley[8] propose un scénario entièrement nouveau pour l'histoire de l'Inde ancienne. D'après lui, le *Ṛg Veda* décrirait le Nord de l'Inde tel qu'il était probablement *avant* 3000 avant J.-C. Ses arguments sont assez nombreux, un des principaux étant le fait qu'il existait alors une rivière très puissante, la *Sarasvatī*. Cette rivière s'est tarie vers 1900 avant notre ère, mais elle est souvent invoquée dans le *Ṛg Veda*. Pourquoi les hommes de cette époque auraient-ils invoqué une rivière tarie depuis plusieurs centaines d'années ? D'après D. Frawley, la théorie des invasions aryennes ne serait plus valable, et la culture védique n'aurait pas été « primitive » mais au contraire profondément spirituelle[9]. Il va sans dire que ces idées nouvelles sont encore loin de faire l'unanimité parmi les historiens.

B. Le système numérique

M. D. Pandit a procédé à une relecture des textes védiques les plus anciens (neuf recueils de textes, composés avant les Brahmanas et les Upanishads : *Ṛg Veda, Vājasaneyi Śukla Yajurveda Saṃhitā, Kāṇva Saṃhitā, Sāmaveda Saṃhitā, Atharva Veda Śaṃhitā, Taittirīya Saṃhitā, Maitrāyaṇī Saṃhitā, Kāṭhaka Saṃhitā, Kapiṣṭhala Kaṭha Saṃhitā*). Tous ces textes sont antérieurs aux *śulba-sūtra* (ensembles de règles de construction au cordeau utiles pour le rituel védique). M. D. Pandit a donc examiné le contenu de ces textes sur le plan de l'expression des nombres et de l'arithmétique. Il a rassemblé ses nombreuses observations dans un livre intitulé *Mathematics as known to the Vedic Saṁhitās*[10], dont quelques extraits vont être exposés ici :

• il n'y a pas de zéro explicite ;

• les nombres de 1 à 10, ainsi que les dizaines 20, 30 40, 50, 60, 70, 80, 90, sont exprimés à l'aide d'un seul mot ;

• les autres nombres, de 11 à 99, sont exprimés à l'aide de mots composés dans lesquels le chiffre des unités est toujours cité avant le chiffre des dizaines :
32 = *dvā-triṃśat* (deux-trente),
61 = *eka-ṣaṣṭi* (un-soixante),
45 = *pañca-catvāriṃśat* (cinq-quarante), etc. ;

---

[8] D. FRAWLEY, *Gods, Sages and Kings. Vedic secrets of ancient civilization*, Motilal Banarsidass Publishers, Delhi, 1991.
[9] D. FRAWLEY, *ibid.*, p. 16 : « What may appear to be a deficiency in the ancients is usually a lack of empathy and insight in the modern mind which distorts the ancient language according to the superficial framework of modern thought. »
[10] M. D. PANDIT, *Mathematics as known to the Vedic Saṁhitās*, Sri Satguru Publications, A division of Indian Books Centre, Delhi, 1993.

• pour les nombres supérieurs à 100, les principes multiplicatifs et additifs sont utilisés :
300 = *trīṇi śatāni* (100 + 100 + 100),
360 = *sākam triśata ṣaṣṭiḥ* (60 + 300),
1470 = *triḥ sapta saptatīnām* ($3 \times 7 \times 70$),
3 339 = *triṇi śatā trī sahasrāṇi triṃśatam ca nava ca* ($300 + 3000 + 30 + 9$), etc. ;

• souvent les puissances de 10 sont citées dans l'ordre décroissant mais ce n'est pas une règle générale dans les textes les plus anciens ;

• les noms des puissances de dix sont donnés jusqu'à 10^{12} dans une recension du *Yajur Veda* (le *Vājasaneyi Śukla Saṃhitā*) ;

• le système numérique est sans aucun doute décimal.

C. Les opérations

Les textes védiques n'étant pas écrits à l'aide de symboles mathématiques, il faut chercher les opérations dans le texte lui-même.

1) L'addition

Elle est exprimée à l'aide de « *ca* » ou « *sākam* » :
nava ca navatiṃ ca (9 + 90 = 99) *Ṛg Veda* 1.32.14,
nava sākam navatiḥ (9 + 90 = 99) *Ṛg Veda* 4.26.3.

Quand il n'y a ni *ca* ni *sākam* entre des nombres, cela veut dire qu'il faut multiplier :
navatiṃ sahasrā ($90 \times 1000 = 90\,000$) *Ṛg Veda* 10.98.11.

ADDITION

Il y a de très nombreux exemples, tous référencés par M. D. Pandit.

2 = 1 + 1 *Ṛg Veda* 9.86.42 (*dvā janā... narā ca śaṃsam daivyaṃ ca*)[11] ;

3 = 1 + 1 + 1[12] ; 3 = 1 + 2 ; 4 = 3 + 1[13] ; 6 = 3 + 2 + 1 ; 8 = 7 + 1 ;
10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 ; 10 = 5 + 5 ; 11 = 10 + 1 ; 11 = 8 + 2 + 1 ; 12 = 10 + 2 ;
12 = 2 + 2 + 1 + 1 + 4 + 2 ; 12 = 6 + 6 ; 14 = 7 + 7 ; 14 = 10 + 4 ; 15 = 10 + 5 ;
20 = 10 + 10 ; 21 = 10 + 10 + 1 ; 21 = 12 + 5 + 3 + 1 ; 25 = 10 + 10 + 2 + 2 + 1 ;
27 = 24 + 2 + 1 ; 720 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 20, etc.

[11] M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 82 (il est dit que Soma voyage dans deux mondes, le *narāśaṃsa janā* et le *daivya janā*).
[12] Trois déesses sont citées par leur nom, Ilā, Sarasvatī, Mahī.
[13] La parole a quatre dimensions. Trois sont « cachées » et la quatrième est la parole humaine.

2) La soustraction

Le concept de soustraction existe dans ces textes, même s'il n'y a pas de mot servant à l'exprimer dans le cas général.

SOUSTRACTION

Ṛg Veda 1.164.45 : si « trois » sont mentionnés parmi « quatre », ce qui reste est « un ».
Ṛg Veda 10.72.8[14] : quand « sept » sont retirés de « huit », ce qui reste est « un ».

Il y a cependant un mot, qui apparaît plus tardivement[15], et qui est utilisé dans des cas précis : *ūna*. Dans un contexte non numérique, *ūna* veut dire « déficient, manquant, incomplet » ; dans un contexte numérique, il veut dire « soustrait de, de moins que » :
eka ūna viṃśati = « un soustrait de vingt », c'est-à-dire « dix-neuf » ;
eka ūna viṃśati peut aussi se dire : *ekonaviṃśati, ekānnaviṃśati* ;
eka ūna triṃśat (ou *ekānnatriṃśat*) = « un de moins que trente » = « vingt-neuf ».

D'après M. D. Pandit, le meilleur exemple de soustraction serait l'histoire du vers *Anuṣṭubh* citée dans le KKS. 35.8[16] :

Au début, le vers *Anuṣṭubh* était constitué de trois pieds (*pāda*) de 8 syllabes, et d'un pied de 7 syllabes.
Anuṣṭubh = 8 + 8 + 8 + 7.
Des 7 syllabes du dernier pied, 3 sont allées s'ajouter à un pied de 8 syllabes.
Anuṣṭubh = (8 + 3) + 8 + 8 + (7 – 3) = *Triṣṭubh* + 8 + 8 + 4 ;

on a obtenu le vers *Triṣṭubh.*

Les 4 syllabes restantes dans le dernier pied sont allées s'ajouter à un pied de 8 syllabes.
Anuṣṭubh = *Triṣṭubh* + (8 + 4) + 8 = *Triṣṭubh* + *Jagatī* + 8 ;

on a obtenu le vers *Jagatī.*

Ce qui reste est un pied de 8 syllabes : c'est le vers *Gāyatrī*,
donc *Anuṣṭubh = Triṣṭubh + Jagatī + Gāyatrī,* ou 8 + 8 + 8 + 7 = 11 + 12 + 8.

[14] La déesse Aditi donna naissance à huit fils. Avec sept d'entre eux, elle approcha les dieux et elle laissa de côté le huitième, Mārtāṇḍa, le Soleil.
[15] M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 16 : « This started from the times of the AV. onwards. »
[16] M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 91.

3) La multiplication

MULTIPLICATION

Il n'y a pas de mot particulier pour indiquer la multiplication. Elle peut être représentée par l'utilisation des suffixes -*s*, -*kṛtvaḥ*, ou de -*vṛt* ou -*vāra* ajoutés aux noms de nombres. Mais comme nous l'avons déjà vu, elle peut-être sous-entendue aussi.

a) sans suffixe :
TS. 7.4.11 : *dvau ṣaḍahau bhavataḥ. tāni dvādaśa ahāni sampadyante* ($6 \times 2 = 12$) ;
KS. 33.3 : *pañca ṣaḍaha bhavanti ; tāni triṃśadahāni sampadyante* ($5 \times 6 = 30$).

b) avec des suffixes :
RV. 1.53.9 : *dvi**ḥ** daśa* (2×10) ;
RV. 8.96.8 : *tri**ḥ** ṣaṣṭis* (3×60) ;
*tri**ḥ** sapta saptatīnām* ($3 \times (70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70)$) ;
TS. 6.5.3 : *ṣaṭ kṛtvaḥ* (six fois), etc.

Dans le *Ṛg Veda* et dans l'*Atharva Veda,* on trouve aussi des listes de multiples de 2, de 10 et de 11[17]. Pour la liste des multiples de 11, le principe de la distributivité est appliqué[18] puisque 11 est décomposé en 1+10.

4) La division

DIVISION

Un suffixe est utilisé pour exprimer la division : *-dhā.* Exemples :
ekadhā (en une partie), *ardha* (en deux parties ou « moitié ») à la place de *dvidhā*, *tridhā* (en trois parties), etc.

Dans le TS. 7.1.5, une situation dans laquelle 1000 doit être divisé en trois parties[19] est exposée, mais la valeur de chaque partie n'est malheureusement pas mentionnée.

Les fractions 1/3, 2/3, 1/2, 1/4, 3/4, 1/10, 1/1000 apparaissent. Certaines portent un nom : 1/4 = *pāda*, 3/4 = *tripāda*, 1/16 = *kalā*, etc.

17 M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 96-97.
18 M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 98.
19 M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 106.

D. Des suites arithmétiques et géométriques

Dans le *Ṛg Veda,* on trouve les suites 2, 4, 6, 8, 10 et 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

Dans d'autres textes, on a : 11, 22, 33, ..., 110 ou 1, 3, 5, 7, ..., 33 ou 4, 8, 12, ..., 48 ou 99, 88, 77, ..., 11.

Dans le *Taittirīya Saṃhitā,* on a l'exemple d'une suite arithmétique dans laquelle les termes 19, 29, 39, etc., sont obtenus alternativement par addition et par soustraction :
20 – 1, 20 + 9, 40 – 1, 40 + 9, 60 – 1, 60 + 9, etc.

Il y a aussi la suite : 11, 110, 1100, 11000, 110000, etc., qui contient un véritable « refrain » à chaque étape : *yajñena kalpantām* (« qu'il soit obtenu par le *yajña* »). Est-ce pour indiquer que le processus se répète indéfiniment ?

II. LE CONCEPT DU « ZÉRO » CHEZ PĀṆINI

Aux environs de 500 av. J.-C., on voit apparaître en Inde une codification remarquable de la langue : le *vyākaraṇa-sūtra* (Formulaire de construction de paroles). D'après P. S. Filliozat, « le *vyākaraṇa* a été la plus grande réussite scientifique de l'antiquité indienne »[20]. Il a été composé par Pāṇini. Il contient huit chapitres, ou sections, et pour cette raison est couramment appelé « *Aṣṭādhyāyī* » (les huit leçons).

On dit parfois que Pāṇini a été le premier et le plus grand grammairien de l'Inde, mais il était en fait surtout un linguiste. En effet, il a analysé avec beaucoup de précision la langue qui était parlée à son époque, et il a codifié toutes ses observations à l'aide de « formules » (*sūtra*). Ses *sūtra* sont extrêmement concis, rédigés avec le nombre minimum de mots pour exposer la méthode de construction de la langue[21]. De nos jours, non seulement cet ouvrage est encore utile à l'apprentissage du sanskrit, mais il sert aussi de référence aux linguistes et aux chercheurs en Intelligence artificielle. On le compare souvent à un programme informatique !

D'après P. S. Filliozat : « L'on peut juger de sa valeur d'après sa performance : depuis 2 500 ans, il est le manuel de pratique du sanskrit le plus utilisé. Au cours de l'histoire, d'autres manuels ont été composés. Neuf écoles de grammaire se sont constituées. Certaines ont connu un franc succès, aucune à l'égal de celle qui fut fondée par Pāṇini. De toutes façons, elles se démarquent fort peu du modèle pâni-

[20] P. S. FILLIOZAT, *Grammaire sanskrite pâninéenne*, coll. Connaissance des Langues, Picard, Paris, 1988, p. 12.
[21] P. S. FILLIOZAT, *op. cit.*, p. 14 : « le premier ouvrage scientifique formalisé dans l'histoire universelle des sciences est le *sūtra* de Pāṇini ».

néen. »[22] Nous allons maintenant exposer des situations dans lesquelles, d'après M. D. Pandit[23], Pāṇini utilise des procédés faisant intervenir la notion de « zéro ».

A. Au niveau de la descripton linguistique

Pour décrire les formes personnelles du verbe, Pāṇini donne le schéma suivant : racine verbale + un affixe « modificateur » (*vikaraṇa*) + un suffixe « de forme *l* » (*lakāra*). On peut dire que le suffixe de forme *l* dépend du temps, du mode et de la voix. Le modificateur ou *vikaraṇa,* quant à lui, sert à séparer les verbes en dix classes verbales différentes.

Pāṇini prescrit le *vikaraṇa śap* de façon générale après toute racine verbale[24]. Ensuite, selon les classes, le *ś**a**p* peut être remplacé, ou non, par un substitut de la façon suivante :

racine verbale	classe verbale	modificateur	substitut du suffixe *l*
KHAD- (manger)	1	*ś**a**p*	
AD- (manger)	2	*luk* de *ś**a**p* = amuïssement de *ś**a**p*	
HU- (faire une oblation)	3	*ślu* de *ś**a**p* = amuïssement de *ś**a**p*	
DIV- (jouer)	4	*śyan* = substitut de *ś**a**p*	
SU- (pressurer)	5	*śnu* = substitut de *ś**a**p*	
TUD- (faire mal)	6	*śa* = substitut de *ś**a**p*	
RUDH- (investir)	7	*śnam* = substitut de *ś**a**p*	
TAN- (étendre)	8	*u* = substitut de *ś**a**p*	
KRI- (acheter)	9	*śna* = substitut de *ś**a**p*	
CUR- (voler)	10	*ṇic*	

Comparons les cinq premières classes, pour la 3e personne du singulier, au présent de l'indicatif (en supposant que le substitut du suffixe *l* est ***ti**p*) :

khad + *ś**a**p* + ***ti**p* = *khad* + *a* + *ti* = *khadati* ;
ad + *luk* de *ś**a**p* + ***ti**p* = *ad* + Ø + *ti* = *ad* + *ti* = *atti* ;
hu + *ślu* de *ś**a**p* + ***ti**p* = *hu* + Ø + *ti* = *juho* + *ti* = *juhoti* (le *ślu* provoque aussi un redoublement de la racine) ;
div + *śyan* + ***ti**p* = *div* + *ya* + *ti* = *divyati* ;
su + *śnu* + ***ti**p* = *su* + *no* + *ti* = *sunoti*, etc.

---

[22] P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit, op. cit.*, p. 20.
[23] M. D. PANDIT, *op. cit.*, p. 146-151.
[24] P. S. FILLIOZAT, *Grammaire Sanskrite Pâninéenne, op. cit.*, p. 107.

On voit que pour la deuxième et la troisième classe, le *luk* et le *ślu* provoquent tous les deux une *annulation* du *śap*.

Pāṇini aurait très bien pu considérer uniquement deux classes verbales : celles qui ont un affixe modificateur, et celles qui n'en ont pas. Mais il était plus logique d'adopter un modèle général, comme il l'a fait : le modificateur *ś**a**p* est présent pour chaque racine. Dans certains cas, il se trouve *annulé*, cette *annulation* entraînant parfois des transformations auxiliaires.

B. Dans certains procédés techniques

Un des procédés techniques les plus utilisés par Pāṇini est celui des marqueurs[25]. Nous allons en présenter deux catégories :

1) Première catégorie : celle des sons « *it* ». Un son *it* n'a aucune signification sémantique. Ce n'est qu'un marqueur. Voici quelques exemples simples :

a) L'affixe optionnel *k**ya**c* ou $^{k}ya^{c}$, au sens de « désirer pour soi » (*k* et *c* sont les deux marqueurs)[26].
Voici une phrase[27] : *ātmanaḥ* (pour lui-même) *putram* (un fils) *icchati* (il désire).
Pāṇini propose de remplacer « *ātmanaḥ icchati* » par *k**ya**c* :

*putram k**ya**c*

la présence du marqueur *k* entraîne :

- un amuïssement de la 2e désinence dans *putram*, c'est-à-dire du *m* :

*putra k**ya**c*

- le substitut *i* de *a* apparaît :

*putri k**ya**c*

le marqueur *k* disparaît :

*putri **ya**c*

la présence du marqueur *c* entraîne :

- la nouvelle base se conjugue comme une racine de la première classe :

*putri **ya**c ti*

le marqueur *c* disparaît :

putri ya ti

Conclusion : *ātmanaḥ putram icchati* peut être remplacé par *putriyati.*

---

[25] P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit, op. cit.*, p. 79 : « Dans l'occident moderne la formalisation d'un langage technique se fait principalement à l'aide de signes visuels, à travers l'écrit, les graphiques, comme on en juge par le modèle consacré des mathématiques. Pāṇini a imaginé un système ingénieux de marqueurs des éléments grammaticaux, pour signaler les propriétés et les opérations qui s'y attachent. Tous ces marqueurs sont auditifs et appartiennent à la matière de la parole prononcée. »
[26] P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit, op. cit.*, p. 80 : « Dans les translittérations modernes du texte de Pāṇini on recourt à un artifice typographique pour faire reconnaître un marqueur qui n'est pas partie intégrante du morphème, par exemple en l'écrivant en exposant. »
[27] P. S. FILLIOZAT, *Grammaire sanskrite pâninéenne*, *op. cit.*, p. 129.

b) L'affixe optionnel *k**ya**ṅ*, au sens de « se comporter comme » (*k* et *ṅ* sont les deux marqueurs).
Voici une phrase[28] : *śiśur* (un enfant) *ivācarati* (se comporte comme) *vṛddhaḥ* (le vieillard).
Pāṇini propose de remplacer « *ivācarati* » par *k**ya**ṅ*. On obtient :

*śiśur k**ya**ṅ vṛddhaḥ*

la présence du marqueur *k* entraîne :

- un amuïssement de la 2e désinence, donc du *r* de *śiśur* :

*śiśu k**ya**ṅ vṛddhaḥ*

- un allongement du *u* :

*śiśū k**ya**ṅ vṛddhaḥ*

le marqueur *k* disparaît :

*śiśū **ya**ṅ vṛddaḥ*

la présence du marqueur *ṅ* entraîne :

- le substitut *ātmanepada* du suffixe *l* apparaît :

*śiśū **ya**ṅ te vṛddhaḥ*

le marqueur *n* disparaît :

śiśū ya te vṛddhaḥ

Conclusion : *śiśur ivācarati vṛddhaḥ* peut être remplacé par *śiśūyate vṛddhaḥ.*

Il existe beaucoup d'autres sons « *it* », mais le but ici n'est pas de les citer tous. L'idée d'avoir créé ce système de marqueurs qui *s'annulent* après avoir rempli leur fonction requiert un esprit logique très mûr. C'était véritablement une idée géniale.

M. D. Pandit[29] fait remarquer que l'idée d'utiliser des sons comme marqueurs, ou symboles, est très ancienne en Inde, et est sans doute pré-pâninéenne. En effet, il existe un dictionnaire de sons (*ekākṣarakośa*) qui apparemment ne semblent avoir aucune signification, mais qui en fait en ont une, et parfois même plusieurs : *om, am, kam, jam, hrām, hrīm,* etc.

2) Deuxième catégorie : les *pratyāhāra*. Comme nous l'avons déjà dit, les descriptions chez Pāṇini sont toujours les plus concises possibles. Ainsi, pour décrire les 48 phonèmes du sanskrit, il a créé 14 groupes[30], répondant à la règle suivante : un phonème joint à un marqueur désigne l'ensemble de tous les phonèmes compris entre lui-même et le marqueur. Donc le marqueur disparaît.

---

[28] P. S. FILLIOZAT, *Grammaire Sanskrite pâninéenne, op. cit.*, p. 130.
[29] M. D. PANDIT, *Reflection on Pāṇinian zero,* Paper read at the Seminar on śūnya, organised by Indian National Science Academy, New-Delhi, 12-14 feb. 1997.
[30] P. S. FILLIOZAT, *ibid.*, p. 4 : « La pensée mythique s'est appliquée de plus à la personne même de Pāṇini et le présente non comme auteur, mais comme premier récipiendaire de son alphabet qui ne serait autre que les sons produits par le petit tambour (ḍhakkā) que le dieu Naṭarāja fait résonner lors de sa danse. Les quatorze groupes qu'ils constituent ont été appelés sūtra et l'ensemble est désigné sous le nom de Māheśvarasūtra "formules reçues de Māheśvara". »

Voici les 14 groupes :

a i u ***ṇ***
ṛ ḷ ***k***
e o ***ṅ***
ai au ***c***
ha ya va ra ***ṭ***
la ***ṇ***
ña ma ṅa ṇa na ***m***
jha bha ***ñ***
gha ḍha dha ***ṣ***
ja ba ga ḍa da ***ś***
kha pha cha ṭha tha ca ṭa ta ***v***
ka pa ***y***
śa ṣa sa ***r***
ha ***l***

Par ce procédé, *a**k*** désigne l'ensemble des voyelles brèves, *a**c*** l'ensemble des voyelles, *ya**ṇ*** l'ensemble des semi-voyelles, *jha**ś*** les occlusives sonores, etc.

C. Dans l'organisation même des *sūtra*

Une autre technique abondamment utilisée par Pāṇini est celle de l'ellipse, ou *anuvṛtti* en sanskrit (*anu* = ensuite, de même, *VṚT-* se produire, être). Le principe est le suivant : si deux *sūtra* ont des mots, des conditions, des catégories en commun entre eux, alors le deuxième *sūtra* ne redit pas ce qui est en commun. Comme exemple[31], prenons les sept *sūtra* qui définissent les sons « *it* » dont nous avons parlé auparavant :

- *upadeśe ac anunāsika it*
- *hal antyam*
- *na vibhaktau tusmāḥ*
- *ādir ñiṭuḍavaḥ*
- *ṣaḥ pratyayasya*
- *caṭū*
- *laśakvataddhite*

En écrivant tout, c'est-à-dire en « développant », on obtient :

- *upadeśe ac anunāsika it*
- *upadeśe hal antyam it*
- *upadeśe na vibhaktau tusmā it*
- *upadeśe ādir ñiṭuḍavaḥ it*

[31] M. D. PANDIT, *Reflection on Pāṇinian zero, op. cit.*

- *upadeśe ādiḥ ṣaḥ pratyayasya it*
- *upadeśe ādiḥ caṭū pratyayasya it*
- *upadeśe ādiḥ laśakvataddhite pratyayasya it*

On peut « factoriser » :

upadeśe (ac anunāsikaḥ + hal antyam + na vibhaktau tusmāḥ + ādiḥ (ñiṭuḍavaḥ + (ṣaḥ + caṭū + laśakvataddhite) pratyayasya)) it.

Cette technique est extrêmement employée chez Pāṇini : dans le chapitre 5, il fait une ellipse de *tac* sur 22 *sūtra*, dans le chapitre 3 une ellipse de *dhātuḥ* sur 541 *sūtra*, et une ellipse de *prātipadikā* sur 1190 *sūtra*, c'est-à-dire deux chapitres complets[32] !

Pour conclure, on peut dire que le concept du « zéro » chez Pāṇini présente trois aspects :
1. Le zéro « linguistique », ou le « degré zéro ». Il peut être comparé au zéro mathématique qui est mis pour indiquer une *place vide* dans un système de *position* (par exemple, 105 en comparaison avec 125, comme *ad* + Ø + *ti* en comparaison avec *khad* + *a* + *ti*).
2. Le zéro « extra-linguistique », ou encore le système des marqueurs. Leur présence ou leur absence implique différentes fonctions grammaticales, et eux-mêmes *disparaissent*.
3. L'ellipse, avec laquelle des passages, *qui existent,* se trouvent *annulés*, dans le sens où ils ne sont pas répétés.

Ainsi, le zéro chez Pāṇini apparaît comme un moyen technique qui fait partie de l'élaboration du système lui-même : il représente une « quantité » qui existait et qui a été annulée. **Il peut toujours être mis en parallèle ou en comparaison avec une « quantité » qui n'est pas égale à zéro dans d'autres cas.** C'est donc bien plus qu'un concept intellectuel : c'est un outil avec lequel on peut travailler.

III. LE ZÉRO ET SON SYMBOLE CHEZ PIṄGALA

Il y a un autre texte d'importance capitale dans l'histoire du zéro : le *Chandaḥsūtra* de Piṅgala (entre 400 et 200 avant J.-C.). Ce texte mentionne, en effet, pour la première fois, le zéro (*śūnya*) et son symbole. S. R. Sarma[33] a réexaminé ce texte, et a exposé les résultats suivants : on sait que les mètres, en poésie sanskrite, sont constitués des différents arrangements de deux sortes de syllabes : les syllabes longues (*guru* ou *g*), les syllabes brèves (*laghu* ou *l*). Piṅgala propose une méthode rédigée en quatre *sūtra* très brefs (*Chandaḥsūtra*, 8, 28 à 31), permettant de détermi-

[32] M. D. PANDIT, *Reflection on Pāṇinian zero, op. cit.*
[33] S. R. SARMA, *Sunya in Pingala's Chandahsutra*, INSA-INGCA Seminar on Sunya, New-Delhi, 12-14 february 1997.

ner le nombre de mots de n syllabes pouvant être écrits avec *g* ou *l*, les répétitions étant admises (on sait bien que c'est 2^n). Voici les quatre *sūtra* : *dvir ardhe / rūpe śūnyam / dviḥ śūnye / tāvad ardhe tad guṇitam,* et une traduction détaillée :

Ecrire n. Diviser par 2 à chaque fois, jusqu'à la fin. Quand le nombre est divisible par 2, écrire 2 dans une colonne à côté (*dviḥ ardhe*). Quand le nombre n'est pas divisible par 2, soustraire 1 et écrire 0 dans la colonne à côté (*rūpe śūnyam*). On s'arrête quand on obtient 0 dans la première colonne. On examine ensuite la colonne de droite, que l'on peut intituler colonne des « marqueurs », en partant du dernier « marqueur » obtenu. On écrit 1. Si le « marqueur » était 0, on multiplie par deux (*dviḥ śūnye*), si le « marqueur » était 2 on élève au carré (*tāvad ardhe tad guṇitam*).

Exemple : prenons le mètre qui a 6 syllabes dans chaque *pāda* (on sait que la réponse est 2^6 ou 64). Regardons le procédé de Piṅgala :

$$\begin{array}{cccc}
A & & B & C \\
 & & \text{marqueurs} & \\
6 & & & \\
\downarrow & & & \\
3 & \rightarrow & 2 & 64 \\
\downarrow & & & \uparrow \\
2 & \rightarrow & 0 & 8 \\
\downarrow & & & \uparrow \\
1 & \rightarrow & 2 & 4 \\
\downarrow & & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & 0 & 2 \\
 & & & \uparrow \\
\text{arrêt} & & & \text{départ} : 1
\end{array}$$

Pour calculer, on part de toujours de 1 ; on double quand le marqueur est 0 et on élève au carré quand le marqueur est 2. On peut constater que Piṅgala utilisait les symboles 2 et 0 comme « marqueurs » pour codifier les opérations qui étaient à faire : mutiplication par 2, élévation au carré. On peut penser qu'il ne disposait pas les calculs en trois colonnes comme nous l'avons fait ici, mais qu'il se contentait d'écrire les « marqueurs », dans l'ordre.

Le marqueur 0 marque l'absence de division par 2, et le marqueur 2 marque la présence de la division par 2.

Piṅgala utilisait deux marqueurs différents, donc obligatoirement un symbole différent pour chacun d'eux. Le « zéro » de Piṅgala était donc représenté par un symbole, mais on ne sait pas si Piṅgala utilisait aussi ce zéro dans un système de numération de position.

IV. UNE ORIGINE POSSIBLE DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION

Nous allons maintenant revenir sur l'expression des nombres dans les textes védiques. Comme nous l'avons vu, la plupart des nombres de 11 à 99 sont exprimés par des mots composés : par exemple « deux-trente » pour 32. Or, en sanskrit, il y a quatre catégories principales de mots composés : *avyayībhāva, tatpuruṣa, dvandva, bahuvrīhi*. Nous allons nous intéresser à la catégorie *dvandva* (« couple ») puisque le nombre *ekadaśa* (onze) a été défini comme étant la somme *ekaḥ ca daśa ca* (un plus dix). Décomposons *ekadaśa* :

ekadaśa = *ekaḥ* + *daśan*
= *eka* + *ḥ* + *daśa* + *n*
= N + S + N + S
= N + N
= *eka* + *daśa*

(La règle 2.4.71 prescrit l'amuïssement de toutes les désinences nominales dans le composé). On obtient alors une nouvelle base nominale qui peut recevoir une nouvelle désinence finale, c'est-à-dire être déclinée.

Pourquoi *ekaḥ* + *daśan* est-il devenu *ekadaśa* (dans cet ordre) plutôt que *daśa* + *eka* ? Dans la *Grammaire sanskrite pâninéenne* de P. S. Filliozat, on peut lire p. 170 : « Dans un *dvandva* l'ordre des mots n'est pas tout à fait indifférent. Le mot le plus court, un nom en ***i*** ou ***u***, un mot à initiale vocalique et à finale ***a***, etc., prennent la première place (2.2.32-34) ». Il était donc « normal » que *ekaḥ* + *daśan* devienne *ekadaśa,* et que les nombres suivants *dvādaśa, trayodaśa,* etc., soient construits sur le même modèle.

Il y aurait donc deux catégories de noms de nombres : ceux qui sont décomposables en *dvandva* et ceux qui ne le sont pas (rappel : au dessus de cent, les nombres sont exprimés par des phrases, pas par des composés) :

de *eka* à *nava* et *daśa* de 1 à 9 et 10	de *ekadaśa* à *navadaśa* de 11 à 19
viṃśati 20	de *ekaviṃśati* à *navaviṃśati* de 21 à 29
triṃśat 30	de *ekatriṃśat* à *navatriṃśat* de 31 à 39
⋮	⋮
aśīti 80	de *ekāsīti* à *navāsīti* de 81 à 89
navati 90	de *ekanavati* à *ekānnaśata* de 91 à 99

On peut remarquer que tous les mots qui servent de « base » pour la série[34] qui suit (comme 10, 20, 30, etc.) ou de « rang » (comme 100, 1000, etc.) sont exprimés par des mots simples (non composés). **M. D. Pandit a émis l'hypothèse qu'il fallait peut-être les considérer comme des « composés »**[35]. Il existe en effet une sous-catégorie des composés *dvandva* : les composés *ekaśeṣa dvandva* ou « *dvandva* elliptiques ». Exemple :

putraḥ (fils) + *duhitā* (fille) + *au* (désinence du duel)
= *putra* + *duhitṛ* + *au* (amuïssement des désinences nominales)
= *putra* + Ø + *au*
= *putra* + *au*
= *putrau*
= le fils et la fille

Dans les *dvandva* elliptiques, un seul mot reste ; l'autre est *annulé.* D'après ce modèle, on pourrait dire que :

daśa = *eka* + *daśa*
↓
annulé (*dvandva* elliptique)
↓
= 0 + *daśa*

L'expression des nombres devient alors uniforme[36] **:**

daśa = 0 + N_1	*viṃśati* = 0 + N_2
ekadaśa = a + N_1	*ekaviṃśati* = a + N_2
dvādaśa = b + N_1	*dvāviṃśati* = b + N_2, etc.

Ainsi, *tous les nombres de* 10 *à* 99 *deviennent des composés*, et l'idée de les écrire avec **deux chiffres** vient peut-être de cette observation. 0 + *daśa* doit être interprété comme :

0	+	*daśa*
absence d'unité		dans la 1re série à deux chiffres

Les nombres de base comme *daśa, viṃśati,* etc., fonctionneraient ainsi comme des indicateurs commandant le début d'une nouvelle série. Il reste toutefois une difficulté : si l'on suit l'ordre des *mots*, 0 + *daśa* devrait s'écrire 01 en chiffres, de même 2 + *daśa* devrait s'écrire 21, etc. Or, pour éviter les confusions entre les mots et les chiffres, les mathématiciens indiens ont énoncé la convention suivante : *aṅkānām*

[34] Il est évident que *daśa* va avec *ekadaśa, dvādaśa,* etc., et pas avec ... *saptan, aṣṭan, navan.*
[35] M. D. PANDIT, *Mathematics as Known to the Vedic Samhitas*, *op. cit.*, p. 165.
[36] M. D. PANDIT, *Mathematics as Known to the Vedic Samhitas*, *op. cit.*, p. 167.

vāmato gatiḥ, c'est-à-dire, « la lecture des *chiffres* se fait dans le sens contraire ». Cette convention était sans doute transmise *oralement* de maître à élève depuis des temps très reculés, et il est impossible de la dater exactement. Ainsi : 0 + *daśa* (en mots) s'écrit 10 (en chiffres), *dva* + *daśa* (en mots) s'écrit 12 (en chiffres), etc.

DEUXIÈME PARTIE
L'ANCIEN ET LE NOUVEAU SYSTÈME

I. LES CHIFFRES DANS LES INSCRIPTIONS

Dans les sceaux découverts à Mohenjo-Daro, les nombres de 1 à 13 sont écrits à l'aide de bâtons verticaux. Il faut attendre ensuite au moins 2700 ans pour trouver des chiffres dans des inscriptions : les « inscriptions d'Aśoka ».

On peut se poser la question suivante : depuis quand l'écriture existe-t-elle en Inde ? Certains historiens pensent que l'écriture était utilisée à l'époque védique, car deux phrases du RV semblent indiquer l'existence de l'écriture : RV. 10. 62.7 : « *sahasrāṇi me dadāto aṣṭakarṇyaḥ* » où il est question de « 1000 vaches qui avaient le nombre 8 écrit sur les oreilles », et RV. 10. 34. 2 : « *ākṣasyāhamekaparasya* » où un joueur se lamente car il a lancé le dé sur le 1 du jeu de *causar,* et a perdu sa fidèle épouse en conséquence. D'autres historiens pensent que l'écriture a été importée en Inde par le nord-ouest, vers 800 av. J.-C. Des théories ont même été mises en place pour donner une origine sémitique à l'écriture *brāhmī*, écriture la plus couramment utilisée dans les inscriptions d'Aśoka et dans l'empire Maurya. Mais, actuellement, cette hypothèse est en passe d'être oubliée. Dans un article assez récent, Subhash Kak aurait mis en évidence des liens entre l'écriture *Sarasvatī,* c'est-à-dire l'écriture de la civilisation de la vallée de l'Indus, et l'écriture *Brāhmī*[37]. L'écriture *brāhmī* aurait donc une origine purement indienne.

A. Les chiffres *Kharoṣṭhī*

Une autre écriture était utilisée dans l'Inde des Mauryas : l'écriture *Kharoṣṭhī*. Elle a été utilisée dans l'extrême nord-ouest de l'Inde, du Ve siècle avant J.-C. au IIIe siècle après J.-C. Elle est dérivée de l'araméen, et s'écrit donc de droite à gauche. Elle se serait vraisemblablement adaptée aux sons de l'Indo-Aryen sous l'influence de l'écriture *Brāhmī.*

[37] S. KAK, Evolution of early writing in India, *Indian Journal of History of Science*, 29 (3), 1994, p. 381 : « Both Sarasvati and Brahmi use cunjuncts where signs are combined to represent compound vowels. The core set of most frequent Sarasvati signs seems to have survived without much change in shape into Brahmi where it corresponds to the most frequent sound of Sanskrit. The writing of numerals in Sarasvati, especially the signs for 5 and 10, appears to have carried over to Brahmi. »

Dans les inscriptions les plus anciennes, celles d’Aśoka, il n’y avait que quatre chiffres :

1 2 4 5

Dans les inscriptions plus tardives (Shaka, Parthes, Kushana, du I[er] siècle av. J.-C. au II[e] siècle apr. J.-C.), des symboles pour les nombres 1, 4, 10, 20 et 100 apparaissent :

1 4 10 20 100

On peut remarquer que le 4 s’écrit X au lieu de ////. Il est probable que ce symbole nouveau pour 4 et le symbole pour 10 sont nés en Inde, pour simplifier l’écriture et aussi pour rendre le système *Kharoṣṭhī* plus proche du système *Brāhmī* déjà très largement utilisé. Les autres nombres s’obtiennent à partir de ces cinq symboles en écrivant de droite à gauche. Voici quelques exemples :

1 2 3 4 5 7 8

10 40 50 200 122 297

Il n’y a aucun symbole pour le zéro.

B. Les chiffres *Brāhmī*

Notre connaissance de ces chiffres remonte à l’époque d’Aśoka (vers 300 av. J.-C.) dont l’empire occupait pratiquement tout le sous-continent. Ces chiffres *Brāhmī* sont considérés comme une invention purement indienne, comme nous l’avons déjà souligné. À l’époque d’Aśoka, on ne trouve des symboles que pour :

4 6 50 200

Ensuite, le système s’est considérablement développé. Il y a vingt signes de base : pour les chiffres de 1 à 9, pour les dizaines de 10 à 90, pour 100 et pour 1000. Les autres nombres sont formés en « combinant » différents symboles de la façon suivante :

• les nombres 200 et 300 sont formés à partir de 100, de même pour 2000 et 3000 :

100 200 300 1000 2000 3000

• pour former les centaines de 400 à 900, il suffit d'attacher les chiffres de 4 à 9 à droite du chiffre 100, de même pour les milliers de 4000 à 9000 :

400	4000
	

On peut donc ainsi, théoriquement, exprimer tous les nombres jusqu'à 99 999. Cependant, le plus grand nombre effectivement trouvé dans des inscriptions est 70 000 (à Nāsik) :  = 1000x70, car  = 70.

Les paléographes ont émis plusieurs théories pour expliquer l'origine des chiffres *Brāhmī.* On peut toutefois remarquer la formation *typiquement indienne*[38] des nombres 200, 300, 2000, et 3000, avec les *mātrā*. En effet, d'après Pāṇini, les voyelles sont classées selon leur durée : on appelle *mātrā* (more) la durée minimum ; est considérée comme *hrasva* (brève) la voyelle d'une more, *dīrgha* (longue) la voyelle de deux mores, *pluta* (protractée) la voyelle de trois mores[39]. Ainsi :

 = *ṣu* -brève-,	 = *śū* -longue -,	 = *ṣū̄* -protractée-
pas de trait	un trait	deux traits

Cette observation permettrait aussi d'éliminer la prétendue dérivation des chiffres *brāhmī* des chiffres hiératiques égyptiens. En effet pour ces derniers, le 100 contient *un* trait, le 200 en contient *deux*, et le 300 *trois*. Ce n'est donc pas du tout le même système. Les inscriptions de cette époque avec des chiffres *brāhmī* ne montrent pas encore l'existence du système décimal de position.

II. LE PROBLÈME DE L'EXPRESSION DES GRANDS NOMBRES

A. Les Bouddhistes

Dans le *Lalitavistara*, texte qui daterait du premier siècle avant J.-C., le *Bodhisattva* est supposé citer les noms des nombres supérieurs à 100 *koṭi*, dans une échelle centésimale (un *koṭi* est égal à 10^7) : il cite 24 termes, en prenant 1 *koṭi* comme terme initial. Le dernier terme est donc 10^{53}. Il s'appelle le *tallakṣaṇa.* Le *Bodhisattva* ajoute ensuite qu'il existe au-dessus de cette numération encore huit autres numérations[40]. Considérant que chacune de ces numérations aurait 24 termes en progression géométrique de raison 100, G. Ifrah[41] est ainsi arrivé à la conclusion que le dernier terme obtenu serait $\mathbf{10^{421}}$. Son calcul est juste, mais, malheureusement, ni les éditions du texte en sanskrit, ni la traduction en français du *Lalitavistara* par

[38] S. L. GOKHALE, *Indian Numerals,* Deccan College Building Centenary and Silver Jubilee Series nº 43, Poona, 1966, p. 3.
[39] P. S. FILLIOZAT, *Grammaire sanskrite pâninéenne, op. cit.,* p. 45.
[40] F. WOEPCKE cité par G. IFRAH, *Histoire Universelle des Chiffres, op. cit.*, t. I, p. 944.
[41] G. IFRAH, *op. cit.,* p. 944.

P. E. de Foucaux[42] ne disent explicitement que les numérations au-dessus du *tallakṣaṇa* contiennent chacune 24 termes[43]... Voici un extrait de la traduction :

> « à l'aide de cette numération appelée Tallakchana, on pourrait dissoudre le Mêrou, le roi des montagnes, en le prenant pour sujet de calcul. Au-dessus de celle-ci est la numération appelée Dhvadjâgravatî ; à l'aide de cette numération, on pourrait dissoudre tous les sables de la rivière Gangâ, en les prenant pour sujet de calcul. Encore au-dessus de celle-ci est la numération appelée Dhvadjâgranicîmani. Et encore au-dessus de celle-ci la numération appelée Vâhanapradjnapti. Et encore au-dessus de celle-ci la numération appelée Ingga. Et encore au-dessus de celle-ci la numération appelée Kouroutâvi. Et encore au-dessus de celle-ci la numération appelée Sarvanikchêpâ, à l'aide de laquelle on pourrait dissoudre les sables de dix rivières Gangâs, en les prenant pour sujet de calcul. Et encore au-dessus de celle-ci est la numération appelée Agrasârâ, à l'aide de laquelle on pourrait dissoudre les sables de cent Kôtis de rivières Gangâs, en les prenant pour sujet de calcul. Et encore au-dessus de celle-ci est la numération dite parvenue à pénétrer les atomes les plus subtils. »

Un peu plus loin dans le livre de G. Ifrah, nous allons nous heurter à un autre type de problème : le Bouddha est supposé, cette fois, donner le nombre des atomes premiers contenus dans « la longueur » d'un *yojana*. Ce nombre est bien, en notation moderne, $4 \times 1000 \times 8 \times 12 \times 7^{10}$. D'après G. Ifrah, le Bouddha aurait **énoncé en toutes lettres**[44] **le résultat de ce calcul : 108 470 495 616 000**. Or, si l'on examine le texte sanskrit, la traduction du nombre effectivement énoncé par le *Bodhisattva* est la suivante[45] : « Dans la masse d'un Yôdjana, il y a d'atomes subtils un Niyouta complet d'Akchôbyas, et trente centaines de mille de Niyoutas de Kôtis, et soixante centaines de Kôtis, et trente-deux Kôtis, et cinq fois dix centaines de mille et douze mille. » On obtient :

$$10^{11} \times 10^{17} + 30 \times 100 \times 1000 \times 10^{11} \times 10^{7} + 60 \times 100 \times 10^{7} + 32 \times 10^{7} + 5 \times 10 \times 100 \times 1000 + 12 \times 1000,$$

ou encore $10^{28} + 3 \times 10^{24} + 6 \times 10^{10} + 32 \times 10^{7} + 5 \times 10^{6} + 12 \times 10^{3}$.

Ce n'est pas le nombre 108 470 495 616 000. Il y a donc une incohérence. Est-ce une erreur de copie dans les manuscrits ? Y a-t-il eu des confusions au niveau des noms des puissances de 10 ? Il est difficile de répondre ici à cette question...

Pour pouvoir exprimer correctement des grands nombres en toutes lettres, il faudrait d'abord que la nomenclature des puissances de 10 soit invariable et connue de tous. Or dans l'Inde ancienne, c'était apparemment loin d'être le cas. Pour s'en convaincre il suffit de regarder les tableaux comparatifs établis par Takao Hayashi[46] : *samudra* serait égal à 10^9 dans certains textes et 10^{10} dans d'autres, *ayuta* vaudrait 10^4, 10^6 ou 10^9 selon les cas, etc.

---

42 *Le Lalitavistara*, traduit du sanscrit par P. E. de Foucaux, Les Deux Océans, Paris.
43 *Le Lalitavistara*, *op. cit.*, p. 133.
44 G. IFRAH, *op. cit.*, p. 946.
45 *Le Lalitavistara*, *op. cit.*, p. 134.
46 T. HAYASHI, *The Bakshali Manuscript*, *op. cit.*, p. 66-70.

B. Les Jaïns

Nous allons nous intéresser maintenant à un autre texte : l'*Anuyogadvāra-sūtra*. Il appartient au canon jaïn. Le Jaïnisme est une religion née en Inde au VIe siècle avant J.-C. Elle est moins connue que le Bouddhisme car elle ne s'est pas propagée hors de l'Inde.

Les Jaïns avaient une vision incroyablement complexe de l'univers, qui, d'après eux, était composé de trois grandes parties : le monde inférieur ou les enfers, le monde médian constitué d'une succession « d'îles continents » en forme d'anneaux concentriques, et enfin le monde supérieur où les âmes libérées résident. Les Jaïns ont entrepris de donner les dimensions de cet univers, dans l'espace et dans le temps, et ont été amenés ainsi à utiliser des nombres absolument gigantesques. Vers le premier siècle de notre ère, ils se sont séparés définitivement en deux groupes en raison de désaccords sur certains points de doctrine : les *Śvetāmbara* (vêtus de blanc) et les *Digambara* (vêtus de ciel). Leurs textes diffèrent donc, ainsi que les valeurs numériques qui y sont incluses. Par exemple, l'unité de temps appelée *nayuta* est équivalente à $8\ 400\ 000^{24}$ ans pour les *Śvetāmbara*, et à $8\ 400\ 000^{4} \times 84^{2}$ ans pour les *Digambara*.

D'après B. B. Datta et A. N. Singh[47], l'*Anuyogadvāra-sūtra* est un texte jaïn composé avant le début de notre ère, dans lequel le nombre total d'êtres humains dans le monde serait mentionné de la façon suivante : « un nombre qui, s'il est exprimé à l'aide des termes *koṭi-koṭi*, etc., occupe 29 places, ou bien est plus grand qu'un nombre occupant 24 places et plus petit qu'un nombre occupant 32 places, ou bien c'est le sixième carré (de 2) multiplié par le cinquième carré (c'est-à-dire $2^{64} \times 2^{32}$), ou bien c'est un nombre qui peut être divisé (par deux) 96 fois ». C'est donc le nombre 2^{96} ou, environ, $7{,}9228 \times 10^{28}$. Il occupe bien « 29 places ».

D'après Datta et Singh, ce texte serait le premier dans lequel le mot « place » apparaîtrait[48] (29 places ou « *egūṇatīsaṃ thāṇāi* » en prakrit). **Si l'*Anuyogadvāra-sūtra* est bien daté du Ier siècle avant J.-C., alors le système de position était connu des Jaïns avant notre ère.**

Mais, comme pour tout dans l'Inde ancienne, la religion *jaina* fut dans les premiers temps l'objet d'une tradition orale. Les enseignements de Mahāvīra furent donc confiés à la mémoire de ses disciples et transmis oralement pendant plusieurs siècles. Certains textes furent oubliés, en partie ou dans leur totalité car ils n'avaient pas fait l'objet d'un apprentissage rigoureux et systématique comme pour les Védas. Au milieu du Ve siècle de notre ère, les *Śvetāmbara* décidèrent de rassembler et de mettre par écrit ce qui restait dans les mémoires. La date avancée par Datta et Singh

---

[47] B. B. DATTA and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*, Part I, Asia Publishing House, Bombay, 1935, p. 12.
[48] B. B. DATTA and SINGH, *ibid.*, p. 13.

(I[er] siècle avant J.-C.) est donc hautement probable mais n'est pas une certitude. Le premier texte daté mentionnant explicitement le mot « place » est celui du mathématicien-astronome Āryabhaṭa I (499 après J.-C.[49]) : « *Eka* (unités), *daśa* (dizaines), *śata* (centaines), *sahasra* (milliers), *ayuta* (dix-milliers), *niyuta* (cent milliers), *prayuta* (millions), *koṭi* (dix-millions), *arbuda* (cent millions), et *vṛnda* (milliards) sont, respectivement, **de place en place**, chacun dix fois plus grand que le précédent. »

III. L'APPARITION DU NOUVEAU SYSTÈME

Si G. Ifrah a parfois présenté comme certitude ce qui n'était peut-être qu'une conjecture, il a le mérite d'avoir attiré l'attention sur un autre texte *jaina,* mis par écrit en 458 après J.-C. : le *Lokavibhāgaḥ*. **Ce texte contiendrait en effet la plus ancienne attestation indienne *datée* de la numération décimale de position et du zéro.** Dans le *Lokavibhāgaḥ*, les deux systèmes, « l'ancien » et « le nouveau » se côtoient. Voici quelques exemples :

• Avec « l'ancien système » :

LV. 3.30. *aṣṭaveva sahasrāṇi pañcaśat triśatam punaḥ*
$8 \times 1000 + 50 + 3 \times 100$, c'est-à-dire 8 350

LV. 3.31. *ṣaḍviṃśatisahasrāṇi pañcāgram ca catuḥśatam*
$26 \times 1000 + 5 + 4 \times 100$, c'est-à-dire 26 405

LV. 4.32. *caturaśītiśca lakṣāṇi triṣaṣṭhiśatakotyaḥ*
$84 \times 100\,000 + (63 + 100) \times 10\,000\,000$, c'est-à-dire 1 638 400 000.

• Avec le « nouveau système » :

Il est précisé que les chiffres doivent être pris « dans l'ordre ». **On peut remarquer que les chiffres sont cités de droite à gauche** :

LV. 3.9. *ekamaṣṭau ca pañca dve caikamaṅka krameṇa ca...*
1, 8, 5, 2, 1, dans cet ordre, c'est-à-dire 12 581

LV. 3.42. *pañca śūnyaṃ ca ṣaṭ śūnyaṃ saptaikaṃ nava ca kramāt*
5, 0, 6, 0, 7, 1 et 9, dans cet ordre, c'est-à-dire 9 170 605.

Dans certains cas, au lieu de dire zéro, zéro, zéro, il est dit « trois zéros », etc. Ici, « éther » veut dire zéro :

LV. 4.56. *pañcabhyaḥ khalu śūnyebhyaḥ paraṃ dve sapta cāmbaram*
après cinq zéros, 2, 7, éther, 1, 3 et 1, c'est-à-dire 13 107 200 000

[49] ĀRYABHAṬA, *Gaṇita*, 2.

LV. 9.66. *śūnyatrikāntparam dve ca navāṣṭau dvikṛtirdvikam*
trois zéros et ensuite 2, 9, 8, 2^2, 2, c'est-à-dire 24 892 000.

Avec des soustractions :

LV. 8.31. *triṃśacca pañcavargaḥ syuḥ pañcadaśa daśaiva ca. trīṇi* ***pancona-mekaṃ*** *ca lakṣaṃ pañca ca kevalāḥ*
$30 \times 100\,000$, $5^2 \times 100\,000$, $15 \times 100\,000$, $10 \times 100\,000$, $3 \times 100\,000$;
100 000 – 5 ou 99 995, et 5

LV. 10.163. *ṣoḍaśastrīsahasrāṇi ruponāni*
16×1000 – « la forme », ou, $16 \times 1000 - 1$, c'est-à-dire 15 999.

Avec des fractions :

LV. 6.100. *trikaikaikāṣṭapañcaikaṃ caturaḥ pañcamāṃśakān*
3, 1, 1, 8, 5, 1 et 4/5 donc 158 113 + 4/5.

Avec des racines carrées :

LV. 1.50 et 51. Il faut calculer $\sqrt{\left(238+\frac{3}{19}\right)^2 \times 6+\left(9748+\frac{12}{19}\right)^2}$.
Le résultat est énoncé : 9 766 + 1/19.

Les exemples dans le *Lokavibhāgaḥ* sont extrêmement nombreux, variés, et montrent une grande aisance dans l'expression des nombres. Il y a aussi un autre texte *jaina,* qui doit dater de la même époque, et qui mérite l'attention : le *Tiloya-paṇṇattī.* On y trouve un nombre gigantesque :

TPT. 1. 123-124.
aṭṭharasaṃ aṅtāṇe suṇṇanim doṇavekkadoekkā.
paṇṇavacaukkasattā sagasattā ekkatiyasuṇṇa.
doaṭṭhasuṇṇatiaṇahatiyacchadoṇṇipanacautiṇṇi ya.
ekkacaukkaṇiṃ te aṅka kameṇa pallassa.
18 zéros à la fin, 2, 9, 1, 2, 1, 5, 9, 4, 7, 7, 7, 1, 3, 0, 2, 8, 0, 3, 0, 3, 6, 2, 5, 4, 3, 1, et 4, voici les chiffres, dans l'ordre, pour exprimer le nombre de cheveux contenus dans la cavité *palya*.

En rétablissant l'ordre, on obtient le nombre :

413 452 630 308 203 177 749 512 192 000 000 000 000 000 000.

Il n'est vraiment pas facile d'exprimer un tel nombre dans l'ancien système ! Or les Jaïns maniaient constamment des grands nombres... Dans l'exemple ci-dessus, si on retire un cheveu tous les 100 ans, le nombre d'années mises pour vider la cavité est l'unité de temps appelée *palyopama* ! Les Jaïns avaient une nomenclature pour chaque puissance de 10. Mais peut-être ont-ils remarqué qu'il était inutile de citer à chaque fois les noms de ces puissances de 10… et qu'il suffisait de citer les coefficients multiplicateurs, *dans l'ordre* ?

IV. LA NOTATION DES NOMBRES PAR MÉTONYMIE

Nous avons déjà rencontré les mots *kha* (éther) et *rūpa* (forme) dans des exemples. En Inde, depuis des temps très reculés, certains nombres étaient remplacés par des noms de choses ou de concepts appartenant à la nature, ou à la mythologie. Ces mots « *bhūtasaṃkhyā* » permettaient d'éviter des répétitions dans les strophes, et de pouvoir jouer sur le nombre de syllabes à inclure. Le sanskrit ayant un vocabulaire extrêmement riche, il n'y avait que l'embarras du choix pour sélectionner les mots...

G. Ifrah a appelé « symboles numériques » ces mots qui remplacent les noms de nombre et P. S. Filliozat a critiqué cette appellation en disant que ce procédé relève de la métonymie plutôt que du symbolisme[50]. Les exemples sont extrêmement nombreux. Voici le début d'une table de Rsinus très poétique, donnée par l'astronome Lalla au VII^{e} siècle[51] :

kramārdhajīvāḥ śaranetrābāhavo navābdhivedāḥ kuśiloccayartavaḥ.
khanandanāgāḥ śaraśūnyaśūlinaḥ śarenduviśve nakhabāṇabhūmayaḥ.
traduction :
Les sinus sont dans l'ordre :

flèches (5), yeux (2), bras (2),	225
neuf (9), océans (4), védas (4),	449
terre (1), montagnes (7), saisons (6),	671
ciel (0), constellations (9), serpents (8),	890
flèches (5), vide (0), Shiva (1),	1105
flèches (5), lune (1), mondes (3),	1315
ongles (20), flèches (5), terre (1),	1520
neuf (9), lune (1), sept (7), sol (1),	1719

Il n'est pas question ici de donner une liste exhaustive des mots qui peuvent être utilisés. Une telle liste se trouve dans les pages 54 à 57 du livre de Datta et Singh déjà cité. Voici cependant quelques synonymes du nombre zéro : *śūnya* (vide), *bindu* (point), *chidra*, *randhra* (trou, petit cercle), *kha* (espace vide, cavité), *ākāśa* (espace, ciel, éther), *vyoma* (atmosphère, air), *pūrṇa* (plein, rempli), etc. Ce système a été abondamment utilisé par les mathématiciens à partir du IV^{e} siècle, mais il était connu bien avant. Par exemple, d'après S. R. Sarma[52], Piṅgala utilise 97 fois des *bhūtasaṃkhyā*...

---

[50] P. S. FILLIOZAT, *Bulletin APMEP* n° 398, avril-mai 1995.
[51] B. CHATTERJEE, *Śiṣyadhīvṛddhida Tantra of Lalla*, Part I, Indian National Science Academy, New-Delhi, 1981, p. 29. Ce sont des R×sinus avec R = 3438 et les angles allant de 45' en 45'.
[52] S. R. SARMA, *Sunya in Pingala's Chandahsutra*, INSA-INGCA Seminar on Sunya, New-Delhi, 12-14 february 1997.

D'autres mathématiciens ont mis au point des notations différentes pour les nombres. Par exemple, Āryabhaṭa, dont nous avons déjà parlé, a inventé son propre système de notation alphabétique. Mais celui-ci n'a pas été repris par d'autres mathématiciens. Exprimée dans ce système original, sa table des différences des Rsinus tient en quelques mots !

makhi bhakhi phakhi dhakhi ṇakhi ñakhi
225 224 222 219 215 210
ṅakhi hasjha skaki kiṣga śghaki kidhva
205 199 191 183 174 164
dhlaki kigra hakya dhaki kica
154 143 131 119 106
sga śjha ṅva kla pta pha cha kalārdhajyāḥ
93 79 65 51 37 22 7

En voyant la concision de cette « table » on mesure l'étendue du génie d'Āryabhaṭa. Mais son système était peut-être trop difficile ? En effet, la différence de prononciation entre les « mots » *ṇakhi*, *ñakhi* et *ṅakhi*, dans lesquels se trouvent les nasales des catégories cérébrale, palatale et vélaire, est très subtile.

V. LA NUMÉRATION DE POSITION ET LE ZÉRO DANS LES INSCRIPTIONS

L'utilisation du nouveau système dans des inscriptions avec des chiffres *brāhmī* (ou une écriture dérivée) s'est pratiquée en plusieurs endroits du sous-continent indien à partir du VII^e siècle, et s'est généralisée à partir du IX^e. En dehors de l'Inde, la plus ancienne inscription est située au Cambodge actuel, mais est visiblement importée de l'Inde car on y retrouve des noms de nombres par métonymie, en sanskrit, et l'ère *śaka* :

rasa, dasra, śarai śakendra varṣa
6 2 5 *śaka* année
c'est-à-dire 526 *śaka*, ou 604 ap. J.-C.

Les premières inscriptions comportant un zéro sont célèbres. Elles se trouvent aussi hors de l'Inde :

- inscription khmère à Sambor : 605 *śaka*, ou 683 ap. J.-C.
- inscription malaise à Palembang : 606 *śaka*, ou 684.
- inscription malaise à Banka : 608 *śaka*, ou 686.

En Inde, les deux premières inscriptions contenant le zéro sont datées de 875 et 876 de notre ère, et proviennent des environs de Gwalior. De façon générale, le zéro a été représenté par un point ou par un petit cercle, selon les régions et les époques, mais la représentation sous forme de point est sans doute la plus ancienne.

TROISIÈME PARTIE
ARITHMÉTIQUE

Le terme général pour désigner l'arithmétique est *pāṭīgaṇita*, mais Brāhmagupta, un grand mathématicien-astronome du VIIe siècle, a préféré utiliser le terme « *dhūlīkarma* », c'est-à-dire « travail sur la poussière ». En effet, les indiens faisaient leurs calculs sur des planchettes avec de la craie, ou bien directement sur le sol, avec du sable ou de la poussière. Ils pouvaient ainsi *effacer*.

I. LES GRANDS MATHÉMATICIENS

Des listes donnant les noms des mathématiciens indiens et de leurs œuvres se trouvant facilement dans les ouvrages généraux d'histoire des mathématiques, nous ne parlerons ici que des plus célèbres.

Le premier, et sans doute l'un des plus importants, est le mathématicien-astronome Āryabhaṭa. Dans son œuvre, *Āryabhaṭīya* (499 après J.-C.), on trouve la définition du sinus faisant intervenir une demi-corde, une méthode d'extraction des racines carrées très proche de la méthode moderne, etc. Brāhmagupta (vers 628) est aussi l'un des plus célèbres mathématiciens-astronomes. Son œuvre principale, *Brāhmasphuṭasiddhānta*, contient deux chapitres de mathématiques. Pour la première fois des règles de calcul avec le zéro sont énoncées explicitement[53]. Pour Brāhmagupta, le zéro est défini comme la somme de deux quantités opposées : un bien (*dhana*) et une dette (*ṛṇa*). Mahāvīra, mathématicien jaïn, est connu par son œuvre *Gaṇitasārasaṃgraha* écrite en 850. Il améliore les explications de ses prédécesseurs et surtout les agrémente de nombreux exemples.

Le dernier mathématicien de l'époque médiévale est aussi le plus célèbre et le plus populaire : Bhāskara II ou Bhāskarācārya. Dans ses célèbres traités *Līlāvatī* et *Bījagaṇita*, écrits au XIIe siècle, il dépasse les contributions des mathématiciens antérieurs. Il énonce, par exemple, qu'un nombre différent de zéro divisé par zéro donne un résultat infini[54] ; il précise qu'une quantité infinie est une quantité qui ne change pas si on lui ajoute ou retranche un nombre. Il fait même l'analogie avec l'apparence du dieu Viṣṇu qui ne change, ni quand les êtres sont absorbés au cours de la destruction du monde, ni quand ils émergent au cours de la création du monde. Les traités écrits par Bhāskarācārya ont été par la suite amplement recopiés et commentés... Apparemment, plusieurs centaines de commentaires[55] auraient été composés jusqu'au XIXe siècle !

---

[53] S. R. SARMA, *Sunya : Mathematical aspect*, Kalātattvakoṣa, Indira Gandhi National Centre For The Arts, vol II, 1992, New-Delhi.
[54] BHĀSKARĀCĀRYA, *Bījagaṇitam*, 6.
[55] A. K. BAG, *Mathematics in Ancient and Medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi-Delhi, 1979, p. 33. Il existe 143 copies du manuscrit de Lilavati.

II. Les opérations

En arithmétique, huit opérations étaient considérées comme fondamentales : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation au carré, l'élévation au cube, l'extraction de racine carrée, l'extraction de racine cubique. Il y avait aussi les cinq règles de calcul avec les fractions, la règle de trois, son inverse, les règles de cinq, de sept, de neuf et de onze, et les problèmes de troc et d'échange.

A. Multiplication

Il existe un terme très ancien dans les textes védiques pour désigner la multiplication : *gunana*. Mais une fois le système décimal de position mis en place, de nouveaux termes sont apparus : *hanana, vadha, kṣaya*. Ils veulent tous dire « destruction, élimination ». Il y a une dizaine de méthodes de multiplication.

• *kapāṭa sandhi*

Voici une méthode très ancienne appelée *kapāṭa sandhi* ou la « jonction des portes ». Elle peut se faire dans deux sens, le sens direct et le sens indirect. Le sens indirect était plus populaire, peut-être en raison de la facilité du maniement des retenues.

- sens direct :

On veut calculer 235 × 12. On dispose ainsi :

```
  1 2
2 3 5
```

5 × 2 = 10, on met le 0 à droite, 5 × 1 = 5, 5 + 1 = 6, on efface le 5, on met 6.

```
    1 2                              1 2
2 3 6 0     On décale le 12 :    2 3 6 0
```

3 × 2 = 6, 6 + 6 = 12, on efface le 6, on met 2 et on retient 1, 3 × 1 = 3, 3 + 1 = 4, on efface le 3, on met 4.

```
  1 2                              1 2
2 4 2 0     On décale le 12 :    2 4 2 0
```

2 × 2 = 4, 4 + 4 = 8, on efface le 4, on met 8, 2 × 1 = 2, on efface le 2, on met 2.

On obtient :

```
1 2
2 8 2 0
```

Le nombre 235 a été « tué » et le produit 2820 est « né ».

Un autre exemple : 2875 × 168.

```
    1 6 8            1 6 8          1 6 8            1 6 8
2 8 7 5        2 8 7 8 4 0    2 8 7 8 4 0    2 8 2 6 0 0
                                                1
```

1 6 8	1 6 8	1 6 8	1 6 8
2 8 2 6 0 0	2 4 7 0 0 0	2 4 7 0 0 0	4 8 3 0 0 0
1	1	1	

Le résultat est 483 000.

- sens indirect :

1 2	
2 3 5	$2 \times 2 = 4$, 2 est remplacé par 4 ; $2 \times 1 = 2$, 2 est écrit à gauche.

1 2		1 2
2 4 3 5	On décale le 12 :	2 4 3 5

$3 \times 2 = 6$, 3 est remplacé par 6 ; $3 \times 1 = 3$ et $3 + 4 = 7$, 4 est remplacé par 7.

1 2		1 2
2 7 6 5	On décale le 12 :	2 7 6 5

$5 \times 2 = 10$, 5 est remplacé par 0 ; $5 \times 1 = 5$ et $5 + 1 = 6$ et $6 + 6 = 12$, 6 est remplacé par 2, $7 + 1 = 8$.

	1 2	
On a donc :	2 8 2 0	Le résultat est 2 820.

Un autre exemple : 843×927.

9 2 7	9 2 7	9 2 7	9 2 7
8 4 3	7 4 1 6 4 3	7 4 1 6 4 3	7 7 8 6 8 3

9 2 7	9 2 7
7 7 8 6 8 3	7 8 1 4 6 1

• *sthāna khaṇḍa*

Cette méthode appelée *sthāna khaṇḍa* ou « séparation des places » est mentionnée par tous les mathématiciens du VII^e^ au XII^e^ siècle. Elle était employée quand les calculs étaient faits sur papier.

Pour effectuer 235×12, trois dispositions possibles :

$$\begin{array}{r} 235 \\ \underline{12} \\ 24 \\ 36 \\ \underline{60} \\ 2820 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 12 & 12 & 12 \\ \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} \\ 24 & & 60 \\ \underline{3} & & \underline{6} \\ 28 & & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 235 \quad 235 \\ \underline{1 \qquad\quad 2} \\ 470 \\ \underline{235} \\ 2820 \end{array}$$

• *gomūtrikā*

Cette méthode, citée par Brāhmagupta, s'appelle « *gomūtrikā* » c'est-à-dire « en zig-zag, comme l'urine d'une vache ». Elle ressemble beaucoup à la méthode moderne.

$1223 \times 235 = ?$

$$\begin{array}{llr} 2 & 1\,2\,2\,3 & 2\,4\,4\,6 \\ 3 & 1\,2\,2\,3 & 3\,6\,6\,9 \\ 5 & 1\,2\,2\,3 & 6\,1\,1\,5 \\ \hline & & 2\,8\,7\,4\,0\,5 \end{array}$$

Tous les mathématiciens ont aussi indiqué des méthodes de multiplication basées sur la distributivité, en remplaçant un des facteurs par la somme ou la différence de deux termes bien choisis.

B. Division

La division n'était pas considérée comme une opération difficile. Elle est désignée par des termes comme *bhāgahāra, chedana* qui veulent dire « briser en morceaux », ou *haraṇa* « retirer ».

Diviser 3472 par 15.

3 4 7 2
1 5

34 divisé par 15 donne 2. On met 2 dans la réponse. Il reste 4 ; on remplace 34 par 4.

4 7 2		4 7 2
1 5	On décale le 15 :	1 5

47 divisé par 15 donne 3, on met 3 dans la réponse. Il reste 2 ; on remplace 47 par 2.

2 2		2 2
1 5	On décale le 15 :	1 5

22 divisé par 15 donne 1. On met 1 dans la réponse. Il reste 7 ; on remplace 22 par 7.

7
1 5

La division est terminée. **Le quotient est 231, et le reste 7.**

C. Extraction des racines carrées

Une méthode très proche de la méthode moderne se trouve dans l'*Āryabhaṭiya* (499 après J.-C.). Exemple : trouver la racine carrée de 82 306 289. On sépare le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

• soustraire le plus grand carré parfait (81, racine carrée 9)	$\begin{array}{l} 8\,2'\,3\,0'\,6\,2'\,8\,9 \\ -8\,1 \\ \hline \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et diviser par 2 × la racine obtenue (9 × 2)	$\begin{array}{r\|l} 13 & 18 \\ \cline{2-2} 13 & 0 \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et soustraire le carré du dernier quotient	$\begin{array}{r} 130 \\ -\ \ 0 \\ \hline 130 \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et diviser par 2 × la racine déjà obtenue (90 × 2)	$\begin{array}{r\|l} 1306 & 180 \\ \cline{2-2} 046 & 7 \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et soustraire le carré du dernier quotient	$\begin{array}{r} 462 \\ -49 \\ \hline 413 \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et diviser par 2 × la racine déjà obtenue (907 × 2)	$\begin{array}{r\|l} 4138 & 1814 \\ \cline{2-2} 0510 & 2 \end{array}$
• abaisser le chiffre suivant et soustraire le carré du dernier quotient	$\begin{array}{r} 5109 \\ -\ \ \ 4 \\ \hline 5105 \end{array}$

L’opération est terminée et la racine carrée de 82 306 289 est environ 9 072.

D. La règle de trois

Cette règle s’appelle *trairāśika,* c’est-à-dire la « règle des trois quantités ». Elle a été énoncée pour la première fois dans l’*Āryabhaṭīya*[56], et elle est citée par tous les mathématiciens ensuite. Si une valeur « témoin » (*pramāṇa-rāśi*) donne un certain « résultat » (*phala-rāśi*), alors que va donner la valeur « souhaitée » (*iccha-rāśi*) ?

p = *pramāṇa* ou « référence, témoignage »
ph = *phala* ou « fruit, résultat »
i = *iccha* ou « souhait, demande »

Méthode : il faut multiplier le *phala* par le *iccha* et diviser par le *pramāṇa,* pour obtenir le résultat correspondant au souhait, c’est-à-dire multiplier à droite et diviser à gauche. Les exemples sont extrêmement nombreux dans les textes. En voici deux cités par Pṛthudaka Svāmi (vers 850 après J.-C.), dans son commentaire du *Brāhmasphuṭasiddhānta* de Brāhmagupta.

56 *Āryabhaṭīya, Gaṇita,* 23.

• Une personne fait une donation de 108 vaches en 3 jours. Combien en donnera-t-elle en 1 an et 1 mois ?
$p = 3$, $ph = 108$, $i = 390$ (dans tous ces problèmes, 1 an = 360 jours et 1 mois = 30 jours). Le résultat est donc 108×390 divisé par 3, c'est-à-dire 14 040.

• Une fourmi avance (à la vitesse) de 8 grains d'orge moins 1/5 (de cette quantité) et recule (à la vitesse) de 1/20 de doigt en 3 jours. En combien de temps aura-t-elle progressé de 100 *yojana* ?
8 – 8/5 grains d'orge = 32/5 grains d'orge, 1/20 de doigt en 3 jours donc 1/60 de doigt en 1 jour ; 1 grain d'orge = 1/8 doigt, donc 32/5 grain d'orge = 32/40 doigt = 4/5 doigt, d'où :

$p = 4/5 - 1/60 = 47/60$,

$ph = 1$ jour,

$i = 100$ *yojana* $= 100 \times 8000 \times 4 \times 24$ doigts.

Le résultat est donc $100 \times 8000 \times 4 \times 24 \times 60 / 47$ jours, ou 98 042 553 jours.

CONCLUSION

Si l'on admet que *daśa* est un composé elliptique, alors le fait d'écrire les mots simples de 1 à 9 à l'aide d'un seul chiffre, et les mots composés de 10 à 99 à l'aide de deux chiffres semble naturel, et la langue sanskrite aurait ainsi porté en elle-même le germe de la découverte du système positionnel. D'autre part, chaque puissance de 10, jusqu'à 10^{12} au moins, a reçu en Inde une dénomination particulière depuis les temps les plus reculés. La nomenclature de ces puissances de 10 a changé, certes, selon les époques, les régions et les utilisateurs, mais aucune puissance n'a été vraiment privilégiée. C'était sans doute là une condition importante pour arriver à l'idée du système de position.

Les Jaïns avaient à écrire des grands nombres et il était certainement très contraignant pour eux d'écrire à chaque fois le nom **de chaque puissance de 10**. Peut-être sont-ils arrivés « naturellement » à l'idée de n'écrire que les chiffres, dans l'ordre ? Il ne faut pas oublier que la première attestation du mot « place » est dans un texte jaïn qui est supposé dater du Ier siècle av. J.-C. Mais, dans l'état actuel de nos connaissances, cette date n'est qu'une conjecture, même si elle paraît fort probable...

Ayant mis la grammaire à l'honneur dans la première partie de cet exposé, j'aimerais conclure par une très belle citation[57] du philosophe Bhartṛhari (Ve siècle de notre ère) : « La grammaire est la porte de la délivrance, la médecine des impuretés de la parole. Elle purifie toutes les sciences ; elle projette sa lumière en elles... Elle est la première marche sur l'escalier de la réalisation des pouvoirs. Elle est la voie royale, sans détours, des aspirants à la délivrance. »

[57] P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit, op. cit.*, p. 58.

BIBLIOGRAPHIE

ĀRYABHAṬA, *Āryabhaṭīya*, by K.S. Shukla in collaboration with K.V. Sarma, Indian National Science Academy, New-Delhi, 1976.

A. K. BAG, *Mathematics in Ancient and Medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, Delhi, 1979.

BHĀSKARĀCĀRYA, *Bījagaṇitam*, Chaukhamba Vidyabhavan, Varanasi, 1992 (réimpr.).

B. CHATTERJEE, *Śiṣyadhīvṛddhida Tantra of Lalla*, Part I, Indian National Science Academy, New-Delhi, 1981.

B. DATTA, *Ancient Hindu Geometry. The science of the sulba*, Cosmo Publications, New-Delhi, 1993.

B. DATTA and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*, Part I, Asia Publishing House, Bombay, 1935.

P. S. FILLIOZAT, *Bulletin APMEP* nº 398, avril-mai 1995.

P. S. FILLIOZAT, *Grammaire sanskrite pâninéenne*, coll. Connaissance des Langues, Picard, Paris, 1988.

P. S. FILLIOZAT, *Le Sanskrit*, coll. Que sais-je ?, P.U.F., Paris, 1992.

D. FRAWLEY, *Gods, Sages and Kings. Vedic secrets of ancient civilization*, Motilal Banarsidass Publishers, Delhi, 1991.

S. L. GOKHALE, *Indian Numerals*, Deccan College Building Centenary and Silver Jubilee Series nº 43, Poona, 1966.

T. HAYASHI, *The Bakhshali Manuscript. An ancient Indian mathematical treatise*, Egbert Forster, Groningen, 1995.

G. IFRAH, *Histoire Universelle des Chiffres*, coll. Bouquins, R. Laffont, Paris, 1994.

S. KAK, Evolution of early writing in India, *Indian Journal of History of Science*, 29 (3), 1994.

Le Lalitavistara, traduit du sanskrit par P. E. de Foucaux, Les Deux Océans, Paris.

A. MACDONELL, *A Vedic Grammar for Students*, Oxford University Press, Delhi, 1987 (réimpr.).

G. MAZARS, L'Inde, dans *Le matin des mathématiciens*, Entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Émile Noël, coll. Regards sur la science, Belin, Paris, 1985.

M. D. PANDIT, *Mathematics as Known to the Vedic Samhitas*, Sri Satguru Publications, A division of Indian Books Centre, Delhi, 1993.

M. D. PANDIT, *Reflection on Paninian zero*, Paper read at the Seminar on śūnya, organised by Indian National Science Academy, New-Delhi, feb. 97.

S. R. SARMA, *Śūnya in Piṅgala's Chandahsutra*, INSA-INGCA Seminar on śūnya, New-Delhi, feb. 97.

S. R. SARMA, *Śūnya : Mathematical aspect*, Kalātattvakoṣa, Indira Gandhi National Centre For the Arts, vol. II, 1992.