Aimer faire des maths au lycée 6

I.R.E.M de ROUEN
Bât de maths Av.de Broglie BP138 76821 Mt St Aignan tel.-fax :02-35-14-61-41

Aimer faire des maths au lycée 6

I.R.E.M de ROUEN
Bât de maths Av.de Broglie BP138 76821 Mt St Aignan tel.-fax :02-35-14-61-41

SOMMAIRE

page

1 *Exemples de représentations géométriques suscitées par les équations différentielles.*
Daniel Lecouturier (Rouen)

12 *Carrés magiques.*
Bertrand Fort (Dieppe)

18 *La projection stéréographique.*
Frédéric Vivien (Rouen)

24 *Interprétation de l'action d'une homographie sur la sphère par la projection stéréographique.*
Thierry Hamel (Evreux)

30 *L'inversion.*
Luc Sinègre (Rouen)

38 *Petite réflexion sur les antidéplacements du plan affine.*
Gildas Le Hir (Pont-Audemer)

43 *Images mathématiques en physique.*
Thomas Chenel (Rouen)

66 *La programmation sans débrouillardise.*
Luc Sinègre (Rouen)

Exemples de représentations géométriques suscitées par les équations différentielles

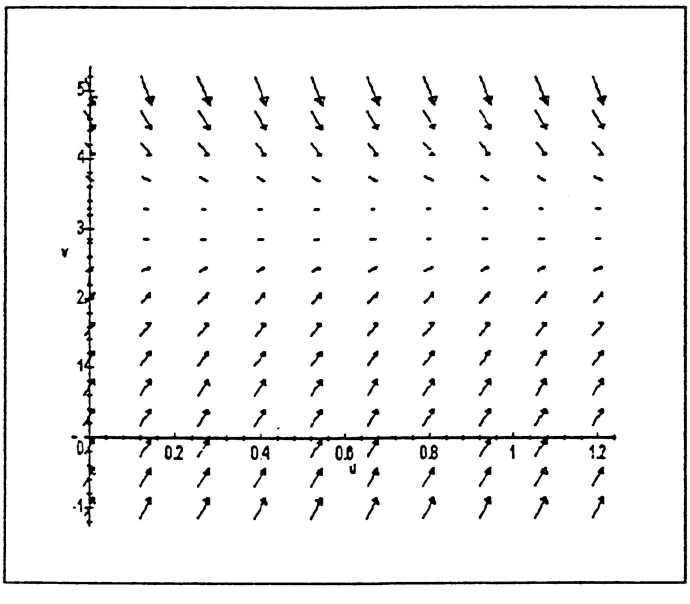
L'objectif de l'exposé est d'illustrer quelques outils de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires, extraits de l'ouvrage rayonnant de V.Arnol'd [1], à l'aide du logiciel Maple. Afin de faire mesurer la simplicité d'accès aux représentations visées, la plupart des instructions sont reproduites à côté des graphiques : elles se résument souvent à une seule ligne !

Avec une seule dimension : chute verticale d'une masse en présence de résistance de l'air.

Notre Ministre (Claude Allègre) ayant attiré l'attention du grand public sur ce problème[1]*, saisissons l'occasion de proposer un modèle simple qui prouve que les mathématiques, même élémentaires, sont utiles pour approfondir la réflexion et éviter d'affirmer, sans risque d'être contredit, n'importe quoi : elles constituent un outil efficace et peu coûteux dans un débat scientifique.*

Une masse m soumise à l'attraction de la pesanteur (d'intensité g supposée constante) se voit opposer une force qui augmente selon sa vitesse v. Sur une base expérimentale, on préfère la loi de Stokes donnant la force de résistance de l'air sous la forme $-k\,v\,|v|$ à l'expression plus simple $-k\,v$ (qui, elle, présente l'avantage pédagogique de déboucher sur une équation différentielle linéaire). La loi fondamentale de la mécanique donne, en orientant l'axe vertical vers le bas : $m\,g - k\,v\,|v| = m\,\frac{dv}{dt}$.

Résoudre l'équation revient à rechercher dans le plan une courbe paramétrée par t telle qu'en tout point (t,v), la tangente soit dirigée par le vecteur $(1, g-\frac{kv|v|}{m})$.



Voici matérialisé le **champ de vecteurs** à l'aide du logiciel Maple :

```
> with(plots): #chargement d'un groupe de commandes graphiques.
> donnees:=g=9.81,k=1,m=1: #données numériques ;le choix de k et m détermine l'unité de temps.
>fieldplot(subs(donnees,[1,g-k/m*v*abs(v)]),u=0..1.2,v=-1..5,grid=[10,15],arrows=slim);
```

La variable t (indépendante) n'intervient qu'implicitement dans l'équation différentielle, comme argument de la variable dépendante v (ou fonction inconnue) et de sa dérivée : de telles équations sont dites **autonomes**. Le champ de vecteurs est alors invariant par les translations selon l'axe des temps.

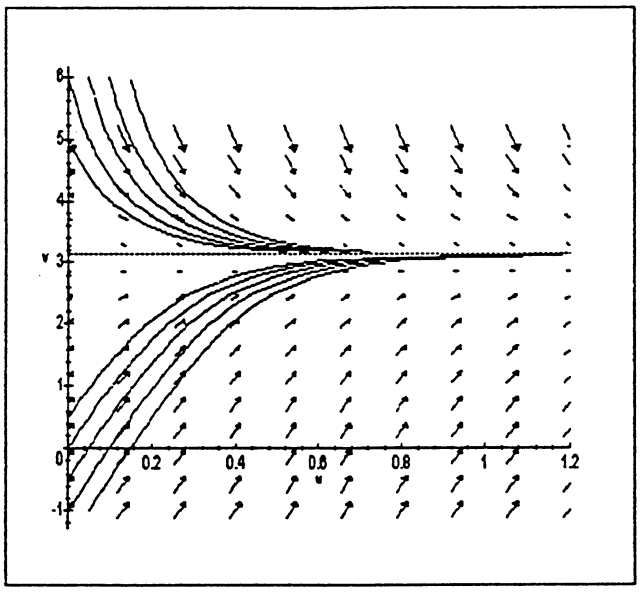
La matérialisation du champ de vecteurs suffit pour esquisser l'allure des courbes des solutions (ou **courbes intégrales**).

[1] Consulter « Le canard enchaîné » du mercredi 3 mars. Les données numériques et la citation utilisées dans la suite sont extraites de l'article « Allègre a les boules... ».

Si on n'y a pas pensé plus tôt, le champ de vecteurs fait apparaître une solution constante : $v=\sqrt{\frac{gm}{k}}$, vitesse vers laquelle il semble amener toute courbe solution, d'où l'appellation de **vitesse limite** v_l pour cette valeur.

Une idée simple permet de résoudre les équations autonomes : échanger les rôles tenus par la variable indépendante et la variable dépendante, c'est à dire étudier la fonction réciproque $v \to t(v)$. Précisément, toute solution $t \to v(t)$, éventuellement restreinte à un intervalle sur lequel elle ne prend pas la valeur v_l, donc où sa dérivée garde un signe constant, définit une bijection réciproque dérivable.[2] Dans les graphiques, l'échange des coordonnées se traduit par une symétrie, aisément réalisable avec un transparent.

L'équation différentielle portant sur la fonction réciproque est : $\frac{dt}{dv} = \frac{\frac{m}{k}}{v_l^2 - v|v|}$, et se réduit à un calcul de primitive, (calculable avec arctan pour $v<0$, et avec des logarithmes par décomposition en éléments simples si $v>0$) : on obtient donc un faisceau de courbes solutions se déduisant de l'une d'entre elles par translation selon l'axe (maintenant vertical) des temps. En outre, ces solutions[3] divergent quand v tend vers v_l, donc ne se raccordent pas à la solution $v=v_l$ (en un temps fini du moins).
Il ne reste qu'à ramener le temps en abscisse par une nouvelle symétrie pour visualiser le flot des solutions.



Les courbes intégrales ne se coupent pas, ce qui traduit graphiquement le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'unicité de la solution à une équation différentielle avec condition initiale.

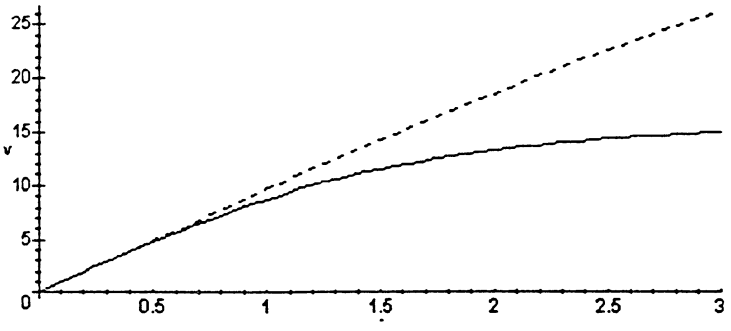
Cette méthode, applicable à toute équation autonome scalaire du premier ordre, est attribuée à Isaac Barrow (1630-1677), professeur de Newton à Cambridge.

Si on mène à leur terme les calculs à partir d'une vitesse nulle à l'instant initial, on obtient : pour $t < 0$, $v = v_l \tan\left(\frac{gt}{v_l}\right)$ (on notera la durée de vie finie de la solution dans le passé : $\frac{\pi v_l}{2g}$) et si $t > 0$, $v = v_l \tanh\left(\frac{gt}{v_l}\right)$.

---

[2] $t \to v(t)$ est un difféomorphisme entre l'intervalle des temps et l'intervalle (image) des vitesses.

[3] $t = \frac{v_l}{2g} \ln\left|\frac{v_l + v}{v_l - v}\right|$ si t=0 à v=0.




```
> d1:=vl=15.7,g=9.81: #balle de tennis
> d2:=vl=48.4,g=9.81: #boule de pétanque
> v:=vl*tanh(g*t/vl):
>
plot([subs(d1,v),subs(d2,v)],t=0..3,linestyle=[1,2],labels=[t,'v']); #trait continu pour la balle de tennis.
```

Voilà de quoi dissuader quiconque de déclarer, au XXI^e siècle, qu'une boule de pétanque et une balle de tennis subissent la même chute[4] !

Avec deux dimensions : le pendule simple.

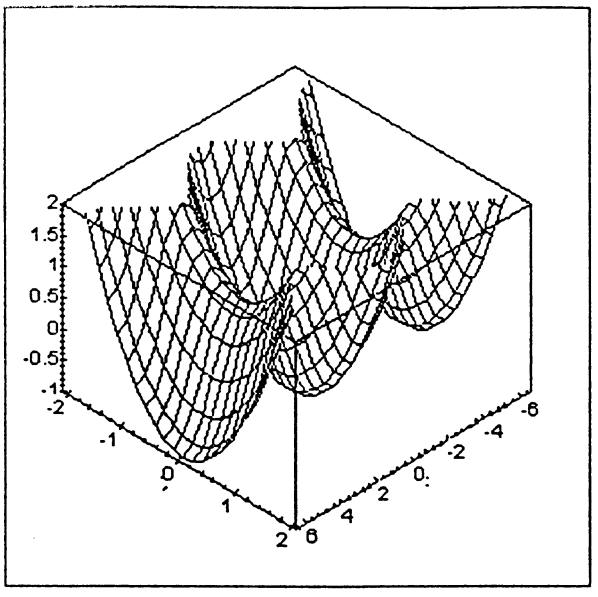
Une masse m suspendue à une distance l d'un point fixe O et qui oscille dans un plan vertical fixe sous l'effet de la pesanteur constitue ce qu'on appelle le pendule simple. La position de la masse est repérée par l'angle θ de déviation de $O\vec{m}$ par rapport à la verticale. Il n'y a qu'un degré de liberté, mais les données initiales qui déterminent le mouvement sont position et vitesse de la masse. L'état du système sera donc repéré par le couple $\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$ et les représentations graphiques mobiliseront bien deux dimensions.

L'équation fondamentale de la mécanique, projetée sur la tangente au cercle centré en O et de rayon l (qui porte la trajectoire du pendule) s'écrit : $-mg\sin(\theta) = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Si θ est une solution de cette équation différentielle du second ordre (autonome et incomplète), alors en multipliant chaque membre par la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, on reconnaît deux dérivées : pour le premier membre, la dérivée de $g\cos(\theta)$, et pour le second membre, $\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. La différence $\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g\cos(\theta)$ est donc constante. A un facteur ml près, on peut y reconnaître l'énergie totale du système (cinétique plus potentielle) qui est conservée en l'absence de frottement.

:

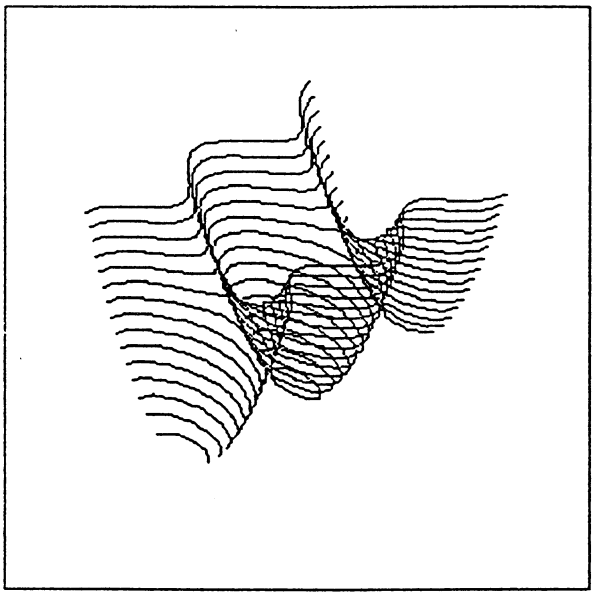
[4] «...,laquelle arrive la première ? L'élève, il va vous dire la boule de pétanque. Eh bien non, elles arrivent ensemble... »



Représentons la surface d'équation $z=E(x,y)$, où l'énergie est $E(x,y) = -g\cos(x) + \frac{l}{2}y^2$,

```
> plot3d(-cos(x)+y^2,x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,view=-1..2,axes=box,color=black);
```

L'intégration précédente a prouvé que les courbes de phase $\left(\theta(t), \frac{d\theta}{dt}(t)\right)$, plongées en dimension 3 par $\left(\theta(t), \frac{d\theta}{dt}(t), E\left(\theta(t), \frac{d\theta}{dt}(t)\right)\right)$, sont situées sur la surface représentative de l'énergie et dans un plan horizontal (l'énergie restant constante tout au long du mouvement).



```
>plot3d(-cos(x)+y^2,x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,style=contour,view=-1..2,color=black);
```

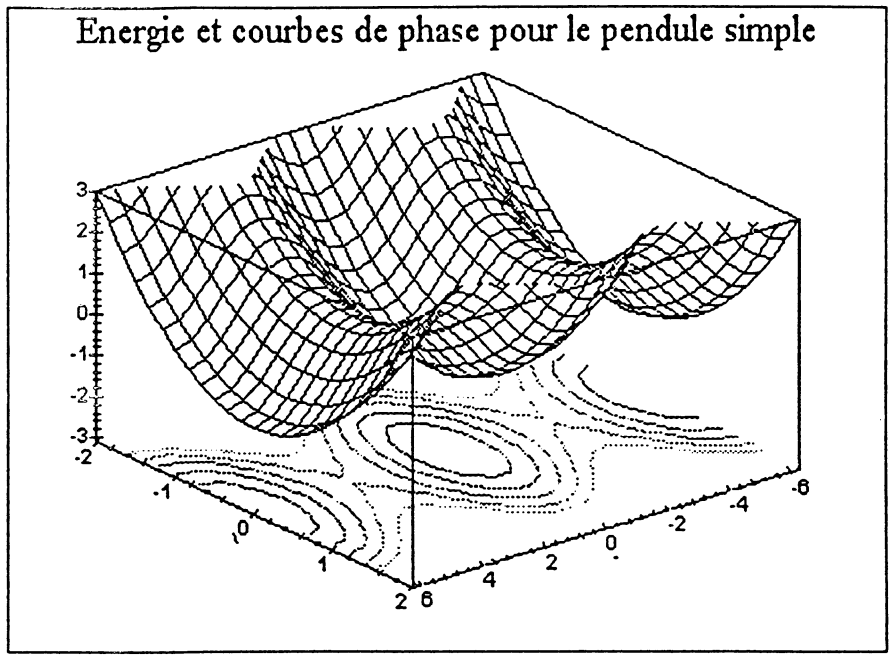
Une analyse plus précise (cf [1] pages 138-149) établit que :

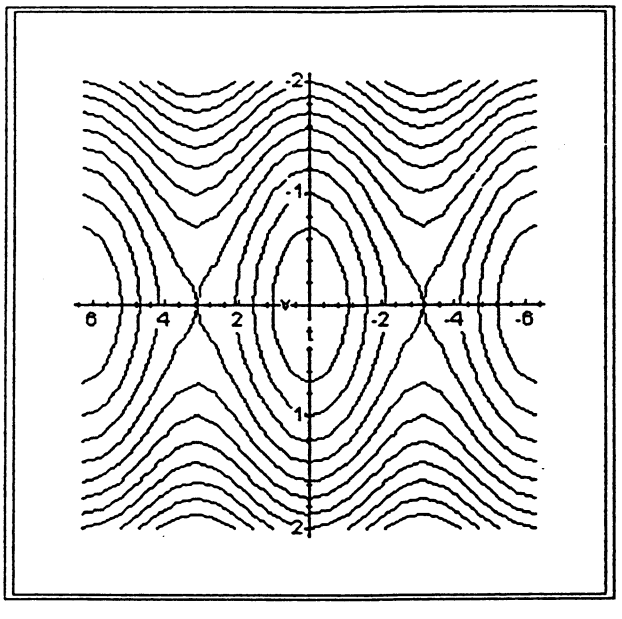
- pour les valeurs de l'énergie qui ne sont pas critiques, c'est à dire lorsque les dérivées partielles de E ne sont pas simultanément nulles, ou encore lorsque le plan tangent à la surface n'est pas horizontal, les courbes de phase sont exactement les courbes fermées qui constituent la section[5] .

- pour les valeurs critiques de l'énergie, la partie de la section joignant un point critique à un point critique (éventuellement le même) constitue une courbe de phase.

La carte des lignes de niveau (figurée ci-dessous en projection) de la surface représentative de l'énergie donne donc l'allure du flot.

[5] Les composantes connexes de la section horizontale de la surface.





A l'origine se trouve un point d'équilibre stable : une petite variation des conditions initiales, c'est à dire de l'énergie, engendre une courbe de phase qui reste au voisinage du point d'équilibre.
Autour de ce point d'équilibre, les courbes fermées correspondent à des oscillations périodiques entre deux amplitudes extrêmes opposées.
La stabilité se traduit sur la surface par une forme de bol. La linéarisation appliquée dans le cas des petites oscillations consiste à résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$. On vérifie aisément que l'énergie associée consiste en un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie « exacte », soit $\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)$. Ainsi, les ellipses obtenues par intégration de l'équation linéarisée approchent d'autant mieux les courbes de phase du pendule simple que l'énergie est proche du minimum absolu.

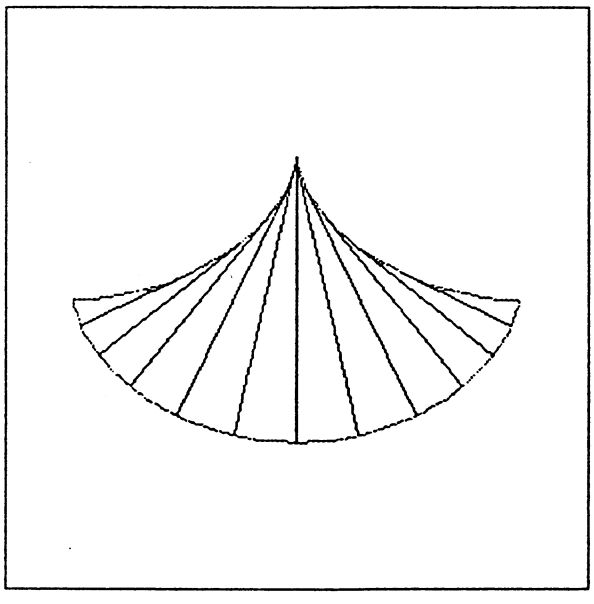
Le point d'équilibre instable (« tête en bas ») peut être théoriquement joint par une oscillation de durée infinie (aussi bien dans le passé que dans le futur) : il suffit que l'énergie soit égale à la valeur critique sans que le pendule soit initialement au repos. A partir de l'équilibre instable, une infime variation de l'énergie amène des courbes de phase qui s'éloignent de cet équilibre (grandes oscillations périodiques, si l'énergie est un peu diminuée, ou rotation toujours dans le même sens si l'énergie est un peu augmentée). La surface représentative de l'énergie présente un col pour cette valeur critique.

On peut exploiter l'énergie pour calculer la période dans le cas des oscillations entre deux amplitudes extrêmes et opposées : l'expression fait intervenir des intégrales elliptiques, et a déjà été

exposée dans [2]. Nous allons plutôt réinvestir les méthodes précédentes pour le pendule cycloïdal dû à Christian Huygens[6] (1629 -1695).

Le 17e siècle a engendré de grands progrès scientifiques, notamment grâce à la mesure du temps. Ainsi, Roemer parvint à mesurer la vitesse de la lumière avec l'ordre de grandeur correct (200 000 km / s) en 1675 [7]. L'artisan le plus génial dans la mise au point des horloges fut Huygens. Parmi de nombreuses réalisations, celle d'un pendule dont la période est indépendante de l'amplitude des oscillations est particulièrement frappante.

Pour cela, il suffit de suspendre une masse à un fil qui s'enroule sur des joues cycloïdales[8].



La masse à l'extrémité décrit alors une développante de cycloïde, et si la longueur du fil est égale à la longueur d'une demi-cycloïde comme celle qui guide les oscillations, la trajectoire est une cycloïde identique au guide. Voici les détails :

$M(u)=(a(1-\cos(u)),a(u-\sin(u)))$ donne une représentation paramétrique de cycloïde, dans un repère où l'axe des x est vertical et orienté vers le bas. Les deux demi-arches (symétriques) sont obtenues en limitant u entre $-\pi$ et π.
La dérivée de l'abscisse curviligne s est : $2a\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|$. La longueur d'une demi-arche est : $l=4a$, et si l'origine est choisie en O, $s=4a(1-\cos(u/2))$.

Pour u compris entre 0 et π, le vecteur tangent unitaire $\vec{\tau}$ a pour coordonnées $(\cos(u/2),\sin(u/2))$.
Le vecteur joignant $M(u)$ à la position $P(u)$ occupée par la masse est $(l-s)\,\vec{\tau}$. Après linéarisation des expressions trigonométriques, $P(u)=(a(3+\cos(u)),a(u+\sin(u)))$.

On constate que $\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{du}{dt}l\cos\left(\frac{u}{2}\right)\vec{\eta}$, où $\vec{\eta}$ est le vecteur normé directement perpendiculaire à $\vec{\tau}$ [9].

En exploitant la conservation de l'énergie au cours du mouvement (sans frottement), la quantité $\frac{ml^2}{8}\left(\frac{du}{dt}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2-\frac{mgl}{4}(3+\cos(u))$ reste constante. Si le pendule est lâché avec une vitesse initiale nulle depuis la position $M(u_0)$, la constante du mouvement est $-\frac{mgl}{4}(3+\cos(u_0))$, d'où dans

---

[6] Newton et la mécanique céleste, J-P Maury, collection découvertes Gallimard (page 32). Collection de poche richement illustrée.

[7] Newton et la mécanique céleste, J-P Maury, collection découvertes Gallimard.(pages 45 à 47)

[8] La cycloïde a été intensivement étudiée au 17e siècle. Sa génération mécanique est simple : c'est la trajectoire d'un point lié à un cercle qui roule sans glisser sur une droite (encore plus concrètement, le mouvement de la valve d'une roue de vélo).

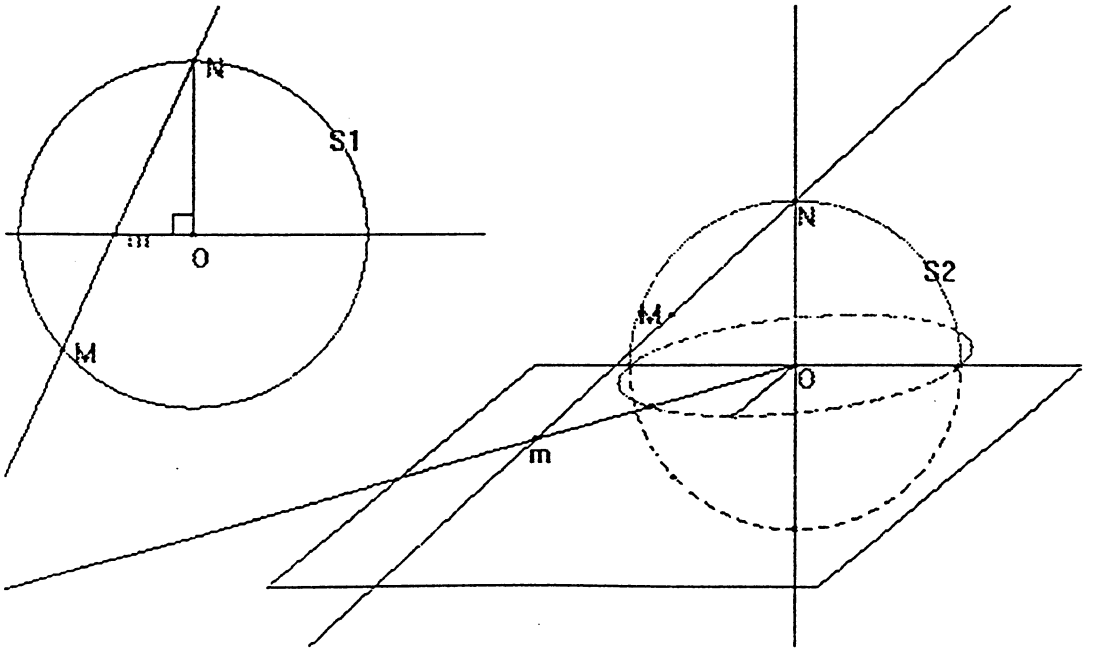
[9] Ceci redonne la propriété générale que la tangente en $M(u)$ à la courbe initiale coïncide avec la normale en $P(u)$ à la développante considérée. Les normales à la développante enveloppent la courbe initiale, qui constitue donc la développée de la développante. $M(u)$ est le centre de courbure de la développante en $P(u)$... Autant de riches propriétés de géométrie différentielle que le logiciel Cabri-Géomètre permet d'illustrer de manière dynamique.

la phase descendante (où u varie de u_0 à 0) : $\frac{du}{dt} = -\frac{2g}{l}\left(\frac{\sqrt{\cos(u)-\cos(u_0)}}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}\right)$. Par les symétries du mouvement, la période T est égale à $4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{u_0}\frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sqrt{\cos(u)-\cos(u_0)}}du$.

Avec le changement de variable $v = \frac{\sin(u/2)}{\sin(u_0/2)}$, on obtient $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$, c'est à dire $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (qui est aussi la période des petites oscillations du pendule simple), indépendamment de l'amplitude initiale u_0.

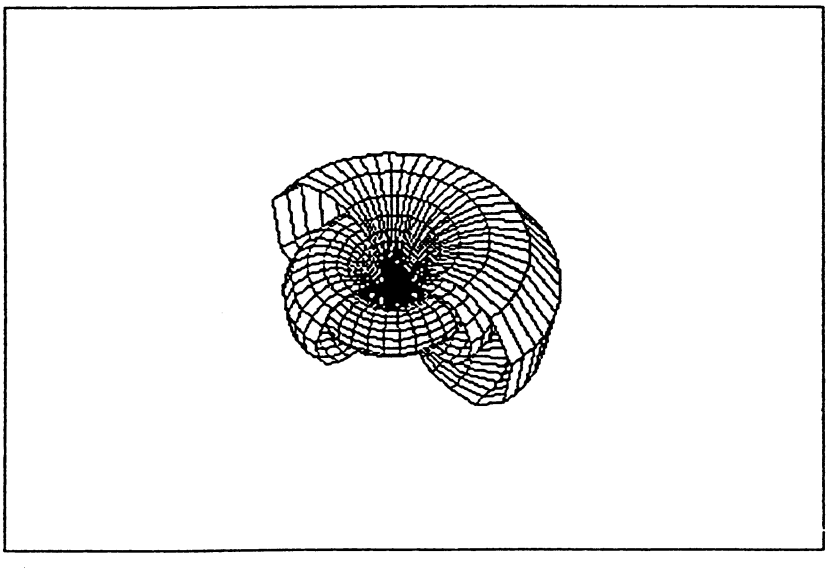
En dimension quatre : couple de pendules simples et tores.

Un couple de pendules simples : $x''(t) = -\varpi_1^2 x''(t), y''(t) = -\varpi_2^2 y(t)$, est représentable par un système de 4 coordonnées dans l'espace des phases $(x(t),x'(t),y(t),y'(t))$.
L'énergie totale du système constitué des deux pendules est conservée :
$\frac{1}{2}\left(x'^2(t) + \varpi_1^2 x^2(t) + y'^2(t) + \varpi_2^2 y^2(t)\right) = C$, ce qui situe les points $(\varpi_1 x, x', \varpi_2 y, y')$ sur une sphère S_3. Cette sphère est représentable comme l'espace usuel à 3 dimensions par une **projection stéréographique**, dont nous rappelons brièvement le principe.
A partir d'un point N (*le pôle nord*) sur S_3, à chaque point M de S_3 distinct de N, on associe le point m situé à l'intersection de la droite (MN) et de l'hyperplan issu de l'origine et normal au vecteur $\overrightarrow{ON}$ (ou, ce qui revient au même à une homothétie de rapport 2 près, l'hyperplan tangent à S_3 au pôle sud, diamétralement opposé au pôle nord). Voici l'illustration en dimension 2 et 3 :



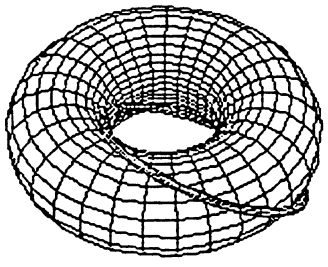
En l'absence de couplage, comme dans le cas très simple que nous envisageons, chaque pendule conserve une énergie constante, qui est donc fraction de l'énergie totale C :
$x'^2(t) + \varpi_1^2 x^2(t) = 2C\cos^2(\alpha), y'^2(t) + \varpi_2^2 y^2(t) = 2C\sin^2(\alpha)$.
A α fixé, les configurations (X_1, X_2, Y_1, Y_2) qui satisfont $X_1^2 + X_2^2 = 2C\cos^2(\alpha)$ sont décrits sous forme paramétrique par $X_1 = \sqrt{2C}\cos(\alpha)\cos(p), X_2 = \sqrt{2C}\cos(\alpha)\sin(p)$. De même en Y. Il ne reste qu'à représenter l'ensemble par projection stéréographique. On détermine les coordonnées (x,y,z) du projeté m d'un point M (X_1,X_2,Y_1,Y_2) à partir du pôle $N(0,0,0,1)$, d'où les instructions :

```
> X[1]:=cos(alpha)*cos(p):
> X[2]:=cos(alpha)*sin(p):
> Y[1]:=sin(alpha)*cos(q):
> Y[2]:=sin(alpha)*sin(q):
> x:=X[1]/(1-Y[2]) :
> y:=X[2]/(1-Y[2]) :
> z:=Y[1]/(1-Y[2]) :
>
tore1:=plot3d(subs(alpha=Pi/6,[x,y,z]),p=0..2*Pi,q=0..2*Pi,scaling=constrained,color=black,grid=[30,3
0]):#tore entier,lorsque le premier pendule dispose de 25% de l'énergie totale.
>
tore2:=plot3d(subs(alpha=Pi/4,[x,y,z]),p=Pi/2..2*Pi,q=0..2*Pi,scaling=constrained,color=black,grid=[3
0,30]):#3/4 de tore,lorsque chaque pendule dispose de 50% de l'énergie totale.
>
tore3:=plot3d(subs(alpha=Pi/3,[x,y,z]),p=Pi/2..3*Pi/2,q=0..2*Pi,scaling=constrained,color=black,grid=
[30,30]):#1/2 tore,lorsque le premier pendule dispose de 75% de l'énergie totale.
> display(tore1,tore2,tore3);#vue d'ensemble
```

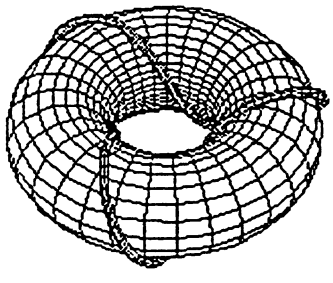


Les surfaces obtenues sont des tores, sauf dans les deux cas particuliers où l'un des pendules est au repos : la représentation est alors l'axe vertical si le premier pendule est au repos, ou un cercle horizontal si le second pendule est au repos. Elles portent les courbes de phase qui sont déterminées à partir des conditions initiales (position et vitesse pour chacun des deux pendules). Celles-ci vont des plus simples (les cercles de Villarceau, lorsque $\varpi_1 = \varpi_2$) aux plus compliquées (courbes denses sur le tore, lorsque les deux pulsations sont incommensurables). En voici deux exemples :

>
display(tore1,tubeplot(subs(alpha=Pi/6+0.03,p=q,[x,y,z]),q=0..2*Pi,scaling=constrained,numpoints=50,tubepoints=8,radius=0.05,color=black));[10]



>
display(tore1,tubeplot(subs(alpha=Pi/6+0.03,p=q/3,[x,y,z]),q=0..6*Pi,scaling=constrained,numpoints=150,tubepoints=8,radius=0.05,color=black));

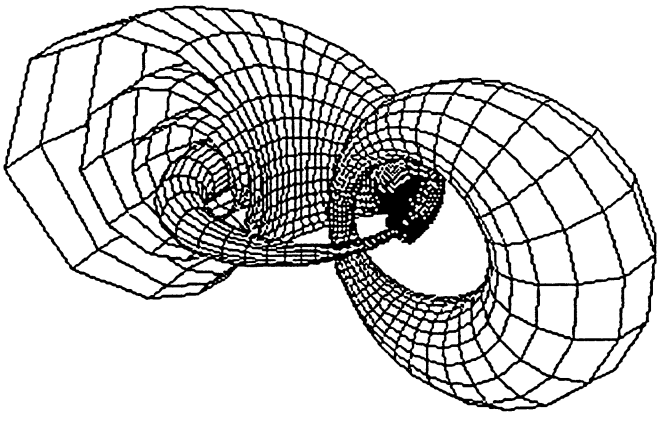


Terminons par quelques vues à partir du nouveau pôle $(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, qui traite plus symétriquement les deux pendules : ainsi, lorsque l'un des deux pendules est au repos, la « surface » dégénère en un cercle (vertical ou horizontal).

> x:=sqrt(2)*X[1]/(sqrt(2)-X[2]-Y[2]):
> y:=(Y[2]-X[2])/(sqrt(2)-X[2]-Y[2]):

[10] L'instruction tubeplot est coûteuse en calcul des parties cachées, et n'est utilisée que pour remédier à un manque de visibilité en cas d'impression. A l'écran ,l'instruction spacecurve, avec une option d'épaisseur (thickness) et de couleur est pleinement satisfaisante. Pour limiter les problèmes de parties cachées, la courbe de phase a été tracée sur un tore un peu plus grand. On pourra consulter l'excellent [6], dont la couverture est ornée d'une courbe s'enroulant autour d'un tore.

```
> z:=sqrt(2)*Y[1]/(sqrt(2)-X[2]-Y[2]):
>
tore4:=plot3d(subs(alpha=0.1,[x,y,z]),p=0..2*Pi,q=0..2*Pi,grid=[50,20],scaling=constrained,c
olor=black):
>
tore5:=plot3d(subs(alpha=1.3,[x,y,z]),p=0..2*Pi,q=0..2*Pi,grid=[20,50],scaling=constrained,c
olor=black):
>
display(tore4,tore5,seq(plot3d(subs(alpha=k*0.1,[x,y,z]),p=Pi/2..3*Pi/2,q=0..2*Pi,grid=[50,20
],scaling=constrained,color=black),k=2..4));
```



Bibliographie

[1] V.Arnol'd, Ordinary differential equations, Springer-Verlag, 1992.
« 272 figures, mais pas une seule formule compliquée. » Si vous trouvez une édition en français aux éditions Mir, vous ferez de substantielles économies. Mais de toute façon, l'ouvrage mérite l'investissement.

[2] V.Arnol'd, Mathematical methods of classical mechanics, 4^{è} édition corrigée, Springer-Verlag, 1997.
Mêmes remarques que pour l'ouvrage précédent, au niveau (plus élevé) près...

[3] B.Fort, Période d'un pendule, Aimer faire des maths au lycée n°4, IREM de Rouen.

[4] L'espace à n dimensions, Maths en scène, APMEP, 1998.
Dans un recueil d'articles écrits pour développer des thèmes de l'exposition Maths 2000, à l'occasion du congrès qui a eu lieu à Rouen, celui-ci étudie en particulier la notion de séparatrice et son lien avec les équilibres instables.

[5] T.Banchoff, La quatrième dimension, Belin-Pour la science, 1996.
Bel ouvrage de vulgarisation offrant de nombreux sujets d'exploration graphique. L'ensemble de la collection est d'ailleurs d'excellente qualité.

[6]R.Corless, Essential Maple, Springer Verlag, 1995.
Livre concis et dense, mais aussi très agréable à lire, offrant au lecteur une compréhension profonde du logiciel.

[7] A.Heck, Introduction to Maple, Springer Verlag.
Régulièrement mis à jour pour suivre les versions du logiciel, ce volumineux ouvrage constitue un livre de référence pour les innombrables possibilités de Maple, enrichi de nombreux exemples d'utilisation très intéressants.

Carrés magiques

Introduction

Une gravure célèbre d'Albrecht Dürer, Melancolia, contient un carré magique dans lequel se trouve la date à laquelle a été faite cette gravure, 1 514. Existe-t-il un moyen de construire de tels carrés, avec les entiers de 1 à 16 dont la somme sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit la même, c'est-à-dire 34 ? Voici ce carré : $\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$

Deux approches sont proposées pour travailler sur les carrés magiques 4x4.

La première propose une activité utilisable en collège. La seconde demande plus de patience et utilise un logiciel sans lequel le travail serait vite rebutant.

Activité 1

Il s'agit de fabriquer tous les carrés possibles $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ de sorte que sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale se trouvent les quatre lettres 'a', 'b', 'c' et 'd'.

Á l'endroit du point noir, on ne peut mettre ni la lettre 'a' qui se trouverait deux fois dans la diagonale principale, ni la lettre 'b' qui se trouverait deux fois dans la deuxième colonne. Il reste deux possibilités, qui sont 'c' et 'd'. Dans ces conditions, un seul carré répond à la question dans chaque cas. Ce sont les carrés $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{bmatrix}$

Avec ces deux carrés on va maintenant en faire un seul en fabriquant des couples dont le premier élément est pris dans le premier carré et le deuxième dans le deuxième carré. Pour clarifier la suite, le deuxième élément sera écrit en lettre grecque. On obtient le carré ci-contre :

$$\begin{bmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta \\ d\gamma & c\delta & b\alpha & a\beta \\ b\delta & a\gamma & d\beta & c\alpha \\ c\beta & d\alpha & a\delta & b\gamma \end{bmatrix}$$

On observe que dans ce carré, la lettre 'a' est associé une fois avec α, une fois avec β, une fois avec γ et une fois avec δ. Et il en est de même pour 'b', 'c' et 'd'. On retrouve donc dans ce carré 16 couples différents. Il ne reste plus, pour fabriquer un carré magique, qu'à associer à ces couples des nombres de 1 à 16.

Pour cela, on opère en 3 temps. On va d'abord écrire les nombres en base 4, de manière à avoir des nombres qui se suivent. On crée donc une bijection de {a, b, c, d} sur {0, 1, 2, 3}, puis une autre de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ sur {0, 1, 2, 3}.

Choisissons par exemple les bijections suivantes

a → 1	$\alpha \rightarrow 2$
b → 2	$\beta \rightarrow 0$
c → 0	$\gamma \rightarrow 3$
d → 3	$\delta \rightarrow 1$

Nous obtenons le carré $\begin{bmatrix} 12 & 20 & 03 & 31 \\ 33 & 01 & 22 & 10 \\ 21 & 13 & 30 & 02 \\ 00 & 32 & 11 & 23 \end{bmatrix}$ qui en base 10 donne $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 13 \\ 15 & 1 & 10 & 4 \\ 9 & 7 & 12 & 2 \\ 0 & 14 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

Il ne reste plus qu'à ajouter 1 à chaque nombre pour obtenir les entiers de 1 à 16.

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 4 & 14 \\ 16 & 2 & 11 & 5 \\ 10 & 8 & 13 & 3 \\ 1 & 15 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Diverses questions se posent maintenant. Combien de carrés magiques différents obtient-on par cette méthode ? Obtient-on tous les carrés magiques possibles faits avec les entiers de 1 à 16 ? En particulier, obtient-on le carré magique de Dürer ?

Pour dénombrer les carrés magiques obtenus, nous allons compter les bijections qui nous ont amenés à leur construction. Il y en a 4! fois 4!, c'est-à-dire 24 x 24. Si on considère que deux carrés sont les mêmes lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une isométrie, il faut alors diviser leur nombre par 8, ce qui fait un total de $\frac{24x24}{8}$, soit 72.

Pour ce qui est du carré de Dürer, les nombres 15 et 14 s'obtiennent, après avoir enlevé 1 puis traduit en base 4, avec les couples 32 et 31. Ce qui ne peut pas se faire avec la méthode proposée. On est donc certain de ne pas obtenir tous les carrés magiques. En revanche, le nombre de carrés différents que l'on peut obtenir montre que dans l'animation d'une classe, il est possible, en imposant les bijections, que chaque élève parte avec son propre carré magique.

Activité 2

Les carrés magiques obtenus précédemment possèdent de nombreuses propriétés que l'on s'efforcera de trouver : la somme 34 s'obtient de bien des manières autres que celles initialement prévues.

Ayons l'idée d'écrire dans le carré magique non pas les entiers de 1 à 16, mais de 0 à 15. La somme sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale devient alors 30. Mais 30 est le double de 15, qui en base 2 s'écrit 1111. Pour fabriquer des carrés magiques on va donc accoler non plus 2 carrés comme précédemment, mais 4 carrés, en imposant à ces carrés d'avoir sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale deux fois le nombre 1, et deux fois le nombre 0. Se sorte qu'en faisant les sommes sur chaque ligne, colonne et diagonale, on trouvera le double de 1111.

Il faut donc faire une recherche exhaustive de ces carrés, en remarquant qu'ils vont par deux en échangeant les 1 et les 0. En voici la liste, pour ceux qui n'ont pas le temps de faire cette recherche.

$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$c_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $d_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $d_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$e_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad f_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En associant, par exemple, les carrés $c_1e_1f_0\,a_1$, on obtient une écriture en base 2 d'un carré magique A qui, en base 10, donne le carré B. Les nombres obtenus dans ce carré sont compris entre 0 et 15, donc il n'y a plus qu'à ajouter 1 à chacun des nombres pour obtenir ce qui était souhaité, soit C.

$$A = \begin{bmatrix} 1101 & 1011 & 0100 & 0010 \\ 0011 & 0110 & 1001 & 1100 \\ 0000 & 0101 & 1010 & 1111 \\ 1110 & 1000 & 0111 & 0001 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 11 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 14 & 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \\ 15 & 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

La suite est proposée sous forme d'activité.

Essayer la même méthode avec $e_1a_0f_1c_1$. Combien peut-on créer de carrés magiques différents avec les lettres a, c, e et f ?

Faire de même avec $a_0e_1c_1d_0$.

Parmi les groupes de lettres que l'on peut associer pour former des carrés magiques, il faut éliminer ceux qui contiennent au moins deux fois la même lettre, car ils donnent au moins deux fois le même nombre. Mais cela ne suffit pas, d'autres sont à éliminer, comme le montre l'exemple de $a_0e_1c_1d_0$.

Une recherche systématique, rapide avec un logiciel approprié, montre que seulement 11 combinaisons de 4 lettres parmi les 8, permettent d'obtenir dans le carré des nombres tous différents. Ces combinaisons sont, par ordre alphabétique, acef, afgh, bcde, bcdg, bceh, bcgh, bdeh, bdgh, cdeg, cegh et degh.

Quel est le nombre de carrés magiques que l'on peut obtenir par la méthode proposée ?

Quels sont tous les carrés que l'on peut construire avec comme dernière ligne [. 15 14 .] ?

La réponse à cette dernière question est donnée en annexe et permet de retrouver le carré magique de la mélancolie de Dürer.

Observons enfin que, si la méthode utilisée permet de trouver beaucoup de carrés magiques, elle ne permet pas de les trouver tous, comme le montre l'exemple suivant où la diagonale principale ne contient que des nombres impairs, ce qui est incompatible avec la méthode proposée.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 & 16 \\ 15 & 9 & 8 & 2 \\ 12 & 4 & 13 & 5 \\ 6 & 14 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> restart:with(linalg):
> i:=matrix(4,4,1);
```

$$i := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> a0:=matrix(4,4,[0,0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,1,0,0]);
```

$$a0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> a1:=evalm(i-a0);
```

$$a1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On définit de même b0, b1, c0, c1, ..., h0 et h1. Leur écriture a été effacée pour gagner de la place. On va maintenant fabriquer tous les carrés magiques portant les nombres 15 et 14 au milieu bas du carré, avec la méthode vue précédemment.

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*a0+f0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 10 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*a0+f0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 6 & 12 & 9 & 7 \\ 11 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*b0+c0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 1 & 4 & 16 \\ 12 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 10 & 11 & 7 \\ 3 & 15 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*b0+c0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 1 & 4 & 16 \\ 8 & 12 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 7 & 11 \\ 3 & 15 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*b0+d0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 11 & 8 & 5 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 7 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*b0+d0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 7 & 12 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*c1+e1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*c1+e1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est ce dernier tableau que l'on retrouve dans la 'Mélancolie' de Dürer.

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*d1+e1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 1 & 4 & 13 \\ 11 & 6 & 7 & 10 \\ 5 & 12 & 9 & 8 \\ 2 & 15 & 14 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*d1+e1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 1 & 4 & 13 \\ 7 & 10 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 12 \\ 2 & 15 & 14 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*f1+a1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 10 & 5 & 8 & 11 \\ 7 & 12 & 9 & 6 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*f1+a1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 6 & 9 & 12 & 7 \\ 11 & 8 & 5 & 10 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*c1+b1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 & 13 \\ 9 & 5 & 8 & 12 \\ 6 & 10 & 11 & 7 \\ 3 & 15 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*c1+b1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 & 13 \\ 5 & 9 & 12 & 8 \\ 10 & 6 & 7 & 11 \\ 3 & 15 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*d1+b1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 9 & 7 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*d1+b1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 11 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*e0+c0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*e0+c0);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*g1+4*h1+2*e1+d1);
```

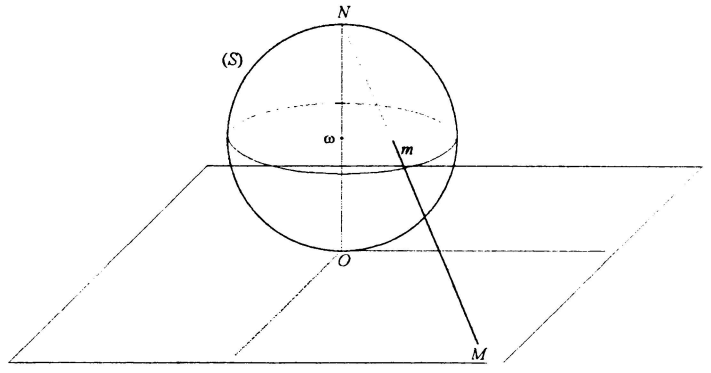
$$\begin{bmatrix} 16 & 1 & 4 & 13 \\ 10 & 7 & 6 & 11 \\ 5 & 12 & 9 & 8 \\ 3 & 14 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(i+8*h1+4*g1+2*e1+d1);
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 1 & 4 & 13 \\ 6 & 11 & 10 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 12 \\ 3 & 14 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

I. La projection stéréographique

Considérons une sphère (S) et un point N de cette sphère (que nous pouvons assimiler à son "pôle nord"). La projection stéréographique est la projection centrale de la sphère sur le plan tangent au pôle sud.
Notons (P) ce plan tangent au point diamétralement opposé au point N sur la sphère (S), le point O.



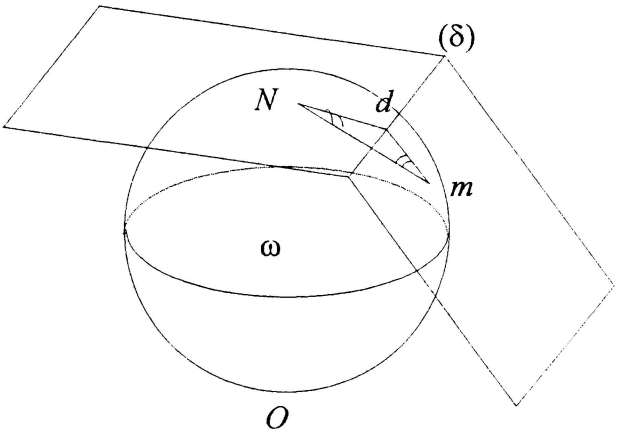
Cette transformation est alors une bijection de la sphère (S) privée du point N sur le plan (P).

Proposition : L'image d'un cercle de la sphère (S) ne contenant pas N est un cercle sur le plan (P)

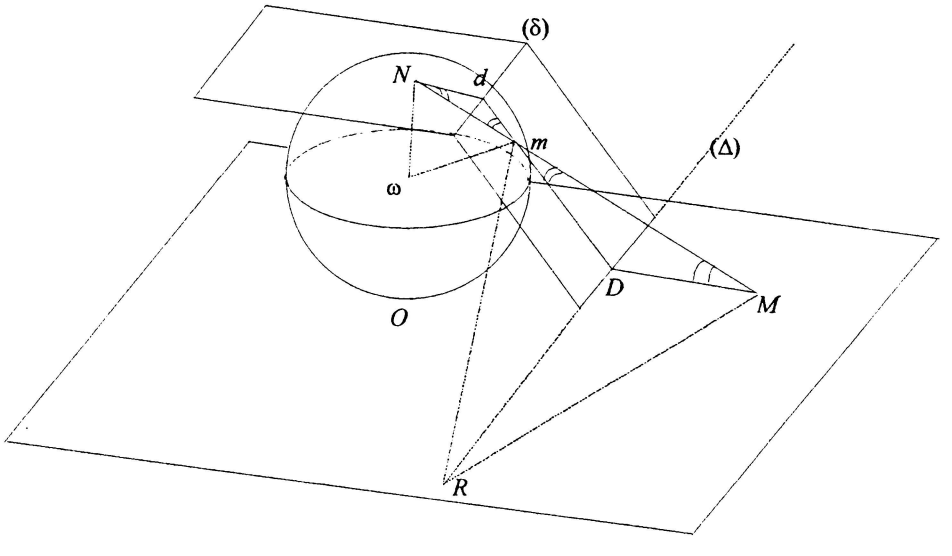
Démonstration : a) Considérons un point m, distinct de N, sur (S). Notons (δ) la droite d'intersection entre les plan tangents à (S) aux points N et m.

Soit d le projeté orthogonal commun aux points N et m sur la droite (δ).
On a

$$(\overrightarrow{Nm},\overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{md},\overrightarrow{mN})$$



b) Notons (Δ) la droite d'intersection du plan tangent en m à la sphère (S) et (P).



Puisque les plans tangents en N et en O (le plan (P)) sont parallèles alors $(\overrightarrow{Nm},\overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{Mm},\overrightarrow{MD})$, et le triangle mMD est isocèle en D.
De plus, le plan tangent en N est perpendiculaire à $(N\omega)$ donc $(\delta) \perp (N\omega)$
De même, $(\delta) \perp (N\text{m})$

$$\text{Donc } (\delta) \perp (N\omega m)$$

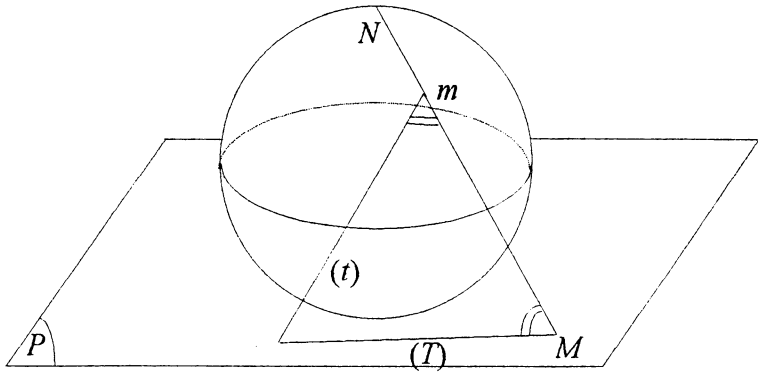
Or les droites (δ) et (Δ) sont parallèles car elles se trouvent à l'intersection d'un plan avec deux plans parallèles et, de plus, les points N, m, M, ω, d, D étant coplanaires, on obtient

$$(\Delta) \perp (mMD)$$

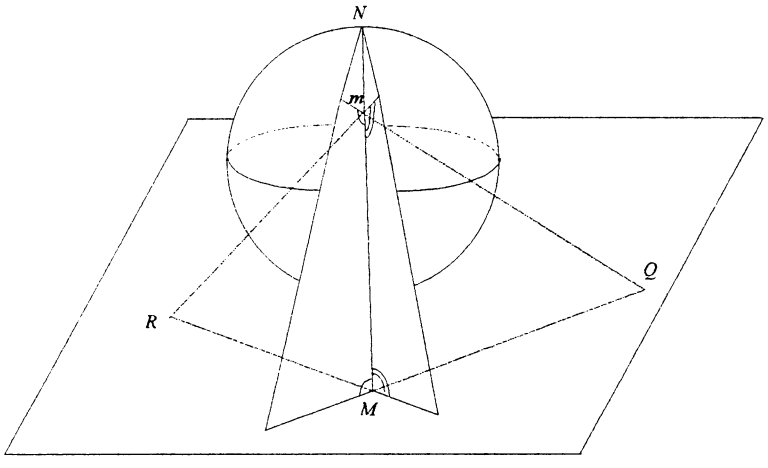
Si R est un point de (Δ), en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles Rdm et RDM et puisque le triangle mMD est isocèle en D alors RmM est isocèle en R et

$$(\overrightarrow{mR},\overrightarrow{mM}) = (\overrightarrow{Mm},\overrightarrow{MR}). \ (\bullet)$$

c) Utilisons ce résultat pour démontrer que la projection stéréographique est une transformation conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles).
Soit (t) une tangente à (S) en m de projection M sur (P).
Soit alors (T) la droite projection de (t) sur (P).



Nous savons que l'angle de droites formé par la droite (NM) avec la droite (t) d'une part et avec la droite (T) d'autre part sont égaux.



Considérons deux tangentes (t_1) et (t_2) à la sphère (S) au point m et leurs images (T_1) et $(T2)$ par la projection. Elles contiennent donc le point M projeté du point m par la projection stéréographique.
Notons

$$R = (t_1) \cap (T_1)$$

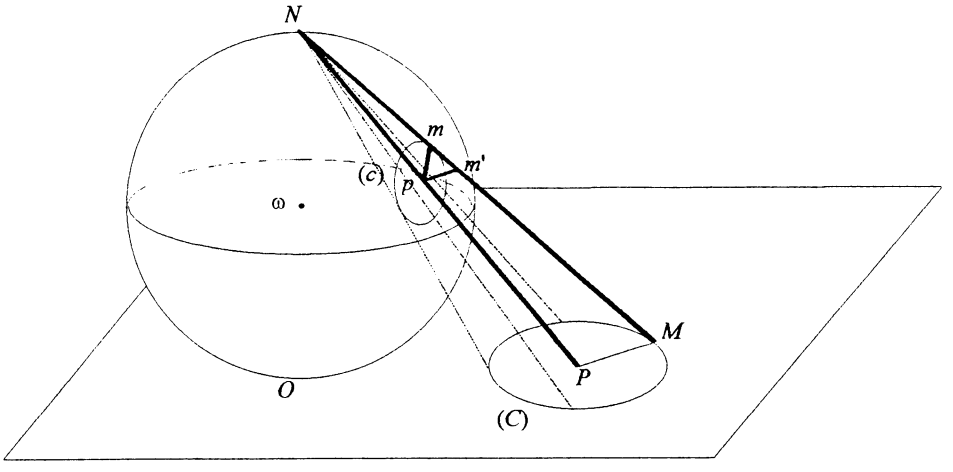
et

$$Q = (t_2) \cap (T_2).$$

Les triangles RMm et QMm sont des triangles isocèles respectivement en R et Q donc ces deux points sez trouvent sur le plan médiateur de $[mM]$.

Ce plan est un plan de symétrie de la figure. L'angle formé entre les droites (t_1) et (t_2) est égal à l'angle formé entre (T_1) et (T_2).

d) Prenons un cercle (c) sur la sphère (S) ne contenant pas N et soit (C) son image sur le plan (P) par la projection stéréographique.



Le cône formé par les intersections des plans tangents à la sphère passant par les points de (c) a pour sommet p d'image P par la projection stéréographique. Soient m un point de (c) d'image M sur (C). La parallèle à (MP) menée par p coupe (NM) en m'.

En reprenant (•) sur les données de la figure suivante, on obtient

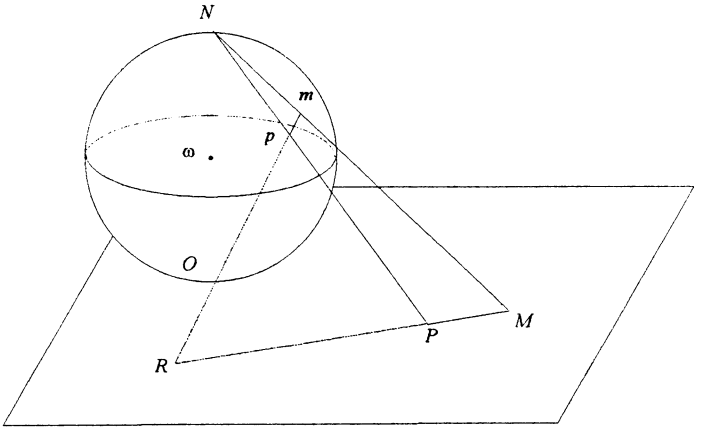
$$(\overrightarrow{mp},\overrightarrow{mM}) = (\overrightarrow{Mm},\overrightarrow{MP}) \ [\pi].$$

Soit

$$(\overrightarrow{Nm},\overrightarrow{mp}) = (\overrightarrow{NM},\overrightarrow{MP}) \ [\pi].$$

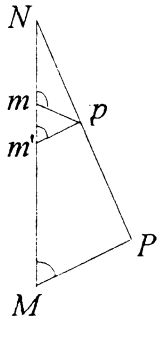
Or les droites (pm') et (PM) sont parallèles donc

$$(\overrightarrow{Nm'},\overrightarrow{m'p}) = (\overrightarrow{NM},\overrightarrow{MP}) \ [\pi].$$



On obtient finalement

$$(\overrightarrow{Nm'},\overrightarrow{m'p}) = (\overrightarrow{Nm},\overrightarrow{mp}) \ [\pi]$$

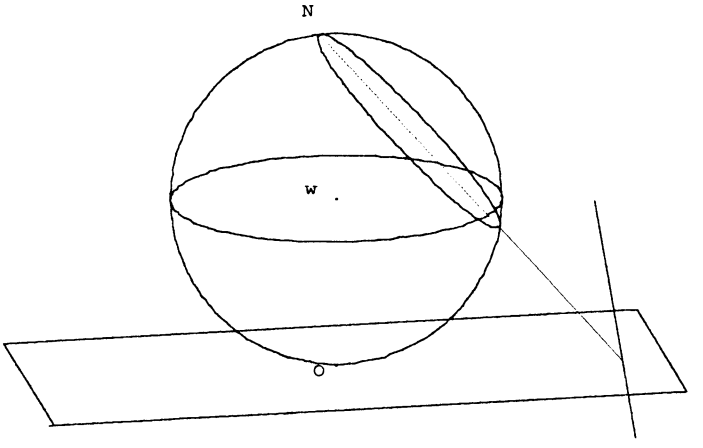


Donc $m = m'$ ou mpm' est un triangle isocèle mais dans les deux cas, on a

$$m'p = mp$$

D'après le théorème de Thales dans le triangle NMP où $(MP) \,//\, (m'p)$, MP est proportionnel à $m'p$ qui est constant égal à mp donc MP est constant et M décrit le cercle (C).

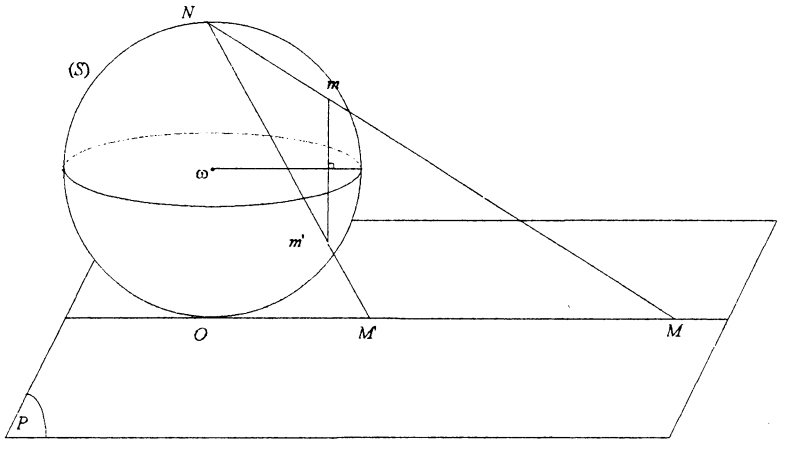
Dans le cas où le cercle (C) contient N alors ce cercle peut être considéré comme l'intersection entre la sphère (S) et un plan (Π). Or ce plan coupe le plan (P) suivant une droite. Ainsi, l'image d'un cercle passant par N est une droite sur (P).



A ce point de l'exposé, il est utile de considérer le complété de $\mathbb{C}$. On définit alors une bijection de (S) sur $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (appelé alors Sphère de Riemann) et les droites du plan (P) identifié à $\widetilde{\mathbb{C}}$ sont des cercles dont le centre est envoyé à l'infini.
Ainsi, l'image d'un cercle de (S) est un cercle de (P) (ou cercle-droite) par la projection stéréographique.

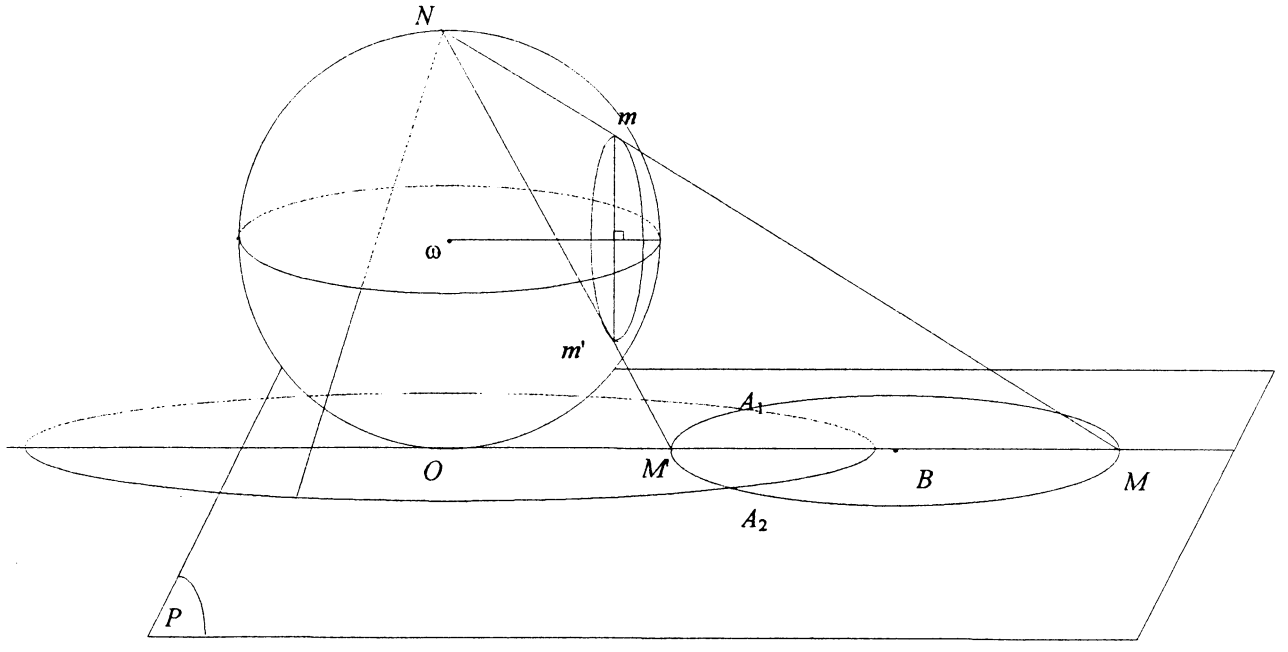
II. Une définition de l'inversion

A un point M du plan (P), on lui fait correspondre le point m de la sphère tel que M soit la projection stéréographique du point m. Le point m' est le symétrique du point m par rapport au plan (P'), parallèle au plan (P) passant par le centre de la sphère (plan de l'"équateur").Le point M' est alors défini comme le projeté stéréographique du point m' sur le plan (P).



La transformation qui, à tout point M du plan (P), fait correspondre le point M' est une inversion du plan (P).

Démonstration :
Les points N, ω, O, m, M, m', M' sont coplanaires et les points O, M et M' se trouvant à l'intersection de ce plan avec le plan (P), ils sont alignés. (1)

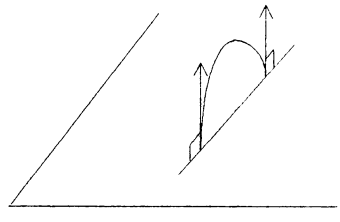


Soient (c_1) le cercle se trouvant à l'intersection du plan parallèle à (P) passant par ω et de (S) et (c_2) le cercle de diamètre $[mm']$ sur (S).
Soit B le centre du cercle (C_2), image de (c_2).

On a alors $\overline{OM}\times\overline{OM'} = (OB - BM')\times(OB + BM) = OB^2 - R^2$

en notant R le rayon du cercle (C_2)

Les tangentes aux points d'intersection des deux cercles sont perpendiculaires.
En effet, les tangentes à (c_2) sont parallèles à (mm') qui est perpendiculaire au plan de (c_1) donc ces tangentes sont perpendiculaires aux tangentes à (c_1) aux mêmes points.



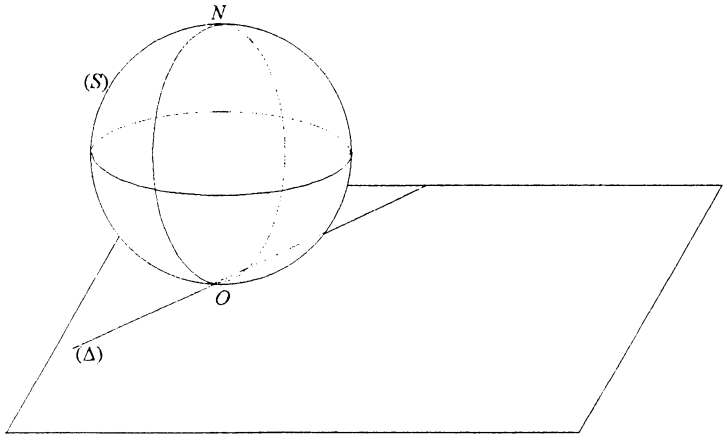
Comme la projection stéréographique conserve les angles, les cercles images (C_1) et (C_2) sont orthogonaux en deux points A_1 et A_2.
Si on suppose la sphère (S) de centre ω et de rayon r, alors le cercle image (C_1) sera de rayon $2r$ (par le théorème de Thales, par exemple).
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OA_1B par exemple, on obtient :

$\overline{OM}\times\overline{OM'} = OB^2 - R^2 = (2r)^2 =$ constante (2)

(1) et (2) prouvent ainsi que la transformation i est une inversion de centre O dans le plan (P) (qui laisse d'ailleurs le cercle (C_1) invariant).

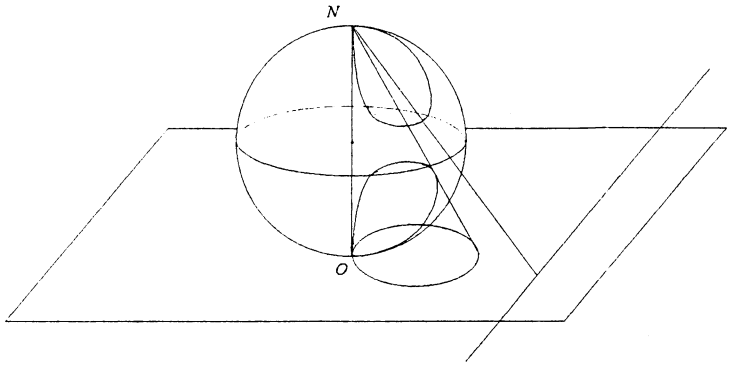
Premières propriétés

L'image d'une droite contenant le point O par l'inversion i est cette même droite.



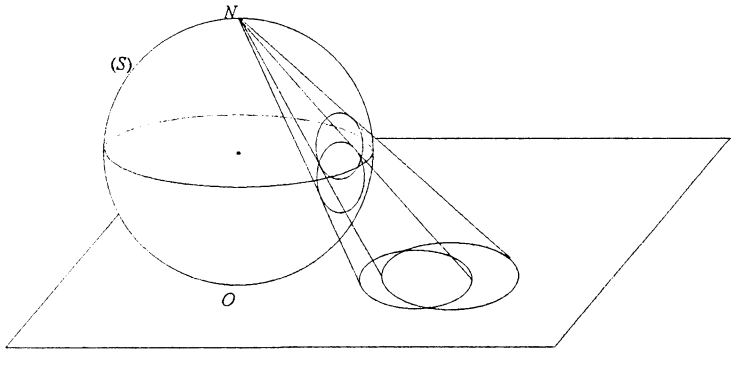
Soit (Δ) une droite de (P) contenant O. Le plan défini par cette droite et le point N coupe la sphère (S) en un cercle de diamètre $[NO]$. Le symétrique de ce cercle par la réflexion s est un cercle sur la sphère de diamètre $[NO]$, donc le cercle lui-même. L'intersection du plan défini par ce cercle avec le plan (P) est la droite (Δ).

L'image d'une droite ne contenant pas O est un cercle contenant O.



Soit (Δ) une droite de (P) ne contenant pas O. Le plan défini par cette droite et le point N coupe la sphère (S) en un cercle contenant N. Le symétrique de ce cercle par la réflexion s est un cercle sur la sphère passant par O et ne contenant pas N. L'image par la projection stéréographique d'un cercle ne contenant pas N est un cercle. O étant invariant par la projection, ce cercle contient O.

L'image d'un cercle ne contenant pas O est un cercle ne contenant pas O.



Par la réciproque de la projection stéréographique, l'image d'un cercle sur le plan (P) est un cercle sur (S) ne contenant pas N. De plus, ce cercle ne contient pas O car on a supposé le cercle initial ne contenant pas O. Le symétrique par s de cercle est un cercle sur (S) ne contenant ni O ni N.

Puis, par la projection stéréographique, ce cercle a pour image un cercle ne contenant pas O. Ce cercle est ainsi le cercle inverse du cercle initial.

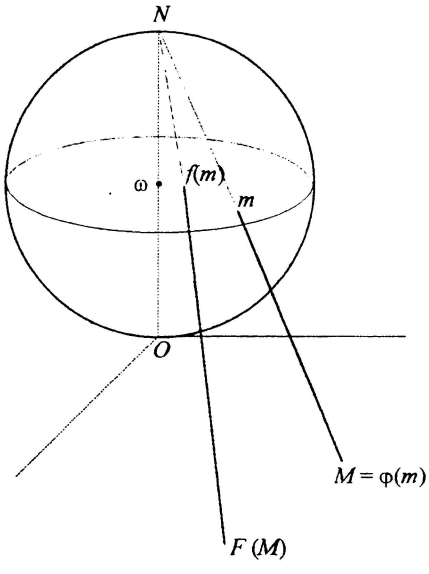
L'image d'un cercle contenant O est une droite ne contenant pas O.

Il suffit pour cela d'appliquer le raisonnement précédent sur la bijection i du plan (P).

Interprétation d'une homographie par la projection stéréographique

Le but de cet exposé est d'étudier l'action d'une transformation du plan connue, l'homographie, sur les cercles et droites du plan. Nous allons pour cela "relever" le plan sur la sphère unité via la projection stéréographique et interpréter sur cette sphère l'action d'une homographie sur des ensembles de points. Nous utiliserons pour cela un exercice de baccalauréat classique de déterminations d'ensembles de points définis par une homographie.

Considérons une transformation f sur la sphère transformant un cercle en un cercle (par exemple, une rotation sur la sphère autour d'un diamètre quelconque).
Par la projection stéréographique φ, f est la transmuée d'une transformation F sur le plan complexe $\widetilde{\mathbb{C}}$.



La transformation F transforme les cercles-droites en des cercles-droites.

La transformation f ne laisse pas, en général, le point N invariant. Notons P ' le point tel que $f(P') = N$ et soit P la projection stéréographique de P ' sur le plan complexe.

Notons U le point à l'infini de $\widetilde{\mathbb{C}}$; on a alors $F(P) = U$.
Donc, si f transforme un cercle passant par P' en un cercle passant par N alors F transforme un cercle passant par P en une droite.

Recherchons les transformations du plan complexe transformant les cercles-droites en cercles-droites.
- Celles qui laissent le point à l'infini U fixe sont les similitudes : $F : z \to az + b$
- Soit F une transformation quelconque (automorphisme du plan complexe)

Posons c le complexe tel que $F(c) = \infty$ La transformation $G : z \to c + \frac{1}{z}$ est un automorphisme et transforme ∞ en c. Donc F o G est un automorphisme qui laisse le point à l'infini fixe et est donc une similitude. F peut alors s'écrire $F : z \to \frac{a}{z - c} + b$ soit de la forme $z \to \frac{az + b}{cz + d}$ et F est une transformation homographique.

Réciproquement, on démontre également que toutes les homographies transforment les cercles-droites en les cercles-droites :

Considérons une homographie que l'on peut écrire sous la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

- Si $c = 0$ alors f est de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$, α et β quelconques, c'est une similitude.

Ainsi, le groupe H contient comme sous-groupe le groupe des similitudes et translations planes

• Si $c \neq 0$ alors $f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)}$ et f est la composée de :

- la similitude (ou translations) $z \rightarrow -c(cz + d)$

- la transformation $z \rightarrow \frac{1}{z}$ qui est le produit commutatif de l'inversion i de pôle l'origine et de puissance 1, et de la symétrie s d'axe $(O, \vec{i})$

- la translation $z \rightarrow z + \frac{a}{c}$

Comme chacune des transformations précédentes conservent les angles, l'homographie est une transformation conforme et transforme ainsi les cercles en les cercles.

Reprenons un exercice classique de terminale sur la détermination de lieux de points par les nombres complexes et interprétons les résultats obtenus sur une sphère via la projection stéréographique.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -1, -2 et z où z représente un nombre complexe différent de -1 et de -2. Posons $Z = \frac{z+2}{z+1}$; $|Z|$ désigne le module de Z et arg Z désigne la mesure principale de l'argument de Z.

Justifier que $|Z| = \frac{BM}{AM}$ et que arg Z est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{MA}, \vec{MB})$ en utilisant la définition et les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.

1) Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer géométriquement les ensembles suivants :

E_1 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est réel.

E_2 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est imaginaire pur.

E_3 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est élément de $\mathbb{R}^*$.

E_4 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que arg $Z = +\frac{\pi}{2}$.

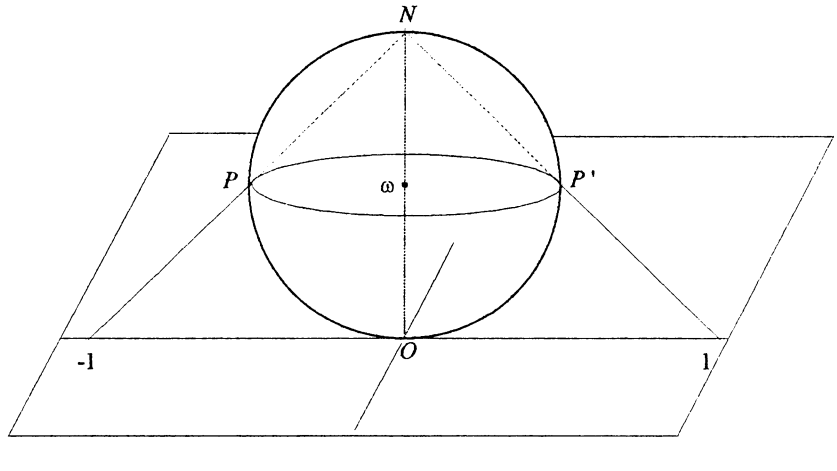
E_5 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 1$.

2) Déterminer l'ensemble E_6 des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 2$.

Exercice Amérique du Nord C 1984

Posons $G : z \rightarrow \frac{z+2}{z+1}$, il lui correspond sa transmuée g sur la sphère par la projection stéréographique. g transforme les cercles en des cercles.

On a $G(-1) = \infty$ ce qui se traduit sur la sphère en $g(P) = N$. De même, $G(\infty) = 1$ se traduit sur la sphère en $g(N) = P'$



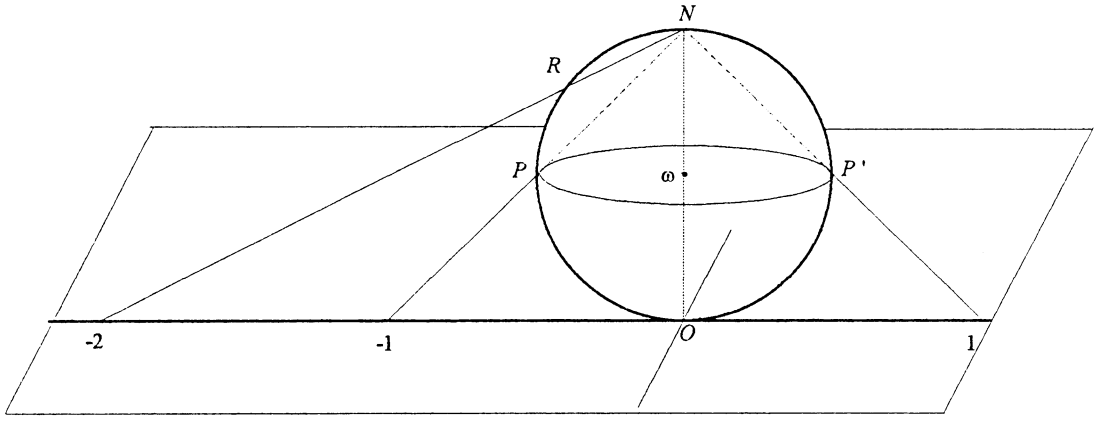
Déterminons G^{-1} que nous noterons F : si on pose $Z = \frac{z+2}{z+1}$ alors $z = \frac{-Z+2}{Z-1}$ et $F : z \to \frac{-Z+2}{Z-1}$.
Comme $F(1) = \infty$, pour sa transmuée f, sur la sphère $f(P') = N$. De même, sachant que $F(\infty) = -1$ $f(N) = P$. Si on note φ la projection stéréographique, on a $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Recherche de $E_1 = \{M \in (P) / Z \in \mathbb{R}\}$

$Z \in \mathbb{R}$ ssi $\overline{Z} = Z$ ssi ... ssi $z = \overline{z}$ et M se trouve sur l'axe des réels.

On recherche $F(\mathbb{R})$:
$\mathbb{R}$ est une droite et la transformation est une homographie donc transforme les cercles-droites en cercles-droites donc l'image par F de $\mathbb{R}$ est un cercle ou une droite.
Comme $1 \in \mathbb{R}$ et $F(1) = \infty$, $f(P') = N$ puis $\varphi(N) = \infty$ donc l'ensemble recherché est une droite donc contient le point à l'infini or $F(\infty) = -1$ ou $f(N) = P$ donc l'ensemble recherché contient le point d'affixe -1.
Il suffit donc de connaître un point pour déterminer l'ensemble recherché ; $F(0) = -2$ et l'ensemble est la droite passant par les points d'affixes -1 et -2 donc la droite des réels.

Action sur la sphère
$\varphi^{-1}(\mathbb{R})$ est un cercle sur la sphère passant par N et O (image par φ^{-1} de la droite des réels).
Comme f transforme un cercle de la sphère en un cercle de la sphère, il suffit de connaître les images de trois points pour en déterminer l'image.
$f(N) = P$, $f(P') = N$ et si on note R le point tel que $\varphi(R) = -2$ alors $f(O) = R$.
L'image du cercle de diamètre $[ON]$ sur la sphère est ce même cercle.



Recherche de $E_2 = \{M \in (P) / Z \in i\mathbb{R}\}$

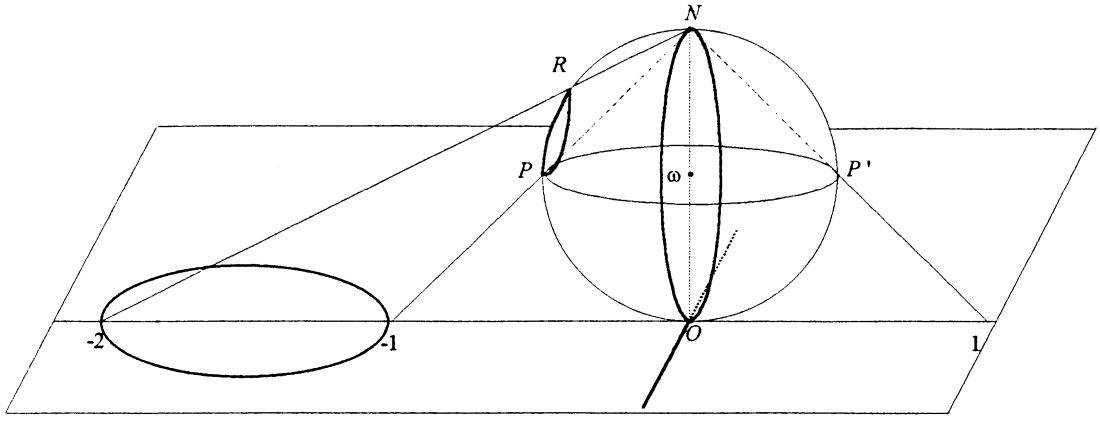
$\arg Z = +\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Le triangle ABM est rectangle en M et M se trouve sur le cercle de diamètre $[AB]$ soit le cercle de centre le point d'affixe $-\frac{3}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Détermination de $F(i\mathbb{R})$
Comme $i\mathbb{R} \perp \mathbb{R}$ et les homographies conservent les angles $F(i\mathbb{R}) \perp F(\mathbb{R})$ donc l'ensemble E_2 recherché doit être orthogonal à la droite des réels.

$i\mathbb{R}$ ne contient pas 1 donc $F(i\mathbb{R})$ ne contient pas le point à l'infini donc par la conservation des cercles-droites, l'ensemble recherché est un cercle orthogonal à la droite des réels donc centré en un point se trouvant sur la droite des réels.
$i\mathbb{R}$ contient le point à l'infini donc l'ensemble recherché contient le point d'affixe -1.
Il suffit là encore de connaître un point pour déterminer l'ensemble recherché : $F(0) = -2$ donc l'ensemble recherché est le cercle de diamètre les points d'affixes -2 et 0.

Action sur la sphère
$\varphi^{-1}(E_2)$ est un cercle sur la sphère de diamètre $[RP]$ sur la sphère; ce cercle est ainsi le transformé du cercle image de diamètre $[NO]$ (image par φ^{-1} de la droite des imaginaires purs).



Recherche de $E_3 = \{M \in (P) / Z \in \mathbb{R}^*_-\}$
Comme $\mathbb{R}^*_- \subset \mathbb{R}$, l'ensemble recherché sera contenu dans $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Arg $Z = \pi$ $[2\pi]$ alors $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = \pi$ $[2\pi]$ et A, B et M sont alignés donc $M \in [AB]$

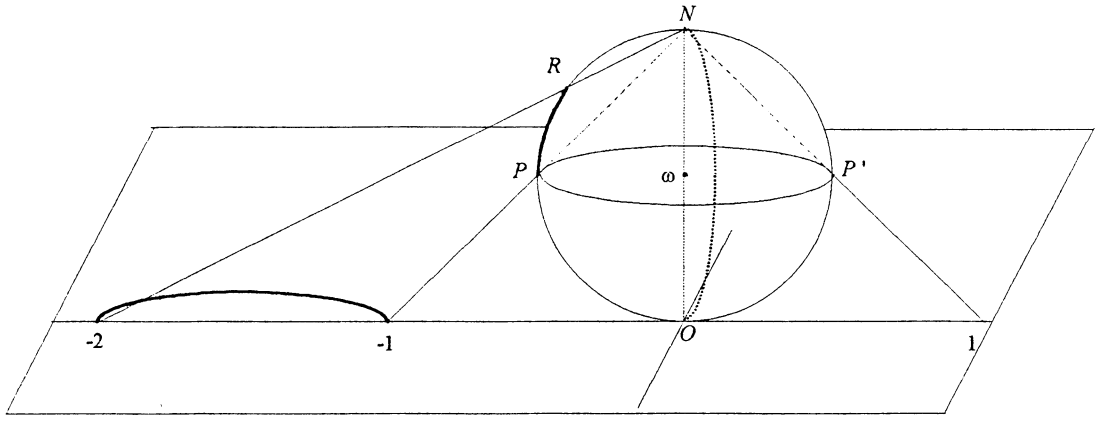
Action sur la sphère
La demi-droite des réels contient le point à l'infini donc l'ensemble recherché contient le point d'affixe -1. $F(0) = -2$ donc l'ensemble recherché contient également le point d'affixe -2.
Sur la sphère, le demi-cercle de diamètre $[ON]$ (image par φ^{-1} de $\mathbb{R}^*_-$) est envoyé en l'arc de cercle $\overset{\frown}{RP}$ sur la sphère situé dans le même plan dont l'image est le segment dont les affixes sont comprises entre -2 et -1 par la projection stéréographique.

Recherche de $E_4 = \{M \in (P) / \text{Arg } Z = +\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\}$

De même que pour le cas précédent, l'ensemble recherché est contenu dans le cas plus général qui est $F(i\mathbb{R})$ soit le cercle de diamètre les points d'affixes -2 et -1.
On recherche ici $F(i\mathbb{R}_+)$

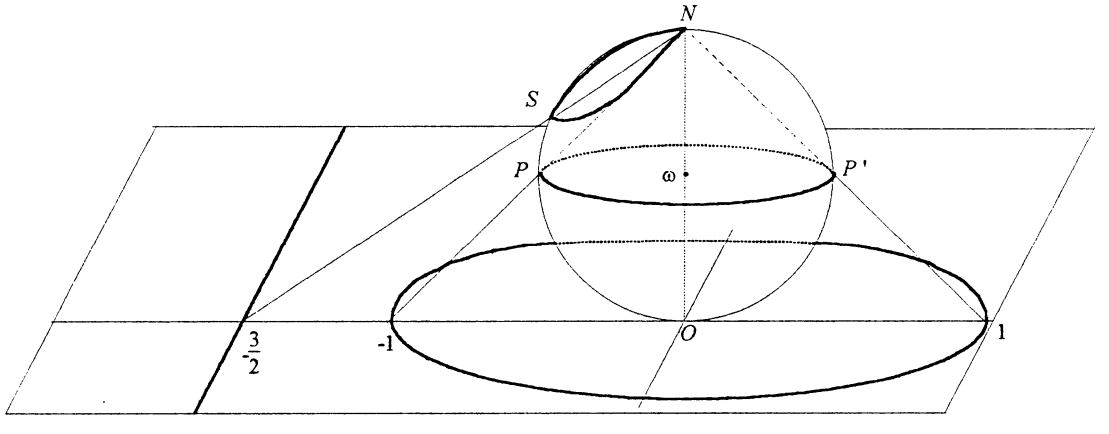
Action sur la sphère
Comme $0 \in i\mathbb{R}_+$, l'ensemble recherché contient le point d'affixe -2 ($f(O) = R$).
Comme le point à l'infini se trouve également sur la demi-droite des imaginaires de la forme ia, $a > 0$, l'ensemble recherché contient le point d'affixe -1 ($f(N) = P$).

$i\mathbb{R}_+$ est envoyé, par φ^{-1}, en un demi-cercle de diamètre $[ON]$ sur la sphère. Ce demi-cercle est envoyé en un demi-cercle de diamètre $[RP]$ par f qui est lui-même transformé en un demi-cercle de diamètre les points d'affixes -2 et -1.
Il reste à déterminer lequel des deux demi-cercles définis par $y > 0$ et $y < 0$ en prenant, par exemple l'image d'un point : $F(i) = \frac{-i+2}{i-1} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ ce qui détermine les demi-cercle solution.



Recherche de $E_5 = \{M \in (P) / |Z| = 1\}$
Comme 1 vérifie $|Z| = 1$, l'ensemble recherché contient le point à l'infini et est une droite.
Comme l'ensemble des points tels que $|Z| = 1$ est un cercle centré en l'origine, cet ensemble est orthogonal aux droites des réels et des imaginaires purs. Son image, qui est une droite, sera donc orthogonale d'une part à la droite des réels, d'autre part au cercle de diamètre les points dont les affixes sont -2 et -1. C'est donc la perpendiculaire à la droite des réels passant par le point d'affixe $-\frac{3}{2}$.

Action sur la sphère
Le cercle initial, par φ^{-1} est envoyé en le cercle de "l'équateur". Par f ce cercle va être transformé en un cercle sur la sphère de diamètre $[NS]$. Finalement, ce cercle passant par N sera projeté en une droite sur le plan complexe.

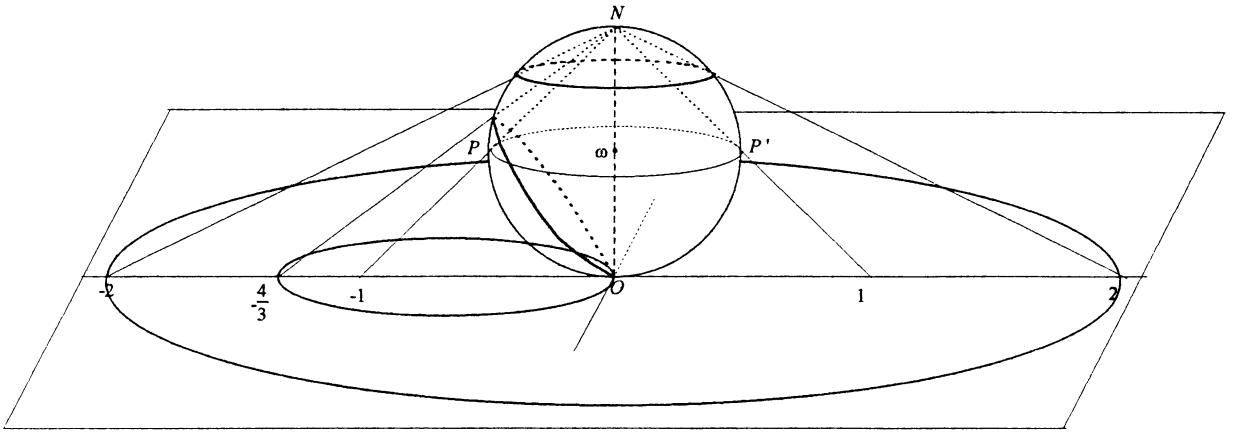


Recherche de $E_6 = \{M \in (P) / |Z| = 2\}$

Comme cet ensemble est un cercle qui ne contient pas le point d'affixe 1, son image ne contient pas le point à l'infini et est donc un cercle.

Le cercle défini par $|Z| = 2$ est un cercle orthogonal à la droite des réels, le cercle image le sera également. Le cercle initial étant également orthogonal à la droite des imaginaires purs, le cercle image sera orthogonal au cercle de diamètre les points d'affixes -2 et -1.

$F(2) = 0$ et $F(-2) = -\frac{4}{3}$ donc le cercle image est le cercle de diamètre les points d'affixes $-\frac{4}{3}$ et 0.



L'inversion

1. Une présentation algébrique de l'inversion.

On souhaite généraliser la notion de symétrie par rapport à une droite. Dans le plan complexe une symétrie par rapport à une droite correspond à l'application $z \to \bar{z}$. L'ensemble des points fixes de la symétrie est défini par l'équation en coordonnées complexes $z=\bar{z}$ de l'axe des abscisses.

La représentation complexe d'une *symétrie par rapport à un cercle* devra faire de $z\bar{z}=1$ l'équation de l'ensemble des points fixes.

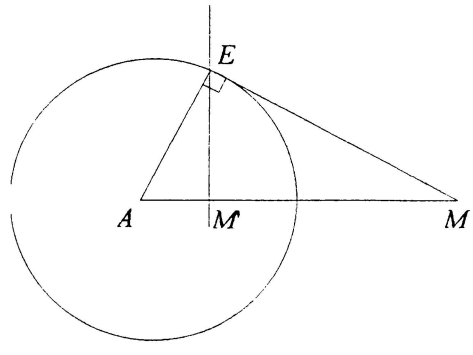
On introduit ainsi naturellement l'application $z \to \frac{1}{\bar{z}}$ qui a pour ensemble des points fixes le cercle unité. Cette application est une involution de **C** privé de 0.

Pour tout point M du plan, d'image M' par cette application $\boldsymbol{I}$ qu'on appelle inversion de pôle O et de puissance 1, on a

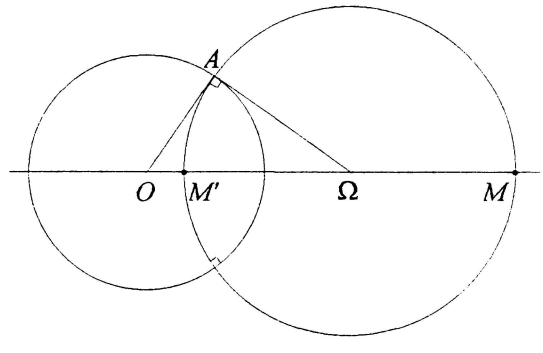
$$M' \in [OM) \quad \text{et} \quad OMOM'=1$$

Pour construire l'image (ou l'antécédent) d'un point M extérieur au disque unité, il suffit de construire la tangente en M au cercle unité. On a alors par projection

$$\overline{OM}\overline{OM'} = \vec{OE}\vec{OM} = OE^2=1$$



Le cercle $C(O,1)$ et le cercle γ de diamètre $[MM']$ (et de rayon R) sont sécants, puisque l'un des points M ou M' appartient au disque de centre O et de rayon 1. Soit A l'un des points d'intersection et Ω le milieu de $[MM']$.



Appelons d la distance $O\Omega$, on a

$$\vec{OM}.\vec{OM'} = (d+R)(d-R) = d^2-R^2 = 1.$$

Ceci prouve que l'angle $\widehat{OA\Omega}$ est droit. Le cercle de diamètre $[MM']$ coupe donc orthogonalement le cercle $C(O,1)$, dans ce cas on parle de cercles orthogonaux. Cette propriété généralise ainsi l'orthogonalité de la réflexion...

2. Des cercles et des droites.

Considérons l'équation

$$\alpha(x^2+y^2) - 2ux - 2vy + \beta = 0$$

Dans laquelle les coefficients (α, β, u, v) désignent quatre réels (u, v et α n'étant pas nuls en même temps). On voit facilement que si $\alpha=0$ cette équation représente une droite, alors que sinon, on reconnaît l'équation d'un cercle ou du vide. Réciproquement toute droite du plan, et tout cercle est représenté par une équation de cette forme.
Si l'on pose $z=x+iy$, et $\zeta=u+iv$ l'équation devient[1]:

$$\alpha z\bar{z} - u(z+\bar{z}) + 2iv(z-\bar{z}) + \beta = 0$$
$$\alpha z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$$

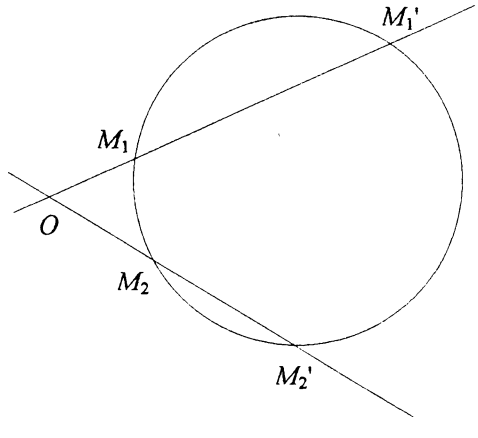
L'inversion d'expression complexe $z \to \frac{1}{\bar{z}}$ induit donc une réelle *inversion* sur les coefficients de cette équation, à savoir l'application $(\alpha,\beta,\zeta) \to (\beta,\alpha,\zeta)$ de $\mathbf{R}^2\times\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}^2\times\mathbf{C}$.

De ceci découle naturellement les énoncés suivant:

- Toute droite contenant le pôle ($\alpha=0$ et $\beta=0$) est globalement invariante par ***I***.
- Toute droite ne contenant pas le pôle ($\alpha=0$ et $\beta\neq0$) a pour image par ***I*** un cercle contenant le pôle. On lit directement sur l'équation que la droite qui joint le pôle au centre du cercle inverse est orthogonale à la droite de départ.
- Tout cercle contenant le pôle ($\alpha\neq0$ et $\beta=0$) a pour image par ***I*** une droite ne contenant pas le pôle.
- Tout cercle ne contenant pas le pôle ($\alpha\neq0$ et $\beta\neq0$) a pour image par ***I*** un cercle ne contenant pas le pôle. De plus le centre et rayon du cercle défini par l'équation précédente sont définis par les nombres $\frac{\bar{\zeta}}{\alpha}$ et $\frac{|\zeta|^2}{\alpha^2}-\frac{\beta}{\alpha}$ qui deviennent $\frac{\bar{\zeta}}{\beta}$ et $\frac{|\zeta|^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta}$ après transformation. Le cercle inverse est donc homothétique du premier cercle par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{\alpha}{\beta}$

3. Cocyclisme de deux couples de points homologues.

On considère les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 et leurs images M_1'et M_2' d'affixes $\frac{1}{\bar{z}_1}$ et $\frac{1}{\bar{z}_2}$.
Supposons que M_2 n'appartienne pas à la droite (OM_1) et considérons le cercle Γ circonscrit au triangle $M_1M_1'M_2$.
Le cercle Γ possède une équation complexe $\alpha z\bar{z} + z\zeta + \bar{z}\bar{\zeta} + \alpha = 0$ dont les les coefficients extrêmes sont égaux puisque l'équation doit être vérifiée[2] à la fois pour z_1 et $\frac{1}{\bar{z}_1}$. Cette équation est donc également vérifiée par $\frac{1}{\bar{z}_2}$ ce qui prouve que les points $M_1M_1'M_2M_2'$ sont cocycliques.



[1] Si $\alpha \neq 0$, la dernière équation s'écrit

$$\left|z-\frac{\zeta}{\alpha}\right|^2=\frac{|\zeta|^2}{\alpha^2}-\frac{\beta}{\alpha}$$

[2] Si l'on écrit *symboliquement* la forme qui représente le cercle ainsi : $(\alpha, \zeta, \beta).\ z=0$, en soustrayant $(\alpha, \zeta, \beta).\ z_1=0$ et $(\beta, \zeta, \alpha).\ z_1=0$, on obtient $(\alpha-\beta, 0, \beta-\alpha).\ z_1=0$ donc $\alpha=\beta$.

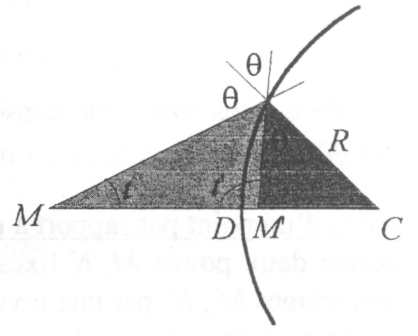
Deux points et leurs images par $\boldsymbol{I}$ sont donc alignés ou cocycliques.

Exercice: Construire l'image d'un point D donné du plan connaissant le pôle de $\boldsymbol{I}$ et un couple de points homologues par $\boldsymbol{I}$.
Exercice: Que devient l'énoncé précédent lorsque $M_2'=M_2$?

4. Application à l'Optique.

Un rayon (ME) vient rencontrer en E un miroir sphérique de centre C et de rayon R. Le rayon réfléchi est porté par la droite $(M'E)$ (avec $M' \in (MC)$). La demi-droite $[CM)$ coupe le miroir en D.

On se place dans les conditions de *l'approximation de Gauss*. Les rayons sont presque horizontaux et l'angle d'incidence sur le miroir sphérique très petit. Avec les notations de la figure on a donc à la fois θ et t petits.
Si l'on note t' l'angle $\widehat{MEM'}$, on a $t+t'= 2\theta$, l'angle t' est aussi un infiniment petit.



En appliquant dans les triangles MEC et $M'EC$ la propriété des sinus on trouve :

$$\frac{\sin t}{R} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{CM} = \frac{\sin\theta}{CM}$$

et

$$\frac{\sin t'}{R} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{CM'} = \frac{\sin\theta}{CM'}.$$

En confondant comme s'est l'usage dans de tels cas les sinus et les angles on obtient enfin :

$$\frac{t+t'}{R} = \frac{2\theta}{R} = \theta\left(\frac{1}{CM}+\frac{1}{CM'}\right)$$

soit

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{CM'}$$

On peut[3] déduire de ce résultat que $\overline{OM}\overline{OM'} = OD^2$
Si l'on prend R comme unité, le point M' est donc l'image de M par l'inversion $\boldsymbol{I}$ de pôle C, ce qui généralise agréablement les propriétés optiques de la symétrie par rapport à une droite.

5. Généralisation.

On appelle inversion de pôle O et de puissance k réel non nul la composée $\boldsymbol{I}_k$ de $\boldsymbol{I}$ et de l'homothétie $\boldsymbol{H}_k$ de centre O et de rapport k.

$$\boldsymbol{I}_k = \boldsymbol{H}_k \circ \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{H}_{1/k}$$

Les propriétés déjà démontrées pour $\boldsymbol{I}$ s'étendent naturellement sans difficulté à $\boldsymbol{I}_k$ dont l'expression complexe est $z \to \frac{k}{\bar{z}}$ (avec $k \in \mathbf{R}$).

[3] Cette relation est l'une des propriétés caractéristiques de ce qu'on appelle une *division harmonique*.

6. Conservation des angles.

Soit $t \to z_1(t)$ et $t \to z_2(t)$ deux arcs de classe C_1 sur un intervalle $[a,b]$ de **R** et supposons, de plus, qu'en t_0, on ait $z_1(t_0)= z_2(t_0)$. Les deux arcs admettent deux tangentes T_1 et T_2 au point d'affixe z_0 dirigées par $z_1'(t_0)$ et $z_2'(t_0)$ si nous supposons que ces complexes sont non nuls. Les arcs images auront au point image des tangentes T_1' et T_2' dirigées par les vecteurs d'affixes $-\frac{k\,\overline{z}_1'(t_0)}{\overline{z}_1^{\,2}(t_0)}$ et $-\frac{k\,\overline{z}_2'(t_0)}{\overline{z}_2^{\,2}(t_0)}$ telles que

$$(T_1', T_2') = \arg \frac{\overline{z}_2'(t_0)}{\overline{z}_1'(t_0)} \quad [\pi]$$

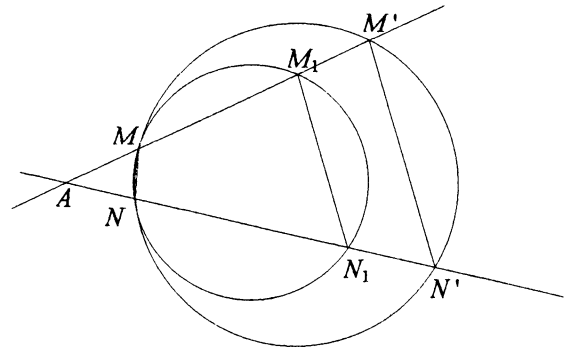
Or

$$\frac{\overline{z}_2'(t_0)}{\overline{z}_1'(t_0)} = -\arg z_2'(t_0) + \arg z_1'(t_0) = (T_2, T_1) \quad [\pi]$$

Les angles de droites sont donc conservés au signe près (comme avec les réflexions), quand on inverse deux courbes.

7. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On se donne deux points M, N fixés dans le plan, leurs images M_1, N_1 par une inversion de pôle A et de puissance 1, puis les images M', N' de ces derniers points par l'homothétie de centre A et de rapport k. Il est facile de voir que les points M, N, M', N' sont encore cocycliques. En effet nous savions déjà que les points M, N, M_1, N_1 étaient cocycliques et de plus les droites (M_1N_1) et $(M'N')$ sont parallèles donc :



$$(MN,MM_1) = (N_1N,N_1M_1) = (N'N,N'M') \ [\pi]$$

Réciproquement si M, N, M', N' sont quatre points du plan donnés, tels que les droites (MN) et $(M'N')$ sont sécantes en A, l'image de N par l'inversion de pôle A qui envoie M sur M' appartient à l'intersection de la droite (AN) et du cercle circonscrit au triangle $(MM'N)$. Donc cette image est N'.

Proposition : Etant donnés trois points $MM'N$ non alignés, un point N' appartient au cercle γ circonscrit à $(MM'N)$ si et seulement si (en désignant par A l'intersection des droites (MM') et (NN')) :

$$\overline{AM}\,\overline{AM'} = \overline{AN}\,\overline{AN'}.$$

Cet invariant est appelé la puissance du point A par rapport au cercle γ et noté $P_\gamma(A)$, on[4] a pour un cercle γ de centre O et de rayon R :

$$P_\gamma(A) = OA^2 - R^2$$

Si nous supposons que le cercle est d'équation : $z\overline{z} - z\overline{\zeta} - \overline{z}\,\zeta + \beta = 0$ et si nous appelons ω l'affixe de A, on a déjà vu que $R^2 = |\zeta|^2 - \beta$, d'où

[4] Ce résultat a déjà été démontré au début de ce texte, on peut aussi le retrouver en faisant tendre le point N vers le point M fixé sur le cercle γ dans ce cas le triangle (AMO) devient rectangle et le résultat découle du théorème de Pythagore.

$$P_\chi(A) = OA^2 - R^2 = |\omega-\zeta|^2 - (|\zeta|^2 - \beta) = \omega\bar{\omega} - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\zeta + \beta = (\bar{\omega}\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne l'envie de représenter l'ensemble des cercles et des droites par des matrices à coefficients complexes.

8. Représentation matricielle des cercles-droites.

On va donc associer à tout cercle-droite d'équation générale

$$\alpha z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$$

la matrice $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$ avec[5] α, β réels et ζ complexe.

Ces matrices ont une propriété remarquable : prendre la transposée revient à prendre la conjuguée, on les appelle matrices hermitiennes.

Remarquons d'abord que le déterminant de H vaut $\alpha\beta - |\zeta|^2$.

Si α est nul, alors ce déterminant ne s'annule pas. Sinon on peut écrire avec R le rayon du cercle

$$\det H = \alpha^2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2}\right) = -\alpha^2 R^2$$

Les cercles points correspondent donc exactement aux matrices hermitiennes de déterminant nul, c'est-à-dire aux matrices non inversibles. Par souci de régularité on associe aux matrices hermitiennes un cercle même lorsque $\left(\frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}\right) > 0$, dans ce cas on parle de cercles imaginaires.

De plus si l'on note ***i*** l'inversion de pôle O et de puissance -1 ***i***: $z \to \frac{-1}{\bar{z}}$, et si l'on transforme par ***i*** l'équation suivante

$$\alpha z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$$

on obtient après multiplication par $z\bar{z}$

$$\beta z\bar{z} + z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta + \alpha = 0$$

et donc à une forme de matrice

$H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$ on associe la forme de matrice $H' = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$ qui est la transposée de la comatrice de H, qu'on appelle matrice complémentaire de H.

Si H est inversible on sait que

$$\det(H)\, H^{-1} = H'$$

montrant ainsi que la matrice associée à l'inverse d'un cercle par ***i*** est l'inverse de la matrice de départ.

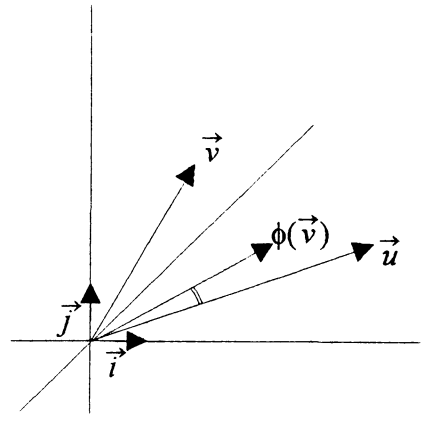
On peut en prime regarder comment le groupe de Moebius opère sur ces matrices puisque les transformations homographiques opèrent naturellement sur les équations de cercle. Bien entendu l'opération de ce groupe se fait par conjugaison.

---

[5] Plus précisément, on sait que α peut s'annuler, mais si α est nul, alors ζ lui ne peut plus s'annuler.

9. Une analogie.

Pour mieux comprendre ce qui suit on va commencer par une analogie. Considérons un plan Π de vecteurs muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ relativement au produit scalaire usuel noté (|).



Ainsi si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y'), on a comme à l'ordinaire

$$(\vec{u}|\vec{v}) = x\,x' + y\,y'$$

Considérons ϕ l'application linéaire de Π dans Π qui échange $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (c'est la symétrie par rapport à la première bissectrice).

On peut définir une nouvelle forme linéaire sur Π en posant

$$<\vec{u}, \vec{v}> = (\vec{u}|\phi(\vec{v})) = x\,y' + x'y = (\vec{v}|\phi(\vec{u})) = <\vec{u}, \vec{v}>.$$

Cette forme est encore bilinéaire et symétrique, mais ce n'est plus exactement un produit scalaire puisque le signe de $<\vec{u}, \vec{u}> = 2\,x\,y$ n'est pas constant. Si l'on cherche à mesurer les angles avec un rapporteur étalonné de cette manière, il faut effectuer d'abord la symétrie par rapport à la première bissectrice. Les angles mesurés ainsi sont en quelque sorte l'image des angles ordinaires vu au travers du prisme[6] de l'application ϕ.

Dans ce qui suit on essaie de relier, de même, les angles de cercles et de droites à une forme classique.

10. Lien avec la forme quadratique fondamentale.

La forme $(H,K) \to \mathrm{Tr}({}^t\bar{H}\,K)$ est une forme bilinéaire définie positive sur l'ensemble des matrices 2x2. En effet si $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Tr}({}^t\bar{H}\,H) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2$.

Sur l'ensemble des matrices hermitiennes, la restriction de cette forme s'exprime plus facilement :

$$\mathrm{Tr}({}^t\bar{H}\,H) = \mathrm{Tr}(H^2).$$

et donc si

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \text{ et } H_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\zeta_2 \\ -\bar{\zeta}_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ on a } (H_1 \mid H_2) = \alpha_1\alpha_2 + \zeta_1\bar{\zeta}_2 + \zeta_2\bar{\zeta}_1 + \beta_1\beta_2.$$

Nous avons vu que l'inversion i de pôle O et de rapport -1 s'interprète comme l'application qui à une matrice hermitienne K associe sa matrice complémentaire.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix} \to \hat{K} = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$$

Elle est donc la restriction à cet espace de l'endomorphisme de l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes :

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \hat{K} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

---

[6] Il y a même des vecteurs orthogonaux à eux-mêmes, par exemple tous les vecteurs des axes de coordonnées.

On vérifie facilement que pour tout couple de matrices hermitiennes ou même quelconques on a

$$(H \mid \boldsymbol{i}(K)) = (\boldsymbol{i}(H) \mid K)$$

si bien que l'inversion $\boldsymbol{i}$ s'interprète comme un opérateur auto-adjoint pour cette forme quadratique fondamentale. Cet opérateur va jouer le même rôle que la symétrie de notre exemple précédent.

11. La nouvelle forme.

La forme bilinéaire induite par la forme quadratique **q** qui correspond au déterminant

$$\mathbf{q}(A) = -\det(A),$$

est la suivante :

$$4 \langle A,B \rangle = \det(A-B) - \det(A+B).$$

Si l'on suppose la matrice hermitienne B inversible on peut écrire

$$\begin{aligned} 4\langle A,B \rangle &= \det(B)\,[\det(B^{-1}A-I) - \det(B^{-1}A+I)] \\ &= \det(B)\,[\,\Phi_{B^{-1}A}(1) - \Phi_{B^{-1}A}(-1)] \end{aligned}$$

où $\Phi_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(M)\,X + \det(M)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice M.

Comme un polynôme du second degré prend les mêmes valeurs en 1 et en -1 si et seulement si le terme de degré 1 est nul, on obtient le résultat suivant;

$$2 \langle A,B \rangle = -\det(B)\,\mathrm{Tr}(B^{-1}A) = -\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(B) \mid A) = -(A \mid {}^t\mathrm{com}(B)).$$

Le résultat précédent devient si l'on note, comme précédemment $\boldsymbol{i}$: $z \to \frac{-1}{\bar{z}}$,

$$-2\langle A,B \rangle = (A \mid \boldsymbol{i}(B))$$

donnant alors en quelque sorte l'hérédité de l'orthogonalité sur les cercles.

12. Exemples.

a) cas de deux droites.

L'équation normale d'une droite est

$$\cos\theta\, x + \sin\theta\, y + p = 0$$

qui s'écrit en coordonnées complexes

$$(z + \bar{z})\cos\theta - i\,(z - \bar{z})\sin\theta + 2p = 0$$

donc (avec $q=2p$)

$$z\,e^{-i\theta} + \bar{z}\,e^{i\theta} + q = 0$$

associée à la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix}$

Le produit scalaire mesuré entre deux droites s'obtient donc par

$$-2\langle A_\theta, A_\phi \rangle = (A_\theta \mid \boldsymbol{i}(A_\phi)) = \mathrm{Tr}(A_\theta\,{}^t\mathrm{com}(A_\phi))) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & -e^{i\phi} \\ -e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}\right) = -2\cos(\phi-\theta)$$

On retrouve donc l'angle entre les deux droites.

$$\langle A_\theta, A_\phi \rangle = \cos(\phi-\theta)$$

A noter que si l'on était resté avec le produit scalaire ordinaire on trouverait la somme des angles et non leur différence. Je pense que c'est la propriété d'antiparallélisme qui est utile ici.

b) cas de deux cercles.

Si deux matrices hermitiennes représentent deux cercles de centres ω_1 et ω_2 et de rayons R_1 et R_2, on a

$$-2< H_1, H_2 > = (H_1 \mid \boldsymbol{i}(H_2)) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_2 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \beta_1 + \beta_2 - \zeta_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_2\bar{\zeta}_1$$

Or

$$\beta_1 + \beta_2 - \zeta_1\bar{\zeta}_1 - \zeta_2\bar{\zeta}_1 = \beta_1 + \beta_{2-} + |\zeta_1-\zeta_2|^2 - |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 = \omega_1\,\omega_2{}^2 - R_1{}^2 - R_2{}^2.$$

Comme

$\mathbf{q}(H_1) = -\det(H_1) = -R_1{}^2$ et $\mathbf{q}(H_2) = -R_2{}^2$ on pose $\|H_1\| = R_1$ et $\|H_2\| = R_2$

la quantité

$$\frac{< H_1, H_2 >}{\|H_1\|\|H_2\|} = \frac{R_1{}^2+R_2{}^2-\omega_1\,\omega_2{}^2}{2R_1R_2}$$

représente « l'angle » entre les deux cercles. Si les cercles sont sécants en E, d'après l'égalité d'*Al Kashi* on a

$$\frac{R_1{}^2+R_2{}^2-\omega_1\,\omega_2{}^2}{2R_1R_2} = \cos\widehat{\omega_1 E\omega_2}$$

Petite réflexion sur les antidéplacements du plan affine.

L'étude des antidéplacements est au programme de spécialité mathématiques des classes de terminale S depuis la rentrée 1998. La recherche ci-dessous a été motivée par la construction d'exercices sur la composée d'isométries qui soient exploitables dans les classes.

Tout déplacement D du plan a pour écriture complexe : $z \rightarrow z' = a\,z + b$, avec a complexe de module 1 et b complexe. On obtient facilement que si $a = 1$, D est une translation, et sinon D est une rotation dont l'angle est un argument de a.

Que sait-on pour les antidéplacements ? Ils sont entièrement décrits par les symétries axiales ou les composées non réductibles de trois symétries axiales (qui peuvent alors s'écrire sous forme de la composée (commutative) d'une symétrie d'axe Δ et d'une translation de vecteur $\vec{v}$ non nul et directeur de Δ ; on les appelle symétries glissées d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$). Leur écriture complexe est : $z \rightarrow z' = a\,\bar{z} + b$, avec a complexe de module 1 et b complexe. Il n'est pas aussi simple que pour les déplacements de donner la nature précise de l'antidéplacement à partir de son écriture complexe.

Si F est un antidéplacement, et O un point quelconque du plan, on note $O' = F(O)$ et $O'' = F(O')$.
O, O' et O'' permettent en général de caractériser F :
Si $O = O''$ et $O \neq O'$, F est la symétrie d'axe la médiatrice de $[OO']$.
Si $O \neq O''$, F est la symétrie glissée de vecteur $\frac{1}{2}\vec{OO''}$ et d'axe passant par le milieu de $[OO']$.

(tous les résultats énoncés ci-dessus se démontrent au niveau terminale, consulter tout ouvrage de spécialité TS si besoin).

Caractéristiques d'un antidéplacement à partir de son écriture complexe
Soit F un antidéplacement d'écriture complexe : $z \rightarrow z' = a\,\bar{z} + b$. Le point O origine du plan complexe a pour image $O'(b)$ par F, qui a lui même pour image $O''(a\,\bar{b} + b)$.

Si $b = 0$, on a : $O = O'$ et donc F admettant un point invariant est une symétrie axiale d'axe Δ passant par O. Si l'on pose $a = e^{i\theta}$, le point $A(\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}))$ est invariant par F et donc : $\Delta = (OA)$.

Si $b \neq 0$, on a : $O \neq O'$ et F est une symétrie axiale si et seulement si $(a\,\bar{b} + b = 0)$.

Posons $a = e^{i\theta}$, $b = k\,e^{i\alpha}$, la condition $(a\,\bar{b} + b = 0)$ s'écrit : $e^{i\theta} \times k\,e^{-i\alpha} + k\,e^{i\alpha} = 0$, soit : $e^{i2\alpha} = -e^{i\theta}$, soit : $\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ (mod π).
Ce premier résultat permet de construire rapidement une écriture complexe d'une symétrie axiale :
Par exemple, pour $a = i$; on peut choisir : $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ et $k = \sqrt{2}$, pour obtenir : $b = -1 + i$.
F d'écriture complexe $z \rightarrow z' = i\,\bar{z} - 1 + i$ est, d'après le raisonnement précédent, la symétrie axiale d'axe Δ médiatrice de $[OO']$ avec $O'(-1 + i)$ (on peut vérifier que $O'' = F(O') = O$).

On peut également caractériser rapidement une symétrie glissée, d'après la démarche rappelée ci-dessus, pour l'antidéplacement F, si $(a\,\bar{b} + b \neq 0)$, F est une symétrie glissée d'axe Δ passant par $I(\frac{b}{2})$ et de vecteur $\vec{v}(\frac{1}{2}(a\,\bar{b} + b))$.

Exemple : $z \to z' = i\,\bar{z} + 2 - 4\,i$ est l'écriture complexe de la symétrie glissée de vecteur $\vec{v}(-1-i)$ et passant par I($1 - 2i$).

Application à la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, où l'on cherche à obtenir une symétrie axiale.

1. Utilisation de l'écriture complexe

Soit F un antidéplacement d'écriture complexe : $z \to z' = a\,\bar{z} + b$.
Soit D un déplacement d'écriture complexe : $z \to z' = c\,z + d$.
La composée $F \circ D$ a pour écriture complexe : $z \to z' = a(\bar{c}\,\bar{z} + \bar{d}) + b$.
$F \circ D$ est une symétrie axiale si et seulement si : $a\bar{c}\,(\bar{a}d + \bar{b}) + a\bar{d} + b = 0$,
soit (compte tenu de $a\bar{a} = 1$) : $\bar{c}d + a\bar{c}\bar{b} + a\bar{d} + b = 0$.

Cette relation est difficilement exploitable directement, elle indique cependant, en gros, que l'on peut choisir trois paramètres (parmi a , b , c et d) et calculer le quatrième pour obtenir la symétrie souhaitée.

Pour construire des exercices exploitables, on peut se placer dans des conditions particulièrement favorables, par exemple :

- d = 0 (rotation de centre O), avec $a = e^{i\theta}$, $b = k\,e^{i\alpha}$, c = $e^{i\theta'}$, la condition donne (après un petit calcul) : $\alpha = \frac{1}{2}(\theta - \theta' - \pi)$ (mod π).

  On peut choisir $\theta' = \frac{\pi}{6}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et k = 2. On a alors : F : $z \to z' = -i\,\bar{z} + \sqrt{3} + i$

  F est la symétrie glissée de vecteur $\vec{v}(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})))$ d'axe passant par I($\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$)

  $D : z \to z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$; D est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

  $F \circ D$ est la symétrie axiale d'écriture complexe : $F \circ D : z \to z' = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\,\bar{z} + \sqrt{3} + i$.

- $a = c$, la condition s'écrit : $\bar{a}d + \bar{b} + a\bar{d} + b = 0$. Cette condition donne ($a\bar{d} + b$) imaginaire pur. Par exemple avec $a = c = i$, $d = 3 - 2i$, on peut choisir $b = 2 - i$, et :

  $F : z \to z' = i\,\bar{z} + 2 - i$; F est la symétrie glissée définie par $\vec{v}(\frac{1}{2}(1 + i))$ et Δ passant par I($1 - \frac{i}{2}$)

  $D : z \to z' = i\,z + 3 - 2i$; D est la rotation de centre $A(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

  $F \circ D : z \to z' = \bar{z} + 2i$; $F \circ D$ est la symétrie d'axe horizontal passant par $J(i)$.

- $a = -c$, donne, comme ci-dessus, la condition devient : $a\bar{d} + b$ réel.
  Par exemple, on peut choisir $a = -c = i$, $d = 1 + 3i$, $b = 2 - i$, et :

  $F : z \to z' = i\,\bar{z} + 2 - i$; F est la symétrie glissée définie par $\vec{v}(\frac{1}{2}(1 + i))$ et Δ passant par I($1 - \frac{i}{2}$)

  $D : z \to z' = -i\,z + 1 + 3i$; D est la rotation de centre $A(2 + i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

  $F \circ D : z \to z' = -\bar{z} + 5$. $F \circ D$ est la symétrie d'axe vertical passant par $B(\frac{5}{2})$.

2. Démarche géométrique

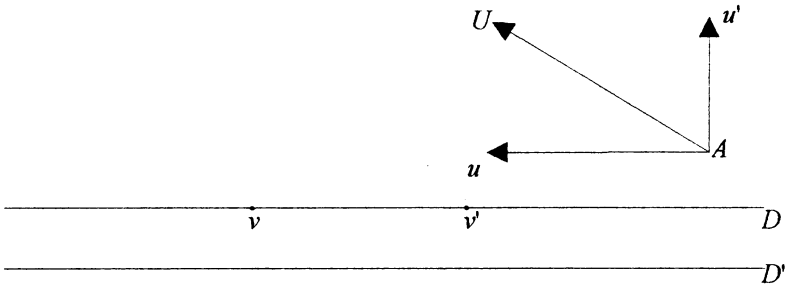
En utilisant une décomposition adaptée du déplacement D, on peut trouver des conditions plus lisibles et facilement exploitables pour obtenir une symétrie axiale pour $F \circ D$:

On s'intéresse d'abord au cas où ***F* est une symétrie glissée** d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$ et ***D* est une translation** de vecteur $\vec{U}$. En décomposant $\vec{U}$ suivant la direction de Δ et sa direction orthogonale : $\vec{U} = \vec{u} + \vec{u}'$, on a $D = T \circ T'$, où T et T' sont les translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Avec $F = S \circ t$, où S est la symétrie d'axe Δ et t la translation de vecteur $\vec{v}$, on peut écrire : $F \circ D = S \circ t \circ T \circ T'$.

A l'évidence, si l'on choisit : $\vec{u} = -\vec{v}$, alors : $t \circ T = \mathrm{Id}$, et : $F \circ D = S \circ T'$. Or la composée d'une symétrie axiale d'axe Δ par une translation de vecteur $\vec{u}'$ normal à Δ est une symétrie d'axe Δ' image de Δ par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}'$ (ou $\frac{1}{2}\vec{u}'$ suivant l'ordre de composition) (il suffit de décomposer la translation en deux symétries dont l'une est d'axe Δ).

Dans la figure ci-dessous, $\Delta = D$, $\Delta' = D'$, $\vec{v} = \overrightarrow{vv'}$, $\vec{U} = \overrightarrow{AU}$, $\vec{u}' = \overrightarrow{Au'}$



Exemple : on reprend la symétrie glissée $F : z \to z' = i\,\bar{z} + 2 - 4\,i$ de vecteur $\vec{v}(-1 - i)$. On choisit alors un vecteur $\vec{U}$ tel que : $\vec{U} = -\vec{v} + \vec{u}'$, avec $\vec{u}'$ orthogonal à $\vec{v}$, par exemple $\vec{u}'(-1 + i)$, soit $\vec{U}(2i)$. Alors on a : $D : z \to z' = z + 2i$ et $F \circ D : z \to z' = i\,\bar{z} + 4 - 4\,i$. On peut vérifier que l'on obtient bien une symétrie axiale.

Remarque : dans ce cas, la composée $D \circ F$ est aussi une symétrie axiale généralement différente de la précédente (cela est du à la décomposition commutative de F et de D qui permet le même type de simplification), l'écriture complexe dans l'exemple ci-dessus est : $z \to z' = i\,\bar{z} + 2 - 2\,i$.

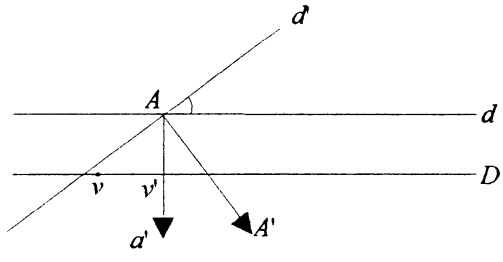
Dans le cas où ***D* est une rotation** de centre A et d'angle θ , on peut décomposer D en deux symétries s et s' d'axes sécants en A, $D = s \circ s'$, et F comme ci-dessus. On a alors : $F \circ D = t \circ S \circ s \circ s'$. On choisit s d'axe parallèle à Δ (c'est possible !), $S \circ s$ est alors une translation T de vecteur $\vec{u}$ et l'on a : $F \circ D = t \circ T \circ s'$; $t \circ T$ est aussi une translation t' de vecteur $\vec{U} = \vec{u} + \vec{v}$ et : $F \circ D = t' \circ s'$.

$F \circ D$ est une symétrie axiale si l'on a $\vec{U}$ normal à l'axe de s'. Cette démarche permet une construction géométrique :

- si l'on se donne F et le centre A de D, alors Δ, $\vec{v}$ et $\vec{U}$ sont fixés, il suffit de choisir θ pour que l'axe de s' ait $\vec{U}$ pour vecteur normal.

- si l'on se donne F et l'angle θ, alors Δ, $\vec{v}$ et la direction de l'axe de s' sont fixés, il suffit de choisir A (qui détermine $\vec{U}$) pour avoir $\vec{U}$ normal à la direction de s'.

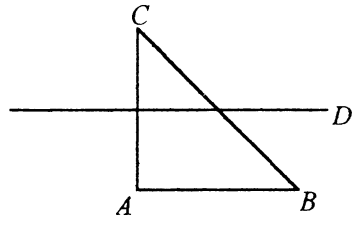
Dans la figure ci-dessous, $\vec{v} = \vec{vv'}$, $\vec{U} = \vec{AA'}$, $\Delta = D$, d *et* d' sont les axes de s et s'.



Quelques applications dans certaines configurations simples :

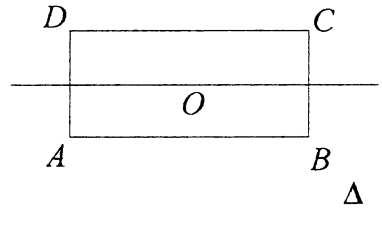
- ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A , soit Δ la médiatrice de $[AC]$, F la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{AB}$, , la translation T de vecteur $\vec{BC}$ correspond aux exigences formulées ci-dessus et la composée $F \circ T$ est une symétrie axiale (d'axe parallèle à Δ et passant par C)

Dans la figure ci-dessous, $\Delta = D$.



- Dans la même configuration, avec la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la composée $F \circ R$ est la symétrie d'axe (BC).

- $ABCD$ est un rectangle de centre O, Δ est la médiatrice de $[AD]$ et F est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{AB}$, S_O est la symétrie de centre O. Les conditions sont remplies pour avoir $F \circ S_O$ symétrie axiale (d'axe (BC)).



Un exemple d'exercice proposé à des terminales S spé math

PARTIE A :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct en A. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Δ est la médiatrice de $[AC]$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, soit S la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$. Soit M et N deux points du plan. Faire une figure et construire les images M_1 et N_1 de M et N par R ; M_2 et N_2 de M et N par S ; M_3 et N_3 de M et N par $S \circ R$.

La composée $S \circ R$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Justifier la réponse et préciser les natures possibles.

En observant la figure construite, conjecturer la nature de $S \circ R$ et ses éléments caractéristiques.

Démontrer le résultat conjecturé en étudiant les images de B et de C.

PARTIE B :

On se place dans le plan complexe repéré par $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On considère le point $A(1+2i)$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'application S dont l'écriture complexe est donnée par : $z \to z' = -i\bar{z} + 1 + 3i$.

3. Calculer l'écriture complexe de la composée $S \circ R$; en déduire la nature et les caractéristiques de la composée $S \circ R$.

4. En prenant $B(3i)$, montrer que l'on retrouve le résultat conjecturé dans la partie A.

Images mathématiques en physique

Thomas CHÉNEL
Lycée Corneille, Rouen

De plus en plus, les physiciens utilisent les images mathématiques. Il y a deux principales raisons à cela :

- L'ordinateur permet maintenant de tracer très facilement des courbes et des surfaces fort complexes.

Si l'on privilégiait autrefois le calcul théorique, ce n'est pas seulement par souci de rigueur ou d'esthétique. C'est aussi parce que les calculs numériques étaient forts longs, voire impossibles à conduire. Aujourd'hui, un logiciel de calcul sur micro-ordinateur fournit en quelques secondes des centaines de décimales de π. Songeons aux grands anciens qui y consacraient des mois, voire des années de travail...

- La recherche elle-même s'appuie de plus en plus sur le calcul informatique.

L'exemple le plus fameux est donné par les théories du chaos, qui n'auraient pas existé sans l'ordinateur. On sait aussi que certains problèmes n'ont pas de solution analytique : il n'est donc pas déshonorant d'en chercher une solution numérique (penser par exemple à la mécanique céleste, et au problème des 3 corps ou des n corps).

Cette tendance de la physique moderne se retrouve dans l'enseignement, et se trouve prolongée (et encouragée) par le fait que les épreuves écrites des concours (même les plus prestigeux) s'appuient de plus en plus sur des représentations graphiques. J'en veux en donner ici quelques exemples, sans être exhaustif.

Toujours, les sciences physiques ont apprécié les figures et représentations graphiques :

- les chimistes raisonnent sur des diagrammes binaires, diagrammes potentiel-rédox, diagrames d'Ellingham, mais le tracé de ces diagrammes peut se faire à la main. Pour les solutions aqueuses, des logiciels spécialisés tenant compte de toutes les réactions chimiques permettent de savoir à tout moment l'état l'équilibre du milieu réactionnel...

- les électroniciens raisonnent avec des diagrammes de Bode, de Nyquist...

- l'analyse du signal fait largement appel à l'ordinateur pour tracer des spectres de Fourier, ou pour la transformée de Fourier ou de Laplace...

Chaque spécialité s'appuie donc depuis longtemps sur des représentations graphiques, mais qui avaient en commun de pouvoir être tracées à la main et en peu de temps.

Les quelques exemples ci-après sont différents de ces représentations traditionnelles, car ils font intervenir des courbes ou des surfaces mathématiques qui seraient pratiquement impossibles à tracer à la main. Il sera question ici :

- de l'étude de l'énergie potentielle, appliquée à la stabilité des équilibres,
- des portraits de phase,
- de l'oscillateur paramétrique

les trois sujets n'ayant que très peu à voir l'un avec l'autre.

L'ÉNERGIE POTENTIELLE

I. GÉNÉRALITÉS

Dans le cas d'un système conservatif, où toute les forces dérivent d'une énergie potentielle, on sait qu'un équilibre correspond à une zone où l'énergie potentielle à toutes ses dérivées partielles nulles. Dans l'espace : $\mathbf{f} = -\mathbf{grad}\, E_p$.

Si l'on doit raisonner à trois dimensions, il n'est pas facile de représenter une telle fonction $E_p(x, y, z)$. Mais si l'on peut se limiter à l'étude dans un plan xOy, alors il suffit d'étudier la surface $E_p(x, y)$. S'il est souvent des cas où l'on prévoir, par des arguments qualitatifs, l'allure de cette fonction, l'ordinateur peut nous permettre d'en avoir très vite une représentation imagée, par :

- une représentation en 3 dimensions de $z = E_p(x, y)$
- ou bien une carte des courbes équipotentielles E_p = cte.

Lorsqu'on représente une surface donnant $E_p(x, y)$, on observe des *sommets*, des *cuvettes ou puits de potentiel* et des *cols*. Dans ce type de représentation très parlante, les équipotentielles sont les *courbes de niveau*, et les lignes de champ sont les *lignes de plus grande pente*.

Citons dans le désordre quelques propriétés des équipotentielles et des lignes de champ.

- les lignes de force ont les mêmes propriétés de symétrie que leurs causes (dans la mesure où la force est un vrai vecteur, ou vecteur polaire). Cela signifie que si le problème présente un plan de symétrie, le champ en un point de ce plan est parallèle au plan.

- une ligne de force ne peut pas se refermer sur elle-même (ce serait contradictoire avec l'idée de *ligne de plus grande pente*),

- les lignes de force ne peuvent pas se croiser, sauf en des points où le champ est soit nul, soit infini,

- si deux équipotentielles se croisent, c'est en un col de potentiel, et le champ est nul en ce point...

Ces règles, avec d'autres, permettent au physicien de tracer a priori, dans de nombreux cas, l'allure d'une carte de champ et de potentiel. Elles lui permettent aussi d'interprêter une carte de champ tracée par ordinateur. On en va voir quelques exemples.

II. POTENTIEL DE QUATRE CHARGES IDENTIQUES FORMANT UN CARRÉ

On considère 4 charges ponctuelles et identiques Q situées dans le plan xOy aux points $A_1(a, 0)$, $A_2(0, a)$, $A_3(-a, 0)$ et $A_4(0, -a)$. On limite l'étude au plan xOy, dans lequel on a des symétries extrêmement nombreuses. Le potentiel électrostatique en M(x, y) est alors :

$$V(M) = (Q / 4\pi\varepsilon_0) \cdot (1/A_1M + 1/A_2M + 1/A_3M + 1/A_4M)$$

Supposons que l'on veuille tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles du champ dans ce plan. On utilise pour cela :

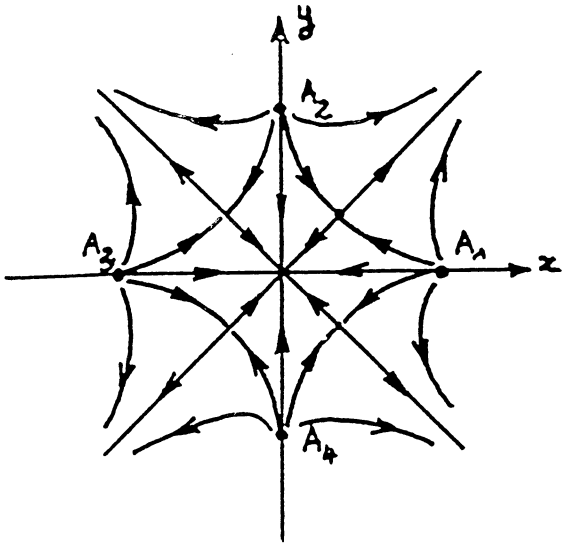
- les symétries du problème : s'il y a un plan de symétrie, le champ électrique en un point de ce plan y est parallèle, et les équipotentielles y sont donc perpendiculaires,

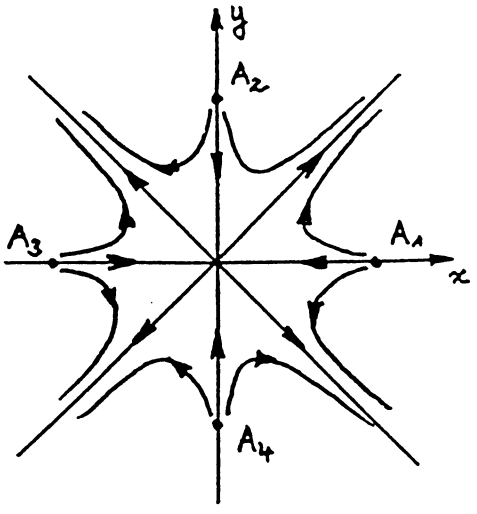
- au voisinage d'une charge, on a la carte de champ d'une charge unique (l'effet des autres charges étant négligeable),

- très loin de la distribution, on a la carte de champ d'une charge ponctuelle 4Q.

Ces considérations ne permettent pas de choisir entre les deux allures suivantes :

- dans le premier cas, le point O est un puits de potentiel, entouré de 4 sommets et 4 cols,
- dans le second, il n'y a pas de puits de potentiel en O, qui est un col entre les 4 sommets.





Pour trancher, il y a quatre méthodes :

- Calculer à la main le D.L. du potentiel au voisinage de O, à l'ordre le plus bas. Compte tenu des symétries du problème, ce développement ne peut pas comporter des termes impairs en x ou y, et on le cherche donc sous la forme :

$$V(x, y) = V(0, 0) + \alpha\,(x^2 + y^2)$$

Si $\alpha > 0$, alors O est un puits de potentiel. De fait, le calcul est assez facile, et conduit à :

$$V(x, y) = (Q / 4\pi\varepsilon_0 a)\,.\,(4 + x^2/a^2 + y^2/a^2)$$

- Le D.L. peut aussi être calculé avec un logiciel de calcul formel (certaines calculettes le permettent).

- Tracer avec un ordinateur l'allure de $E_p(x, y)$ permet immédiatement d'avoir une idée claire de ce qui se passe. Certes, une simulation n'est pas (pas encore ?) une preuve mathématique... Néanmoins, il apparaît immédiatement que le point O est une cuvette de potentiel.

- Enfin, pour qui n'aime pas les calculs fastidieux et n'a pas d'ordinateur pour calculer à sa place, il reste la science. Dans une zone vide de charge, le potentiel électrostatique obéit à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \partial^2V/\partial x^2 + \partial^2V/\partial y^2 + \partial^2V/\partial z^2 = 0$$

Cela oblige à considérer les trois coordonnées, et on ne peut plus se limiter au plan xOy.

Au voisinage de O, les symétries font que l'on cherche un D.L. sous la forme :

$$V(x, y, z) = V(0, 0, 0) + \alpha\,(x^2 + y^2) + \beta\,z^2$$

Si l'on écrit que cette fonction vérifie l'équation de Laplace, on obtient : $4\alpha + 2\beta = 0$.

Or, il est clair que pour un point M(0, 0, z), le champ s'éloigne de O. Autrement dit, une charge de même signe que Q astreinte à se déplacer sur Oz serait en équilibre instable. Cela signifie que l'on a un sommet de potentiel de V(0, 0, z) en O, et donc que $\beta < 0$. Donc, on a forcément $\alpha > 0$.

En conclusion, la dernière méthode est évidemment la plus élégante, celle qui fait appel à la physique plus qu'au calcul. Le calcul est indispensable si on veut connaître exactement α ou β. L'utilisation de l'informatique, si elle ne résoud pas tout, permet de se faire une idée, d'orienter les raisonnements, voire de détecter une erreur manifeste dans les calculs.

TRACÉ DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

I. POTENTIEL CRÉÉ PAR QUATRE CHARGES IDENTIQUES FORMANT UN CARRÉ

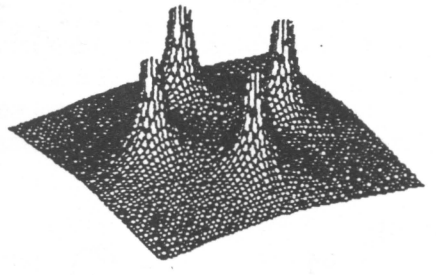
On suppose quatre charges Q placées dans le plan xOy en (1, 0), (0, 1), (-1, 0) et (0, -1). Pour simplifier, on prend dans toute la suite Q/(4*Pi*epsilon0) = 1. On fait l'étude dans le plan xOy.

```
> restart;
> Pot := 0.2 * ( ((x-1)^2 + y^2)^(-.5) + ((x+1)^2 + y^2)^(-.5) + (x^2 + (y-1)^2)^(-.5) + (x^2 + (
> y+1)^2)^(-.5) ):
```

(Le facteur multiplicatif 0.2 sert uniquement à tracer une plus jolie courbe en mode "constrained".)

```
> plot3d(Pot, x=-2..2, y=-2..2, view=0..2, grid=[61, 61], scaling=CONSTRAINED, orientati
> on=[60, 60], title=`Potentiel de quatre charges identiques, dans le plan des charges`,
> shading=NONE);
>
```

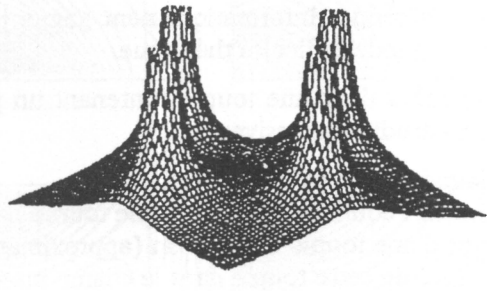
Potentiel de quatre charges identiques, dans le plan des charges



Examinons un peu plus en rase-mottes ce qui passe au centre.

```
> plot3d(Pot, x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, view=0..2, grid=[61, 61], scaling=CONSTRAINED, or
> ientation=[50, 75], title=`Potentiel de quatre charges identiques, dans le plan des char
> ges`, shading=NONE);
>
```

Potentiel de quatre charges identiques, dans le plan des charges



On a manifestement au centre une cuvette de potentiel. Une charge positive placée au centre serait en équilibre stable (seulement si elle est astreinte à se déplacer dans le plan

xOy).

Pour se convaincre totalement, il est possible de calculer le D.L. à l'ordre 2 du potentiel au voisinage de O, grâce à la fonction mtaylor pour les fonctions de plusieurs variables.

```
> readlib(mtaylor):
> Pot := ( ((x-1)^2 + y^2)^(-.5) + ((x+1)^2 + y^2)^(-.5) + (x^2 + (y-1)^2)^(-.5) + (x^2 + (y+1)
> ^2)^(-.5) );
```

$$Pot := \frac{1}{\left((x-1)^2+y^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left((x+1)^2+y^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left(x^2+(y-1)^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left(x^2+(y+1)^2\right)^{.5}}$$

```
> mtaylor(Pot, [x, y], 3);
```

$$4 + 1.000000000\,x^2 + 1.000000000\,y^2$$

Ce développement que l'on a au voisinage de O une cuvette en forme de paraboloïde. On peut pousser l'analyse en faisant le développement du potentiel pour M(x, y, z) au voisinage de O. Il faut alors intégrer la coordonnée z dans l'expression du potentiel.

```
> Pot := ( ((x-1)^2 + y^2 + z^2)^(-.5) + ((x+1)^2 + y^2 + z^2)^(-.5) + (x^2 + (y-1)^2 + z^2)^(-
> .5) + (x^2 + (y+1)^2 + z^2)^(-.5) );
```

$$Pot := \frac{1}{\left((x-1)^2+y^2+z^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left((x+1)^2+y^2+z^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left(x^2+(y-1)^2+z^2\right)^{.5}} + \frac{1}{\left(x^2+(y+1)^2+z^2\right)^{.5}}$$

```
> mtaylor(Pot, [x, y, z], 3);
```

$$4 + 1.000000000\,x^2 + 1.000000000\,y^2 - 2.0\,z^2$$

Sur ce développement, il apparaît immédiatement que l'équilibre est instable dans le direction Oz, ce qui est physiquement évident. D'autre part, l'équation de Laplace est manifestement vérifiée par un tel potentiel.

III. UN DÉLICAT PROBLÈME DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE (d'après ENS ULM MP 1999)

L'utilisation de courbes obtenues informatiquement gagne jusqu'au concours d'entrée à l'ENS Ulm, qui a toujours été connu pour sa grande difficulté théorique.

On s'intéresse ici la manière dont une toupie contenant un petit aimant peut léviter au dessus d'un aimant cylindrique. Le problème étudie successivement :

- le champ magnétique créé par la base,
- l'impossibilité de l'équilibre si la toupie ne tourne pas,
- le mouvement d'une toupie en rotation (approximation gyroscopique),
- enfin, la stabilité de cette toupie dans le champ magnétique.

Pour étudier la stabilité, on calcule l'énergie potentielle en coordonnées cylindriques, et on montre qu'elle peut se développer sous la forme :

$$E_p = M\,Z + (1 + Z^2)^{-3/2} + (3/8)\,R^2\,(2 - 5\,Z^2)\,(1 + Z^2)^{-7/2}$$

(Dans cette expression, $M = m/m_0$, $Z = z/z_0$ et $R = r/r_0$ sont des coefficients sans dimensions, proportionnels à m, r et z.)

Par des dérivations de cette expression, on peut montrer qu'une condition d'équilibre stable dans toutes les directions (c'est-à-dire pour des variations de r ou de z) est que :

$$0{,}5 < Z < 0{,}632 \qquad \text{et} \qquad 0{,}818 < 0{,}859$$

Plus originale (pour un concours aussi prestigieux) est la cinquième partie du problème, qui propose une étude graphique de cette énergie potentielle. La carte des équipotentielles est donnée pour :

(a)	M = 0,810	situation instable
(b)	M = 0,818	limite basse de la stabilité
(c)	M = 0,840	situation stable
(d)	M = 0,848	stabilité maximale
(e)	M = 0,855	situation stable
(f)	M = 0,859	limite haute de la stabilité
(g)	M = 0,862	situation instable

Il était demandé, pour les cas (a), (c) (e) et (g), de dessiner sur ces cartes :

- les lignes de champ de la résultante des forces subies par la toupie,
- les points d'équilibre stable,
- les points d'équilibre instables,
- quelques trajectoires (cette dernière question est particulièrement vague !).

Pour répondre, il faut donc identifier clairement la cuvette de potentiel lorsqu'elle existe (équilibre stable) et les cols de potentiel (équilibre instable). Cela demande d'avoir bien compris que :

- un col est reconnaissable par le fait que deux équipotentielles s'y croisent,
- un puits de potentiel est entouré par des équipotentielles fermées sur elles-mêmes.

Une difficulté est certainement qu'il n'est pas facile de voir du premier coup d'oeil si on "monte" ou si on "descend" en passant d'une équipotentielle à l'autre. Cela demande un mélange d'intuition, de vision dans l'espace et d'habitude. Les choses sont beaucoup plus parlantes avec une représentation du potentiel en trois dimensions : la cuvette et les cols de potentiel apparaissent alors immédiatement.

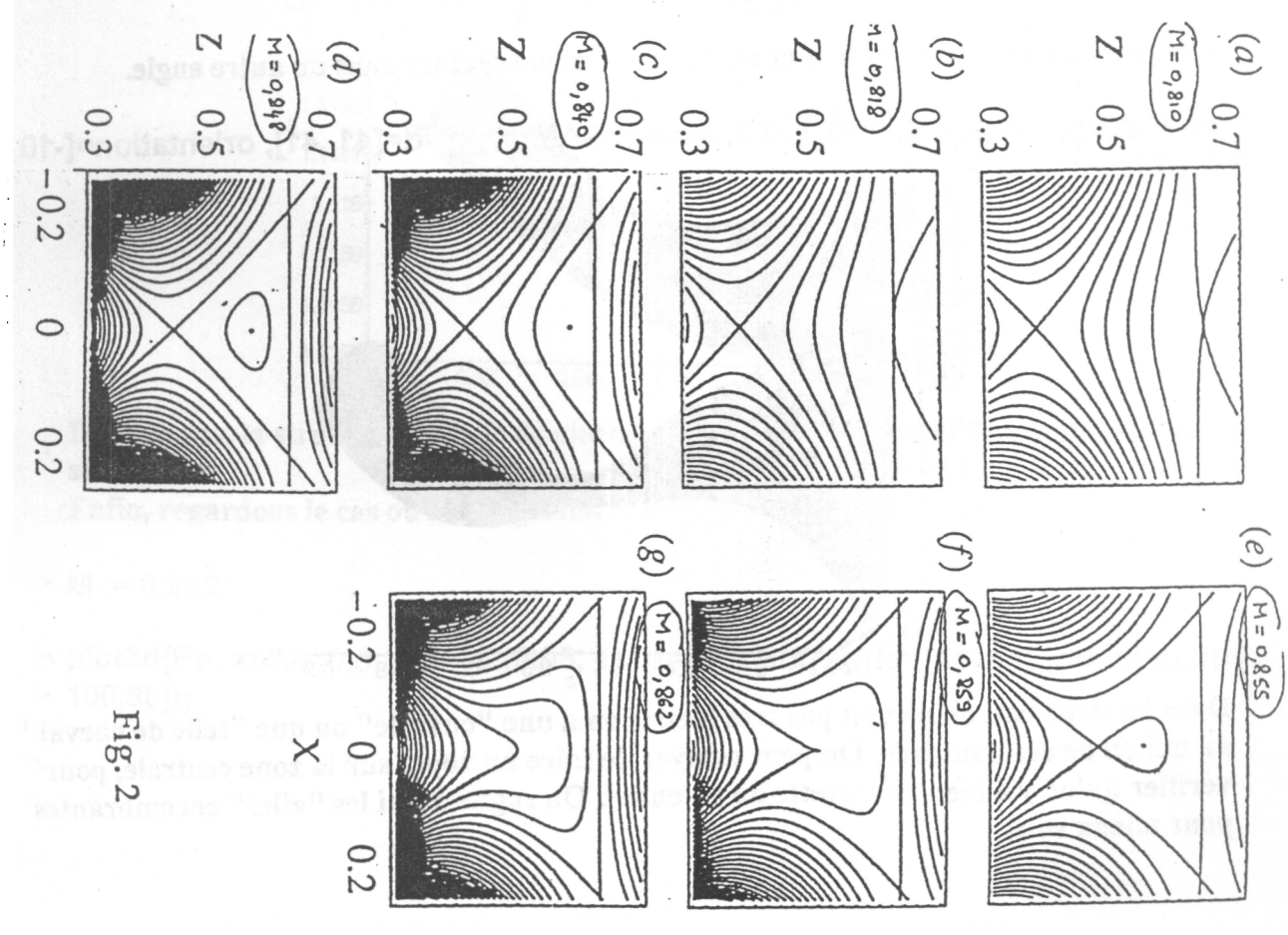


Fig. 2

LÉVITATION D'UNE TOUPIE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

```
> restart;
```

```
> Ep := M*z + (1 + z^2)^(-1.5) + (3/8)*r^2*(2 - 5*z^2)*(1 + z^2)^(-3.5);
```

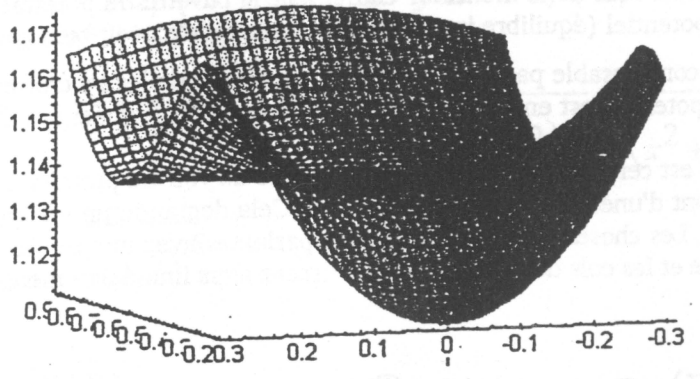
$$Ep := M z + \frac{1}{\left(1+z^2\right)^{1.5}} + \frac{3}{8}\frac{r^2\left(2-5z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^{3.5}}$$

On commence en prenant pour M la valeur correspondant à la stabilité maximale.

```
> M := 0.848:
```

```
> plot3d(Ep, z=0.2..0.9, r=-0.3..0.3, axes=FRAMED, grid=[41, 41], orientation=[160
> ,80]);
```

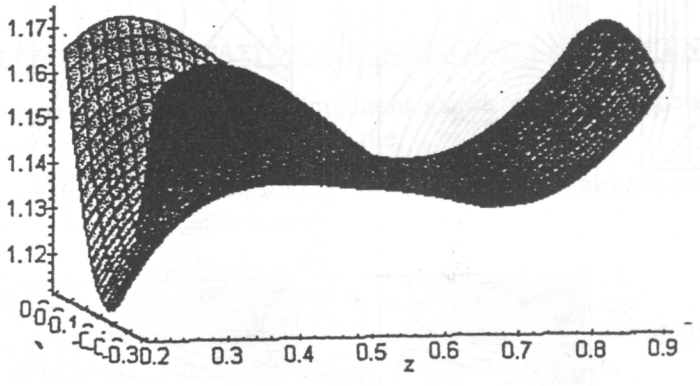
```
>
```



On peut changer l'orientation et regarder la même surface sous un autre angle.

```
> plot3d(Ep, z=0.2..0.9, r=-0.3..0.3, axes=FRAMED, grid=[41, 41], orientation=[-10
> 0,80]);
```

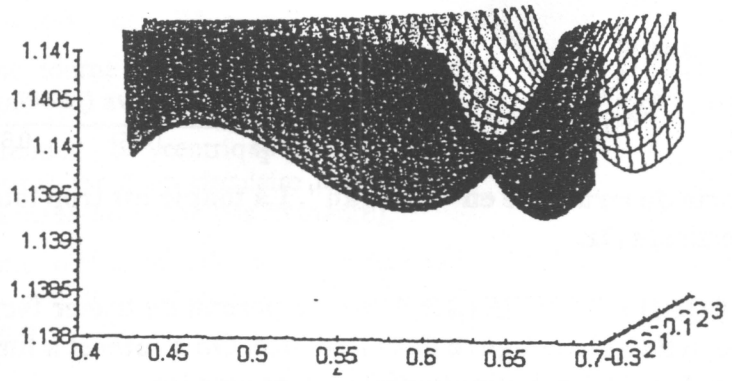
```
>
```



Dans les deux cas, on ne voit pas très bien si on a une "cuvette" ou une "selle de cheval" au milieu de cette surface. On peut essayer de faire un zoom sur la zone centrale, pour vérifier qu'on y a bien un cuvette de potentiel. On rogne aussi les "ailes" encombrantes pour mieux voir.

```
> plot3d(Ep, z=0.4..0.7, r=-0.3..0.3, view=1.138..1.141, axes=FRAMED, grid=[41, 4
> 1], orientation=[-80,80]);

>
```

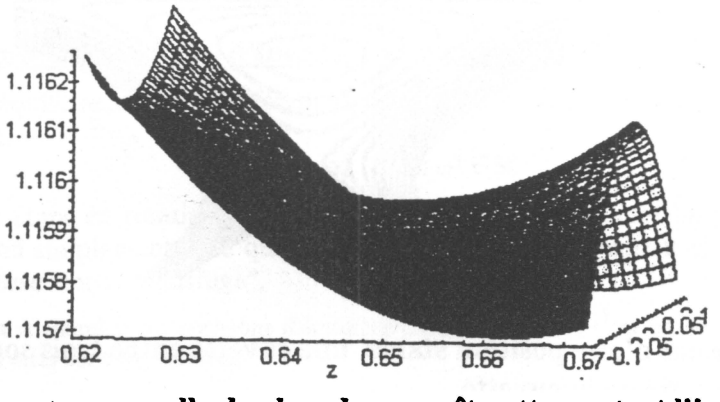


Avec cette dernière figure, il n'y a aucun doute sur la stabilité de l'équilibre dans la région centrale. On peut comparer avec la situation instable M = 0,810, en regardant de très près la zone centrale.

```
> M := 0.810:

> plot3d(Ep, z=0.62..0.67, r=-0.12..0.12, axes=FRAMED, grid=[41, 41], orientation
> =[-80,80]);

>
```



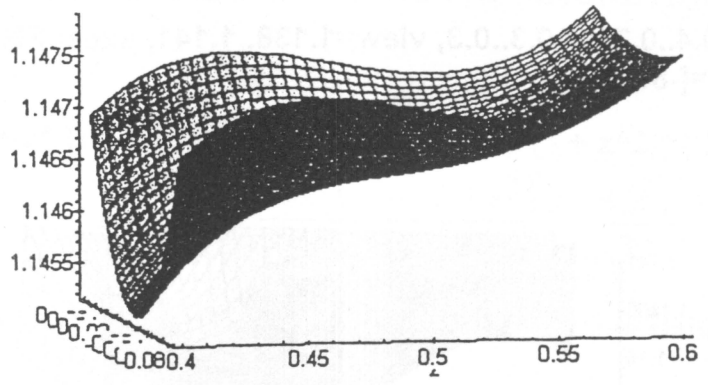
Dans ce cas, la structure en selle de cheval apparaît nettement, et l'instabilité a lieu selon r.

Enfin, regardons le cas où M est grand.

```
> M := 0.862:

> plot3d(Ep, z=0.4..0.6, r=-0.08..0.08, axes=FRAMED, grid=[41, 41], orientation=[-
> 100,80]);

>
```



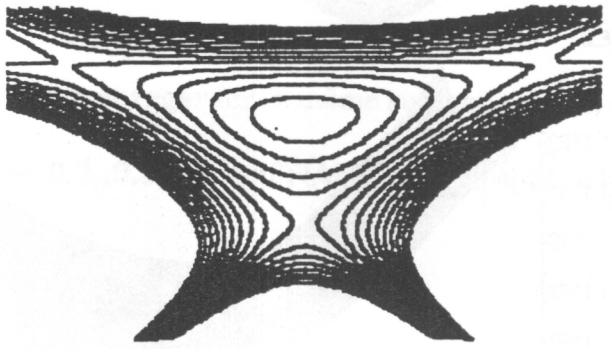
On a ici une sorte de structure en "tobogan". La toupie est trop lourde, et l'instabilité a lieu selon la verticale Oz.

TRACÉ DES ÉQUIPOTENTIELLES. Maple permet de tracer facilement la carte des équipotentielles telle qu'elle figure dans l'énoncé. On a intérêt à limiter l'amplitude avec view pour obtenir des équipotentielles rapprochées.

```
> M := 0.848:

> with(plots):
> contourplot(Ep, r=-0.25..0.25, z=0.3..0.7, grid=[61, 61], view=1.1385..1.142, shad
> ing=NONE, thickness=2);

>
```



On a là, dans le cas d'une position stable, une cuvette entre trois sommets, et trois cols permettant de sortir de la cuvette.

IV. LES POINTS DE LAGRANGE (d'après concours Mines-Ponts M 1989)

Il s'agit d'étudier l'équilibre d'un point matériel de masse faible soumis à l'attraction gravitationnelle de deux astres. Les astres sont représentés par les points matériels M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2.

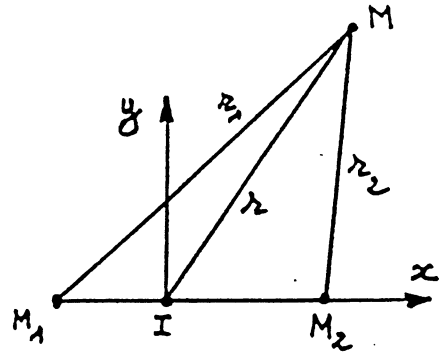
On les suppose séparés par la distance R constante, et on note I leur barycentre. On a donc :

$IM_1 = m_2R/(m_1 + m_2)$ et $IM_1 = m_1R/(m_1 + m_2)$

Enfin, le système tourne par rapport au référentiel barycentrique (supposé galiléen) avec le vecteur rotation ω.

Dans le référentiel barycentrique galiléen, le mouvement des deux astres est donc circulaire uniforme (il serait elliptique si la distance M_1M_2 n'était pas constante).

On utilise comme référentiel d'étude le référentiel synodique Ixyz, tournant avec les deux astres, tel que $\mathbf{u_x}$ soit colinéaire à $\mathbf{M_1M_2}$ et que $\omega = \omega\,\mathbf{u_z}$.



Enfin, on peut montrer en étudiant le système formé par les deux astres M_1 et M_2 que ω n'est pas quelconque. Il suffit d'écrire, par exemple pour M_2, la relation fondamentale de la dynamique du point :

$$d^2IM_2/dt^2 = -Gm_1m_2/R^2\,\mathbf{u_x}$$

soit, pour un mouvement circulaire uniforme autour de I : $m_2\,R\,\omega^2/(m_1 + m_2) = G\,m_1m_2/R^2$

dont il ressort que : $\omega^2 = G\,(m_1 + m_2)\,/\,R^3$

Remarque : si $m_2 << m_1$, on a là la troisième loi de Kepler.

1. Étude du potentiel gravitationnel seul

L'énergie potentielle gravitationnelle vaut $E_p(M) = -Gm(m_1/r_1 + m_2/r_2)$. Si la particule M n'était soumise qu'à ce seul potentiel, il n'y aurait qu'une seule position d'équilibre stable, entre M_1 et M_2. Comme c'est évidemment un col de potentiel, cet équilibre ne saurait être stable.

2. Prise en compte de la force d'inertie d'entraînement

Ici, on étudie l'équilibre dans un référentiel non galiléen. Il faut donc tenir compte de la force d'inertie d'entraînement :

$$\mathbf{f_{ie}} = -m\,\mathbf{a_e} = m\,\omega^2\,\mathbf{GM}$$

(le référentiel synodique étant en rotation uniforme par rapport au référentiel barycentrique, l'accélération d'entraînement correspond simplement à ce que l'on aurait pour un mouvement circulaire uniforme). Cette force d'inertie est la fameuse "force centrifuge".

Remarque : si on se limite à chercher les positions d'équilibre dans le plan Ixy, c'est parce que trois forces ne peuvent avoir de somme nulle que si elles sont coplanaires.

Il est aisé de montrer que cette force d'inertie dérive du potentiel : $-(1/2)\,m\,\omega^2\,r^2$

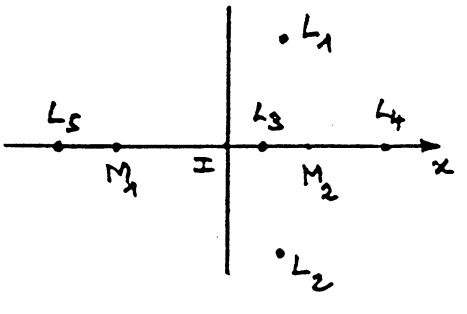
En ajoutant le potentiel gravitationnel au potentiel dont dérive la force centrifuge, et en exprimant la constante G en fonction de ω^2, on a :

$$E_p(M) = -m\,\omega^2\,R^2\,[\,m_1R/(m_1 + m_2)r_1 + m_1R/(m_1 + m_2)r_2 + r^2/2R^2\,]$$

• Étude informatique. On peut s'aider de Maple pour étudier $E_p(M)$, ou plus simplement $f(x, y) = E_p(M)/(m\omega^2R^2)$. Il apparaît immédiatement sur les tracés qu'il y a maintenant 5 positions d'équilibre :

- 3 sont sur l'axe Ix : ce sont les points L_3, L_4 et L_5, qui correspondent à des cols de potentiel,

- 2 sont en dehors de Ix, et évidemment symétriques par rapport à cet axe. Ces points L_1 et L_2 sont des sommets de potentiel.



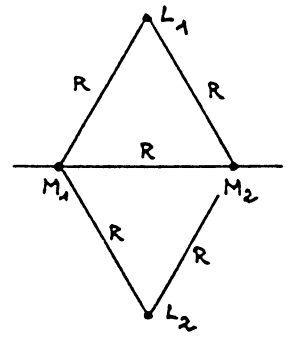
• Étude théorique. Les candidats, non munis d'ordinateurs (et avec seulement des calculettes des années 80) devaient évidemment faire de longs calculs pour prouver l'existence et trouver la position de ces points.

- Pour étudier L_3, L_4 et L_5, on fait $y = 0$, et on traduit que $\partial f/\partial x = 0$. C'est assez laborieux, car l'or doit distinguer 3 cas selon que x/R est plus petit ou plus grand que $-m_2/(m_1 + m_2)$ et $m_1/(m_1 + m_2)$.

- Pour étudier L_1 et L_2, on écrit que $\partial f/\partial x = 0$ et $\partial f/\partial y = 0$ pour $y \neq 0$. Au prix d'un peu de calcul, on montre que ces positions d'équilibre sont telles que :

$r_1 = r_2$: le triangle M_1M_2M est donc isocèle,

$y_0 = R\sqrt{3}/2$: il en découle que $r_1 = r_2 = R$, et le triangle M_1M_2M est équilatéral.



3. Stabilité de ces positions d'équilibre

Si l'on n'avait que les forces de gravitation et la force d'inertie d'entraînement, aucune de ces positions d'équilibre ne pourrait être stable, puisqu'aucune ne correspond à une cuvette de potentiel. On peut donc affirmer que l'immobilité de M dans le référentiel synodique est sinon impossible, du moins instable.

Mais si M s'écarte d'une de ses positions d'équilibre, il prend de la vitesse, et il faut tenir compte de la force d'inertie complémentaire :

$$\mathbf{f_{ic}} = -2\,m\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

Pour cette étude, la méthode est la suivante :

- On fait un D.L. de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre (x_0, y_0), en posant $\xi = x - x_0$ et $\eta = y - y_0$.

- En introduisant la matrice colonne $\mathbf{X}$ formée par ξ, η, $d\xi/dt$ et $d\eta/dt$, on peut écrire la R.F.D. sous la forme d'une relation matricielle : $d\mathbf{X}/dt = M\mathbf{X}$, où M est une matrice 4×4.

- Pour ce système d'équations linéaires du premier ordre, on cherche alors des solutions sous la forme d'une somme d'exponentielles.

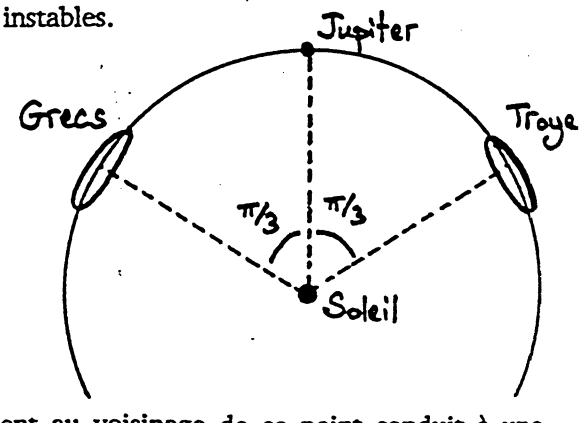
• Dans le cas des points L_1 et L_2, et en notant $\Lambda_i = \omega\,\lambda_i$ les valeurs propres de la matrice M, on trouve que les λ_i sont solution de l'équation bicarrée : $\lambda^4 + \lambda^2 + (27/4)\,m_1m_2/(m_1 + m_2)^2 = 0$.
En traduisant que l'équilibre est stable si la partie réelle de l est négative ou nulle, on montre que l'équilibre est stable si : **$m_1/m_2 > 24{,}96$ ou $m_2/m_1 > 24{,}96$.**

(Dans le cas de la Terre et de la Lune, par exemple, ce rapport vaut environ 80, de sorte que les deux points de Lagrange sont stables.)

• Pour les autres points, une étude analogue montre qu'ils sont instables.

d. Applications

• Dans le cas du système Soleil-Jupiter, le rapport des masses est de l'ordre de 1000. Les points L_1 et L_2 sont donc des positions d'équilibre stable. Il se trouve qu'ils sont effectivement occupés par des groupes de satellites nommés les Grecs (Achille, Nestor, Agamemnon...) et les Troyens (Priam, Énée...). Si Hector figure parmi les Grecs et Patrocle parmi les Troyens, c'est que l'usage de séparer les deux camps ne s'est pas établi instantanément.



• Le point de Lagrange L_3 est instable. L'étude du mouvement au voisinage de ce point conduit à une superposition de termes sinusoïdaux et de termes hyperboliques. Néanmoins, ces termes hyperboliques disparaissent si les conditions initiales sont bien choisies. C'est ce qui fait que le point L_3 est utilisé pour le système Soleil-Terre, pour une sonde spatiale d'observation de l'environnement solaire, lancée par la NASA en 1978. Évidemment, comme il est impossible d'avoir exactement les conditions initiales voulues, la sonde tend à s'éloigner de sa position, et il est nécessaire de rectifier régulièrement sa trajectoire.

POINTS DE LAGRANGE

I. POTENTIEL GRAVITATIONNEL DE DEUX ASTRES

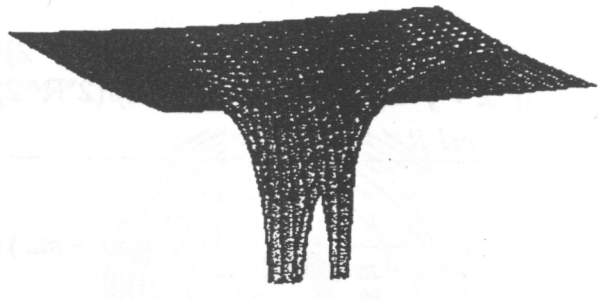
Les astres sont supposés ponctuels, de masses respectives m1 et m2. L'origine est prise au centre de masse du système. On trace la fonction V(M) = Ep(M)/Gm = - m1/r1 - m2/r2.

```
> restart;
> V := - m1/((x + m2*R/(m1 + m2))^2 + y^2)^0.5 - m2/((x - m1*R/(m1 + m2))^2 + y^
> 2)^0.5;
```

$$V := -\frac{m1}{\left(\left(x+\frac{m2\,R}{m1+m2}\right)^2+y^2\right)^{.5}}-\frac{m2}{\left(\left(x-\frac{m1\,R}{m1+m2}\right)^2+y^2\right)^{.5}}$$

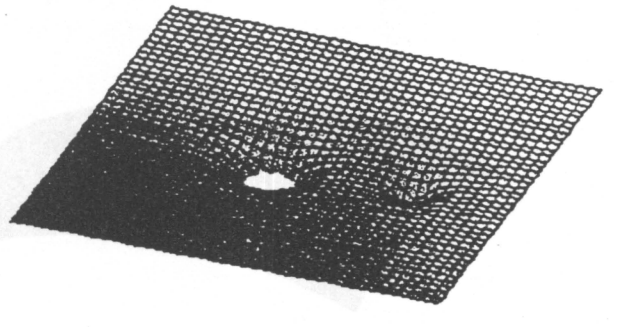
On prend par exemple R = 1, m1 = 3, m2 = 1.

```
> R :=1: m1 := 3: m2 := 1:
> plot3d(V, x=-4..4, y=-4..4, view=-12..0, orientation=[-70, 110], grid=[41, 41], scali
> ng=UNCONSTRAINED);
>
```



La même vue d'au dessus, pour mieux voir le col de potentiel.

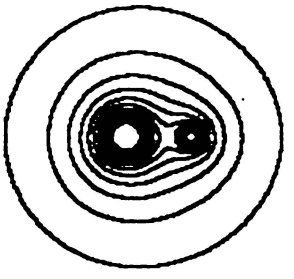
```
> plot3d(V, x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, view=-20..0, orientation=[-70, 10], grid=[41, 41]
> , scaling=UNCONSTRAINED);
```



Si on veut mieux voir les équipotentielles, on peut faire un contourplot (il faut calculer beaucoup de points pour ne pas avoir des courbes trop irrégulières).

```
> with(plots):
> contourplot(V, x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5, view=-15..0, orientation=[-90, 0], grid=[20
> 0, 200], scaling=CONSTRAINED, color=black, thickness=2);

>
```



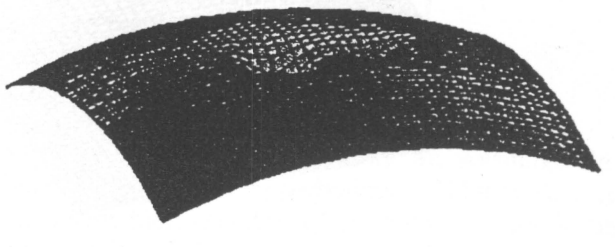
II. POTENTIEL EN PRENANT EN COMPTE LA FORCE D'INERTIE D'ENTRAINEMENT.

On trace maintenant la fonction $f(x, y) = Ep/(m*omega^2*R^2)$.

```
> restart;
> f := - (m1/(m1 + m2))*R/((x + m2*R/(m1 + m2))^2 + y^2)^0.5 - (m2/(m1 + m2))*R/(
> (x - m1*R/(m1 + m2))^2 + y^2)^0.5 - (x^2 + y^2)/(2*R^2);
```

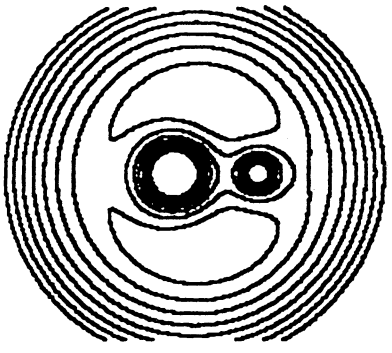
$$f := -\frac{m1\,R}{(m1+m2)\left(\left(x+\frac{m2\,R}{m1+m2}\right)^2+y^2\right)^{.5}} - \frac{m2\,R}{(m1+m2)\left(\left(x-\frac{m1\,R}{m1+m2}\right)^2+y^2\right)^{.5}} - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{R^2}$$

```
> R :=1: m1 := 3: m2 := 1:
> plot3d(f, x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5, view=-10..0, orientation=[-110, 45], grid=[41, 41
> ], scaling=UNCONSTRAINED);
>
```



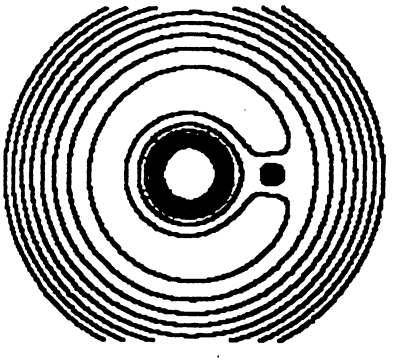
La figure obtenue est la superposition de la précédente et d'un paraboloïde de révolution. Elle fait bien apparaître les cinq points de Lagrange. On peut les voir aussi en traçant les équipotentielles.

```
> with(plots):
> contourplot(f, x=-2.5..2.5, y=-2..2, view=-3..0, orientation=[-90, 0], grid=[200, 20
> 0], scaling=CONSTRAINED, color=black, thickness=2);
>
```



Enfin, on peut regarder ce que deviennent ces résultats dans le cas où m1 est beaucoup plus grand que m2.

```
> R :=1: m1 := 20: m2 := 1:
> contourplot(f, x=-2.5..2.5, y=-2..2, view=-3..0, orientation=[-90, 0], grid=[200, 20
> 0], scaling=CONSTRAINED, color=black, thickness=2);
>
```



On constate que les points L3 et L4 sont pratiquement symétriques par rapport à M2.

LE PORTRAIT DE PHASE

Le portrait de phase est à la mode. Il y a encore quelques années, seuls quelques spécialistes savaient de quoi il retournait. Certes, les physiciens connaissaient l'espace des phases dans le cadre de la mécanique statistique (ou thermodynamique statistique), mais ne voyaient pas l'intérêt que cela pouvait avoir pour un système dynamique simple, n'ayant que peu de degrés de liberté.

C'est la physique du chaos qui a donné au portrait de phase toute son importance, au point qu'on a jugé utile d'en parler très tôt aux élèves, appliqué à des systèmes simples.

I. RAPPELS ET EXEMPLES SIMPLES

1. Rappels

Un système est décrit par n variables, l'espace à n dimensions que l'on peut construire avec ces n variables constitue l'espace des phases. Chaque état du système est un point dans l'espace des phases. Au cours de son évolution, le système décrit une courbe dans l'espace des phases : c'est une trajectoire de phase.

Par exemple, si l'évolution du système est représentée par n équations différentielles d'ordre 1, l'espace des phases a n dimensions, correspondant aux n conditions initiales qu'il faut se donner pour connaître l'évolution du système. Si on a n équations d'ordre 2, l'espace des phases est de dimension 2n.

• Pour un système mécanique à un degré de liberté x, l'état du système à t donné est caractérisé par la donnée de x et $v = dx/dt$. L'espace des phases a deux dimensions, et l'on représente les trajectoires de phase dans le plan (x, v). On notera les propriétés suivantes pour un système évoluant librement :

- on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre,
- deux trajectoires de phase ne peuvent pas se croiser, (car cela voudrait dire que le système peut avoir deux évolutions différentes pour les mêmes conditions initiales).

• Lorsque l'espace des phases comporte de nombreuses dimensions, on est obligé de prendre l'intersection des trajectoires de phase avec des plans particuliers (sections de Poincaré). Cela devient très compliqué à la fois à imaginer simplement et à tracer.

Ainsi, pour un système mécanique à deux degrés de liberté, on a un espace à quatre dimensions, pour lequel, on ne sait pas donner de représentation simple. Même pour un système aussi simple que deux oscillateurs couplés, on n'a pas de portrait de phase simple.

2. Exemples élémentaires (non détaillés car très classiques)

• *Oscillateur harmonique*, tel qu'une masse accrochée à un ressort de raideur k : la conservation de l'énergie mécanique s'écrit : $E_m = mv^2/2 + kx^2/2$. Il est alors immédiat que les trajectoires de phase sont des ellipses. Cela peut aussi se montrer en considérant le fait que x est de la forme $x = X_0 \cos\omega t$.

• *Oscillateur harmonique amorti.* La trajectoire de phase s'enroule autour de O, qui est un point attracteur.

• *Pendule simple*, dont le mouvement obéit à l'équation : $d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \sin\theta = 0$. Il est commode de tracer le portrait de phase à partir de l'équation traduisant la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = m\,v(t)^2/2 - m\,g\,l\cos\theta = cte$$

En traçant d'abord l'énergie potentielle, on obtient une allure qualitative du portrait de phase.

Cet exemple fait apparaître deux notions nouvelles :

- la notion de séparatrice, pour la courbe séparant les courbes fermées sur elles-mêmes (oscillations périodiques) et les courbes non fermées (rotation du pendule).
- la notion de point d'arrêt. Lorsqu'une séparatrice rencontre l'axe horizontale, le mouvement s'arrête.

3. Un exemple très rudimentaire de système écologique

(Voir P.W. Atkins, Chaleur et Désordre, Éditions Pour la Science, p. 169)

On considère un territoire avec une population de renards R et une population de lapins L. Le raisonnement est analogue à celui que l'on peut faire pour un système chimique, renards et lapins jouant ici le rôle de réactifs. Les réactions sont les suivantes :

L + H → 2 L (l'herbe H est supposée être en quantité illimitée)
R + L → 2 R
R → Fourrures

La première réaction traduit le fait que, chez les lapins, l'excédent des naissances fait augmenter la population. Il en va de même pour les renards, à la différence que les lapins ne sont pas en quantité illimitée. La troisième réaction vient de ce que les renards ont aussi des prédateurs (les trappeurs du grand nord), et que le prélèvement dépend de la quantité de renards.

En appliquant à cet ensemble de réactions les méthodes de la cinétique chimique, on écrit :

$$dL/dt = k_1 H L - k_2 R L \qquad \text{et} \qquad dR/dt = k_2 R L - k_3 R$$

où H, k_1, k_2 et k_3 sont des constantes.

Pour ce système, l'espace des phases a deux dimensions : L et R. Si l'on trace le portrait de phase de ce système, on trouve qu'il oscille périodiquement. Dans un cas particulier, les populations L et R restent constantes.

On voit sur ce modèle rudimentaire comment des systèmes de toutes sortes (écologie, écnonomie...) peuvent être modélisés par un ensemble d'équations différentielles et étudiés dans un espace des phases adapté.

La population des renards et des lapins est désignée par les variables R et L. Un modèle simple pour décrire l'évolution de ces variables peut être donné par les deux équations suivantes :

```
> a1 := diff(L(t),t)=L-L*R;
```

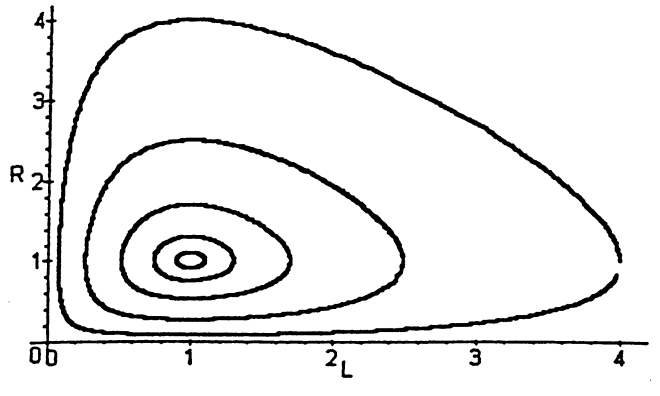
$$a1 := \frac{\partial}{\partial t} L(t) = L - L\,R$$

```
> a2 := diff(R(t),t)=L*R-R;
```

$$a2 := \frac{\partial}{\partial t} R(t) = L\,R - R$$

À partir de là, il est possible de tracer des trajectoires de phase. L'espace des phases a ici deux dimensions, puisque l'état du système à un instant donné est entièrement défini par la donnée de R et L.

```
> with(DEtools):
> DEplot([a1,a2], [L,R], t=0..8, {[0,1.1,1],[0,1.3,1],[0,1.7,1],[0,2.5,1],[0,4,1]}, scene=[
> L,R], stepsize=.02, thickness=2);
>
```



Notons que, pour ce système d'équations, le point d'équilibre correspond à L = R = 1.

4. L'attracteur de Lorenz, premier attracteur étrange

(Voir James Gleick, La Physique du Chaos, Champs Flammarion, chapitre 1)

La physique du chaos a réellement commencé de se développer lorsque Lorenz, en 1960, a proposé un modèle météorologique très simplifié se réduisant à douze équations. Puis, il a confié ces équations à un des premiers ordinateurs.

Il a alors constaté la grande sensibilité de son modèle aux conditions initiales. Ce fut la grande découverte et le grand étonnement de Lorenz. C'est là le fameux "effet papillon", qui fait qu'il est impossible de prédire le temps au delà de quelques jours. Ce fut le point de départ de la théorie moderne du chaos. Ainsi, c'est cette même sensibilité aux conditions initiales qui fait que l'on est incapable d'affirmer si le système solaire est stable à long terme : la mécanique céleste est donc chaotique.

Simplifiant son modèle, Lorenz s'est ensuite limité à trois équations du premier ordre, qui représentent la convection de l'atmosphère, simplifiée à l'extrême. L'avantage est ici que l'espace des phases a trois dimensions, et que l'on peut assez facilement visualiser les trajectoires de phase. Le calcul a alors conduit à des trajectoires de phase prenant quasiment toujours une forme à deux oreilles.

Cet attracteur a été dit "étrange", parce qu'il ne ressemblait à rien de connu, qu'il était infiniment plus complexe par exemple que le cycle attracteur de l'équation de Van der Pol.

Les trois équations de Lorenz ne sont pas une pure curiosité mathématique et pourraient (simple hypothèse encore) s'appliquer au champ magnétique terrestre, et expliquer pourquoi la direction de celui-ci a changé de manière inexplicable et chaotique au cours des temps géologiques.

Cet attracteur étrange est le premier à avoir été découvert, lorsque les premiers ordinateurs ont permis les premiers tracés de courbes un peu complexes. Il est considéré comme le point de départ de la physique du chaos, et il est aussi sans doute la première découverte permise par l'ordinateur.

```
> with(DEtools):
```

L'attracteur de Lorenz peut être tracé facilement à partir des trois équations différentielles suivantes (cf. Dossier Pour la Science n° 6 sur le Chaos, page 11. Mais que représentent au juste x, y et z ?) :

```
> a1 := diff(x(t),t)=-10*x+10*y;
```

$$a1 := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = -10\,x + 10\,y$$

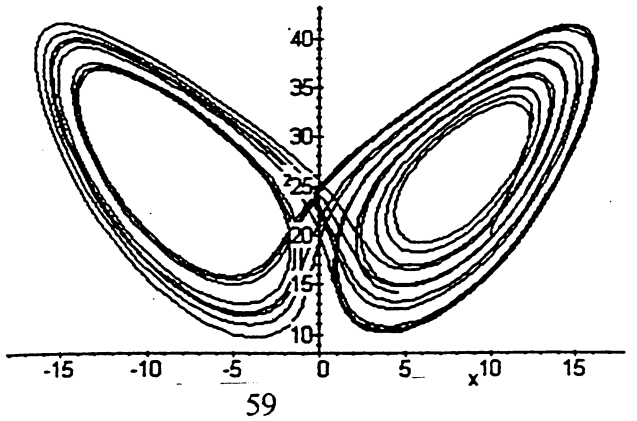
```
> a2 := diff(y(t),t)=28*x-y-x*z;
```

$$a2 := \frac{\partial}{\partial t} y(t) = 28\,x - y - x\,z$$

```
> a3 := diff(z(t),t)=-(8/3)*z+x*y;
```

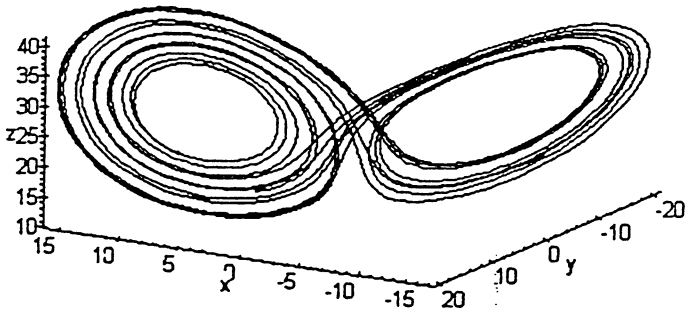
$$a3 := \frac{\partial}{\partial t} z(t) = -\frac{8}{3} z + x\,y$$

```
> DEplot([a1,a2,a3], [x,y,z], t=0..15, {[0,10,10,20]}, scene=[x, z], stepsize=0.01);
>
```



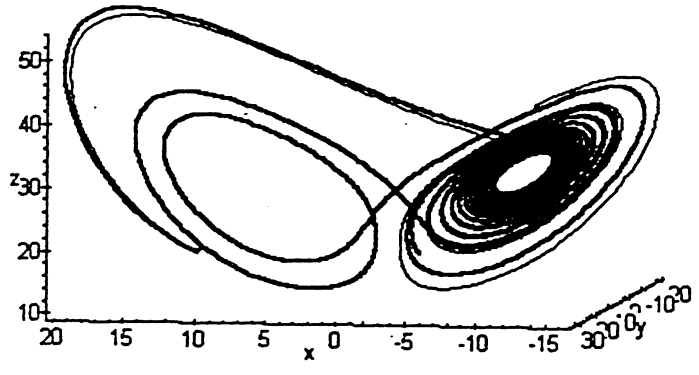
On obtient tout de suite et très facilement la fameuse image en forme de papillon. On peut aussi essayer de la représenter dans l'espace des phases à trois dimensions.

```
> DEplot([a1,a2,a3], [x,y,z], t=0..15, {[0,10,10,20]}, scene=[x, y, z], stepsize=0.01,
> orientation=[120, 60], shading=NONE);
>
```



On peut illustrer sur cet exemple la caractéristique essentielle du chaos déterministe qu'est la sensibilité aux conditions initiales.

```
> with(plots):
> C1:= DEplot([a1,a2,a3], [x,y,z], t=0..11, {[0,10,33,20]}, scene=[x, y, z], stepsize=
> 0.005, shading=NONE, thickness=0):
> C2:= DEplot([a1,a2,a3], [x,y,z], t=0..11, {[0,10,34,20]}, scene=[x, y, z], stepsize=
> 0.005, shading=NONE, thickness=2):
> display({C1, C2}, orientation=[100, 80]);
>
```



On voit clairement sur cet exemple que les deux trajectoires se séparent assez vite. Néanmoins, les trajectoires restent autour de l'attracteur.

L'OSCILLATEUR PARAMÉTRIQUE

I. GÉNÉRALITÉS

L'oscillateur paramétrique est tel que les paramètres de l'équation, au lieu d'être des constantes comme dans un oscillateur "ordinaire", dépendent du temps. Cela peut évidemment donner lieu à une infinité de variantes.

● Exemple : équation de Hill. Pour un oscillateur harmonique non amorti, on a l'équation différentielle :

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0, \qquad \text{où la pulsation propre } \omega \text{ est constante.}$$

Si $\omega = \omega(t)$ est une fonction de période T, on a un oscillateur paramétrique, et l'équation est dite équation de Hill. (On peut aussi lui ajouter un terme d'amortissement proportionnel à dx/dt.) L'équation de Hill peut aussi se mettre sous la forme :

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 [1 + \varepsilon f(t)] x = 0, \qquad \text{où f(t) est périodique de période T}$$

● Équation de Mathieu. Dans le cas particulier où $f(t) = \cos \Omega t$, on a l'équation de Mathieu, que l'on peut aussi écrire sous la forme :

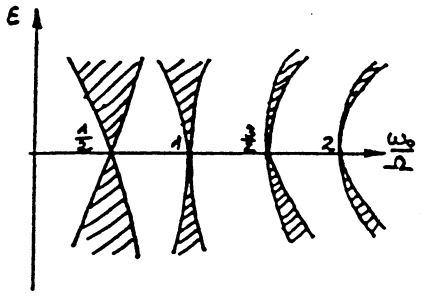
$$d^2x/dt^2 + [\eta + \gamma \cos \Omega t] x = 0,$$

Ces équations, et celles d'autres oscillateurs paramétriques, conduisent à des phénomènes tels que :

- résonance paramétrique,
- comportement chaotique.

● Résonance paramétrique pour l'équation de Hill (voir V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, p. 117)

Pour l'équation de Hill ci-dessus, en notant $\Omega = 2\pi/T$, la résonance paramétrique traduit le fait que, pour certaines valeurs de ω_0/Ω, on a un système instable même si ε est très petit. Les zones de résonance paramétrique sont hachurées sur la figure ci-contre (allure grossière).



La résonance paramétrique a lieu pour $\omega_0/\Omega = 1/2, 1, 3/2, 2...$ La signification physique est que la résonance a lieu lorsque la période propre du système est dans un certain rapport avec la période Ω de l'excitateur.

En pratique, il y a toujours des frottements, ce qui interdit d'avoir ε trop petit.

II. SÉPARATRICES DE L'ÉQUATION DE MATHIEU (d'après concours Mines-Ponts PC 1998)

Ce difficile et long problème est entièrement consacré aux oscillateurs paramétriques. Intervient en parciulier l'équation de Mathieu, écrite sous la forme :

$$d^2x/dt^2 + [\eta + \gamma \cos 2t] x = 0,$$

Le diagramme montrant les zones de résonance figure explicitement dans le problème. Comme $\eta = \omega_0^2$, on a la résonance paramétrique ici pour $\omega_0/2 = 1/2, 1, 3/2...$ soit encore : $\eta = 1, 4, 9, 16...$

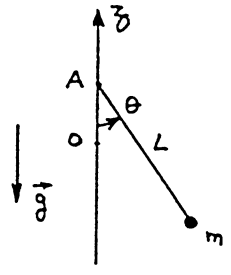
C'est bien ce qui ressort du diagramme faisant apparaître les séparatrices de l'équation de Mathieu. L'explication mathématique de ce phénomène est liée à une écriture matricielle, et à une condition sur la trace de la matrice pour que les solutions du problème restent bornées... (voir Arnold, par exemple, pour détails).

III. PENDULE DONT L'AXE VIBRE VERTICALEMENT

Prenons un exemple simple pour mieux comprendre les propriétés de l'oscillateur paramétrique.

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L, dont le point d'attache vibre verticalement et sinusoïdalement selon $OA = z = -z_0 \cos t$.

Si l'on traduit le théorème du moment cinétique au point mobile, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement $-m\, d^2z/dt^2\, \mathbf{u_z} = -m\, z_0 \cos t\, \mathbf{u_z}$ s'exerçant sur m, et on obtient :



$$mL^2\, d^2\theta/dt^2 = -m\, g\, L \sin\theta - m\, L \cos\theta\, z_0 \cos t$$

soit :

$$d^2\theta/dt^2 + (g/L)\,[1 + (z_0/g)\cos t\,]\sin\theta = 0$$

équation qui est de la forme :

$$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\,[1 + \varepsilon \cos t\,]\sin\theta = 0.}$$

Pour de petites oscillations, on peut faire l'approximation $\sin\theta = \theta$, et l'on a alors l'équation de Mathieu. On peut étudier facilement cette équation avec Maple, et on observe :

- La résonance paramétrique ne peut pas être observée pour n'importe quelle valeur de ω_0. Pour $\omega_0 = 1/2$, il est très facile de l'obtenir. Pour $\omega_0 = 1$, c'est plus difficile : pourquoi ?

- Si l'on veut tenir compte de la grande amplitude des oscillations et que l'on garde l'équation en $\sin\theta$, on observe pour $\omega_0 = 1/2$ et ε petit qu'il y a augmentation, puis diminution de l'amplitude. En effet, l'augmentation de l'amplitude augmente la période propre, et fait que celui-ci n'est plus accordé avec l'excitateur.

- Si ε devient grand, le mouvement devient chaotique : le pendule peut soudainement faire plusieurs tours, de façon imprévisible. On vérifie aussi la très grande sensibilité d'un système chaotique aux conditions initiales.

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L, dont le point d'attache oscille sinusoïdalement selon OA = z = - z0 cos(t). (Cela revient à choisir une échelle de temps où la pulsation de ce mouvement est 1). Dans ce cas, on a en notant g/l = omega² et z0/g = epsilon, et dans le cas des petites oscillations, l'équation de Mathieu.

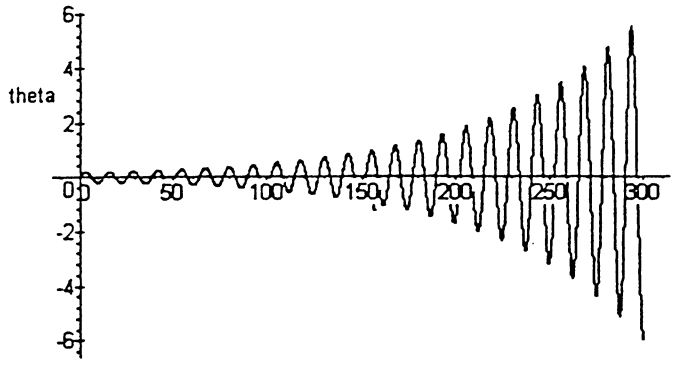
```
> restart;
> with(DEtools):
> Eq1 := diff(theta(t), t) = v;
```

$$Eq1 := \frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = v$$

```
> Eq2 := diff(v(t), t) = - omega^2*(1 + epsilon*cos(t) )*theta;
```

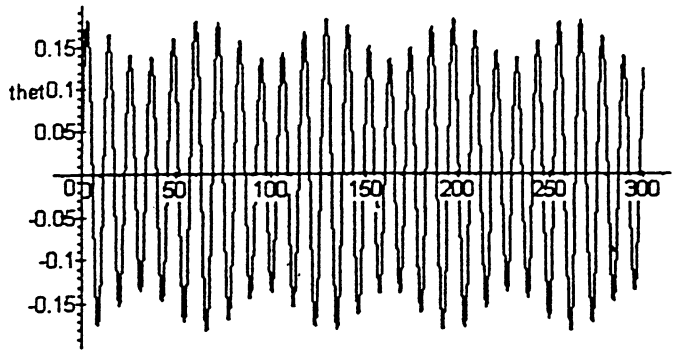
$$Eq2 := \frac{\partial}{\partial t} v(t) = -\omega^2\,(1 + \varepsilon \cos(t))\,\theta$$

```
> omega := 0.5: epsilon := 0.1:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.1
> );
>
```



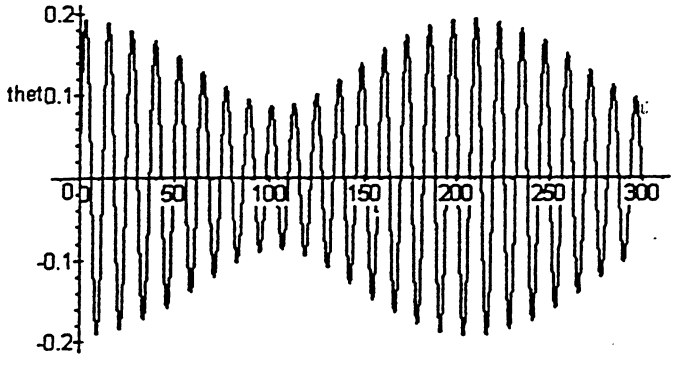
Cet exemple montre très clairement la résonance paramétrique. On peut voir l'importance d'avoir pour omega une valeur en rapport avec la pulsation excitatrice en essayant une valeur un peu différente.

```
> omega := 0.55: epsilon := 0.1:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.1
> );
>
```

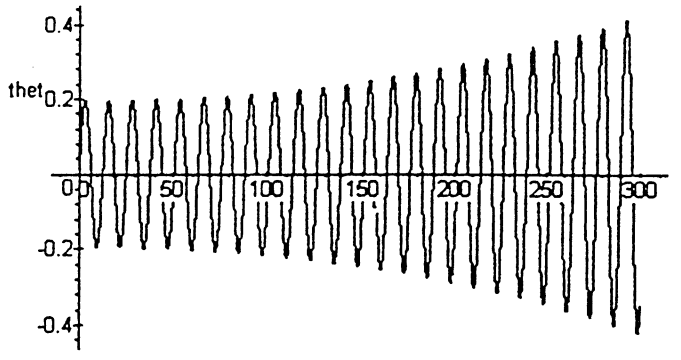


Pour omega = 0,55, il semble que l'on ne soit plus dans la zone d'instabillité (pour la valeur epsilon = 0,1). Cherchons à approcher plus finement cette limite.

```
> omega := 0.52:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.1
> );
>
```



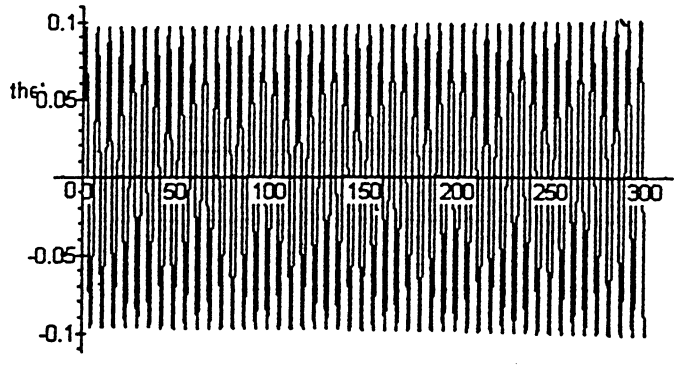

```
> omega := 0.512:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.1
> );
```



Il y a résonance paramétrique pour omega=0,512, mais cela augmente beaucoup moins vite.

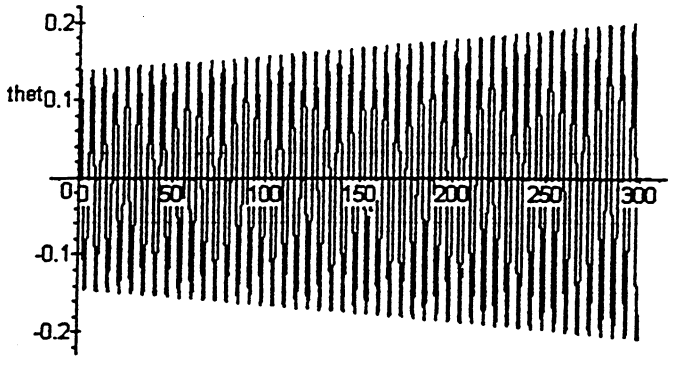
Un autre point que l'on doit vérifier est la résonance paramétrique pour omega = 1

```
> omega := 1: epsilon := 0.1:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.1
> );
>
```



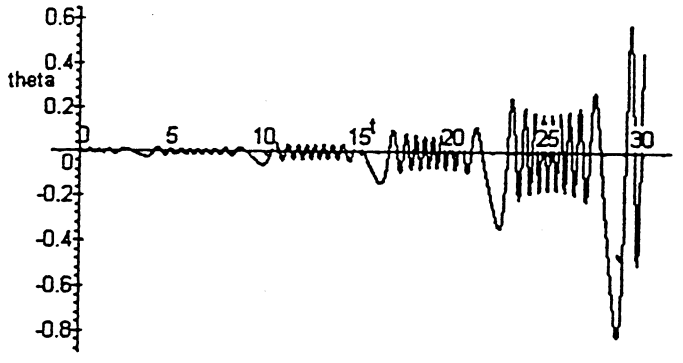
Ce résultat semble en contradiction avec la théorie. C'est dû probablement à un problème de conditions initiales, mais la résonance ne semble pas aussi nette que dans le premier cas. Il y a là un point à éclaircir.

```
> omega := 1:
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..300, {[0, 0.1, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0
> .1);
```



Enfin, il semble que l'on puisse obtenir des régimes particulièrement étranges, tels celui-ci :

```
> omega := 10: epsilon := ':
> DEplot([Eq1, Eq2], [t, theta, v], 0..30, {[0, 0, 0.1]},scene=[t, theta], stepsize=0.01
> );
```



La programmation sans débrouillardise

Pour tous ceux qui n'ont pas reçu de formation à l'algorithmique, la programmation ressemble souvent à un exercice de débrouillardise. J'essaie ici d'expliquer comment une construction formelle minimale permet de construire précisément (et même de prouver) un algorithme. Ceci peut aider tous ceux qui ont rencontré des difficultés pour expliquer aux élèves comment on peut sur calculettes ou sur machine se sortir d'une situation de programmation non triviale[1].

I. Récursivité. Une aide pour programmer?

Définition : Une procédure ***P*** est appelée récursive si son exécution provoque un ou plusieurs appels (dits récursifs) à ***P***.

Le principe de récursivité repose directement sur le caractère très particulier que présentent la mémoire d'un ordinateur et donc l'exécution des programmes. On retrouve d'ailleurs entre l'esprit humain et la machine les mêmes différences à propos du *fonctionnel* et du *récurrent*. Demandez à vos élèves s'ils voient mieux (synthétiquement) le $1000^{ème}$ terme d'une suite définie de façon fonctionnelle $u_n = f(n)$ ou récurrente $u_{n+1} = \phi(u_n)$? Pour la machine il est très facile (et très rapide !) de fixer dans sa mémoire la chaîne des appels qui vont ramener u_{1000} à u_0 et donc la définition récurrente devient naturelle...Disons quand même tout de suite que pour qu'un programme récursif soit bien fondé il faut bien sûr que la chaîne d'appels soit finie (et s'exécute de plus dans un temps fini à l'échelle humaine), c'est-à-dire que le problème ***P*** soit ramené à un problème ***P*** de taille strictement inférieure. Pour simplifier si le problème ***P***(n) ne dépend que d'une variable n il faudra se ramener à un problème ***P***(m) avec $m<n$. Si le problème dépend de plusieurs variables, on sent que la méthode va encore fonctionner pour peu que l'on sache poser sur cet ensemble de variables un *bon ordre*, mais ce n'est pas l'objectif de cette introduction de mettre en place ces règles et ces preuves. Nous nous bornons à essayer de comprendre le caractère simplificateur de la récursivité et ses rapports avec la programmation itérative.

1. Premiers exemples.

1. Puissance d'un nombre.

Pour programmer la puissance entière d'un réel a^n avec $n \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{R}^*$, on procède ainsi :

Fonction **Puissance**(a :réel ; n :entier): réel ;
Si $n = 0$ alors renvoyer 1
sinon si $n < 0$ alors renvoyer **Puissance**($\frac{1}{a}$, $-n$)
sinon renvoyer a***Puissance**(a, $n-1$)

[1] *Cette intervention devait présenter brièvement deux notions, d'abord la récursivité, puis introduire la notion d'invariant de boucle comme une aide à la programmation itérative. Pour des raisons de temps seul le premier point fut exposé. J'espère que, pour autant, le compte rendu qui en résulte n'est pas trop bancal.*

L'arrêt est assuré puisque la seconde valeur prise par n est toujours positive, et puisque la suite des contenus de n à partir d'une valeur positive est une suite d'entiers strictement décroissante.
On démontre ensuite par récurrence sur n que la fonction renvoie bien ce qu'il faut lorsque n est positif et donc aussi lorsque n est négatif.

2. Dichotomie.
Soit f une fonction continue telle que $f(a)f(b)<0$, alors on sait qu'il existe un réel $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$. Pour donner une approximation de α à $\varepsilon>0$ donné près il suffit d'écrire l'algorithme suivant:

Fonction **Dicho**(a :réel ; n :entier): réel ;
Si $b-a < \varepsilon$ alors renvoyer a
Sinon début
$c := \frac{a+b}{2}$
si $f(a)f(c)\leq 0$ alors renvoyer **Dicho**(a,c)
sinon renvoyer **Dicho**(c,b)
fin
L'arrêt est assuré, puisque la suite des valeurs de $b-a$ est une suite arithmétique de raison ½ qui converge vers 0.

3. L'exemple incontournable: les tours de Hanoi
Selon la légende inventée par le mathématicien Lucas en 1883 les bonzes attendent la fin du monde en dépilant les 64 anneaux sur trois mats avec la règle suivante : on ne peut déplacer qu'une plaque à la fois et l'on doit respecter l'ordre des plaques.
Appelons n le nombre de plaques et numérotons par 1 ,2, 3 les mâts et supposons construite une procédure déplacer[2]
Evidemment on sait résoudre le problème à l'ordre n=1.
Supposons que le problème ait trouvé une solution pour une taille n-1, et que le mât numéro i soit rempli avec une pyramide de n anneaux, alors on pourra déplacer les n-1 premières plaques sur le mât numéro k que l'on ne cherche pas à atteindre. Le plus grand des anneaux sera posée à la base du $j$ème mât, et à nouveau grâce à notre hypothèse de récursivité, on pourra déplacer sur ce mât le contenu de k. On a bien entendu k=6-i-j ce qui donne

Procédure Hanoi(n,i,j :entiers)
Si n=1 alors **Déplacer**(i,j)
Sinon début
Hanoi (n-1, i ,6-i-j)
Déplacer(i,j)
Hanoi (n-1,6-i-j,j)
fin

Le nombre de déplacements D_n est défini par la relation de récurrence

$$\begin{cases} D_1=1 \\ D_n=2D_{n-1}+1 \end{cases}$$

donc on a $D_n = 2^n - 1$ comblant ainsi l'attente des moines...

---

[2] Le plus simple est de noter **Déplacer** (i,j) Ecrire (i, '→ ',j).

2. Récursivité terminale.

Un appel récursif est dit terminal lorsqu'il n'est suivi d'aucune autre instructions. Le mot suivi ne renvoie pas à l'ordre de rédaction de l'algorithme, mais à l'ordre d'exécution :
Si la définition de la fonction **trompeur** se termine par l'une des instructions suivantes :

Renvoyer a+ **trompeur**(n)

ou encore
tant que **Condition**(n)

Renvoyer **trompeur**(n)

Il est clair que l'appel n'est pas terminal puisque dans le premier cas il est effectué avant la somme, et dans le second cas l'algorithme se termine par un appel à **non Condition**(n).

On démontre (par récurrence sur le nombre d'appels) que toute procédure qui présente l'architecture suivante[3] :

Procédure Récursivité_tranquille (*n:variable*)
Si **Condition**alors Instruction0
Sinon début
Instruction1
$n := \phi(n)$
Récursivité_tranquille (n)
fin

Se dérécursifie tranquillement sous la forme :

Procédure Récursivité_tranquille (*n:variable*)
Tant que **non Condition** alors
début
Instruction1
$n := \phi(n)$
fin
Instruction0

3. Application aux tris[4]. (tri bulle et tri par sélection).

On dispose d'une procédure **echange**(T,i,j)). On lit successivement les éléments du tableau en les comparant deux par deux. On échange deux éléments adjacents mal placés. On appelle cette opération un passage. Le dernier élément du tableau après le premier passage est bien placé, ce qui nous permet de nous ramener à un tableau de taille strictement inférieure donc opter pour une programmation récursive:

Procédure Tri (T :tableau ;n :entier)
Si n>1 alors
Début
Pour i allant de 1 à n-1 faire

---

[3] Le symbole n désigne une variable ou même un système de variables pourvu que le passage $n := \phi(n)$ garantisse bien l'arrêt.

[4] Dans l'étude des tris, il est particulièrement intéressant de calculer le nombre d'échanges et de comparaisons. Ceci est très classique et n'a pas été fait ici, puisque l'exposé (très court) à été centré sur l'aide à la programmation.

Si T[i]>T[i+1] alors **echange**(T,i,j)
Tri (T ,n-1)
Fin

L'appel est évidemment terminal et l'écriture itérative ne pose pas de problème :

```
Procedure Tri(var T:tableau;n:integer);  var i,j:integer;
 begin {I0 est vide}
   while n>1 do
       begin
           for i:=1 to n-1 do if T[i]>T[i+1] then Echange(T,i,i+1);
           n:=n-1
       end
 end;
```

Si on trie par sélection, on recherche d'abord le plus grand élément du tableau T que l'on échange ensuite avec T[n]. On recommence ensuite le processus sur le tableau constitué de T[1].....T[n-1].
On écrit d'abord la procédure de recherche du plus grand élément du tableau

Fonction PGrand(T :tableau; n :entier)
Si n=1 alors Renvoyer n
Sinon début
p :=**Pgrand**(T,n-1)
Si T[n] ≥ T[p] alors Renvoyer n sinon Renvoyer p
fin

qui conduit à

Procédure Tri (T :tableau ;n :entier)
Si n>1 alors
Début
echange(T,n, **PGrand**(T ; n)))
Tri (T ,n-1)
fin

Si la dérécursification du second appel ne pose pas de problème, on ne sait pas faire celle du premier puisqu'il n'est pas terminal. La présentation de la notion d'invariant de boucle fera sans doute l'objet d'une prochaine séance.

```
Procedure Tri_iteratif(var T:tableau;n:integer);
var i,p:integer;
begin
while n>1 do begin
                  p:=1;
                  for i:=2 to n do if T[i]>=T[p] then p:=i;
                  Echange(T,n,p);
                  n:=n-1
            end
end;
```