



IREM de ROUEN

Av. De Broglie BP 138

76821 Mt St Aignan

Tél. - Fax: 02-35-14-61-414

UNIVERSITÉ DE ROUEN

UFR des SCIENCES

INSTITUT DE RECHERCHE

SUR

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Histoire des Mathématiques en classe, quelques pistes . . .



Michel FRECHET, Groupe Épistémologie et Histoire des Mathématiques de
l'I.R.E.M. de ROUEN.



IREM de ROUEN

Av. De Broglie BP 138

76821 Mt St Aignan

☎.- Fax: 02-35-14-61-414

UNIVERSITÉ DE ROUEN

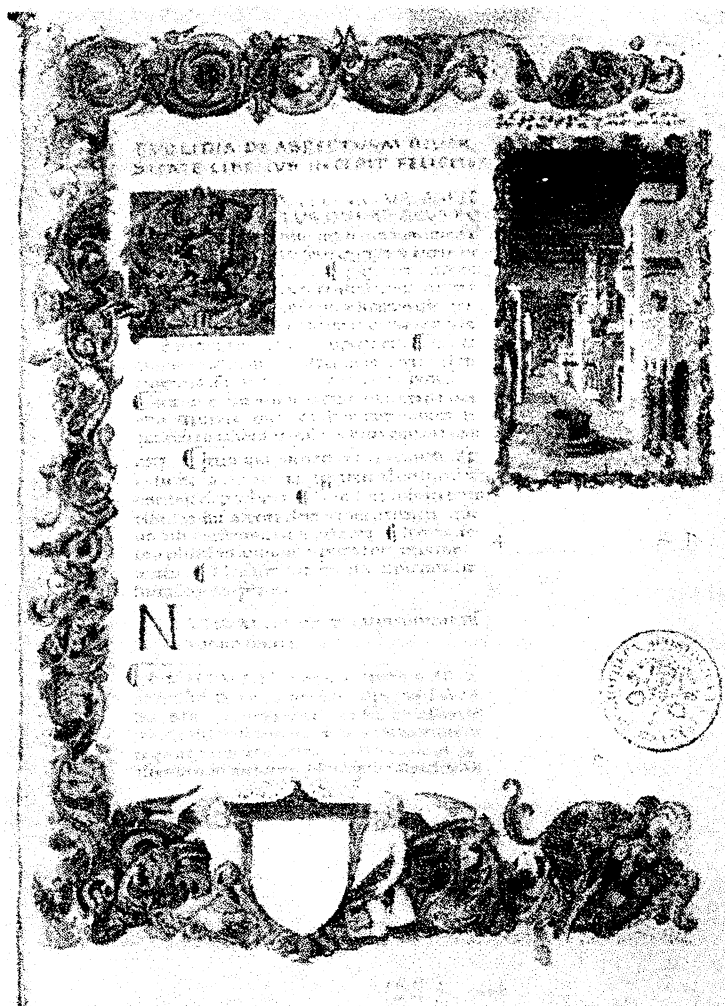
UFR des SCIENCES

INSTITUT DE RECHERCHE

SUR

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Histoire des **M**athématiques en classe, quelques pistes . . .



AVANT PROPOS.	5
PROBLÈMES DONNÉS À DES ÉLÈVES DE 1^{ÈRE} S ET TERMINALES S.	7
LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.	9
QUADRATURE D'UN SEGMENT DE PARABOLE:	13
TRIANGLE DE PASCAL	19
SUITES ET LOGARITHMES	23
TANGENTE À LA PARABOLE – POLÉMIQUE « FERMAT – DESCARTES ».	33
DIFFÉRENTIELLE.	41
EXPONENTIELLE COMPLEXE.	47
ARTICLES SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES.	49
PROPORTIONS, MUSIQUE ET NOMBRES SOURDS.	51
DIAMÈTRE	57
À PROPOS DES LOGARITHMES	61
UTILISATION DE LA PERSPECTIVE EN GÉOMÉTRIE	65
PRÉSENTATION DE MATHÉMATICIENS CÉLÈBRES EN LYCÉE.	67
THALÈS	69
PYTHAGORE	70
EUCLIDE	71
APPOLONIUS	72
ARCHIMÈDE	73
RENÉ DESCARTES	74
BLAISE PASCAL	75

À la mémoire de Michel BOURDAIS

Avant Propos.



« Je pense qu'il n'est pas possible de comprendre les mathématiques d'aujourd'hui si l'on n'a pas au moins une idée sommaire de leur histoire. »

Cette remarque, extraite de « *pour l'honneur de l'esprit humain* » est de Jean DIEUDONNÉ.

Et dans un autre ouvrage, il écrit ceci: « *On reproche souvent à l'enseignement actuel des mathématiques son caractère prématurément abstrait: on a tendance à introduire d'emblée les notions fondamentales sous leur aspect général, qui ne paraît avoir guère de points communs avec les objets des mathématiques traditionnelles. Si cette manière de faire est souvent justifiée par la nécessité d'arriver rapidement à des théorèmes assez généraux pour être utilisables dans des contextes variés, il n'en reste pas moins que ces notions générales peuvent être mieux comprises si l'on est conscient de leur origine et de la façon dont elles ont évoluées à partir de concepts plus particuliers, mais plus proches de l'intuition.* »

Je souscris totalement à ce constat. Comment alors introduire au lycée, une approche historique et épistémologique des mathématiques.

On peut prévoir quelques heures dans l'année où sera évoquée la naissance de concepts mathématiques.

Ces heures doivent-elles être prises sur les heures d'enseignement. Une réponse tout à fait négative m'a été donnée par un I.P.R.: « un professeur de mathématiques ne doit pas faire du culturel pendant ses cours, il est payé pour faire des mathématiques. ». (Je n'invente rien). Un club pourrait alors en être le lieu, mais malheureusement impossible dans la plupart des lycées de campagne, où les élèves doivent utiliser les transports scolaires aux horaires contraignants et très stricts.

Une solution m'avait été suggérée par un autre I.P.R.: faire des devoirs-maison à base historique.

J'en ai donc retenu l'idée, d'autant plus facilement que j'avais timidement commencé à le faire. (Devoir sur la quadrature du segment de parabole).

Dans cette brochure, on trouvera donc la plupart des devoirs donnés à des élèves de 1° S et T° S. Ces devoirs ont été bien acceptés par la grande majorité des élèves. La plus grande difficulté est d'obtenir leur confiance. Faire des devoirs qui ne sont pas de « style bac » peut paraître à certains (élèves, parents, collègues, administration) une perte de temps. Cette confiance est par ailleurs très fragile et peut, comme cela a été le cas, être rompue à tout moment, très brutalement.

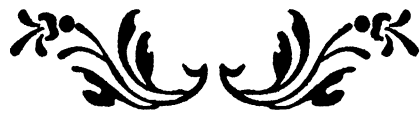
Ces devoirs sont précédés d'une introduction permettant de situer la problématique. Ils sont parfois suivis d'une correction sommaire.

Dans une deuxième partie, se trouve une série d'articles parus dans le journal de la régionale de Rouen de l'A.P.M.E.P. et qui peuvent être donnés aux élèves.

Enfin, j'ai regroupé dans la dernière partie des textes présentant certains mathématiciens dont tout lycéen devrait avoir entendu parlés durant sa scolarité.

Tous commentaires, toutes suggestions seraient les bienvenus.

Monsieur FRECHET Michel 38, rue du mont d'Aulage 76 270 NEUFCHÂTEL EN BRAY ☎: 02.35.94.56.13 Fax: 02.35.94.16.07 ✉: michel.frechet@wanadoo.fr
--



**roblèmes donnés à des
élèves
de 1^{ère} S et Terminales S.**

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

Les pythagoriciens n'auraient pas démontré ce « théorème », mais construit arithmétiquement des triplets, dits triplets pythagoriciens. Voici ce que dit Proclus :

*Si l'on écoute ceux qui veulent enquêter sur les choses anciennes, on pourra en trouver qui font remonter ce théorème à Pythagore et qui assurent qu'il sacrifia un bœuf après sa découverte. Quant à moi, si je suis impressionné aussi par ceux qui, les premiers, ont reconnu la vérité de ce théorème, j'admire encore plus l'auteur des *Eléments* non seulement pour la démonstration par laquelle il l'a fermement établi de manière tout à fait évidente, mais aussi pour la généralisation qu'il en donne au livre VI, qu'il a revêtue d'arguments scientifiques irréfutables. En effet, il y démontre en toute généralité que dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés de l'angle droit...*

Il y a deux types de triangles rectangles: les isocèles et les scalènes. Dans les isocèles il ne nous sera pas possible de trouver des nombres coïncidant avec les côtés. Car il n'y a pas de nombre carré double d'un nombre carré, si on ne parle pas de manière approchée, en effet le carré de 7 est double de celui de 5 à une unité près par défaut. Mais dans les triangles scalènes il nous est montré très clairement qu'il est possible de prendre le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit égal à ceux sur les côtés de l'angle droit. Tel est le triangle dans la République dans lequel trois et quatre contiennent l'angle droit, et cinq le sous-tend; or le carré sur 5 est égal aux carrés sur ceux-là. Car d'une part celui-ci est vingt-cinq et des carrés sur ceux-là, celui sur 3 est 9, celui sur 4 est seize. Ce qui vient d'être dit au sujet des nombres est donc clair.

Certaines méthodes nous ont aussi été transmises pour trouver de tels triangles dont l'une est attribuée à Platon, l'autre à Pythagore. La méthode pythagoricienne part des nombres impairs, elle pose en effet l'impair donné comme le plus petit côté de l'angle droit et prenant son carré et retranchant une unité de celui-ci, elle pose la moitié du reste comme le plus grand côté de l'angle droit. Et en ajoutant l'unité restante à celui-ci, elle produit l'hypoténuse. Par exemple en prenant trois en le carrant et en retirant une unité de neuf, de huit on prend la moitié, quatre, et à celui-ci ajoutant de nouveau une unité, on produit cinq. Et le triangle rectangle ayant pour côtés trois, quatre et cinq est ainsi trouvé. La méthode platonicienne procède à partir des nombres pairs. En effet prenant le nombre pair donné elle le pose comme l'un des côtés de l'angle droit, le divise en deux parties égales et carre la moitié; en ajoutant une unité à ce carré elle produit l'hypoténuse, en retranchant une unité à ce carré elle produit l'autre côté de l'angle droit. Par exemple, prenant quatre et carrant la moitié de celui-ci 2, produisant 4, en retranchant une unité elle produit 3, en l'ajoutant elle produit 5, et elle a comme résultat le même triangle que celui obtenu par l'autre méthode; en effet le carré sur celui-ci est égal à ceux sur trois et quatre pris ensemble.

*Admettons qu'en fait ces ajouts historiques sont hors de notre sujet. Mais comme la démonstration de l'auteur des *Eléments* est claire, je crois qu'il ne faut rien ajouter de superflu; mais se contenter de ce qui a été écrit d'autant plus que ceux qui ont fait des additions, comme les disciples de Héron et de Pappus, ont été obligés de postuler par avance quelque chose qui est démontré dans le livre VI et cela pour rien de sérieux.*

Proclus de Lycie, les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide.

Il m'a paru intéressant de faire travailler des élèves de première S sur cette démonstration.

Ce théorème est appelé « pont-aux-ânes » par Paul TANNERY, « théorème de la jeune mariée », selon un manuscrit de G. Pachymère, peut-être par référence au nombre dit « nuptial » de la République de Platon, censé réguler mariages et naissances dans l'état idéal.

Le texte de Proclus nous parle de deux méthodes pour trouver des triplets pythagoriciens.

Les voici :

Méthode dite de Pythagore:

On donne un nombre impair	$2n + 1$	petit côté de l'angle droit
on prend son carré	$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$	
on retranche 1	$4n^2 + 4n$	
on divise par 2	$2n^2 + 2n$	grand côté de l'angle droit
on ajoute 1	$2n^2 + 2n + 1$	hypoténuse

Démonstration moderne:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

Exemple: si $n = 3$; $a = 7$; $b = 24$; $c = 25$ et $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$

Méthode platonicienne:

On donne un nombre pair	$2n$	un côté
on divise par 2	n	
on élève au carré	n^2	
on ajoute 1	$n^2 + 1$	hypoténuse
on retranche 1	$n^2 - 1$	autre côté

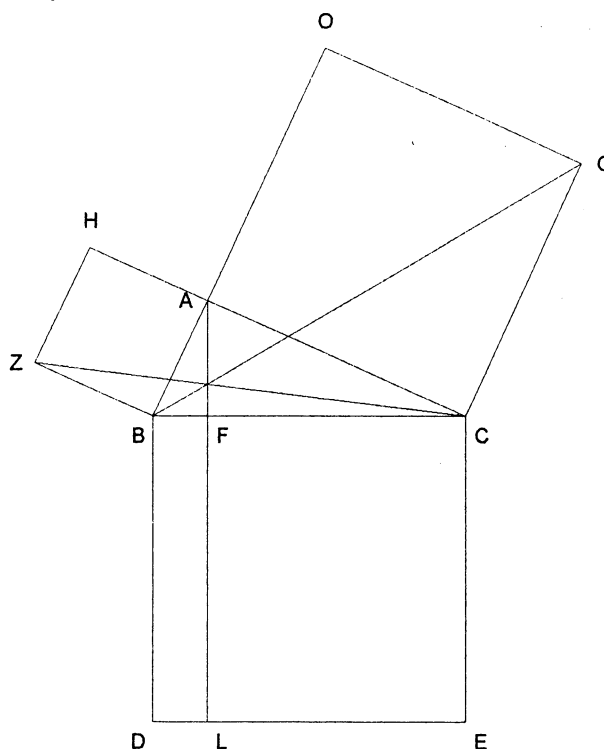
Démonstration moderne:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = 4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2$$

Exemple:

si $n = 3$; $a = 6$; $b = 8$; $c = 10$

et $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$



THÉORÈME DE PYTHAGORE.

On a retrouvé la démonstration du théorème de PYTHAGORE par EUCLIDE sur des morceaux de parchemin qui n'étaient malheureusement pas dans l'ordre. Sauriez-vous rétablir l'ordre et les liaisons afin que cette démonstration soit juste et cohérente?

0	Propriété n°47 Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés perpendiculaires. Soit le rectangle ABC rectangle en $\widehat{BAC}$; je dis que l'on a: $BC^2=BA^2+AC^2$.
1	Nous avons: $\widehat{BAC} = \widehat{CAH} = 1\text{dr.}$ et les deux droites (AB) et (AH), situées de part et d'autre de (AC), formant en A des angles adjacents supplémentaires, sont colinéaires. Il en est de même et pour les mêmes raisons des droites (AC) et (AO).
2	Mais $\text{Aire}(\text{CDLF}) = 2 \times \text{Aire}(\text{ACD})$ $\text{Aire}(\text{CZHA}) = 2 \times \text{Aire}(\text{ZBC}).$
3	On démontrera de la même manière, en traçant les droites (AE) et (CK), que: $\text{Aire}(\text{BELF}) = \text{Aire}(\text{ABKO}) \text{ et par suite:}$
4	Nous avons d'autre part: $\widehat{DCB} = \widehat{ZCA} = 1\text{dr}$ et en ajoutant de part et d'autre l'angle $\widehat{ACB}$: $\widehat{DCB} = \widehat{ZCB}$
5	Sur le côté BC, construisons le carré CDEB, sur le côté BA, le carré ACZH et sur le côté AC, le carré ABKO. Du point A traçons la droite (AL) parallèle à la droite (CD) et les droites (AD) et (ZB).
6	$\text{Aire}(\text{BCDE}) = \text{Aire}(\text{ACZH}) + \text{Aire}(\text{ABKO}).$ Or $\text{Aire}(\text{BCDE}) = BC^2$, $\text{Aire}(\text{ACZH}) = AC^2$ et $\text{Aire}(\text{ABKO}) = AC^2$, d'où: $BC^2 = AB^2 + AC^2.$
7	Nous avons aussi: $DC=BC \text{ et } ZC=CA,$ c'est à dire deux côtés respectivement égaux et les angles compris entre ces côtés égaux; les bases donc $AD=ZB$ et les triangles ACD et ZBC sont aussi égaux.
8	Propriétés n° 41 Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est situé entre les mêmes parallèles que celui-ci, la surface du parallélogramme vaut le double de celle du triangle.
9	Propriété n°4 Si deux triangles ont des côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.
10	Propriété n°26 Si deux triangles ont deux angles égaux entre eux respectivement ainsi que les côtés adjacents ou sous-tendants l'un ou l'autre de ces angles, ils ont aussi égaux les troisièmes côtés et les troisièmes angles.

QUADRATURE D'UN SEGMENT DE PARABOLE.

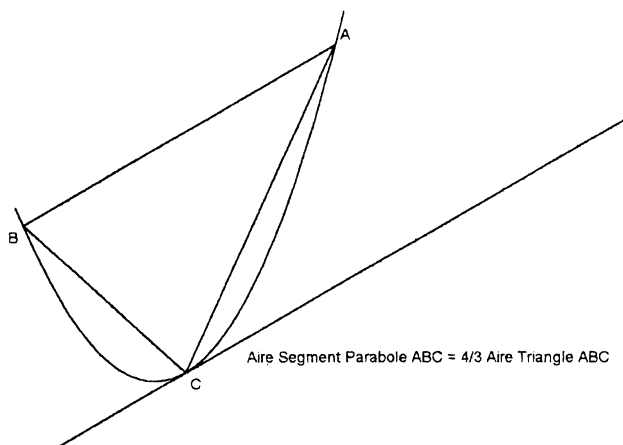
Ce devoir est le premier dont j'ai eu l'idée.

Ce fut aussi ma première rencontre avec Archimède.

La lecture de ses œuvres m'enchantait et je pensais alors que mes élèves de Terminales C seraient aussi subjugués que moi par l'audace de cette démonstration.

Beaucoup de choses, notamment l'aspect géométrique des propriétés de la parabole, ne pouvaient être traitées dans ce devoir, c'est la raison pour laquelle je passai par l'analyse pour obtenir la propriété caractéristique de cette conique. Le début est donc un peu fastidieux, on peut faire beaucoup plus simple, (voir notamment le devoir sur la tangente à la parabole méthode Fermat –

Descartes). Néanmoins ce devoir fut apprécié et réussi par les élèves. Je le laisse sous sa forme primitive, tout en pensant que l'on peut en améliorer la forme.



Archimède a donc calculé de nombreuses aires de surfaces courbes. La méthode présentée ici suppose le résultat connu. On peut alors se poser la question: comment arrive-t-on à ce résultat?

Doit-on penser comme Descartes: « *Et il me semble que certaines traces de cette vraie mathématique s'aperçoivent encore chez PAPPUS et chez DIOPHANTE, qui, tout en n'appartenant pas aux premiers âges, ont cependant vécu bien des siècles avant notre temps. Mais j'ai tendance à croire que par une ruse funeste ces auteurs l'ont ensuite étouffée; car, ainsi que bien des artisans l'ont fait pour leurs inventions, comme chacun sait, ils ont peut-être craint qu'étant très facile et simple, elle ne perde de son prix à se divulguer, et ils ont préféré nous montrer à sa place, pour se faire valoir à nos yeux, quelques vérités stériles démontrées déductivement avec une certaine subtilité, comme des effets de leur art, plutôt que nous enseigner cet art lui-même, qui aurait levé toute admiration.* »

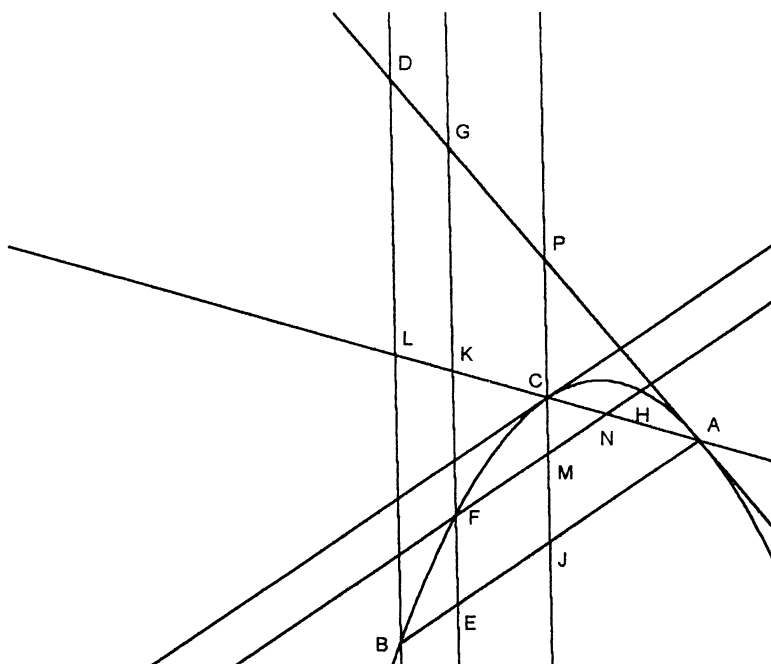
Il se trouve qu'au XVI^e siècle, la plupart des œuvres des mathématiciens Grecs n'étaient pas encore présents dans les bibliothèques. HEIBERG retrouva en 1906 et 1908, un palimpseste, où sous le texte d'un recueil de prière se trouvait le traité encore inconnu portant le titre: « La méthode à Eratosthène ».

On peut lire ceci, en introduction: « *M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard à la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance.* »

Puis suivent un calcul de quadrature d'un segment de parabole, utilisant des balances et une méthode que l'on peut apparenter à la méthode des indivisibles de Cavalieri.

En voici la traduction moderne:

ABC est un segment de parabole, AB // FH, C sommet $\Rightarrow \frac{FE}{GE} = \frac{BE}{BA}$



On trace BD // EG // axe CJ; DA tangente en A à la parabole.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Apollonius, prop XX),: } \frac{CM}{CJ} = \frac{FM^2}{BJ^2} \\ \text{FMJE est un parallélogramme} \Rightarrow FM = EJ \\ \text{J est le milieu de BA} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{CM}{CJ} = \frac{EJ^2}{JA^2}$$

$$\text{Thalès: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{CM}{CJ} = \frac{CN}{CA} \\ \frac{EJ}{JA} = \frac{KC}{CA} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{CM}{CJ} = \frac{CN}{CA} = \frac{EJ^2}{JA^2} = \frac{KC^2}{CA^2} \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{KC}{CA} \times \frac{KC}{CA} \Rightarrow \frac{CN}{CA} \times \frac{CA}{KC} = \boxed{\frac{KC}{CA} = \frac{CN}{KC}}$$

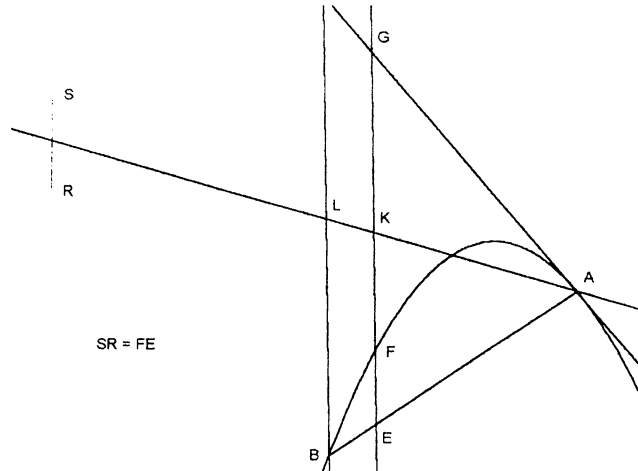
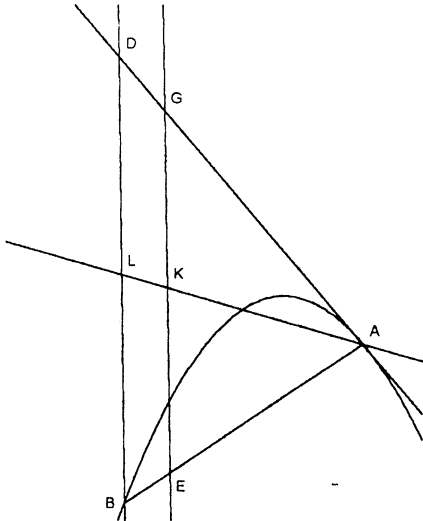
$$\frac{CN}{KC} = \boxed{\frac{KC}{CA}} = \frac{CN + KC}{KC + CA} = \boxed{\frac{KN}{KA}}$$

$$\text{Thalès: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{KC}{KA} = \frac{EJ}{JA} \\ \frac{KN}{KA} = \frac{KF}{KE} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{EJ}{JA} = \frac{KF}{KE}, \text{ mais: } \\ \text{J milieu de BA} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{EJ}{BJ} = \frac{KF}{KE} \Rightarrow \frac{BJ - EJ}{BJ} = \frac{KE - KF}{KE} \Rightarrow \frac{BE}{BJ} = \frac{FE}{KE}$$

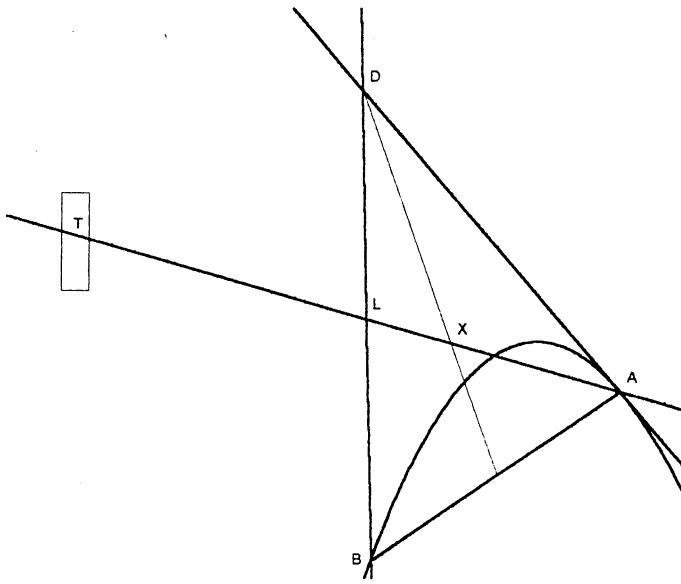
2°) Apollonius, prop XXII et XXIII: C milieu de JP $\Rightarrow$ K milieu de EG

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BE}{BJ} = \frac{FE}{KE} \\ \text{K milieu de EG} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{BE}{2BJ} = \boxed{\frac{BE}{BA} = \frac{FE}{GE}} = \frac{FE}{2KE}$$

$$\frac{BE}{BA} = \frac{FE}{GE} \Leftrightarrow \boxed{GE} \times BE = \boxed{FE} \times BA$$



Thalès: $\frac{BE}{BA} = \frac{LK}{LA} = \frac{FE}{GE} \Leftrightarrow \boxed{GE} \times LK = \boxed{FE} \times LA = \boxed{FE} \times LR$



FE est un « morceau » du segment de parabole; GE est un « morceau » du triangle ABD. Il y a donc équilibre, si l'on considère une balance de pivot L. On place le segment de parabole en R, symétrique de A par rapport à L: Chaque segment FE, variant de 0 à CJ, sera placé en T, T étant le milieu de SR = FE (c'est à dire son centre de gravité), ainsi la parabole est sur un des côtés de la balance. Où placer le triangle pour qu'il y ait équilibre? Le « poids » du triangle doit être placé en son centre de gravité. Or, X, centre de gravité, est tel que $LX = \frac{1}{3} LA$.

Ainsi, « poids » du segment de parabole $\times LT$ = « poids » du triangle $\times LX$

« poids » du segment de parabole $\times LA$ = « poids » du triangle $\times \frac{1}{3} LA$

$$\boxed{\text{« poids » du segment de parabole} = \frac{1}{3} \text{« poids » du triangle}}$$

$$\begin{cases} \text{aire CAJ} = \text{aire ACP} \\ \text{aire CJBL} = \text{aire CLDP} \\ \text{aire BCJ} = \frac{1}{2} \text{aire CBL} \end{cases} \Rightarrow \text{aire ABC} = \text{aire ACJ} + \text{aire BCJ} = 2 \times \text{aire ACJ} = \frac{1}{4} \text{aire ABD}$$

$$\boxed{\text{aire du segment de parabole} = \frac{4}{3} \text{aire ABC}}$$

QUADRATURE D'UN SEGMENT DE PARABOLE

Le but de ce problème est de calculer l'aire d'un segment de parabole en utilisant la méthode d'**ARCHIMEDE** (– 287, – 212). Bien sûr, certaines propriétés seront démontrées à partir de la définition moderne de la parabole: courbe représentative de la fonction $f(x) = p.x^2$, mais nous suivrons pas à pas Archimède dans son raisonnement.

1°) Définitions et propriétés :

Soit $f(x) = p.x^2$ l'équation d'une parabole dans un repère orthonormal et soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite Δ coupant la parabole P en deux points distincts A et C .

a)- Trouver une condition entre a , b et p pour que $P \cap \Delta \neq \emptyset$.

b)- Montrer que si l'on mène une parallèle à (yy') passant par D le milieu de $[AC]$, elle coupe P en un point B où la tangente à P est parallèle à (AC) .

Définitions :

- **SEGMENT DE PARABOLE** : surface délimitée par (AC) et P
- **SOMMET DU SEGMENT DE PARABOLE** : B
- **DIAMETRE DU SEGMENT DE PARABOLE** : segment $[DB]$
- **HAUTEUR DU SEGMENT DE PARABOLE** : hauteur du triangle ABC issue de B .

Propriétés :

A)- Propriété caractéristique de la parabole :

Sur l'arc de parabole ABC , on prend un point E d'abscisse x_0 ; de E , on mène la parallèle à (AC) , elle coupe P en un autre point F et (BD) en Z .

On va montrer que :

$$\frac{BD}{BZ} = \frac{AD^2}{EZ^2} \quad (1)$$

- a) Calculer les coordonnées de D en fonctions de a , b et p sans calculer celles de A et C .
- b) En déduire les coordonnées de B ; en déduire BD .
- c) Calculer l'équation de la droite (EZ) .
- d) En déduire les coordonnées de F ; montrer que Z est le milieu de $[EF]$.
- e) Calculer EF^2 , puis EZ^2 .
- f) Sans calculer les coordonnées de A et de C , calculer AC^2 , puis AD^2 .
- g) En déduire (1).

(Cette égalité de rapport a été démontrée par **APPOLONIUS** (–262; –205))

B)- Milieu du segment $[AD]$

Soit I le milieu du segment $[AD]$. On trace la parallèle à (DB) passant par I , elle coupe la parabole en J . On trace la parallèle à (AD) passant par J , elle coupe (BD) en K .

Montrer que:

$$IJ = \frac{3}{4} \cdot DB$$

C) Calcul d'aire :

a)- Montrer que $L = (IJ) \cap (AB)$ est le milieu de $[AB]$; en déduire que le sommet du segment de parabole AJB est J

b)- On va montrer que $\text{aire } ABJ = \frac{1}{8} \cdot \text{aire } ABC$. (On ne travaille qu'avec des triangles)

α)- Montrer que :

$$\begin{aligned} LJ &= \frac{1}{2} \cdot IL ; \text{aire } ALJ = \frac{1}{2} \cdot \text{aire } AIL ; \text{aire } LJB = \frac{1}{2} \cdot \text{aire } BLI ; \\ \text{aire } BLI &= \text{aire } ILA ; \text{aire } ADB = 4 \cdot \text{aire } AIL . \end{aligned}$$

β)- En conclure que : $\text{aire } AJB = \frac{1}{8} \cdot \text{aire } ABC$.

En faisant la même chose de l'autre côté de D, en prenant I' le milieu de [CD], on trace la parallèle à (DB) passant par I', celle-ci coupe la parabole P en J'.

On montre alors que $\text{aire AJ'B} = \frac{1}{8} \cdot \text{aire ABC}$. Ainsi, on a :

$$\text{aire AJB} + \text{aire AJ'B} = \frac{1}{4} \cdot \text{aire ABC}.$$

2°) Aire du segment de parabole Σ :

On a approché l'aire du segment de parabole par l'aire du polygone AJBJ'C; (Calculer cette aire.). On recommence le processus avec les segments de parabole (AJ), (JB), (BJ'), et (J'C); on approche ainsi l'aire du segment de parabole par un polygone inscrit dans le segment et on continue jusqu'à ce que la différence entre l'aire du polygone et l'aire du segment de parabole soit aussi petite que l'on veut. A la limite, nous aurons l'aire du segment de parabole.

Montrer que l'on obtient une suite géométrique de premier terme $A_0 = \text{aire ABC}$ dont la somme converge vers l'aire recherchée Σ . Calculer la raison de cette suite.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_0 + A_1 + \dots + A_n) = \Sigma.$$

α)- Calculer la limite en utilisant les formules sur les suites géométriques

β)- Archimède ne connaissait pas ces formules; voici sa méthode:

Après avoir remarqué que : $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, montrer par récurrence que

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, A_0 + A_1 + \dots + A_n = \frac{4}{3} \cdot A_0 - \frac{1}{3} \cdot A_n, \text{ puis montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0.$$

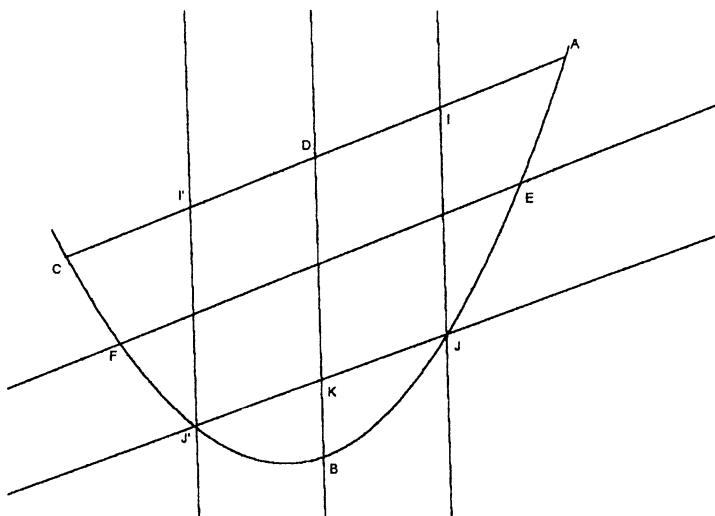
En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_0 + A_1 + \dots + A_n) = \frac{4}{3} \cdot A_0.$$

Généralisation : peut-on avec cette méthode, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \left(\frac{1}{p}\right)^n \right)$?

3°) Application numérique :

Soit la parabole d'équation $f(x) = x^2$ et la droite d'équation $y = -x + 6$, calculer l'aire du segment de parabole délimité par cette parabole et cette droite.



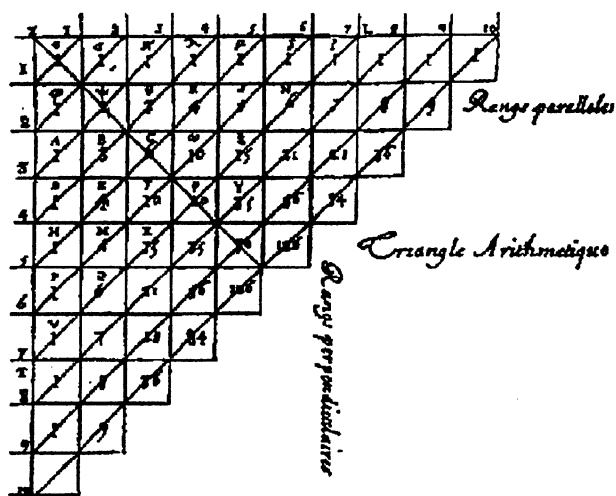
TRIANGLE DE PASCAL.

L'idée de ce devoir m'est venue lors d'un atelier du congrès APMEP de Marseille 1997: « *le triangle arithmétique à travers les âges* » de Michel GUILLEMOT. Peu de temps auparavant, j'étudiais la résolution d'équations polynomiales, avec une classe de première S. Nous avons vu la résolution de l'équation de second degré avec discriminant, abordée lors d'un précédent devoir celle du troisième degré. Un élève demanda alors si des formules existaient pour tous les autres degrés. La réponse est évidemment, en général, négative. Lorsque Michel GUILLEMOT nous montra comment procédaient les savants chinois du XIV^e siècle, je pensais au sujet de ce devoir.

- La première partie permet aux élèves, de découvrir intuitivement, le triangle arithmétique, qui sera étudié en classe de terminale. Ils sont invités à émettre une conjecture et à l'utiliser, sans démonstration.
- La deuxième partie propose alors la résolution d'une équation particulière du cinquième degré (ses racines sont entières), en utilisant le triangle que nous appelons aujourd'hui « triangle de Pascal ».

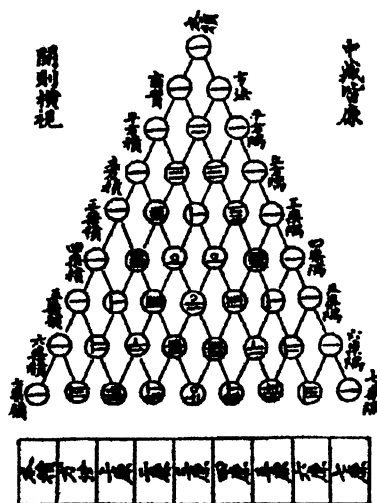
Nous savons aujourd'hui que le triangle arithmétique était connu bien avant le XVII^e siècle. Nous lui donnons le nom de Pascal, car ce mathématicien – philosophe de génie, fut le premier, à notre connaissance, à avoir laissé un traité où figurent 19 propriétés avec démonstration, de cette configuration triangulaire de nombres, puis diverses applications, dont la « formule du binôme », son utilisation pour la résolution du « problème des partis », une méthode pour calculer toutes les sommes de la

forme $\sum_{i=1}^n (a + ir)^p$, où p est un entier fixé et r la raison d'une suite arithmétique.



Triangle de Pascal. 1654.

圖方察七法古



Triangle arithmétique trouvé dans un ouvrage chinois de Chou Chi-Kié (1303)

TRIANGLE DE PASCAL ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU 5ÈME DEGRÉ.

1^{ère} partie: triangle de Pascal¹.

On appelle triangle de Pascal, la disposition de nombres suivante:

	1				
1 ^{ère} ligne	1	1			
2 ^{ème} ligne	1	2	1		
3 ^{ème} ligne	1	3	3	1	
4 ^{ème} ligne	1	4	6	4	1

1. Quelle est la règle de construction de ce triangle?

2. Ecrire les lignes 5 et 6.

3. Développer successivement:

$$(a + b)^2; (a + b)^3; (a + b)^4; (a + b)^5$$

4. Que constate-t-on?

5. Développer $(a + b)^6$ sans faire le calcul, mais en indiquant la méthode utilisée.

2^{ème} partie: Résolution de l'équation: $x^5 - 30x^4 + 355x^3 - 2070x^2 + 5944x - 6720 = 0$

Voici une méthode chinoise (page suivante), datant de 1303, pour résoudre une équation du cinquième degré.

1. Décrire la méthode.

2. Expliquer pourquoi cela marche.

3. Est-ce une méthode générale?

4. Terminer, avec cette méthode, la résolution de l'équation proposée.

¹ **Blaise Pascal** Né à Clermont-Ferrand le 19 juin 1623, décédé à Paris le 19 août 1662.

Le père de Pascal (Etienne) avait des idées non orthodoxes sur l'éducation et décida d'éduquer lui-même son fils. Il décida que Pascal n'étudierait pas les mathématiques avant 15 ans et fit disparaître tous les écrits mathématiques de leur maison. Cependant, Pascal eut la curiosité éveillée par cela et commença à étudier par lui-même la géométrie à l'âge de 12 ans. Il découvrit que la somme des angles d'un triangle valait deux droits et quand son père s'en rendit compte, celui-ci lui donna un exemplaire des *Eléments* d'Euclide.

A l'âge de 14 ans, Pascal commença à assister aux exposés de Mersenne. Ce dernier appartenait à l'ordre des Minimes, et son salon à Paris était un lieu de réunion pour Fermat, Pascal, Gassendi, Descartes et d'autres. A l'âge de 16 ans, Pascal présenta une simple feuille de papier à une de ces réunions; il contenait une série de théorèmes de géométrie projective, y compris celui de l'hexagone mystique.

Pascal inventa la première machine à calculer (1642) pour aider son père. L'appareil, appelé Pascaline, ressemblait aux machines à calculer mécaniques des années 1940. On a même suggéré que Pascal était l'auteur de l'invention des roues de brouette.

Des études en géométrie, en hydrodynamique, en hydrostatique et en pression atmosphérique le conduisirent à inventer la seringue et la presse hydraulique et à découvrir le principe qui porte son nom.

Il étudia les sections coniques et obtint d'importants théorèmes en géométrie projective. Dans sa correspondance avec Fermat, il posa les fondements de la théorie des probabilités.

Son oeuvre philosophique la plus connue, les *Pensées*, est un recueil de pensées sur la souffrance humaine et la foi en dieu.

Son dernier travail traita de la cycloïde, la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle roulant.

Pascal mourut à l'âge de 39 ans dans d'atroces douleurs d'un cancer de l'estomac qui s'était propagé au cerveau.

$$x^5 - 30x^4 + 355x^3 - 2070x^2 + 5944x - 6720 = 0$$

1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$$y^5 - 25y^4 + 245y^3 - 1175y^2 + 2754y - 2520 = 0$$

1							- 2520	- 2520							
1	1						2754	2754							
1	2	1					- 1175	- 2350	- 1175						
1	3	3	1				245	735	735	245					
1	4	6	4	1			- 25	- 100	- 150	- 100	- 25				
1	5	10	10	5	1		1	1	5	10	10	5	1		
								- 720	1044	- 580	155	- 20	1		

$$z^5 - 20z^4 + 155z^3 - 580z^2 + 1044z - 720 = 0$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

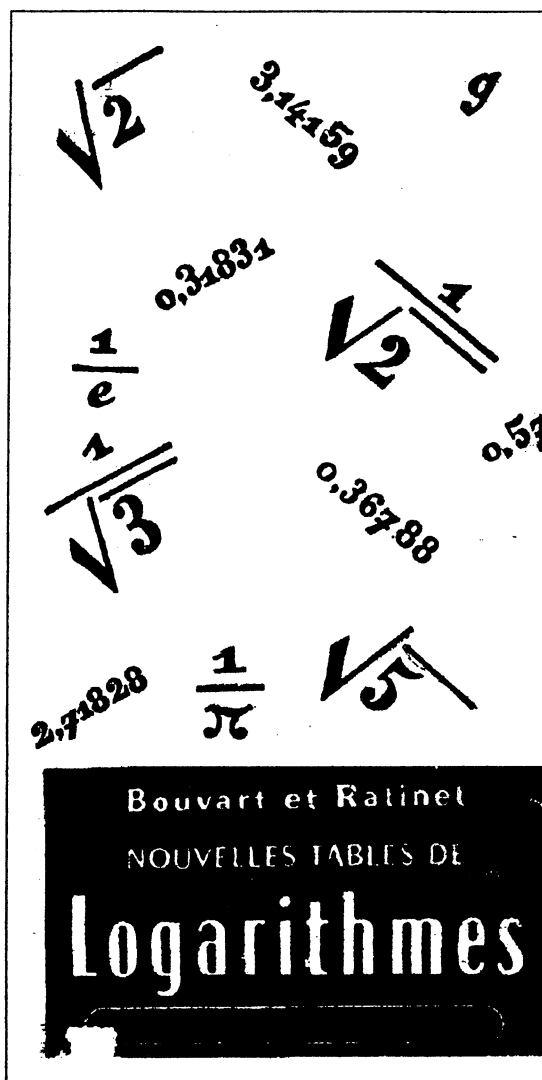
- 720						
1044	1044					
- 580	- 1160	- 580				
155	155	465	465	155		
- 20	- 20	- 80	- 120	- 80	- 20	
1	1	5	10	10	5	1
	- 120	274	- 225	85	- 15	1

$$t^5 - 15t^4 + 85t^3 - 225t^2 + 274t - 120 = 0$$

1							-120	-120							
1	1						274	274							
1	2	1					-225	-450	-225						
1	3	3	1				85	255	255	85					
1	4	6	4	1			-15	-60	-90	-60	-15				
1	5	10	10	5	1		1	5	10	10	5	1			
								0	24	-50	35	-10	1		

$$u^5 - 10u^4 + 35u^3 - 50u^2 + 24u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 4$$

² Les systèmes d'équations polynomes dans le SI YUAN YUJIAN (1303). Mémoires de l'instituts des hautes études Chinoises, vol VI. PUF, Paris 1977.



Dans son ouvrage « Introduction à l'analyse infinitésimale » EULER, dans le chapitre VI, définit les « quantités exponentielles et les logarithmes » de la manière suivante:

Nous considérons donc d'abord les quantités exponentielles, ou les puissances dont l'exposant est une quantité variable; car il est clair que ces sortes de quantités ne peuvent être rapportées aux fonctions algébriques, puisque celles-ci n'admettent que des exposants constants.

Plus loin:

Soit $a = 10$; à cause de l'arithmétique décimale dont nous nous servons, il sera facile d'avoir les valeurs de y , lorsqu'on prendra pour z des nombres entiers. En effet, on aura $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$ & $10^0 = 1$; de même $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$; & si l'on prend pour z des fractions, les valeurs de y pourront être indiquées à l'aide de l'extraction des racines; ainsi $10^{1/2} = \sqrt{10} = 3,162277\&$.

Si étant donné le nombre a , on peut conclure de chaque valeur de z , celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y , s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y

Enfin:

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, & proposons de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes sont 0 & 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.

$$\begin{array}{lll}
 A = 1,000000 & ; & IA = 0,000000 & ; & \text{soit} \\
 B = 10,000000 & ; & IB = 1,000000 & ; & C = \sqrt{AB} \\
 C = 3,162277 & ; & IC = 0,500000 & ; & D = \sqrt{BC} \\
 D = 5,623413 & ; & ID = 0,750000 & ; & E = \sqrt{CD} \\
 E = 4,216964 & ; & IE = 0,625000 & ; & F = \sqrt{DE} \\
 F = 4,869674 & ; & IF = 0,687500 & ; & G = \sqrt{DF} \\
 & & \dots & & \\
 Y = 5,000003 & ; & IY = 0,6989702 & ; & Z = \sqrt{XY} \\
 Z = 5,000000 & ; & IZ = 0,6989700 & ; &
 \end{array}$$

Ainsi, en prenant les moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver $Z = 5,000000$, à quoi répond le logarithme cherché $0,698970$, en supposant la base logarithmique $= 10$. Par conséquent, $10^{0,698970/100000} = 5$ à peu près. C'est de cette manière que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoi-qu'on ait imaginé des méthodes plus expéditives pour les trouver.

J'avoue n'avoir pas très bien compris, à la première lecture, comment tout cela fonctionnait.

De nos jours, pour calculer un logarithme, il suffit de taper sur la calculatrice pour obtenir le résultat. Les plus anciens se souviennent des fameuses tables de logarithmes dont parle EULER.

Mais comment étaient calculées les valeurs figurant dans ces tables avant le calcul informatique?

Lors d'un stage MAFPEN, les animateurs du groupe « épistémologie et histoire des mathématiques », groupe dont j'ai le plaisir de faire parti aujourd'hui, m'apportèrent la réponse ce que j'ai essayé de faire comprendre ensuite à mes élèves. C'est le sujet de ce devoir donné en classe de première S.

Parler de logarithme en 1^{ère} S peut sembler a priori une hérésie, hors programme, mais si l'on examine de plus près la question, on ne déborde pas de ce satané programme, où figure l'étude des suites arithmétiques et géométriques.

Logarithme vient du grec

- logos qui signifie parole, discours, mais aussi, depuis les pythagoriciens³, rapport entre deux nombres, et par suite raison,
- arithmos qui signifie nombre.

Le logarithme est donc le rapport entre deux nombres, une raison.

Lorsque l'on étudie actuellement la fonction logarithme comme « la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$ », on occulte l'aspect épistémologique. La relation $f(ab) = f(a) + f(b)$ devient une conséquence et non la raison première de cette fonction: transformer la multiplication en addition; ce qui permet de simplifier énormément les longs calculs astronomiques. Laplace ne s'y est pas trompé⁴.

La définition que nous impose actuellement les programmes officiels n'a pas toujours été de nature intégrale. Voici la page d'introduction d'un cours d'algèbre à l'usage des classes de mathématiques de l'enseignement secondaire conforme aux programmes du 30 avril 1931.

³ Voir annexe: Proportions, musique et nombres sourds.

⁴ Voir citation mise en exergue du devoir.

CHAPITRE XX

LOGARITHMES

I. – Définitions des logarithmes.

571. – Définition. – Donnons-nous un nombre a supérieur à l'unité et considérons les deux progressions suivantes:

$$I \quad \begin{cases} 1, a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^p, \dots \\ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, p, \dots \end{cases}$$

La première est une progression géométrique qui commence par 1 et dont la raison est a ; la seconde est la progression des nombres entiers commençant par zéro. Nous dirons que les termes de même rang des deux progressions se correspondent.

Ces deux progressions définissent ce qu'on appelle le système de logarithme de base a .

572. – Modifions maintenant les deux progressions en insérant entre deux termes consécutifs $n - 1$ moyens.

Si entre a^p et a^{p+1} on insère $n - 1$ moyens géométriques, la raison de la nouvelle progression est (n° 567):

$$q = \sqrt[n]{\frac{a^{p+1}}{a^p}} = \sqrt[n]{a}.$$

Si entre p et $p + 1$, on insère $n - 1$ moyens arithmétiques, la raison r de la nouvelle progression est (560) :

$$r = \frac{1}{n}$$

Nous obtenons ainsi les deux progressions:

$$II \quad \begin{cases} 1, q, q^2, q^3, q^4, \dots, q^n, \dots \\ 0, r, 2r, 3r, 4r, \dots, nr, \dots \end{cases}$$

qui ne sont que les progressions du début complétées par l'insertion de nouveaux nombres, puisque nous avons:

$$\begin{cases} q^n = a \\ nr = 1 \end{cases}$$

Nous dirons que:

Le logarithme d'un nombre de la progression géométrique est le nombre correspondant de la progression arithmétique.

On trouvera en annexe un article paru dans le journal de la régionale APMEP de haute Normandie



John NAPIER ou NEPER⁵

SUITES ARITHMÉTIQUES, GÉOMÉTRIQUES ET LOGARITHMES.

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

Pierre Simon de LAPLACE (1749, 1827)

I) – Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres a et b , $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$.

A). Moyenne arithmétique de a et b .

a et b peuvent être considérés comme deux termes consécutifs d'une suite arithmétique, de raison $b - a$ (ou $a - b$, mais par convention, toutes les suites de ce problème seront croissantes).

Montrer que a , $\frac{a+b}{2}$, b sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison.

$$\frac{a+b}{2} \text{ est la moyenne arithmétique de } a \text{ et } b.$$

B). Moyenne géométrique de a et b .

Ces mêmes nombres a et b peuvent être considérés comme deux termes consécutifs d'une suite géométrique.

Quelle en est alors la raison?

Trouver un nombre m tel que a , m , b soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont on donnera la raison.

m est appelé **moyenne géométrique** de a et b .

C). Applications numériques

α) Donner les moyennes arithmétique et géométrique de $a = 4$ et $b = 9$

β) Donner les moyennes arithmétique et géométrique de $a = 1$ et $b = 2$.

II) – Système de logarithmes de base a .

On choisit $a \in]1, +\infty[$ et on considère les deux suites:

$$L: \begin{cases} (g_n): 1, a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots \\ (a_n): 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \end{cases}$$

Définitions:

- Le système, formé de ces deux suites définit ce qu'on appelle un **système de logarithmes en base a** .
- A chaque terme de (g_n) , on fait correspondre le terme de (a_n) de même indice. On obtient ainsi une fonction de $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, fonction appelée **logarithme en base a** et notée $\log_a$.

$$\text{Ainsi, } \log_a(a^n) = n \text{ et } \log_a(a) = 1 \text{ et } \log_a(1) = 0$$

Le « *but de la manœuvre* » est d'aggrandir l'ensemble de départ pour qu'il s'approche de plus en plus de $\mathbb{R}$.

⁵ John NAPIER ou NEPER (1550 – 1617) est connu pour être l'inventeur des logarithmes. En son honneur, un logarithme porte son nom: « *ln* » dit logarithme **néperien**. (Touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice).

1^{ère} étape:

- A). Construire une suite géométrique (g'_n) en insérant entre deux termes consécutifs de (g_n) leur moyenne géométrique. Donner la raison de cette suite (g'_n) .
- B). Quelle est alors la suite arithmétique (a'_n) correspondante? En donner la raison.
- C). Calculer $\log_a(\sqrt[n]{a})$ et $\log_a(a\sqrt[n]{a})$.

2^{ème} étape:

- A). Construite une suite géométrique (g''_n) en insérant entre deux termes consécutifs de (g_n) deux nombres. (Ces nombres sont appelés premier et deuxième moyen géométriques). Quelle est alors la raison de (g''_n) ?
- B). Quelle est la suite arithmétique (a''_n) correspondante? En donner la raison.
- C). Calculer $\log_a(\sqrt[n]{a})$ et $\log_a((\sqrt[n]{a})^2)$.

N^{ème} étape:

- A). Construire une suite géométrique (G_n) en insérant entre deux termes consécutifs de (g_n) , $(n - 1)$ termes. Quelle est la raison q ?
- B). Quelle est la suite arithmétique (A_n) correspondante? En donner la raison r .
- C). Calculer $\log_a((\sqrt[n]{a})^p)$, avec $1 \leq p \leq n$.

Dernière étape.

On peut ainsi remplir de nombres rationnels l'ensemble de départ, mais on est encore loin (très très loin!!!) de $\mathbb{R}$. Vous verrez cela plus tard, si vous êtes sages.

III) – Logarithme d'un nombre A.

A la N^{ème} étape, on obtient le système de logarithmes suivant:

$$L_N: \begin{cases} (G_n): 1, q, q^2, q^3, \dots, q^n = a, q^{n+1}, \dots \\ (A_n): 0, r, 2r, 3r, \dots, nr = 1, (n+1)r, \dots \end{cases}$$

- A). A figure dans la première ligne, c'est à dire est un terme de (G_n) , calculer $\log_a(A)$.
- B). A ne figure pas dans (G_n) , dans ce cas, il existe m ($m \in \mathbb{N}$) tel que: $q^m < A < q^{m+1}$, on admet alors que:

$$mr < \log_a(A) < (m + 1)r.$$

IV) – Applications numériques:

On prend $a = 10$, on obtient ainsi le **logarithme décimal** noté $\log^6$

- A). Calculer $\log(10)$, $\log(1)$, $\log(100)$, $\log(100000)$; $\log(\sqrt{10})$, $\log(\sqrt{\sqrt{10}})$.
- B). Construire la suite (G_n) ayant 15 termes entre 1 et 10. (On arrondira à 10^{-3} près).
- C). Donner un encadrement de $\log(3)$ à l'aide de deux fractions.

⁶ Touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice.

V) – Texte à commenter.

Lire le texte ci-dessous et refaire en expliquant le calcul.

Pour trouver le logarithme d'un nombre donné, comme par exemple de 9: parce que ce nombre 9 est entre les nombres 1, 10, dont les logarithmes sont connus, savoir 0,0000000 et 1,0000000, ou 0,00000000, 1,00000000, en les augmentant chacun d'un zéro, pour avoir plus exactement le logarithme qu'on cherche, faites ainsi.

Entre 1 et 10, augmentez d'autant de zéros que leurs logarithmes en contiennent, comme ici de sept zéros, pour avoir exactement dans le même nombre de figures le logarithme qu'on cherche. Savoir entre A et B , trouvez un moyen géométrique C lequel étant moindre que 9,0000000, il faudra chercher entre le moindre C et le plus grand B , un autre moyen proportionnel D , qui est encore moindre que 9,0000000: c'est pourquoi, entre le moindre D et le plus grand B , on cherchera un troisième moyen proportionnel E , entre lequel et le plus grand B , on trouvera un quatrième moyen proportionnel F , qui est ici encore moindre que 9,0000000: c'est pourquoi il faudra trouver, entre le moindre F et le plus grand B , un cinquième moyen proportionnel G , qui se rencontre ici plus grand que 9,0000000, ainsi entre le plus grand G et le prochainement moindre F , on cherchera un sixième moyen proportionnel H qui, étant moindre que 9,0000000, on doit chercher entre ce moindre H et le prochainement plus grand G , un septième moyen proportionnel I , qui est bien plus grand que 9,0000000, mais non pas avec un si grand excès comme le précédent G . C'est pourquoi, en cherchant entre le prochainement moindre et le prochainement plus grand des moyens géométriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toujours de plus en plus du nombre proposé 9,0000000, lequel enfin se rencontre ici le vingt-sixième moyen proportionnel: après quoi il sera facile de reconnaître son logarithme, car, comme entre les nombres A , B , nous avons trouvé un moyen géométrique proportionnel C , si entre leurs logarithmes on trouve un moyen arithmétique proportionnel, celui-ci sera le logarithme du premier moyen géométrique proportionnel C . C'est de la même manière que l'on trouvera les logarithmes de tous les autres moyens géométriques proportionnels et, par conséquent, du dernier 9,0000000, ou du nombre proposé 9, dont le logarithme se trouvera tel, 0,95424251.

J. OZANAM⁷

⁷ Jacques OZANAM (1640, 1717).

Correction

I) – Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres a et b , $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$.

A). Moyenne arithmétique de a et b .

$$a, \frac{a+b}{2}, b \text{ sont trois termes d'une suite arithmétique, car: } \frac{a+b}{2} - a = b - \frac{a+b}{2} = \boxed{\frac{b-a}{2}} = r$$

B). Moyenne géométrique de a et b .

a, m, b sont trois termes d'une suite géométrique si

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{m} \Leftrightarrow m^2 = a \times b \Leftrightarrow m = \sqrt{a \times b} \text{ et } q = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

C). Applications numériques

α) Les moyennes arithmétique et géométrique de $a = 4$ et $b = 9$ sont $\frac{13}{2} = 6,5$ et $\sqrt{9 \times 4} = 6$

β) Les moyennes arithmétique et géométrique de $a = 1$ et $b = 2$ sont $\frac{3}{2}$ et $\sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$

II) – Système de logarithmes de base a .

1^{ère} étape:

La suite (g'_n) est donc: $1, \sqrt{a}, a, a\sqrt{a}, a^2, a^2\sqrt{a}, a^3, a^3\sqrt{a}, \dots, a^{n-1}\sqrt{a}, a^n, \dots$

Sa raison est $\sqrt{a}$.

A chaque moyenne géométrique, on fait correspondre la moyenne arithmétique, ainsi la suite arithmétique correspondante est:

$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}, n, \dots$ On obtient donc le système de logarithme de base a suivant:

$$L': \begin{cases} (g'_n): 1, \sqrt{a}, a, a\sqrt{a}, a^2, a^2\sqrt{a}, a^3, a^3\sqrt{a}, \dots, a^{n-1}\sqrt{a}, a^n, \dots \\ (a'_n): 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}, n, \dots \end{cases}$$

On peut donc écrire: $\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$ et $\log_a(a\sqrt{a}) = \frac{3}{2}$

2^{ème} étape:

Insérer deux nombres entre deux termes consécutifs de la suite géométrique (g_n) revient à trouver deux nombres x et y vérifiant $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a} = \frac{1}{q}$, où q est la raison.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{a} \Rightarrow y^2 = ax \end{cases} \Rightarrow x^4 = ax \Leftrightarrow x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a} = q, \text{ (sa raison.)}$$

La suite arithmétique correspondante est $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \dots$ (sa raison: $\frac{1}{3}$)

$$L'': \begin{cases} (g''_n): 1, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}, a, a, a\sqrt[3]{a^2}, a^2, a^2\sqrt[3]{a}, a^2\sqrt[3]{a^2}, a^3, \dots, a^{n-1}\sqrt[3]{a}, a^{n-1}\sqrt[3]{a^2}, a^n, \dots \\ (a''_n): 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \dots, \frac{3n-2}{3}, \frac{3n-1}{3}, n, \dots \end{cases}$$

$\log_a(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3}$ et $\log_a((\sqrt[3]{a})^2) = \frac{2}{3}$

Dernière étape.

A la N^{ème} étape, on obtient le système de logarithmes suivant:

$$L_N: \begin{cases} (G_n): 1, q, q^2, q^3, \dots, q^n = a, q^{n+1}, \dots \\ (A_n): 0, r, 2r, 3r, \dots, nr = 1, (n+1)r \dots \end{cases} \text{ où } q = \sqrt[n]{a} \text{ et } r = \frac{1}{n}$$

$$\text{et } \log_a((\sqrt[n]{a})^p) = \frac{p}{n}$$

IV) – Applications numériques:

A). $\log(10) = 1$; $\log(1) = 0$; $\log(100) = 2$; $\log(100000) = 5$; $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$; $\log(\sqrt{\sqrt{10}}) = \frac{1}{4}$

B). Si l'on veut 15 termes entre 1 et 10, on pose $n = 16$; on a donc $q = \sqrt[16]{10}$ et $r = \frac{1}{16}$

i	q^i	q^i	ir	ir
0	$(\sqrt[16]{10})^0$	1	0	0
1	$(\sqrt[16]{10})^1$	1.154781985	$\frac{1}{16}$	0.0625
2	$(\sqrt[16]{10})^2$	1.333521432	$\frac{2}{16}$	0.125
3	$(\sqrt[16]{10})^3$	1.539926526	$\frac{3}{16}$	0.1875
4	$(\sqrt[16]{10})^4$	1.77827941	$\frac{4}{16}$	0.25
5	$(\sqrt[16]{10})^5$	2.053525026	$\frac{5}{16}$	0.3125
6	$(\sqrt[16]{10})^6$	2.371373706	$\frac{6}{16}$	0.375
7	$(\sqrt[16]{10})^7$	2.738419634	$\frac{7}{16}$	0.4375
8	$(\sqrt[16]{10})^8$	3.16227766	$\frac{8}{16}$	0.5
9	$(\sqrt[16]{10})^9$	3.651741273	$\frac{9}{16}$	0.5625
10	$(\sqrt[16]{10})^{10}$	4.216965034	$\frac{10}{16}$	0.625
11	$(\sqrt[16]{10})^{11}$	4.869675252	$\frac{11}{16}$	0.6875
12	$(\sqrt[16]{10})^{12}$	5.623413252	$\frac{12}{16}$	0.75
13	$(\sqrt[16]{10})^{13}$	6.493816316	$\frac{13}{16}$	0.8125
14	$(\sqrt[16]{10})^{14}$	7.498942093	$\frac{14}{16}$	0.875
15	$(\sqrt[16]{10})^{15}$	8.659643234	$\frac{15}{16}$	0.9375
16	$(\sqrt[16]{10})^{16}$	10	$\frac{16}{16}$	1

C). Ainsi, $\frac{7}{16} = 0.4375 \leq \log(3) \leq 0.5 = \frac{8}{16}$. la calculatrice donne: $\log(3) = 0.47712125472$

Texte à commenter.

	nombre	log	
A	1,000	0,000	0
C	3,162	0,500	$\frac{1}{2}$
D	5,623	0,750	$\frac{3}{4}$
E	7,499	0,875	$\frac{7}{8}$
F	8,660	0,938	$\frac{15}{16}$
H	8,977	0,953	$\frac{61}{64}$
L	8,998	0,954	$\frac{977}{1024}$
O	9	0,954	$\frac{7817}{8192}$
g			
N	9,002	0,954	$\frac{3909}{4096}$
M	9,007	0,955	$\frac{1955}{2048}$
K	9,017	0,955	$\frac{489}{512}$
J	9,058	0,957	$\frac{245}{256}$
I	9,140	0,961	$\frac{123}{128}$
G	9,306	0,969	$\frac{31}{32}$
B	10	1	1

- Pour calculer $\log C$, on cherche un nombre vérifiant: $\frac{A}{C} = \frac{C}{B}$. (C est dit « moyenne géométrique de A et B ».)

On trouve $C = \sqrt{10} \approx 3.162$, or, en $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$; (en fait $\frac{1}{2}$ est la

moyenne arithmétique de 0 et 1) donc $\log C = \frac{1}{2}$.

- Pour calculer $\log D$, on cherche un nombre D tel que $\frac{C}{D} = \frac{D}{B}$.

On trouve $D = \sqrt{10\sqrt{10}}$,

c'est à dire 10 à la puissance $\frac{(1 + \frac{1}{2})}{2} = \frac{3}{4}$

Ce qui donne $\log D = \frac{3}{4}$.

- Pour calculer $\log O$, on cherche O tel que $\frac{L}{O} = \frac{O}{N}$

On trouve 10 puissance: $\left(\frac{977}{1024} + \frac{3909}{4096}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7817}{8192}$

Ce qui donne $\log O = \frac{7817}{8192} \approx 0,954$; on arrête ici car $10^{0,954} = 9$ à

10^{-3} près. On obtient ainsi des logarithmes décimaux, c'est à dire vérifiant $\log(10) = 1$.

LOGARITHME, f. m. (*Arithmét.*) nombre d'une progression arithmétique, lequel répond à un autre nombre dans une progression géométrique.

Ces logarithmes ont été inventés pour rendre le calcul plus expéditif...

Le mot *logarithme* est formé des mots grecs logos, (λογος) discours, & arithmos, (αριθμος) nombre; c'est à dire, discours sur les nombres.

Définition donnée par « l'encyclopédie méthodique, mathématiques » de Diderot et d'Alembert (1784-1789)

TANGENTE À LA PARABOLE – POLÉMIQUE « FERMAT – DESCARTES ».

Fermat :

Application de sa « méthode pour chercher la plus grande ou la plus petite valeur, et pour les tangentes. »

- **Principe fondamental** : Si une quantité cherchée dépend d'une variable x , et si une valeur x_1 de cette variable répond à une valeur maximum ou minimum de la quantité cherchée, $x + e$ répondra à la même valeur de cette quantité, pourvu qu'on suppose l'accroissement indéterminé e infiniment petit.

- **Tangente à la parabole** :

Soit une parabole dont le sommet est D, et l'axe DC; par un point B de la courbe dont l'ordonnée est BC et l'abscisse CD, on veut mener une tangente à cette courbe. Supposons la question résolue, et que BP soit la tangente cherchée. Appelons l'abscisse DC, x , et prenons une abscisse DI = $x - e$, si du point I nous élevons IO perpendiculaire à l'axe et terminée à la tangente, nous aurons par la comparaison des triangles BCP, OIP, BC:OI::CP:IP, ou en élevant au carré et représentant CB par y , $y^2:OI^2::CP^2:IP^2$; appelons s la sous-tangente CP, la proportion précédente pourra s'écrire

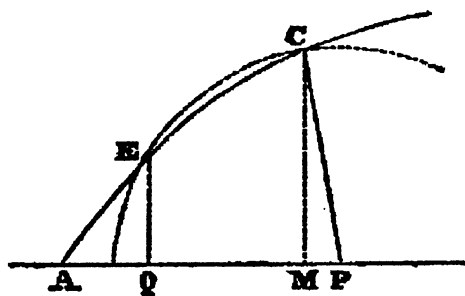
comme il suit : $y^2:OI^2::s^2:(s - e)^2$. Si le point O était sur la parabole, dont nous supposons l'équation $y^2 = 2px$ donnée, on aurait BC:OI::CD:ID ou $y^2:OI^2::x:x - e$. Si donc nous regardons e comme assez petit pour qu'on puisse supposer le point O, sur la parabole et sur la tangente, la comparaison des dernières proportions donnera évidemment $x:x - e::s^2:(s - e)^2$; d'où

$$e(s^2 - 2sx) + e^2x = 0, \text{ et par suite}$$

$s^2 - 2sx = 0$ ou $s = 2x$, qui fera connaître la sous-tangente s et par suite le point P où passe la tangente au point B de la parabole.

Descartes :

Or, après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en servir pour connaître les quantités x , ou y , ou z , qui sont déjà données, puisque le point C est donné, on la doit employer à trouver v ou s , qui détermine le point P qui est demandé. Et à cet effet, il faut considérer, que si le point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la courbe CE sans la couper; mais que si ce point P est tant soit peu plus proche ou plus éloigné du point A qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussi nécessairement en quelque autre. Puis il faut aussi considérer que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'équation par laquelle on cherche la quantité x ou y , ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC être connus, contient nécessairement deux racines qui sont inégales. Car par exemple, si ce cercle coupe la courbe aux points C et E, ayant tiré EQ parallèle à CM, les noms des quantités indéterminées x et y conviendront aussi bien aux lignes EQ et QA qu'à CM et MA; puis PE est égale à PC à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes EQ et QA, par PE et PA qu'on suppose comme donnés, on aura la même équation que si on cherchait CM et MA par PA, CA; d'où il suit évidemment que la valeur de x ou y , ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette équation, c'est à dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles, et dont l'une sera CM, l'autre EQ, si c'est y ; et ainsi des autres. Il est vrai que si le point E ne se trouve pas du même côté de la courbe que le point C, il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraie et l'autre sera renversée ou moindre que rien: mais plus ces deux points C et E sont proches l'un de l'autre, moins il y aura de différence entre ces deux racines; et enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joint en un, c'est à dire si le cercle qui passe par C y touche la courbe CE sans la couper.



Appolonius savait déjà tracer la tangente en un point à une parabole. Voici les propositions:

PROPOSITION XXXIII, livre I

Si l'on prend un point sur une parabole; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section.

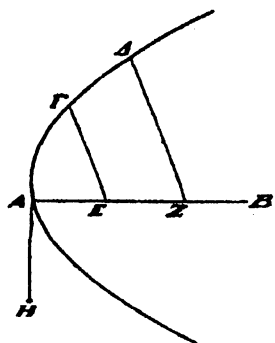
...

PROPOSITION XXXV, livre I

Lorsqu'une droite rencontrant un diamètre à l'extérieur de la section est tangente à une parabole, la droite, amenée de manière ordonnée du point de contact sur le diamètre, découpera sur le diamètre, à partir du sommet de la section, une droite égale à celle qui est située entre le sommet et la tangente; et nulle droite ne tombera dans l'espace compris entre la tangente et la section.

Voici la démonstration d'Appolonius:

Relation caractéristique de la parabole:



PROPOSITION XX

ΓE et ΔZ ordonnées, c'est à dire parallèles à la tangente à la parabole en A. ($\Gamma E \parallel \Delta Z$)

$$\frac{ZA}{AE} = \frac{\Delta Z^2}{\Gamma E^2}$$

PROPOSITION XXXIII

Hyp: AB diamètre, $\Delta \Gamma$ ordonnée, $AE = EA$; A Γ tangente à la parabole

Supposons le contraire,

$$HB \text{ ordonnée; } Z \in [HB] \Rightarrow BH > ZB \Rightarrow \frac{BH^2}{\Gamma \Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma \Delta^2} \text{ \& } \frac{BA}{A\Delta} = \frac{ZB}{\Gamma \Delta} \Rightarrow \frac{BA^2}{A\Delta^2} = \frac{ZB^2}{\Gamma \Delta^2}$$

$$\text{prop XX} \Rightarrow \frac{BE}{\Delta E} = \frac{HB^2}{\Gamma \Delta^2} \text{ \& } \begin{cases} \frac{BE}{\Delta E} = \frac{HB^2}{\Gamma \Delta^2} \\ BH > ZB \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{\Delta E} = \frac{BH^2}{\Gamma \Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma \Delta^2} = \frac{BA^2}{A\Delta^2}$$

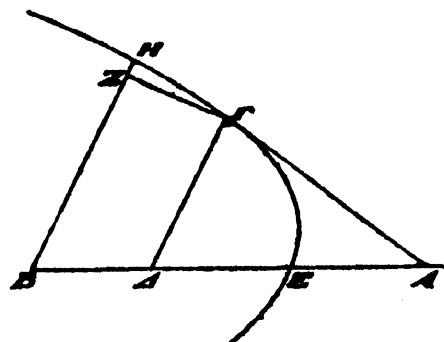
$$\frac{BE}{\Delta E} = \frac{4BE \times EA}{4\Delta E \times EA} \Rightarrow \frac{4BE \times EA}{4\Delta E \times EA} > \frac{BA^2}{A\Delta^2}$$

$$\frac{4BE \times EA}{4\Delta E \times EA} > \frac{BA^2}{A\Delta^2} \Leftrightarrow \frac{4BE \times EA}{BA^2} > \frac{4\Delta E \times EA}{A\Delta^2}$$

$$AE = \Delta E = \frac{1}{2} A\Delta \Rightarrow 4\Delta E \times EA = 4\Delta E^2 = A\Delta^2$$

$$\begin{cases} \frac{4BE \times EA}{BA^2} > \frac{4\Delta E \times EA}{A\Delta^2} \\ 4\Delta E \times EA = A\Delta^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4BE \times EA}{BA^2} > 1 \Leftrightarrow 4 \times BE \times EA > BA^2$$

ABSURDE car E milieu de $[A\Delta]$



Fermat et Descartes ne cherchent donc pas à construire une tangente à la parabole. Cette construction leur était connue.

Fermat met en œuvre « sa méthode pour chercher la plus grande ou la plus petite valeur, et pour les tangentes ». le premier exemple qu'il donne est le suivant:

Principe fondamental : Si une quantité cherchée dépend d'une variable x , et si une valeur x_1 de cette variable répond à une valeur maximum ou minimum de la quantité cherchée, $x + e$ répondra à la même valeur de cette quantité, pourvu qu'on suppose l'accroissement indéterminé e infiniment petit.

1^{er} exemple: On veut diviser une droite donnée a en deux segments x , $a - x$, dont le rectangle $x(a - x)$ soit maximum. Si nous désignons par x la valeur inconnue qui correspond au maximum, d'après le principe posé ci-dessus, $x + e$ donnera pour le rectangle cherché la même valeur maximum que x . On aura donc:

$$x(a - x) = (x + e)(a - x - e);$$

de cette égalité, on déduit:

$$e(a - 2x) - e^2 = 0,$$

$$\text{ou } (a - 2x) - e = 0;$$

mais e étant aussi petit qu'on voudra, la dernière égalité ne peut avoir lieu que si:

$$a - 2x = 0 \text{ ou } x = \frac{a}{2}$$

Après un exemple du même type, Fermat fait usage de sa méthode pour trouver les tangentes aux courbes suivantes: parabole, ellipse, cissoïde, conchoïde, cycloïde et à la quadratrice de Dinostrate.

Lagrange parlera de cette méthode en ces termes:

« Les contemporains de Fermat ne saisirent pas l'esprit de ce nouveau genre de calcul; ils ne le regardèrent que comme un artifice particulier, applicable seulement à quelques cas ... »

Descartes, quant à lui, n'admet pas ce genre de méthode, la trouvant sans rigueur.

En fait Descartes considère les courbes (donc les droites) comme lieux de points; la courbe est donnée comme un tout. Son principe est celui des proportions exactes qui doivent exister entre quantités; une quantité étant un segment de droite. Pour lui, deux grandeurs sont ou égales ou inégales. Si elles sont égales, leur différence est nulle, si elles sont inégales, elles demeurent du même ordre. Donc leur différence ne peut par exemple être un infiniment petit. Tout est ramené à l'unité, aussi petite soit-elle. L'axiome d'Archimède exclut la notion d'infinitésimaux.

D'autre part, Descartes refuse l'infini; pour lui,

« l'entendement fini « reconnaît » l'infini, il ne connaît que l'indéfini ».

Il refuse ainsi la notion de passage à la limite, l'idée qu'une infinité de points constitue la droite. Descartes n'utilise que des égalités, ce qui impose la méthode qu'il va utiliser lorsqu'il va s'agir de travailler avec des notions où apparaît l'infini: problème de tangente, par exemple, mais aussi quadratures de courbe.

Dans sa méthode pour trouver la tangente à la parabole, il cherche l'intersection de la parabole avec un cercle ayant pour rayon, la normale à la courbe; pour qu'il y ait tangente, l'équation obtenue suivant la méthode de la géométrie, ne doit avoir qu'une seule solution, donc un déterminant égal à 0.

Pas de passage à la limite, mais une égalité: $\Delta = 0$.

TANGENTE À LA PARABOLE.

1°) – Parabole.

Soit la courbe Π du plan d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$.

1. On suppose $y > 0$.

a) Montrer que $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$.

b) Tracer la représentation graphique Π_1 de la fonction $f(x) = \sqrt{2px}$, pour $p = 2$, dans le repère orthonormal $(D, \vec{T}, \vec{T}')$.

2. Construire la courbe Π .

3. Soient O et B deux points quelconques de Π et soient I et C leur projections orthogonales sur l'axe des abscisses respectivement, montrer que: $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CD}{ID}$.

DÉFINITIONS:

Π est une **PARABOLE**, d'axe ou de **DIAMÈTRE** l'axe des abscisses, de **SOMMET** D .
 BC est l'**ORDONNÉE** de B , DC son **ABSCISSE**.

Le but du problème est de construire la tangente à Π passant par B .

2°) – Méthode de Fermat (17 Août 1601 à Beaumont-de-Lomagne, France; 12 janvier 1665 à Castres, France).

Soit une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dont le sommet est D , et l'axe DC ; par un point B de la courbe dont l'ordonnée est BC et l'abscisse CD , on veut mener une tangente à cette courbe. Supposons la question résolue, et que BP soit la tangente cherchée, P étant l'intersection de cette tangente avec le diamètre. Appelons l'abscisse DC , x , et prenons une abscisse $DI = x - e$ ($e \neq 0$), du point I nous élevons IO perpendiculaire à l'axe et terminée à la tangente.



- Faire une figure.
- Montrer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CP}{IP}$.
- Posons $y = CB$ et $s = CP$, (CP est appelé la **SOUS TANGENTE** en B), montrer que: $\frac{y^2}{OI^2} = \frac{s^2}{(s - e)^2}$.
- Si le point O était sur la parabole, montrer qu'alors: $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CD}{ID}$.
- Si donc nous regardons e comme « assez petit » pour qu'on puisse supposer le point O , sur la parabole et sur la tangente, montrer que $e(s^2 - 2sx) + e^2x = 0$.
- Pourquoi peut-on en déduire que: $s^2 - 2sx + ex = 0$?
- Fermat conclut ici que $s = 2x$. Comment l'expliquer?
- Donner le principe de construction de la tangente à une parabole en un point B quelconque, selon Fermat.



3°) – Méthode de Descartes (31 mars 1596 à La Haye (maintenant Descartes), Touraine, France; 11 février 1650 à Stockholm, Suède)

Soit une parabole Π d'équation $y^2 = 2px$, dont le sommet est D, et l'axe DC; par un point B de la courbe dont l'ordonnée est $BC = \beta$ et l'abscisse $CD = \alpha$.

On considère la demi parabole Π_1 et un point M, de coordonnées $(m, 0)$.

- Donner l'équation du cercle (C) de centre M et passant par B.
- Faire une figure.

Descartes dit alors que la tangente à Π_1 est égale à la tangente au cercle (C) lorsque le cercle et Π_1 n'ont qu'un seul point commun.

- Calculer m pour que le cercle (C) et la courbe Π_1 n'ait qu'un seul point commun.
- Donner alors la construction de la tangente, selon Descartes.
- Soit P l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, montrer que dans le triangle rectangle PBM, de hauteur (BC), on a: $BM^2 = PM \times CM$.
- On pose $s = AC$, montrer alors que l'on obtient $s = 2\alpha$, comme dans la solution de Fermat.

4°) – Méthode « moderne »:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{2px}$.

1. Soit B un point de la représentation graphique Π_1 de f, d'abscisse α .
 - a) Calculer le coefficient directeur de la tangente (T) en B à Π_1 .
 - b) Donner une équation de cette tangente.
2. Calculer les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.
 - a) Est-ce en accord avec la méthode de Fermat?
3. Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en B.
 - a) Calculer l'intersection de (N) avec l'axe des abscisses.
 - b) Est-ce en accord avec la méthode de Descartes?

Correction.

1°) – **Parabole:** $y^2 = 2px$, avec $p > 0$.

$y > 0$. Comme $y^2 = 2px$, $2px$, étant égal à un carré, est positif, ainsi x l'est aussi, car $p > 0$.

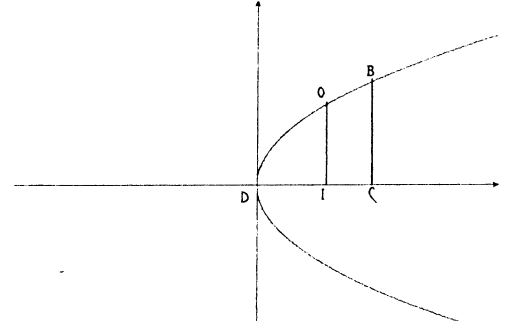
On sait que, si $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. Ici, $y = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$.

La représentation de Π s'obtient en traçant le symétrique de celle de Π_1 par rapport à l'axe $(D, \vec{T})$.

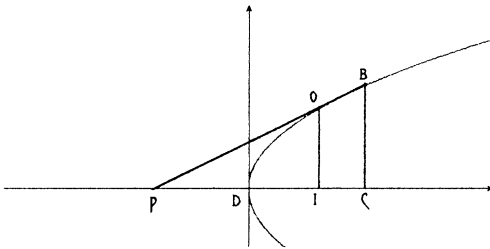
Comme B est sur Π , il vérifie son équation, d'où:

$BC^2 = 2p \times DC$, de même pour O: $OI^2 = 2p \times DI$.

Ainsi, $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{2p \times DC}{2p \times DI} = \frac{DC}{DI}$.



2°) – **Méthode de Fermat.**



D'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{BC}{OI} = \frac{CP}{IP} \Leftrightarrow \frac{y}{OI} = \frac{s}{(s-e)} \Leftrightarrow \frac{y^2}{OI^2} = \frac{s^2}{(s-e)^2}.$$

Si $O \in \Pi$, il vérifie la relation démontrée dans la première partie: $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{DC}{DI}$, donc:

$$\frac{DC}{DI} = \left(\frac{CP}{IP}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-e} = \frac{s^2}{(s-e)^2} \Leftrightarrow x(s-e)^2 = s^2(x-e) \Leftrightarrow e(s^2 - 2sx) + e^2x = 0.$$

Comme $e \neq 0$, on peut simplifier par e , d'où $s^2 - 2sx + ex = 0$.

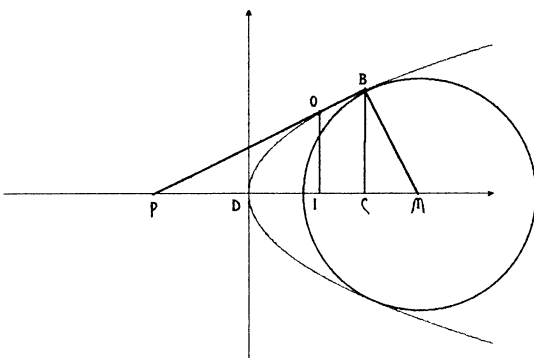
Fermat considère maintenant que e est **infinitement petit**, donc que ex est négligeable et obtient ainsi:

$$s^2 = 2x.$$

Ainsi, pour tracer la tangente en un point B d'une parabole Π , on projette B orthogonalement sur $(D, \vec{T})$: C, et on prend le symétrique de C par rapport à D: P. La droite (PB) est alors la tangente recherchée.

3°) – **Descartes.**

Equation du cercle de centre M(m, 0) et passant par B(α , β):



$$N(x, y) \in (C) \Leftrightarrow MN^2 = BM^2$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + y^2 = (m-\alpha)^2 + \beta^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2mx + 2\alpha m - \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Comme $B \in \Pi$, $\beta^2 = 2p\alpha$, donc l'équation s'écrit:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2mx + 2\alpha m - \alpha^2 - 2p\alpha = 0}.$$

$$Q \in \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2mx + 2\alpha m - \alpha^2 - 2p\alpha = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2(p-m)x + 2\alpha m - \alpha^2 - 2p\alpha = 0$$

C'est une équation du second degré en x , elle possède donc une unique solution si et seulement si son discriminant est nul:

$$\Delta = 4(p - m)^2 - 4(\alpha m - \alpha^2 - 2p\alpha) = 4(m^2 - 2m(p + \alpha) + p^2 + 2p\alpha + \alpha^2) = 4(m - (p + \alpha))^2 = 0$$

Ainsi,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = p + \alpha.$$

Ainsi, pour tracer la tangente en un point B d'une parabole Π , on trace le point M de coordonnées $(p + \alpha, 0)$; ensuite, on trace la perpendiculaire à (BM) en B, ce qui donne la tangente.

Les triangles BPM et BCM sont semblables (mêmes angles), on obtient donc les proportions:

$$\frac{BM}{PM} = \frac{CM}{BM} \Leftrightarrow BM^2 = PM \times CM.$$

Si on pose $PC = s$, on a:

$$\begin{cases} BM^2 = (m - \alpha)^2 + \beta^2 = p^2 + \beta^2 = p^2 + 2p\alpha \\ PM = s + (m - \alpha) = s + p \\ CM = m - \alpha = p \end{cases} \Rightarrow p^2 + 2p\alpha = (s + p)p \Rightarrow 2p\alpha = ps \Rightarrow s = 2\alpha.$$

4°) – Méthode moderne.

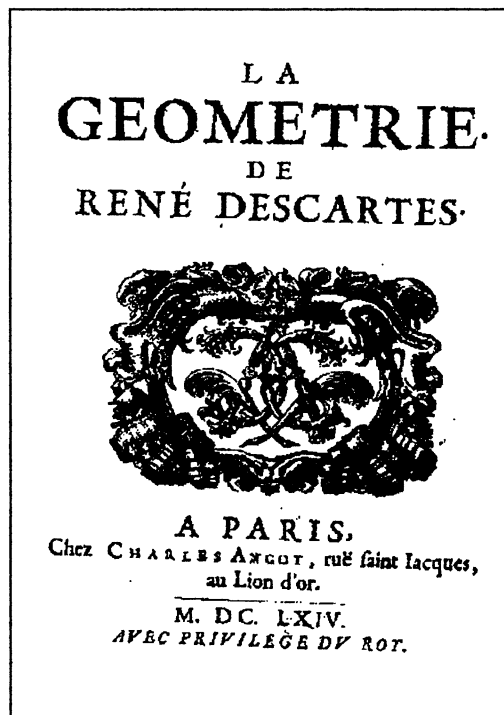
$f(x) = \sqrt{2px}$; $B(\alpha, \sqrt{2p\alpha})$; $f'(\alpha)$ représente donc le coefficient directeur de la tangente en B à la courbe représentative de f . D'où $f'(\alpha) = \frac{p}{\sqrt{2p\alpha}}$.

L'équation de la tangente est donc: $y = \frac{p}{\sqrt{2p\alpha}} x + \frac{p\alpha}{\sqrt{2p\alpha}}$

Son intersection avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(-\alpha, 0)$, ce qui est en accord avec la méthode de Fermat.

Une équation de la perpendiculaire (N) à (T) est $y = -\frac{\sqrt{2p\alpha}}{p} x + \sqrt{2p\alpha} + \frac{\sqrt{2p\alpha}}{p} \alpha$.

Son intersection avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées: $(p + \alpha, 0)$, ce qui est en accord avec la méthode de Descartes.



DIFFÉRENTIELLE.

Historiquement, la notion de dérivée découle de celle de différentielle. L'ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE DE DIDEROT & D'ALEMBERT donne la définition suivante:

DIFFÉRENTIELLE, adj. On appelle dans la haute *géométrie*, quantité *différentielle* ou simplement *différentielle*, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable. Voyez QUANTITÉ & INFINI.

On l'appelle *différentielle* ou *quantité différentielle*, parce qu'on la considère ordinairement comme la différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu. Newton & les anglois l'appellent *fluxion*, à cause qu'ils la considèrent comme l'accroissement momentané d'une quantité. Voyez FLUXION, &c. Leibniz & d'autres l'appellent aussi une *quantité infiniment petite*.

CALCUL *différentiel*; c'est la manière de différencier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable.

Cette éthode est une des plus belles de toutes les mathématiques; M. Leibniz qui l'a publiée le premier, l'appelle *calcul différentiel*, en considérant les grandeurs infiniment petites comme les différences des quantités finies; c'est pourquoi il les exprime par la lettre d qu'il met au-devant de la quantité différenciée; ainsi la *différentielle* de x est exprimée par dx, celle de y par dy, &c.

M. Newton appelle le calcul *différentiel*, *méthode des fluxions*, parce qu'il prend, comme on l'a dit, les quantités infiniment petites pour des fluxions ou des accroissements momentanés. Il considère, par exemple, une ligne comme engendrée par la fluxion d'un point, une surface par la fluxion d'une ligne, un solide par la fluxion d'une surface; & au lieu de la lettre d, il marque les fluxions par un point mis au dessus de la grandeur différenciée. Par exemple, pour la fluxion de x, il écrit $\dot{x}$; pour celle de y, $\dot{y}$ &c. C'est ce qui fait la seule différence entre le *calcul différentiel* & la méthode des fluxions.

On peut réduire toutes les règles du calcul *différentiel* à celles-ci.

1°. La différence de la somme de plusieurs quantités est égale à la somme de leurs différences. Ainsi $d(x+y+z) = dx+dy+dz$.

2°. La *différentielle* de xy est ydx+xdy.

3°. La *différentielle* de x^m , m étant un nombre positif & entier, est $mx^{m-1}dx$.

Par ces trois exemples, il n'y a point de quantité qu'on puisse différencier.

Les physiciens utilisent toujours la notation différentielle. Un des avantages est de donner la variable de déri-

vation. Nous avons gardé la notation dx dans l'écriture d'une intégrale: $\int_a^b f(x)dx$.

On remarquera qu'avec cette notation, qui est plus que formelle, les calculs sont plus simples et font mieux comprendre ce dont il s'agit.



Calcul différentiel.

Le but de ce problème est de montrer que les notations des physiciens sont équivalentes à celles des mathématiciens.

I – Définitions:

On considère une variable réelle x , ($x \in \mathbb{R}$).

Définition 1:

- On appelle différentielle de x , notée dx , toute variation infiniment petite de x .

Définition 2:

- Dire que x' tend vers x est équivalent à dire que $x' - x$ est une différentielle.

(C'est à dire $x' - x = dx$)

❗ Eclaircissements:

On considère un segment de longueur 2 cm. Cette mesure a été obtenue avec un double décimètre. Si le segment mesure 2,000001 cm, on ne peut appréhender la différence. 0,000001 est un infiniment petit pour 2 avec comme instrument de mesure le double décimètre.

Demandes:

1. Au cours d'un calcul, x et $x + dx$ peuvent être pris indifféremment l'un pour l'autre.
2. A la fin d'un calcul, $x + dx$ sera remplacé par x .

❗ Eclaircissements:

Supposons une calculatrice travaillant avec 10 chiffres après la virgule.

Le calcul de $3 + 2,000000000001$ donnera le même résultat que $3 + 2$.

II – Différentielle et opérations:

Différentielle d'une somme.

Soient x et y deux nombres réels. x et y varient de dx et dy respectivement, de combien varie la somme?

On veut calculer $d(x + y) = (x + dx + y + dy) - (x + y) = dx + dy$. Ainsi:

$$d(x + y) = dx + dy.$$

Calculer la différentielle de $x + y - z$, de ax (a est une constante), de $2x + 3y - 5z$.

Différentielle d'un produit:

Soient x et y deux nombres réels. x et y varient de dx et dy respectivement, de combien varie le produit xy ?

On veut calculer $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dx.dy - xy = xdy + ydx + dx.dy$

donc: $d(xy) = xdy + dx(y + dy)$; d'après la demande 2, on remplace $y + dy$ par y ; d'où:

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Calculer la différentielle de x^2 , de x^3 .

Calculer la différentielle du quotient $\frac{1}{x}$, de $\sqrt{x}$.

Calculer la différentielle de $\frac{x}{y}$, de $\frac{2x + 3y}{4 - 5x}$.

III – Différentielle et dérivée.

On considère une fonction f définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On admet que cette fonction est « suffisamment gentille » pour vérifier la propriété suivante:

En posant $y = f(x)$, $f(x + dx) = f(x) + d(f(x)) \Leftrightarrow f(x + dx) - f(x) = d(f(x)) = dy$

En utilisant la définition 2, montrer que, écrire $\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(x)$ revient à écrire que:

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Soient u et v deux fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$:

Dérivée d'une somme:

$$(u(x) + v(x))' = \frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u'(x) + v'(x).$$

Dérivée d'un produit:

$$(u(x) \times v(x))' = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{udv + vdu}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

1. Retrouver les dérivées d'un quotient $\frac{u}{v}$, de u^2 , de u^3 , de $\sqrt{u}$.

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en utilisant la notation différentielle:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 6$$

$$g(x) = \frac{x - 1}{4x + 5}$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$



Frontispice du livre du marquis Michel de l'hôpital:
ANALYSE DES INFINIMENTS PETITS
POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES
1696.

CORRECTION.

II – Différentielle et opérations:

Calcul de la différentielle de $x + y - z$:

$$d(x + y - z) = x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z = dx + dy - dz.$$

Calcul de la différentielle de ax :

$$d(ax) = a(x + dx) - ax = ax + adx - ax = adx.$$

Calcul de la différentielle de $2x + 3y - 5z$:

$$d(2x + 3y - 5z) = d(2x) + d(3y) - d(5z) = 2dx + 3dy - 5dz.$$

(D'après les deux différentielles précédentes).

Calcul de la différentielle de x^2 :

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 = (2x + dx)dx = 2xdx;$$

car, d'après la demande 2, on remplace $2x + dx = x + x + dx$ par $2x$.

Calcul de la différentielle de x^3 :

$$\begin{aligned} d(x^3) &= (x + dx)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 - x^3 = dx(3x^2 + 3xdx + (dx)^2) \\ &= dx(3x^2 + (3x + dx)dx) = dx(3x^2 + 3xdx) = dx(3x(x + dx)) = 3x^2dx. \end{aligned}$$

Calcul de la différentielle de $\frac{1}{x}$:

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - dx}{(x + dx)x} = -\frac{dx}{x^2}$$

Calcul de la différentielle de $\sqrt{x}$:

$$d(\sqrt{x}) = \sqrt{x + dx} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + dx} - \sqrt{x})(\sqrt{x + dx} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}} = \frac{x + dx - x}{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Calcul de la différentielle de $\frac{x}{y}$:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy + ydx - xy - xdy}{(y + dy)y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Calcul de la différentielle de $\frac{2x + 3y}{4 - 5x}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{2x + 3y}{4 - 5x}\right) &= \frac{2(x + dx) + 3(y + dy)}{4 - 5(x + dx)} - \frac{2x + 3y}{4 - 5x} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{8x + 8dx + 12y + 12dy - 10x^2 - 10xdx - 15xy - 15xdy - 8x - 12y + 10x^2 + 15xy + 10xdx + 15ydx}{(4 - 5x)^2} \\ &= \frac{8dx + 12dy - 15xdy + 15ydx}{(4 - 5x)^2} \end{aligned}$$

III – Différentielle et dérivée.

Dire que x' tend vers x est équivalent à $x' - x = dx$, d'où $x' = x + dx$.

$$\text{Ainsi } \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Dérivée de $\frac{u}{v}$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{vdu - u dv}{v^2}}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Dérivée de u^2 :

$$(u^2)' = \frac{d(u^2)}{dx} = 2u \frac{du}{dx}$$

Dérivée de u^3 :

$$(u^3)' = \frac{d(u^3)}{dx} = 3u^2 \frac{du}{dx}$$

Dérivée de $\sqrt{u}$:

$$(\sqrt{u})' = \frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{\frac{du}{2\sqrt{u}}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

Dérivée de $2x^2 - 5x + 6$

$$(2x^2 - 5x + 6)' = \frac{d(2x^2 - 5x + 6)}{dx} = \frac{d(2x^2) - d(5x) + d(6)}{dx} = \frac{4xdx - 5dx}{dx} = 4x - 5.$$

Dérivée de $\frac{x-1}{4x+5}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-1}{4x+5}\right)' &= \frac{d\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)}{dx} = \frac{\frac{x+dx-1}{4(x+dx)+5} - \frac{x-1}{4x+5}}{dx} = \\ &= \frac{\frac{4x^2 + 4xdx - 4x + 5x + 5dx - 5 - 4x^2 - 4xdx - 5x + 4x + 4dx + 5}{(4x+5)^2}}{dx} = \frac{\frac{9dx}{(4x+5)^2}}{dx} = \frac{9}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

Dérivée de $\sqrt{x^2 + x + 1}$

$$(\sqrt{x^2 + x + 1})' = \frac{d(\sqrt{x^2 + x + 1})}{dx} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

EXPONENTIELLE COMPLEXE.

Dans son cours à l'usage des étudiants de faculté, Jean DIEUDONNÉ écrit, dans sa préface:

Il ne faut pas se lasser de répéter qu'il n'y a pas de « mathématiques modernes » s'opposant aux « mathématiques classiques », mais simplement une mathématique d'aujourd'hui qui continue celle d'hier sans rupture profonde, et s'attache avant tout à résoudre les grands problèmes que nous ont légués nos prédécesseurs. Si, pour ce faire, elle a été amenée à développer de nouvelles notions abstraites en assez grand nombre, c'est que ces notions ont souvent permis, en concentrant pour ainsi dire la lumière sur le cœur des problèmes et en éliminant les détails oiseux, de progresser à pas de géants dans des domaines encore considérés comme inaccessibles il n'y a pas 50 ans; les mathématiciens qui font de l'abstraction pour l'amour de l'abstraction sont le plus souvent des médiocres.

Et plus loin:

... pris d'une part entre un enseignement secondaire aux mains d'un mandarinat coupé de la mathématique vivante depuis 80 ans et exclusivement voué à la contemplation de son nombril, et d'autre part l'enseignement de l'Analyse moderne donné dans les facultés, qui doit « coller » à la recherche pour y préparer efficacement, l'étudiant disposait en tout et pour tout d'une année de « propédeutique » pour s'initier au Calcul Infinitésimal » classique et savoir manier couramment les techniques.

Et enfin:

..., les physiciens raillent souvent le mathématicien pur de vouloir toujours tout démontrer et de « couper les cheveux en quatre » pour établir des résultats « évidents »; ils n'ont pas toujours tort, et un étudiant débutant a intérêt à admettre des résultats plausibles sans s'encombrer l'esprit de démonstrations subtiles, pour réserver ses efforts à l'assimilation de notions nouvelles et « non évidentes ».

Ce devoir, donné à des élèves de terminales C a pour ambition de montrer, plus que démontrer, le lien entre la fonction exponentielle, les nombres complexes et la trigonométrie. La formule de Moivre exponentielle arrive, en classe de terminale, comme un « cheveu sur la soupe » et il est, à mon avis intéressant que l'élève comprenne le rapport entre toutes ces notions.

$$e^{i\pi} = -1$$

EXPONENTIELLE COMPLEXE.

On admet, dans ce problème, que toutes les propriétés vraies pour une somme finie sont valables pour les sommes infinies rencontrées (ce qui n'est pas le cas en règle générale)

1°) Ecriture de l'exponentielle réelle sous forme d'une somme infinie.

a)- Recherche des fonctions f vérifiant :

$$f'(x) = f(x) \quad (1)$$

α)- Donner une solution évidente de (1)

β)- Soit f une autre solution de (1), on pose $h(x)=f(x).e^{-x}$. Montrer alors que h est une fonction constante et en déduire toutes les solutions de (1).

a)- On s'intéresse ici à

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1 \quad (1')$$

α)- Donner l'unique solution de (1').

β)- On pose

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Calculer $f'(x)$. Qu'en conclure ?

2°) Généralisation à $\mathbb{C}$

On note

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \text{ avec } z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

a)- Montrer que

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

en calculant le terme de rang n de $e^z \cdot e^{z'}$.

b)- En déduire que :

$$e^z \cdot e^{-z} = 1 \text{ et } \forall z, z' \in \mathbb{C}, e^z \neq 0.$$

c)- On obtient ainsi $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; e^x est l'exponentielle réelle.

Etudions e^{iy} avec $y \in \mathbb{R}$. ($e^{iy} \in \mathbb{C}$)

d)- Calculer (e^{iy}) ; en déduire que $|e^{iy}| = 1$ pour tout y réel. Le point d'affixe e^{iy} est donc situé sur le cercle trigonométrique !

e^{iy} s'écrit donc $e^{iy} = \cos \theta(y) + i \sin \theta(y)$ où $\theta(y)$ est une fonction réelle de y .

α)- Calculer la dérivée de $y \rightarrow e^{iy}$; en déduire que $\theta(y) = y + c$.

β)- De $e^{i0} = 1$, déduire que $c = 2k\pi$ et qu'ainsi on obtient :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (3)$$

e)- En utilisant la définition de l'exponentielle complexe (2), calculer les sommes infinies représentant $\cos y$ et $\sin y$.

f)- En utilisant (3), calculer $\cos y$ et $\sin y$ en fonction de e^{iy} et e^{-iy} .

g)- Conclusion :

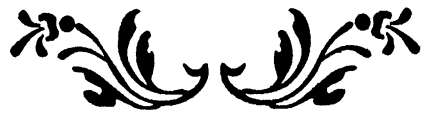
$$\forall z, z \in \mathbb{C}, z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \cdot e^{i\theta} \\ \text{avec } \rho = |z| \text{ et } \theta = \arg z \\ \textbf{Formule d'EULER (1707-1783)}$$

Montrer que l'on retrouve avec cette notation toutes les formules (ou presque) déjà rencontrées sur les complexes .

ATTENTION : $y \rightarrow e^{iy}$ n'est pas une fonction bijective ! :

h)- Montrer que :

$$e^{i\pi} = -1$$



ARTICLES sur l'histoire des Mathématiques.

PROPORTIONS, MUSIQUE ET NOMBRES SOURDS.

Cet article veut montrer que les proportions ont eu, très tôt un lien étroit avec la musique, et que cette alliance a permis, du moins en partie, de débusquer l'existence de grandeurs incommensurables entre elles. Mais nous ne pouvons parler de proportions sans dire un mot de Thalès.

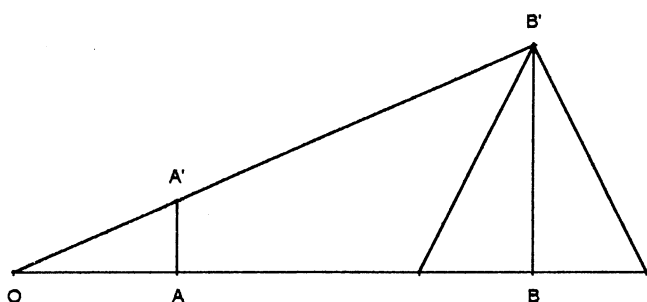
THALES

« Nous devons regarder comme suffisamment constatée l'impossibilité de déterminer, en les mesurant directement, la plupart des grandeurs que nous désirons connaître. C'est ce fait général qui nécessite la formation de la science mathématique... Car, renonçant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à les déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques. » *Auguste COMTE.*

L'une des premières utilisations des proportions fut de mesurer l'inaccessible. C'est ainsi que procéda Thalès, d'après Hiéronyme et Plutarque:

« Dressant seulement à plomb un bâton au bout de l'ombre de la pyramide, et se faisant deux triangles avec la ligne que fait le rayon du soleil touchant aux extrémités, tu montras qu'il y avait une proportion de la hauteur de la pyramide à celle du bâton, comme il y a de la longueur de l'ombre de l'un à l'ombre de l'autre. » *Plutarque*

« Hiéronyme déclare encore qu'il mesura les pyramides en partant de leur ombre, au moment où la longueur de notre ombre est égale à notre taille. » *Diogène Laërce*



Pour mesurer la hauteur de la pyramide, Thalès plante un bâton, de telle façon que l'extrémité de son ombre coïncide avec celle de l'ombre de la pyramide; il obtient ainsi deux triangles semblables et peut écrire la proportion suivante: **AA' est à BB' comme OA est à OB.**

Mais que représente AA', BB' OA et OB ?

Des grandeurs ou leur mesure ?

Pour les grecs pré-pythagoriciens, il n'y avait aucun doute; il existait bien une unité, appelée **commune mesure**, permettant de quantifier

ces quatre grandeurs⁸. Si l'unité choisie avant la mesure ne convenait pas, on en prenait un sous-multiple, etc. Ne faisons nous pas de même encore maintenant ? Si le mètre est trop grand, on prend le cm ou le mm. Ainsi, plusieurs grandeurs *peuvent* être mesurées avec la même unité.

Mais assez rapidement, sous l'impulsion de Pythagore et de son école, les proportions apparaissent en musique, comme nous allons le voir maintenant.

MUSIQUE PYTHAGORICIENNE

« La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres » *LEIBNIZ*

• Définitions des intervalles musicaux

Les premiers instruments de musique ont été construits empiriquement. On s'aperçut néanmoins que certains sons émis successivement, produisaient un effet agréable. « Selon l'école d'Archytas, l'oreille ne perçoit dans les accords harmoniques (*συμφωνία*) qu'un son unique »⁹. C'est ainsi que les notions d'accord, d'intervalle musicale ont dû apparaître. Leurs noms actuels sont quinte, quarte, octave, ton, etc. Les pythagoriciens, passionnés d'arithmétique, pensaient que le nombre régentait le monde. Ils cherchèrent donc à quantifier ces notions. « Archytas de Tarente (celui des disciples de Pythagore qui s'est le plus intéressé à la musique) s'efforce de maintenir une continuité

⁸ N'oublions pas que les grecs n'utilisaient que les nombres que nous appelons aujourd'hui entiers.

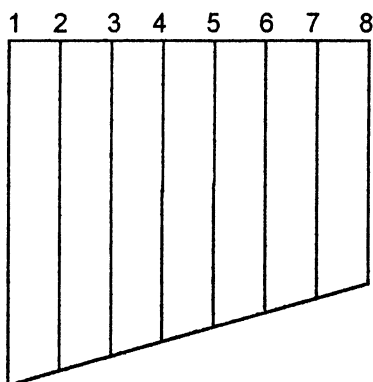
⁹ Porphyre; Commentaire sur les Harmoniques de Ptolémée.

reglée par la proportionnalité, entre les éléments de l'accord comme entre les divisions des tétracordes, considérant que le propre de la musique est la commensurabilité des intervalles. »¹⁰

Examinons ce texte de Philolaos¹¹:

« La grandeur de l'harmonie est [constituée par] la quarte et la quinte. La quinte est plus grande d'un ton que la quarte. En effet une quarte sépare la corde la plus haute (hypate) de la corde moyenne (mèse); une quinte la corde moyenne de la plus basse (nète); une quarte la corde la plus basse de la tierce (trite); et une quinte la corde tierce de la plus haute. La quinte surpasse la quarte d'un *εποχδοον* (ton). La quarte a le rapport épitrison (1.1/3), la quinte le rapport hemiolion (1.1/2) et l'octave le rapport diplasion (2:1). Ainsi l'harmonie comprend cinq tons et deux demi-tons, la quinte trois tons et un demi-ton, et la quarte deux tons et un demi-ton. ».

Pour comprendre, il faut savoir que Philolaos considère un double tétracorde, c'est à dire un instrument à huit cordes, et chaque corde porte un nom:



corde 1: hypate
corde 4: mèse
corde 5: tierce
corde 8: nète

Quant aux définitions des accords:

Octave: διαπασον; δια = à travers; πασον = tout entier; on obtient l'accord en pinçant la 1^{ère} et la 8^{ème} cordes

Quinte: διαπεντε; πεντε = cinq; on obtient l'accord en pinçant la 1^{ère} et la 5^{ème} cordes ou la 4^{ème} et la 8^{ème} cordes

Quarte: διατετταρων; τετρα = quatre; on obtient l'accord en pinçant la 5^{ème} et la 8^{ème} cordes ou la 1^{ère} et la 4^{ème} cordes.

• Intervalles et proportions:

Mais le texte parle aussi de rapports; comment sont-ils obtenus?

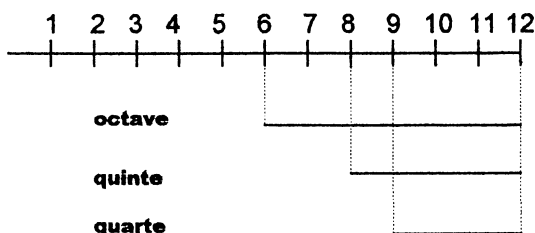
Les pythagoriciens firent de nombreuses expériences et eurent l'idée d'utiliser un monocorde. On s'aperçut que l'octave s'obtenait en pinçant la corde entière, puis sa moitié. Le rapport de l'octave est appelé διπλασιον διαστημα, c'est-à-dire segment double. On obtient donc le rapport 2:1 en choisissant la moitié comme unité. Le rapport de la quinte est appelé ημιολιον διαστημα (ημιολιον = moitié en plus). En raccourcissant le monocorde d'un tiers, après avoir pincé la corde entière, on obtient un intervalle de quinte. En choisissant le segment de la corde qui résonne la deuxième fois comme unité, on obtient un segment de longueur 1.1/2. Le rapport de la quarte est appelé επιτριτον διαστημα (επιτριτον = un tiers en plus).

En choisissant le segment de la corde qui résonne la deuxième fois comme unité, on obtient un segment de longueur 1.1/3.

Il y a donc trois unités pour utiliser le monocorde ce qui donne 2 parties pour l'octave, 4 pour la quarte et 3 pour la quinte. Si l'on veut former en même temps ces trois consonances sur le monocorde, il faut choisir une unité commune, qui est le PPCM de 2, 3 et 4: 12. (Certains auteurs ont vu ici l'apparition de la commune mesure de deux segments)

On place donc le monocorde sur une règle graduée en douze parties égales (canon).

Le zéro n'existant pas chez les grecs, on désigne chaque partie de corde interceptée, par son extrémité, on obtient ainsi pour l'octave le rapport 12:6 = 2:1, pour la quinte, le rapport 12:8 = 3:2 = 1.1/2 et pour la quarte le



¹⁰ Claude Ptolémée

¹¹ Philolaos de Crotone, pythagoricien.

rapport $12:9 = 4:3 = 1.1/3$. Chaque rapport est représenté par un segment ayant pour extrémités chacun des deux nombres. Chaque rapport était appelé διαστημα (segment). Puis on remplaça le mot διαστημα par celui de λογος qui exprime l'association des deux extrémités.

- Vocabulaire:

Faisons maintenant une pause et intéressons nous à quelques termes et leurs étymologies:

Logos: (λογος)

Sens courant: mot, discussion, conversation, récit et raison.

Sens mathématique: association de deux nombres, puis plus tard rapport au sens musical. Les pythagoriciens aimaient jouer sur l'ambiguïté de ce mot, eux pour qui tout était nombre!

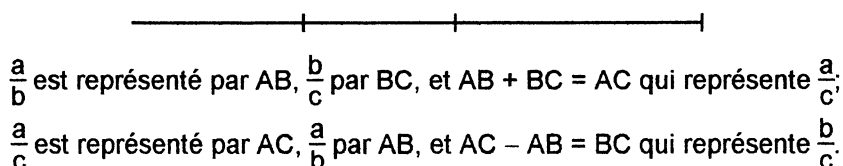
Analogue: (ανα λογος) Ce mot a été fabriqué par les mathématiciens; au départ, on disait que deux couples de nombres étaient égaux logos à logos (ανα λογον ισοι) quand leurs associations¹² étaient les mêmes. Puis l'expression a perdu son dernier terme (ισοι). Elle est ensuite passée dans le langage courant.

- Petits exercices d'arithmétique:

Reprenons l'étude du texte de Philolaos, où il est dit que « La quinte surpasse la quarte d'un επογδοον (ton). ». Ptolémée développe mieux cette idée: il dit que « la différence entre les deux rapports ημιολιον λογοσ (1.1/2) et ημιολιον λογοσ (1.1/3) est επογδοον λογοσ (9:8) ». Or 9/8 n'est pas la différence de ces deux fractions, mais leur quotient. Par contre, sur le canon, la différence entre l'intervalle de quinte, 12:8, et l'intervalle de quarte, 12:9, donne l'intervalle 9:8.

D'autre part, Philolaos nous dit que l'octave est l'addition de la quinte et de la quarte. Si l'on considère le double tétracorde, cela se conçoit aisément; mais sur le canon, en additionnant l'intervalle de quarte, 12:9, à celui de quinte, représenté par l'intervalle 9:6, on obtient l'intervalle 12:6, qui représente l'octave.

Nous avons donc les règles de calcul:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} \div \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$


- Moyennes:

Le problème de la construction d'une gamme se posa. L'idéal serait de pouvoir diviser en deux parties égales un intervalle musical. La seule contrainte serait que chaque « note » sonne « juste » avec toutes les autres notes. Mais que veut dire « diviser en deux parties égales » ? Citons Archytas:

« En musique, il y a trois médiètes: la médiète arithmétique, la médiété géométrique et la médiété sous-contraire appelée aussi harmonique. On a une médiété arithmétique quand les trois nombres ont, logos à logos, la différence suivante: le premier dépasse le second de la même quantité dont le second dépasse la troisième. Il se trouve que dans cette égalité, le rapport (διαστημα) des grands nombres est le plus petit des deux, et celui des petits est le plus grand. On a une médiété géométrique quand le premier nombre a le même rapport avec le second que le second avec le troisième. Dans ce cas, les grands nombres forment un rapport égal à celui des petits. On a une médiété harmonique quand le premier nombre dépasse le second d'une fraction du premier identique à la fraction du troisième dont le nombre moyen dépasse le troisième. Dans cette égalité logos à logos, le rapport ((διαστημα) des grands nombres est le plus grand et celui des petits nombres est le plus petit. ».

Voyons ce qui se passe sur le canon.

9 est la moyenne arithmétique¹³ de 12 et 6, car $12 - 9 = 9 - 6$ ¹⁴; 9 se trouve être le milieu du segment ayant pour extrémités 12 et 6, mais les intervalles musicaux 12:9 et 9:6 ne sont pas égaux, on a $12/9 < 9/6$.

¹² Comme nous le verrons plus loin, au début, un logos n'était pas seulement un rapport, au sens de fraction, mais une association de deux nombres, comme dans l'exemple: 12 est à 9 comme 9 est à 6; il faut considérer ici les différences: $12 - 9$ et $9 - 6$.

¹³ moyenne arithmétique de a et b: $m = \frac{a+b}{2}$

¹⁴ Voir note 4

8 est la moyenne harmonique¹⁵ de 12 et 6, car $6 = 8 - \frac{1}{3}6$ et $12 = 8 + \frac{1}{3}12$.; mais encore ici, les intervalles musicaux ne sont pas égaux; on a $12/8 > 8/6$.

Si l'on veut des intervalles musicaux égaux, il faut trouver un nombre¹⁶ x vérifiant $\frac{12}{x} = \frac{x}{6}$, ce que nous appelons moyenne géométrique de 12 et 6.

MOYENNE GEOMETRIQUE

« Dieu a créé les entiers, le reste est l'œuvre de l'homme. » Léopold KRONECKER.

On sait déterminer arithmétiquement les deux moyennes arithmétique et harmonique de l'octave. Mais malgré de nombreuses tentatives, les pythagoriciens n'arrivèrent pas à trouver la troisième moyenne arithmétiquement. On se tourna donc vers la géométrie, d'où son nom de moyenne géométrique.

- Nombre et grandeur $\leftrightarrow$ nombre ou grandeur

Le texte du Ménon de Platon nous donne la construction du côté d'un carré double d'un carré donné.

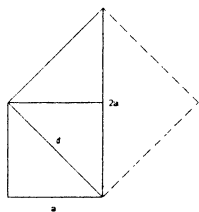


fig.1

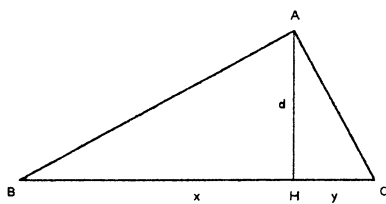


fig.3

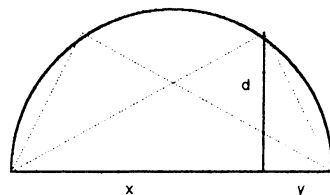


fig.2

Intuitivement les deux carrés (fig.1), puis les deux triangles rectangles sont semblables.

→ On forma donc les rapports égaux logos à logos: $\frac{a}{d} = \frac{d}{2a} \Leftrightarrow 2a^2 = d^2$, d'où d est moyenne géométrique de a et de $2a$, ce qui donne une construction géométrique de la partition de l'octave 2:1.

→ On essaya de généraliser en voyant que pour obtenir la moyenne géométrique:

- il faut considérer des triangles semblables.
- il faut faire jouer deux rôles au même côté dans deux triangles différents.

Ici, (fig.2) ABH est semblable à BHC, d'où $\frac{x}{d} = \frac{d}{y}$ et d est la moyenne géométrique de x et y .

On construit donc un triangle rectangle ayant pour hypoténuse $x+y$ et pour hauteur d . On utilise le théorème de Thalès¹⁷ sur l'inscription d'un triangle rectangle dans un demi-cercle pour tracer un demi-cercle de diamètre $x+y$, puis on élève la perpendiculaire à ce diamètre passant par le point de jonction de x et de y et l'on obtient la moyenne proportionnelle de x et y . (fig.3).

Mais, les concepts de logos et d'analogia qui étaient à la base de notions comme la moyenne géométrique s'appliquaient à des nombres. Sont-ils toujours pertinents lorsqu'ils s'agit de grandeurs? Il faut remarquer que le fait que la diagonale permette la construction du double d'un carré, et par là la construction de la moyenne géométrique, ne suffit pas à prouver son incommensurabilité avec le côté.

- Découverte de l'incommensurabilité:

La difficulté de trouver cette moyenne géométrique autrement que par construction a sûrement conduit les pythagoriciens à poser la question sous une forme plus générale: quand est-il possible de trouver entre deux nombres un autre nombre formant avec chacun d'eux un rapport identique?

On trouva certaines réponses, reprises par Euclide:

◇ VIII 11: Entre deux nombres carrés, il y a un nombre moyen proportionnel. $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

¹⁵ moyenne harmonique de a et b : $m = \frac{a \times b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; ce qui justifie son appellation de sous-contraire de la moyenne arithmétique.

¹⁶ x serait dit rationnel en langage moderne.

¹⁷ A ce que déclare Pamphila, il fut le premier, après avoir été, en géométrie, l'élève des Egyptiens, à avoir inscrit dans un cercle le triangle rectangle, et sacrifia un bœuf en l'honneur de sa découverte.

- ◇ VIII 12: Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels. $\frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27}$
- ◇ VIII 18: Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel. $6 = 2 \times 3$ et $24 = 4 \times 6$ et $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ et $\frac{6}{12} = \frac{12}{24}$
- ◇ VIII 20: Si entre deux nombres, il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront plans semblables.

Mais, Archytas démontra une proposition qui avait été énoncée avant lui, à savoir qu'entre deux nombres qui sont dans un rapport superpartiel¹⁸, il est impossible d'insérer une ou plusieurs moyennes géométriques.

*« On ne peut, dans un rapport superpartiel, introduire une moyenne proportionnelle [...]. Archytas en fait bien la démonstration, mais celle-ci manque de rigueur. En gros, elle est la suivante: soit, dit-il, le rapport superpartiel A/B. Je prends, dans le même rapport, les deux plus petits nombres C et DE. Ainsi donc, ces nombres étant les plus petits possible et dans un rapport superpartiel, le nombre DE dépasse le nombre C d'une partie commune aux deux. Appelons-la D, mais, je le précise, D n'est pas un nombre, mais l'unité. En effet, à supposer que D soit un nombre et lui-même une partie de DE, ce qui est impossible, puisque les plus petits termes d'un rapport particulier formés d'autres nombres quelconques, sont premiers entre eux et ne diffèrent que d'une unité. Donc D est bien une unité; par conséquent, le nombre DE dépasse le nombre C d'une unité. Et c'est pourquoi on ne peut introduire dans le rapport superpartiel une moyenne constituée par un nombre entier qui divise ce rapport en parties égales. »*¹⁹

Or 2:1, 4:3 et 3:2 sont des rapports superpartiels. On commença alors à soupçonner l'existence de grandeurs dites incommensurables.

Mais pour établir que ces cas particuliers sont tels en vertu d'une nécessité absolue, il faut avoir une confiance totale dans la méthode qui en montre la nécessité. C'est alors seulement que peut naître le concept d'incommensurabilité. La première démonstration utilisa très probablement la méthode par soustraction réciproque, appelée aussi anthyphérèse. Mais, faisant intervenir un processus infini, elle ne parut pas très convaincante; les pythagoriciens démontrèrent l'incommensurabilité de la diagonale et du côté à l'aide d'une méthode empruntée à Zénon: la dialectique et son corollaire la démonstration indirecte. On montra l'incommensurabilité du côté et de la diagonale en disant que si le contraire était vrai, un nombre serait alors pair et impair en même temps. Et Zénon de conclure: *« Il semble donc que c'est à la découverte de l'incommensurabilité linéaire que l'on doit l'apparition dans les mathématiques grecques d'un nouveau type de démonstration ainsi que le refus de l'empirisme et de l'intuition. »*

NOMBRES IRRATIONNELS

« Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équi-multiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois »

Euclide, Livre V, définition 6.

La découverte des grandeurs incommensurables a certainement troubler les pythagoriciens qui affirmaient que *« Toute chose qu'il nous est donné de connaître possède un nombre, et rien ne peut être conçu, ni connu, sans le nombre. »*. On continua néanmoins à faire de l'arithmétique (αριθμός = compter). La géométrie, quant à elle, s'occupa des grandeurs. Les livres des éléments d'Euclide appartiennent chacun à une des deux branches des mathématiques, désormais séparées: les livres I, II, III, IV, V, VI, X, XI, XII et XIII sont géométriques, les livres VII, VIII et IX arithmétiques. Certaines méthodes, utilisées en arithmétique, sont utilisées en géométrie, mais leurs finalités ont changé. Ce que nous appelons l'algorithme d'Euclide, désigné par le mot d'anthyphérèse chez les grecs, donne le P.G.C.D. de deux nombres et un critère de commensurabilité pour les grandeurs. La longue marche vers la fusion des nombres et des grandeurs ne s'achèvera qu'avec Dedekind qui proposera une construction des nombres irrationnels, longtemps appelés nombres souchés, à partir des nombres entiers. Ce dernier rend d'ailleurs hommage à Euclide en ces termes: *« Si l'on regarde le nombre irrationnel comme un rapport de deux grandeurs mesurables, alors cette manière de le déterminer a été déjà donnée de la manière la plus claire possible dans la célèbre définition qu'Euclide donne de l'égalité de deux rapports. »*

¹⁸ $\frac{n+1}{n}$

¹⁹ Boèce; de la musique.

BIBLIOGRAPHIE:

1. **DEDEKIND** : Continuité et nombres irrationnels, 1872.
2. **EUCLIDE**: Les éléments, texte grec et traduction libre par Georges J. KAYAS; Editions du C.N.R.S.
3. **PLATON** : Menon; traduction et notes par E. CHAMBRY; G.F. Flammarion
4. **SZABO** : Les débuts des mathématiques grecques; VRIN.



DIAMÈTRE. n.m. (XIII^e: de diamétrus, gr. *διαμετροσ*) Ligne droite qui passe par le centre d'un cercle, d'une sphère ...

Petit Robert

1°) – Euclide²⁰

La définition du « petit Robert » est simple: « *Ligne droite qui passe par le centre* ».

Elle l'est moins chez Euclide:

*Et un **diamètre** du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.*

Euclide, Livre I, Définition 17.

En effet, cette définition est plus qu'une définition, elle énonce une propriété: « ...coupe le cercle en deux parties égales ».

D'après Proclus, on doit à Thalès, la démonstration de cette propriété.

Il faut rendre grâce à l'antique Thalès, entre autres découvertes, pour celle du théorème() suivant : car on dit qu'il fut le premier à découvrir et à énoncer que les angles à la base de tout triangle isocèle sont égaux, bien qu'il ait appelé semblables, selon une terminologie plus ancienne, les angles qui sont égaux.*

C'est Thalès qui le premier, à ce qu'on prétend, démontra que le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

Proclus

Et Maurice CAVEING²¹ de proposer une démonstration qui aurait pu être faite par Thalès:

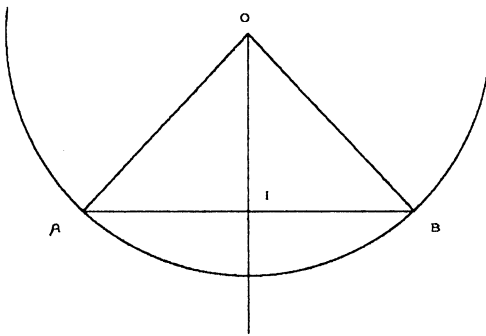


Fig. 1

« Si l'on considère la figure, dans laquelle O est le centre d'un cercle, OD un diamètre, et AB une droite perpendiculaire à OD en un point quelconque I, terminée sur le cercle en A et B, alors OA et OB sont des rayons, le triangle AOB est isocèle et, d'après Thalès (*), les angles à la base OAB et OBA sont égaux. Dans les triangles OAI et OBI, les angles en A et en B sont égaux, les angles en I sont égaux comme droits, les côtés OA et OB sont égaux, par suite, ces triangles sont égaux et IA est égal à IB. Comme le point I est quelconque sur le diamètre, toutes les cordes telles que AB, normales à un même diamètre, sont dichotomisées par le diamètre OD et le cercle entier est dichotomisé. »

Ainsi, « partager en deux parties égales » a ici un sens bien précis, le diamètre coupe en deux parties égales toute corde qui lui est perpendiculaire, ce qu'exprime le mot grec: *διαμετροσ* = *qui mesure de travers, qui répartit*.

Euclide utilise d'ailleurs le même mot pour le parallélogramme:

Les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux, et le diamètre les coupe en deux parties égales.

Euclide, Livre I, Prop, 34

Le mot diamètre, qui figure dans le texte grec, sera plus tard remplacé, dans ce contexte, par le mot diagonal.

²⁰ Né: ~ - 365 à Alexandrie, Egypte; mort ~ - 300

²¹ La figure et le nombre, Maurice CAVEING, Septentrion.

DIAMÈTRE. n.m. (XIII^e; de diamétrus, gr. *διαμετροσ*) Ligne droite qui passe par le centre d'un cercle, d'une sphère ...
Géom. (Incluant le sens courant) *Diamètre* d'une courbe: le lieu rectiligne des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.
 Petit Robert

2°) – Appolonius²²

On trouve une définition du diamètre pour une courbe quelconque, chez Appolonius:

*J'appelle **diamètre** de toute ligne courbe située dans un seul plan la droite qui, menée de la ligne courbe, coupe en deux parties égales toutes les lignes droites menées dans la ligne parallèlement à une droite quelconque; sommet de la ligne l'extrémité de cette droite qui est située sur la ligne, enfin j'appelle droites menées d'une manière ordonnée au diamètre chacune des parallèles.*

Appolonius de Perges, les coniques, livre I, définition IV

Nous avons donc une seconde définition. Là encore, elle contient une proposition: « coupe en deux parties égales toutes les lignes droites menées dans la ligne parallèlement à une droite quelconque ».

Pour Euclide comme pour Appolonius, le diamètre est donc une droite; Euclide le donne par définition pour le cercle et affirme ensuite qu'il partage ce dernier en deux parties égales. Appolonius, lui, le définit par cette caractéristique et affirme que c'est une droite, ce qui pose le problème de son existence.

Autre remarque, le diamètre dépend d'une direction, celle de la tangente au sommet²³. C'est évidemment valable pour le cercle, toute corde perpendiculaire au diamètre est parallèle à la tangente à son extrémité.

Appolonius va donc montrer que toute conique possède au moins un diamètre, celui que nous appelons aujourd'hui axe de la conique (prop. V, VI, VII & VIII, Livre 1).

A partir de ce diamètre « principal », il donne la caractéristique de chaque espèce de conique.

Exemple:

Parabole: Prop. XI, Livre 1 (Fig. 1)

Le point K est sur la parabole de diamètre ZH, KI est parallèle à la tangente au sommet Z. On a alors $KI^2 = \Theta Z \cdot ZI$, où²⁴ ΘZ vérifie $\frac{\Theta Z}{ZA} = \frac{BI^2}{BA \cdot A\Gamma}$.

Une fois en possession de cette caractéristique et de celles de l'hyperbole et de l'ellipse, il étudie les propriétés des coniques dans le plan.

Appolonius montre que, entre autre, une conique possède d'autres diamètres et que la caractéristique de chaque conique a la même forme pour tout diamètre.

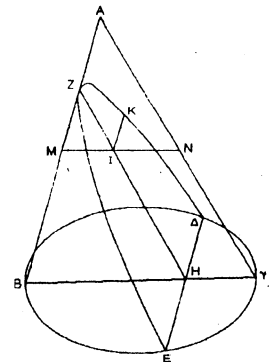


Fig. 2

3°) – Abscisse – ordonnée

La définition d'Appolonius se termine par: « enfin j'appelle droites menées d'une manière ordonnée au diamètre chacune des parallèles. ».

Il faut savoir que le mot droite, pendant très longtemps, a la même signification que ce que nous appelons segment de droite.

²² Né ≈ – 262 à Perges, Grèce Ionie (maintenant Turquie), mort ≈ – 190 à Alexandrie, Egypte

²³ Ce n'est pas dit clairement dans la définition, mais un passage à la limite le montre aisément.

²⁴ Les grecs appellent ΘZ : *ορθια πλευρα* (= le côté qui se tient droit), les géomètres de la renaissance, le *latus rectum*, les modernes, le *paramètre*.

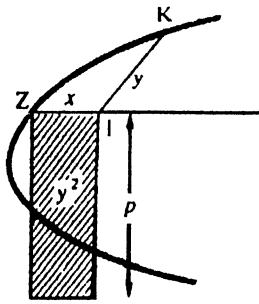


Fig. 3

Ainsi, pour la parabole (Fig 2), KI représente une droite menée de manière ordonnée au diamètre, ou plus simplement une **ordonnée**. Cette ordonnée dépend évidemment d'une direction, celle de la tangente en Z à la parabole. Le segment ZI sera, lui, appelé **abscisse**²⁵.

Bien entendu, ces mots *d'abscisse* et *d'ordonnée* ne désignent pas les mêmes choses qu'actuellement, ici ce sont des segments de droite. Néanmoins, en utilisant le système de notation qui nous vient de **Descartes**, nous pouvons écrire:

Avec $p = \text{ZI}$, $y = \text{KI}$ et $x = \text{ZI}$, $\boxed{y^2 = px}$.!

Ainsi, pendant très longtemps, le diamètre a joué le rôle de nos repères pour écrire les propriétés caractéristiques des coniques.

Pour l'**hyperbole**

$$\boxed{y^2 = px - \frac{p}{a} x^2}$$

et

pour l'**ellipse**.

$$\boxed{y^2 = px + \frac{p}{a} x^2}$$

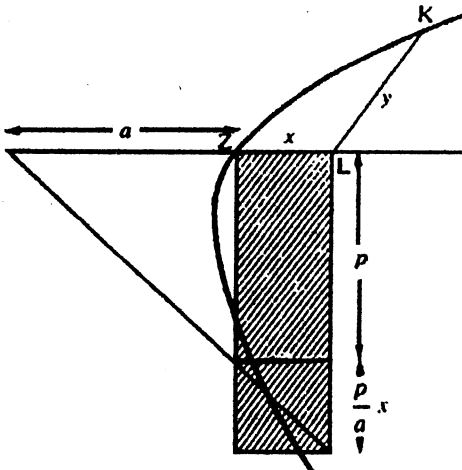


Fig. 4

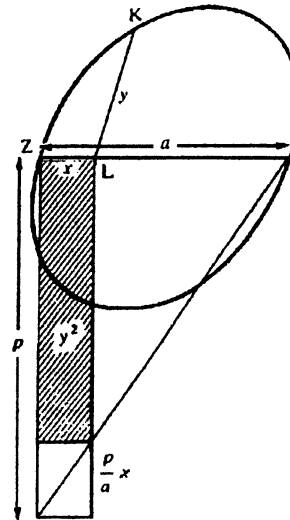


Fig. 5

Qu'en est-il pour le **cercle**?

Soit ST un diamètre, la tangente en S est perpendiculaire au diamètre; MH est donc une ordonnée, SH est l'abscisse.

On doit à **Menechme**²⁶, d'après Heath, la propriété caractéristique du cercle: (en utilisant les notations modernes)

si l'on pose $\text{SH} = x$, $\text{HM} = y$ et $d = \text{ST}$, on a:

$$\boxed{y^2 = dx - x^2}$$

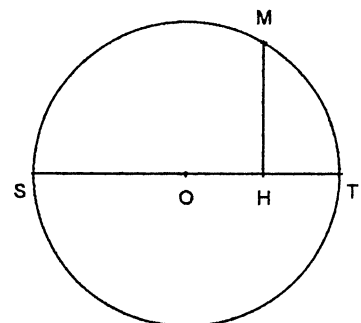


Fig. 6

²⁵ Je n'ai pas trouvé l'origine et l'explication de ce mot. On le trouve dans les traductions des textes grecs. Tout renseignement à ce sujet sera le bienvenu.

²⁶ Né $\approx$ - 380 à Alopeconnesus, Asie Mineure (maintenant Turquie); mort: $\approx$ - 320

A PROPOS DES LOGARITHMES



John NAPIER (1550 - 1617)

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

Pierre Simon de LAPLACE (1749, 1827)

Lorsque nous « calculons » le logarithme d'un nombre, nous tapotons sur la calculatrice et en un laps de temps vient la réponse. Certains se souviennent peut-être du calcul numérique et des « tables de log ». Mais, au fait, comment était remplies ces pages pleines de chiffres?

John NAPIER ou NEPER (1550 - 1617) est connu pour être l'inventeur des logarithmes. Un logarithme porte d'ailleurs son nom. En fait, on lui doit une relation: $N(x) = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$ (en 1614), relation qui vérifie, pour tout a et b positifs, $N(ab) = N(a) + N(b) - \ln 10^7$. Mais, bien que facilitant énormément les calculs de l'époque, le terme $-\ln 10^7$ est un peu gênant. C'est BRIGGS qui introduit en 1624, une relation évitant ce terme.

Nous allons montrer comment étaient construites ces tables.

A – Position du problème:

Le problème du calcul avec des grands nombres a ralenti considérablement le progrès de certaines sciences, comme la navigation, où l'on devait, pour faire le point, calculer des angles, leurs cosinus et sinus, les multiplier entre eux, etc. On chercha donc rapidement une méthode de calcul permettant de faire plus rapidement ces calculs.

On remarqua que l'addition est plus simple que la multiplication. Pourquoi ne pas trouver une « fonction » qui remplace la multiplication par l'addition? C'est à dire trouver une fonction, bijective, vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$.

B – Quelques rappels sur les proportions:

Comme nous l'avons montré dans un article précédent, les grecs ont introduit la notion de proportions. On disait que deux couples de nombres ou de grandeurs sont égaux logos à logos si leurs manières d'être sont les mêmes.

$$a : b :: c : d \text{ peut signifier } b - a = d - c \quad (1)$$

$$\text{mais aussi } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (2).$$

Voici deux propriétés intéressantes pour notre propos:

$$(1) \quad a : b :: c : d \Leftrightarrow b - a = d - c \Leftrightarrow a + d = b + c$$

$$(2) \quad a : b :: c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Si l'on a trois termes,

$$(1) \quad a : b :: b : c \Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow a + c = 2b$$

$$(2) \quad a : b :: b : c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow a \times c = b^2.$$

Dans le premier cas, nous dirons que b est la moyenne arithmétique de a et c , mais aussi que a , b et c sont en proportion arithmétique; dans le second, que b est la moyenne géométrique de a et c , mais aussi que a , b et c sont en proportion géométrique.

Enfin:

$$(1) \quad a : b :: b : c \Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow a \leq b \leq c.$$

$$(2) \quad a : b :: b : c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow a \times c = b^2. \Rightarrow b \in [a, c] \text{ ou } b \in [c, a]$$

C – Logarithme: logos = raison et arithmos = nombre.

OZANAM, dont on trouvera le texte en annexe, définit le logarithme de la façon suivante:

« Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique, correspondant à d'autres nombres en proportion géométrique ».

Ainsi,	à la proportion géométrique	1	10	100	1000	10^4
correspond	la proportion arithmétique	0	1	2	3	4

et nous écrivons $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10^4 = 4$. Nous définissons ainsi les logarithmes décimaux.

Premières remarques:

Le premier terme de la proportion arithmétique étant 0, le premier de la proportion géométrique est 1 et nous avons $\log(1) = 0$, quelles que soient les proportions choisies.²⁷

En système décimal, $\log(10) = 1$.

Soient 1, α , β , γ une proportion géométrique et 0, a, b, c la proportion arithmétique correspondante,

$$\begin{array}{lcl} \text{Nous avons} & a - 0 = c - b & \Leftrightarrow \quad c = a + b \\ \text{et} & \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} & \Leftrightarrow \quad \gamma = \alpha \times \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Ainsi, à la proportion} & 1 & \alpha \quad \beta \quad \alpha \times \beta \\ \text{on fait correspondre la proportion} & 0 & a \quad b \quad a + b \end{array}$$

$$\text{ce qui s'écrit: } \left\{ \begin{array}{l} \log(\alpha) = a \\ \log(\beta) = b \\ \log(\alpha \times \beta) = \log(\alpha) + \log(\beta) \end{array} \right.$$

De plus, si $\alpha \geq 1$, alors $\alpha \leq \beta \leq \gamma \Rightarrow \log(\alpha) \leq \log(\beta) \leq \log(\gamma)$.

D – Exemple: Calcul du logarithme de 9:

Sachant que $1 < 9 < 10$, nous avons $0 < \log(9) < 1$. Il nous faut donc construire deux proportions de telle sorte que les termes de la première correspondent aux termes de la seconde:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \alpha & \beta & \dots & 9 & \dots & 10 \\ 0 & a & b & \dots & \log(9) & \dots & 1 \end{array}$$

En utilisant la croissance vue précédemment, on procède par encadrements successifs.

1^{ère} étape:

Recherchons α tel que $1 < \alpha < 10$ et $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{10} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{10}$. Comme $\sqrt{10}$ est la moyenne géométrique de 1 et 10, la moyenne arithmétique de 0 et 1: $\frac{1}{2}$ sera le logarithme de $\sqrt{10}$:

$$\boxed{\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}}$$

Or, $\sqrt{10} < 9$ donc $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2} \leq \log(9) \leq 1 = \log(10)$.

²⁷ En langage moderne, à l'élément neutre de l'addition correspond l'élément neutre de la multiplication.

2^{ème} étape:

Recherchons β tel que $\sqrt{10} < \beta < 10$ et $\frac{\sqrt{10}}{\beta} = \frac{\beta}{10} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{10\sqrt{10}}$. Comme $\sqrt{10\sqrt{10}}$ est la moyenne géométrique de 1 et $\sqrt{10}$, la moyenne arithmétique de $\frac{1}{2}$ et $1: \frac{3}{4}$ sera le logarithme de $\sqrt{10\sqrt{10}}$:

$$\log(\sqrt{10\sqrt{10}}) = \frac{3}{4}$$

Or, $\sqrt{10\sqrt{10}} < 9$ donc $\log(\sqrt{10\sqrt{10}}) = \frac{3}{4} \leq \log(9) \leq 1 = \log(10)$.

Étapes suivantes:

étape		1	2	3	4	6	10	13		12	11	9	8	7	5	
nombre	1,000	3,162	5,623	7,499	8,660	8,977	8,998	9	9	9,002	9,007	9,017	9,058	9,140	9,306	10
log	0,000	0,500	0,750	0,875	0,938	0,953	0,954	0,954		0,954	0,955	0,955	0,957	0,961	0,969	1
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{977}{1024}$	$\frac{7817}{8192}$		$\frac{3909}{4096}$	$\frac{1955}{2048}$	$\frac{489}{512}$	$\frac{245}{256}$	$\frac{123}{128}$	$\frac{31}{32}$	1

Nous obtenons ainsi: $\log(9) \approx \frac{7817}{8192}$ à 10^{-3} près. La calculatrice donne, plus rapidement certes,

$0,954242509439$ ($\frac{7817}{8192} \approx 0,954223632812$).

V	9.0000041	0.95424271
A	8.9999951	0.95424247
Z	8.9999941	0.95424223
V	9.0000041	0.95424271
A A	9.0000016	0.95424259
A	8.9999984	0.95424241
A A	9.0000016	0.95424259
B B	9.0000004	0.95424253
A	8.9999996	0.95424247
B B	9.0000004	0.95424253
C C	8.9999998	0.95424250
A	8.9999992	0.95424247
B B	9.0000004	0.95424253
D D	9.0000000	0.95424251
C C	8.9999998	0.95424247

Bibliographie:

1. Mathématiques au fil des âges, IREM Groupe Epistémologie et Histoire
2. Introduction à l'analyse infinitésimale, L. EULER

Utilisation de la PERSPECTIVE EN GÉOMÉTRIE .

On trouve dans certains livres de terminale S cet exercice. Il se propose de démontrer le fameux théorème de DESARGUES²⁸.

Trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ concourent en un point O . Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs sommets sur chacune des trois droites (A et A' sur $\mathcal{D}_1$, B et B' sur $\mathcal{D}_2$, C et C' sur $\mathcal{D}_3$). On suppose que les côtés homologues²⁹ sont sécants en I, J et K . Alors, affirme le théorème de DESARGUES, I, J et K sont alignés.

(voir fig.4).

Le problème qui suit propose une démonstration de ce théorème.

Question préliminaire : Soit O un point fixé du plan. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (1) les points P, Q et R sont alignés;
- (2) il existe trois réels p, q et r non tous nuls tels que:
$$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ p \cdot \overrightarrow{OP} + q \cdot \overrightarrow{OQ} + r \cdot \overrightarrow{OR} = \vec{0} \end{cases}$$

1°) Justifier l'existence de trois réels α, β et γ tels que:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OA'} = \beta \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OB'} = \gamma \cdot \overrightarrow{OC} + (1 - \gamma) \cdot \overrightarrow{OC'} = \vec{s},$$

et montrer que les nombres α, β et γ sont deux à deux distincts.

2°) Etablir

- que I est le barycentre de (B, β) et $(C, -\gamma)$
- que J est le barycentre de (C, γ) et $(A, -\alpha)$
- que K est le barycentre de (A, α) et $(B, -\beta)$

3°) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Cette propriété apparaît, avec une présentation plus compliquée et générale, dans le traité publié par BOSSE en 1648, intitulé « *Manière universelle de M. DESARGUES, pour pratiquer la perspective...* ». Quel rapport y a-t-il donc entre cet exercice de géométrie plane et un traité de perspective?

Faisons une figure:

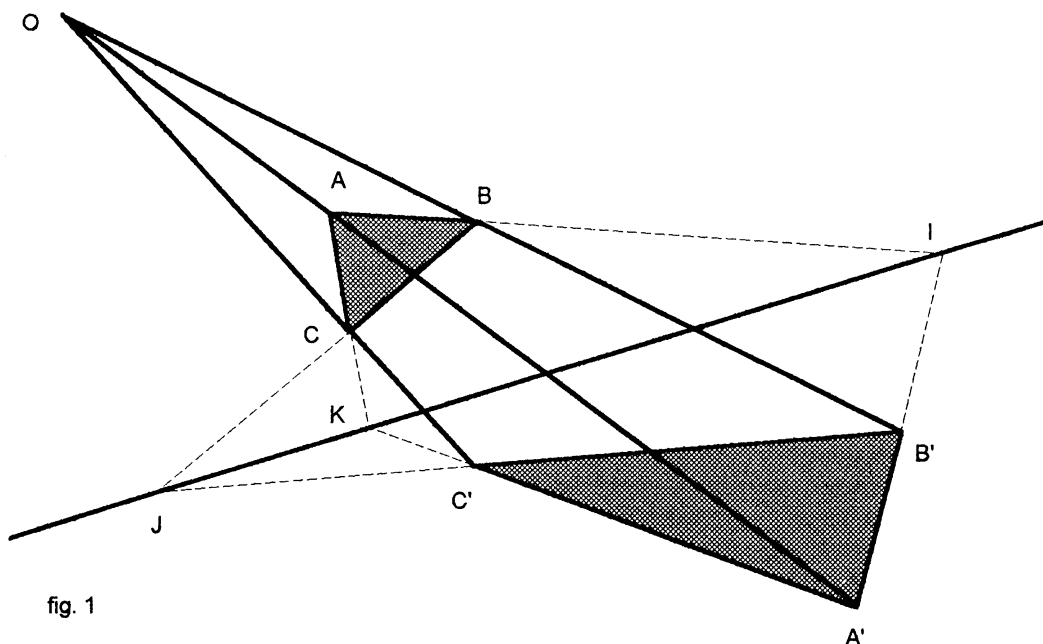
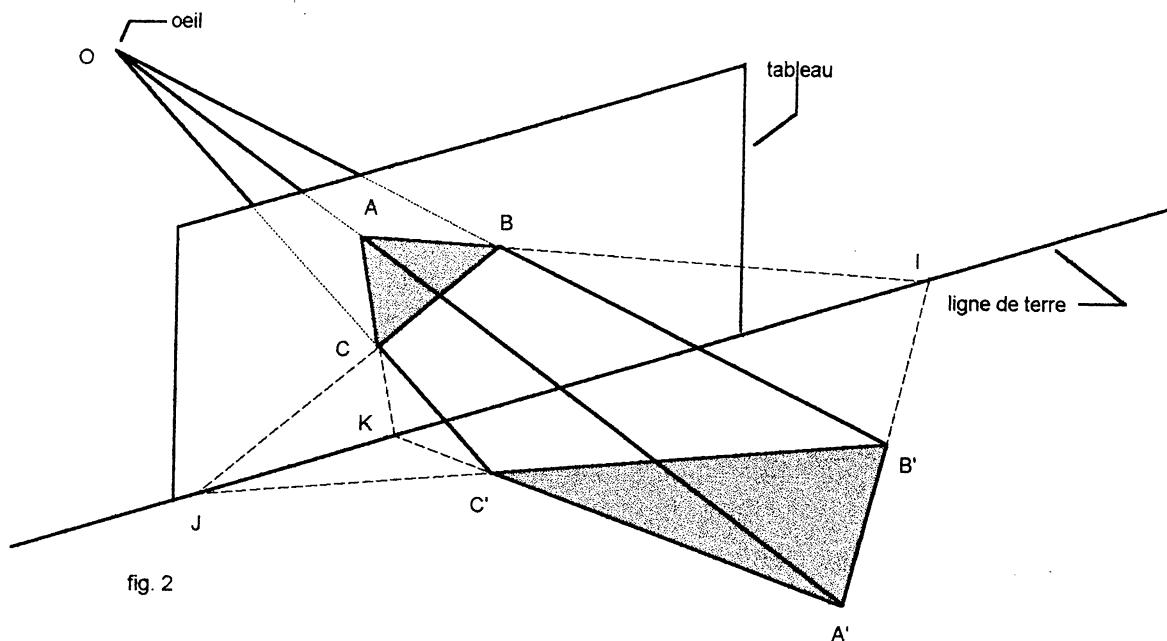


fig. 1

Maintenant, imaginons que nous sommes dans l'espace, que le triangle ABC soit la représentation en perspective du triangle $A'B'C'$, l'œil du peintre étant en O .

²⁸ Girard DESARGUES (1591 – 1661), architecte, ingénieur et autodidacte, auteur du « brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan » (1639).

²⁹ Côtés homologues: $(AB$ et $A'B')$ sont des côtés homologues, de même que (BC) et $(B'C')$, ou (AC) et $(A'C')$.



La propriété devient alors évidente: le point J appartenant à la droite $(B'C')$ et à la ligne de terre se trouve donc dans le plan du tableau; étant sur la droite $(B'C')$, sa représentation sur le tableau (c'est à dire lui-même) sera sur la droite (BC) , image de $(B'C')$. On montre de la même façon que I et K se trouvent à l'intersection du plan ABC et du plan $A'B'C'$, ils sont donc alignés.

Ainsi la propriété est vérifiée dans l'espace; c'est de cette façon que DESARGUES la démontre. Il utilise ensuite la propriété dite de Ménélaüs pour le prouver dans le cas où tous les points sont dans le même plan. Néanmoins, il note que la figure formée par deux triangles perspectifs (c'est le nom donné à chaque couple de triangles tels ABC et $A'B'C'$) de l'espace se transforme, par projection cylindrique (projection suivant une direction, sur un plan, l'œil se trouve alors à l'infini), en deux triangles perspectifs d'un même plan³⁰.

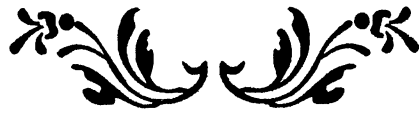
C'est ainsi que nous terminerons: la figure 1 représente la projection cylindrique de la situation exprimée par la figure 2 sur le plan de la feuille. La projection conservant l'alignement, les points I, J et K étant alignés dans l'espace, leurs projetés le seront dans le plan.

Il reste à étudier tous les cas particuliers où certaines droites, voire toutes, ne se coupent pas (cas éludés par l'énoncé de l'exercice). Pour cela, il suffit de considérer, comme DESARGUES qui fut le premier à introduire cette notion, que le point d'intersection de deux droites parallèles se trouvent à une distance infinie (point à l'infini).

Que l'on donne ce type d'exercice aux élèves afin de les entraîner au calcul barycentrique est compréhensible, mais je pense qu'ils doivent connaître la démonstration originelle, d'autant plus que celle-ci me paraît beaucoup plus convaincante, car visuelle.



³⁰ Voir L'œuvre mathématique de G. DESARGUES, VRIN. Postface René TATON.



résentation de
**Mathématiciens célèbres
en Lycée.**

Né: environ 640 BC à Milet, Asie Mineur (maintenant Turquie)
Mort: environ 560 BC à Milet, Asie Mineur (maintenant Turquie)

Diogène Laërce.

Après s'être occupé des questions politiques, il s'adonna à la spéculation sur la nature. D'après certains, il ne nous a laissé aucun écrit; car l'*Astronomie nautique* qu'on lui attribue est, dit-on, l'œuvre de Phocos de Samos. Mais Callimaque le connaît comme l'inventeur de la Petite Ourse, et écrit dans ses *Iambes* :

*Il avait mesuré, à ce que l'on disait,
La distance entre les étoiles du Chariot,
Sur lequel les marins phéniciens se repèrent.*

Pour d'autres, il ne composa que deux ouvrages : *Du solstice* et *De l'équinoxe*, car il considérait que les autres phénomènes étaient hors de compréhension...

Il fut encore le premier d'après certains, à tenir un propos scientifique portant sur la nature.

A ce que déclare Pamphila, il fut le premier, après avoir été, en géométrie, l'élève des Egyptiens, à avoir inscrit dans un cercle le triangle rectangle, et sacrifia un bœuf en l'honneur de sa découverte.

On déclare qu'il découvrit les saisons de l'année et la divisa en trois cent soixante cinq jours.

Hiéronyme déclare encore qu'il mesura les pyramides en partant de leur ombre, au moment où la longueur de notre ombre est égale à notre taille.

On raconte encore qu'une vieille le conduisit un jour dehors pour étudier les astres, il tomba alors dans un trou qu'on avait creusé; ce que voyant la vieille, au lieu de le plaindre, le railla : « Eh oui ! Thalès ! Tu n'arrive pas à voir ce qui est à tes pieds et tu crois pouvoir connaître ce qui se passe au ciel ? »

Platon (Théétète 174 b) (p 109)

Thalès étant, mon cher Théodore, tombé dans un puits, tandis que, occupé d'astronomie, il regardait en l'air, une petite servante thrace, toute mignonne et pleine de bonne humeur, se mit, dit-on, à le railler de mettre tant d'ardeur à savoir ce qui est au ciel, alors qu'il ne s'aperçoit pas de ce qu'il y a devant lui et à ses pieds !

Aristote

Comme on lui reprochait sa pauvreté qui attestait l'inutilité de la philosophie, il tira, dit-on, de ses observations astronomiques, la conclusion que la prochaine récolte d'olives

serait fort abondante; aussi, alors qu'on était encore en hiver, consacra-t-il le peu d'argent qu'il possédait à s'assurer la location de tous les pressoirs de Millet et de Chio, qu'il obtint à bas prix, n'ayant contre lui aucun enchérisseur. Quand l'occasion survint, une soudaine et forte demande se fit sur les pressoirs; il les sous-loua aux conditions qu'il voulut, et la fortune qu'il en tira lui permit de montrer qu'il est aisé aux philosophes de s'enrichir, pour peu qu'ils le désirent, mais que ce n'est point vers ce but que tendent leurs vertueux efforts.

Proclus

C'est Thalès qui le premier, à ce qu'on prétend, démontra que le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

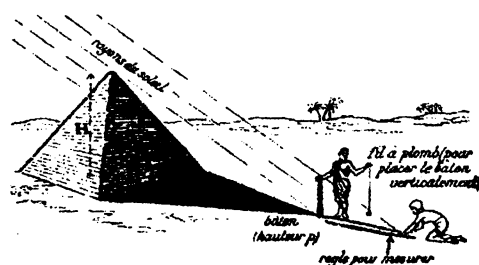
Il faut rendre grâce à l'antique Thalès, entre autres découvertes, pour celle du théorème suivant: car on dit qu'il fut le premier à découvrir et à énoncer que les angles à la base de tout triangle isocèle sont égaux, bien qu'il ait appelé semblables, selon une terminologie plus ancienne, les angles qui sont égaux.

Ce théorème selon lequel quand deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux, fut découvert pour la première fois, d'après Eudème, par Thalès.

Eudème dans son *histoire de la géométrie*, attribue ce théorème [de l'égalité des triangles] à Thalès; car, dit-il, la méthode par laquelle Thalès a montré comment mesurer la distance des navires en mer fait nécessairement appel à ce théorème.

Plutarque

Dressant seulement à plomb un bâton au bout de l'ombre de la pyramide, et se faisant deux triangles avec la ligne que fait le rayon du soleil touchant aux extrémités, tu montras qu'il y avait une proportion de la hauteur de la pyramide à celle du bâton, comme il y a de la longueur de l'ombre de l'un à l'ombre de l'autre.



Né: environ 580 BC à Samos, Ionie
Mort: environ 497 BC à Metapontum, Lucania

a) – Sa vie

On ne connaît que peu de choses de sa vie. On ne donnera que quelques anecdotes ou mythes caractéristiques.

Pythagore serait né vers 580 avant J.C., à Samos et mort vers 497 avant J.C.

Son père, Mnésarchos, était tailleur de pierres précieuses. Sa mère, Parthénis, appris qu'elle était enceinte à Delphes, où elle était venue consulter la pythie. Les parents décidèrent de nommer leur fils: « Pythagore = annonciateur pythien ».

Pythagore aurait connu Homère, Bouddha, Thalès de Milet lui aurait enseigné la maîtrise du temps, la tempérance et la science véritable.

Au témoignage d'Héraclide du Pont, Pythagore aurait eu un entretien savant avec Léon, le tyran de Phlionte. Comme ce dernier admirait son génie et son éloquence, lui demandant sur quel art il s'appuyait, Pythagore aurait décliné l'épithète de « sage » (sophos), et répondu qu'il ne connaissait aucun art, mais qu'il était « philosophe » (philosophos). Léon s'étonna de ce terme nouveau et demanda quelles étaient les différences entre les philosophes et les autres hommes, Pythagore répondit que la vie humaine était comparable à ces assemblées où se rendaient la Grèce entière lors des grands jeux: les uns y viennent lutter pour obtenir une couronne; d'autres cherchent à y faire du commerce; les autres, enfin, ne s'intéressent ni aux applaudissements ni au gain, mais viennent pour voir, simplement ce qui se passe aux jeux. De même, dans la vie, les uns sont esclaves de la gloire, les autres de l'argent, mais d'autres, plus rares, observent avec soin la nature: « ce sont eux qu'on appelle amis de la sagesse, c'est-à-dire philosophes », commente Cicéron.¹

il fonda une école: « homakoeion ». Six cents disciples mettent en commun leur vie et leur bien, Platon citera avec faveur le proverbe pythagoricien: « entre amis, tout est commun ».

b) – Mathématiques pythagoriciennes:

Selon Aristote, pour les pythagoriciens, « **les choses sont des nombres** » ou « **les nombres se trouvent dans les choses** » ou « les nombres sont les causes et le principe des choses » ou « **les choses sont constituées par les nombres** »:

A l'époque de Leucippe et de Démocrite, et même déjà avant eux, ceux qu'on appelle les pythagoriciens s'intéressent les premiers aux mathématiques et les firent progresser. Comme ils avaient été élevés dans cette science, ils

crurent que ses principes étaient les principes de toutes choses; et puisque par nature les nombres sont les premiers principes des mathématiques, c'est dans les nombres qu'ils pensaient voir de nombreuses similitudes avec les êtres éternels ainsi qu'avec les créatures soumises au devenir, bien plus encore que dans le feu, la terre et l'eau.²

- Nombres figurés: nombres triangulaires, carrés, pyramidales.
 - Selon Proclus, les pythagoriciens auraient les premiers démontré que **la somme des angles d'un triangle vaut deux droits**.
 - Le théorème de Pythagore.
- Les pythagoriciens n'auraient pas démontré ce résultat géométriquement, mais construit arithmétiquement des triplets, dits pythagoriciens:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Il nous est parvenu deux méthodes de constructions de tels triplets:

Méthode dite de Pythagore:

un nombre impair	$2n + 1$	petit côté
on prend son carré	$(2n + 1)^2 =$	
	$4n^2 + 4n + 1$	
on retranche 1	$4n^2$	
on divise par 2	$2n^2 + 2n$	grand côté
on ajoute 1	$2n^2 + 2n + 1$	hypoténuse

Démonstration moderne:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

Exemple: si $n = 3$; $a = 7$; $b = 24$; $c = 25$ et $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$

Méthode platonicienne:

un nombre pair	$2n$	un côté
on divise par 2	n	
on élève au carré	n^2	
on ajoute 1	$n^2 + 1$	hypoténuse
on retranche 1	$n^2 - 1$	autre côté

Démonstration moderne:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = 4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2$$

Exemple: si $n = 3$; $a = 6$; $b = 8$; $c = 10$ et $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

Utilisation en architecture:

Vitruve donne une explication concrète de l'origine de la découverte dans le De architectura (IX, préface): prenons trois règles, d'une longueur respective de trois pieds, de quatre pieds et de cinq pieds. En mettant en contact leur extrémités, elles forment une équerre parfaite.³

¹ Pythagore et les pythagoriciens, J.F. MATTEI, Que sais-je n°2732.

² Aristote, A, 5, 985 b

³ Pythagore et les pythagoriciens, J.F. MATTEI, Que sais-je n°2732, page 66

Né: environ 365 BC à Alexandrie, Egypte Mort: environ 300 BC

**PREFACE de F. PEYRARD pour sa traduction des
ELEMENTS d'Euclide.**

EUCLIDE vivait du temps de Ptolémée Lagus, qui commen-
ça à gouverner l'Égypte plus de trois cents ans avant l'ère
vulgaire.

Archimède, Apollonius, Théodose, Ptolémée, Pappus et
Théon, citent sans cesse Euclide, et ne citent jamais les
Géomètres qui avaient paru avant lui.

Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de ma-
nière plus facile que la sienne pour apprendre la géométrie,
Euclide lui répondit qu'il n'y avait pas de chemin royal pour
arriver à cette science. Voilà tout ce que l'on sait Euclide. On
ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de Géomètres avaient paru avant Euclide, qui, le
premier des Grecs, rassembla leurs ouvrages.

A l'aide de ces matériaux, il composa plusieurs traités. Les
treize livres des *Eléments* et le livre des *Données* sont les
seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les *Eléments* d'Euclide ont toujours été regardés comme le
plus parfait de tous les livres élémentaires; ils ont été tra-
duits et commentés dans toutes les langues....

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois
Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages
de Descartes et d'autres Algébristes avant d'avoir étudié et
médité les *Eléments* d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe a déploré la mort prématurée,
me répétait souvent que toute la géométrie était une langue
morte depuis Euclide.

Commentaire de Proclus.

A notre époque, il nous faut bien considérer les origines des
sciences et des techniques. Nous dirons donc avec plusieurs
historiens que la géométrie a été inventée en premier lieu
par les Égyptiens et tire sa naissance des besoins de mesure
des terrains; elle leur était, en effet, indispensable, car les
crues du Nil faisaient disparaître toutes les frontières des
propriétés individuelles. Il n'est donc pas étonnant que la
découverte de cette science aussi bien que celle des autres
d'ailleurs, ait été commandée par la nécessité pratique; ce
n'est que par la suite que toute connaissance nouvellement
acquise se développe de son état initial imparfait vers un état
parfait. De la sensation alors vers le raisonnement et du
raisonnement vers l'intelligence, la transition est naturelle.
Ainsi donc, de même que chez les Phéniciens la connaissance
précise des nombres a vu le jour grâce au commerce et aux
différentes transactions, de même, chez les Égyptiens, la
géométrie est née de la cause invoquée ci-dessus.

THALÈS le premier, ayant visité l'Égypte, a transplanté
cette science en Grèce; il a fait lui-même plusieurs découverts
et a enseigné les principes de bien d'autres à ceux qui lui
ont succédé, en généralisant les unes ou en rendant d'autres
plus concrètes. ...

..., PYTHAGORE a élevé la philosophie mathématique au
rang d'une culture libérale en considérant ses principes d'une
certaine hauteur et en conduisant l'investigation par le
raisonnement pur, indépendamment de l'existence réelle des
objets étudiés. C'est PYTHAGORE qui a découvert les quan-
tités irrationnelles et la construction des polyèdres réguliers.
...

Vinrent ensuite HIPPOCRATE de Chios qui découvrit la
quadrature des lunules et THÉODORE de Cyrène, tous deux
illustres géomètres; on rapporte notamment
qu'HIPPOCRATE fut le premier à avoir rédigé des *Eléments*
des Mathématiques. Après ceux-ci vécut PLATON qui insista
beaucoup à introduire la géométrie et les autres branches des
mathématiques (à l'enseignement de l'Académie) avec le zèle
qu'on lui connaît d'après les abondantes insertions de raison-
nements mathématiques dans toutes ses œuvres. Constamment
et à toute occasion il incitait ses élèves à l'étude de
cette doctrine admirable. ...

EUDOXE de Cnide, ... ami des élèves de PLATON, fut le
premier à enrichir considérablement le nombre des théorèmes
généraux et à introduire trois nouvelles proportions en
plus des trois autres connues auparavant; ...

Un peu plus jeune que ces derniers est EUCLIDE qui rédigea
les *Eléments* en adoptant beaucoup de théorèmes d'EUDOXE
et perfectionnant considérablement d'autres de THÉÉTÈTE
et en donnant des démonstrations irréfutables de théorèmes
démontrés jusqu'alors avec beaucoup moins de rigueur.
EUCLIDE vécut du temps de PTOLÉMÉE 1^{er}, puisque AR-
CHIMÈDE qui vint aussitôt après est le premier à le men-
tionner; on dit même qu'un jour PTOLÉMÉE lui demanda s'il
n'y avait pas une autre méthode plus rapide pour apprendre
la géométrie que celle des *Eléments*, à quoi EUCLIDE aurait
répondu qu'il n'y a pas de voie royale en géométrie. Il était
donc plus jeune que les disciples immédiats de PLATON et
plus âgé qu'ERATOSTHÈNE et ARCHIMÈDE qui, comme le
relate quelque part ERATOSTHÈNE, étaient contemporains.
...

Mais cet auteur a aussi écrit beaucoup d'autres ouvrages
mathématiques d'une étonnante pénétration, comme l'opti-
que, la Catoptrique, les *Eléments* de Musique et la Division
des figures....

Me demanderait-on quel est le but des *Eléments*? Ma réponse
serait qu'ils concernent d'une part l'objet en étude et d'autre
part l'étudiant....

Les théorèmes les plus élémentaires et les plus simples, les
plus immédiats après les premières prémisses, ont été ras-
semblés ici dans l'ordre le plus convenable, de façon que les
géomètres postérieurs les ont utilisés dans leurs démonstra-
tions en tant que bien connus et se sont basés sur eux,
comme ARCHIMÈDE dans *La Sphère* et *le Cylindre*, APOL-
LONIOS et tous les autres sans exception qui semblent avoir
utilisé comme un acquis indiscutable ce qui est démontré
dans les *Eléments*.

Tel est donc le but de cet ouvrage: donner aux débutants les
principes de l'ensemble de la science et de les appliquer à la
construction des figures cosmiques. Quelle pourrait être en
effet la raison de leur titre: Manuel Élémentaire ou *Eléments*
qui y sont traités, à ne regarder que cela? Habituellement on
appelle un certain nombre de théorèmes des éléments, d'au-
tres on les qualifie d'élémentaires et pour le reste chaque
proposition se définit par rapport à sa difficulté; on qualifie
d'éléments les théorèmes qui de façon progressive conduisent
à la connaissance d'autres et à partir desquels on aboutit à la
résolution des difficultés qui se présentent.

Somme toute, comme pour le langage il existe des principes
premiers très simples et indivisibles, les lettres, de même
pour l'ensemble de la géométrie il existe un certain nombre
de théorèmes placés en tête et ayant fonction de principes
par rapport aux suivants, théorèmes que l'on rencontre à
tout bout de champ, qui nous facilitent de nombreuses démon-
strations particulières et que l'on appelle des éléments.
...

D'après MÉNÉCHME, le mot élément a une double significa-
tion: d'une part il désigne ce qui sert à effectuer une cons-
truction et est considéré comme élément (Principe) de cette
construction; telle est, par exemple, la première proposition
des *Eléments* d'EUCLIDE par rapport à la deuxième, ou la
quatrième par rapport à la cinquième. ...

D'autre part, on appelle aussi « élément » la plus simple
expression à laquelle on peut réduire une proposition com-
plexe. De ce point de vue, on ne peut pas, bien sûr, appeler
toute proposition « élément » de toute autre, mais unique-
ment celles qui précèdent dans l'ordre de l'exposé selon le but
qui leur a été assigné. Ainsi on dit que les postulats sont des
« éléments » par rapport aux théorèmes. C'est suivant ce
deuxième point de vue qu'ont été rédigés les *Eléments* d'EU-
CLIDE de géométrie plane et de géométrie dans l'espace, ou
encore les *Eléments* d'arithmétique ou d'Astronomie que
différents auteurs ont écrits....

Voilà ce que nous avions à dire des *Eléments*.

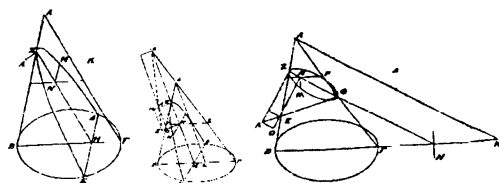
Né: environ 262 BC à Perges, Ionie (maintenant Turquie) Mort: environ 190 BC à Alexandrie, Egypte

Mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, Apollonios de Perga est né probablement vingt-cinq ans après Archimède (donc vers ~ 262) et est mort sous le règne de Ptolémée IV (~ 222~ 205). La renommée de son ouvrage principal, le *Traité des sections coniques*, lui valut le surnom de Grand Géomètre. Le traité se compose de huit livres: les quatre premiers nous sont parvenus dans leur texte original grec; les trois suivants restèrent inconnus en Europe jusqu'au milieu du XVII^e siècle, date à laquelle une traduction arabe, écrite vers 1250, fut découverte; le dernier livre n'a jamais été retrouvé.

Les livres I à IV contiennent peu de découvertes nouvelles par rapport aux connaissances de l'époque, mais en sont l'exposé complet et systématique. Dans le livre I, Apollonios montre que les coniques sont issues d'un même cône; il introduit les noms d'ellipse, d'hyperbole et de parabole; il utilise une sorte de système de coordonnées, le diamètre servant d'axe des x et une perpendiculaire d'axe des y . Le livre II traite des asymptotes, des axes et des diamètres coniques. Le livre III est l'étude de l'égalité et de la similitude de triangles, de rectangles, de carrés dont les côtés sont des tangentes, des cordes, des asymptotes de coniques. Dans le livre IV, Apollonios étudie la division harmonique et les positions relatives de deux coniques.

Les livres V à VII représentent l'œuvre originale d'Apollonios; surtout le livre V, qui montre la puissance créatrice de son auteur; celui-ci y étudie les normales comme lignes, de longueurs maximale et minimale, tracées d'un point donné à la conique et discute du nombre de normales issues d'un point donné; des questions de maximum et de minimum, pratiquement inconnues jusqu'alors, sont étudiées par Apollonios, qui aborde également le problème du centre de courbure. Le livre VI traite de l'égalité et de la similitude des coniques. Le livre VII porte sur les diamètres conjugués.

On ne sait pratiquement rien des autres ouvrages d'Apollonios, dont seuls les noms et quelques commentaires nous sont parvenus grâce à Pappus: *Section d'aire*, *Contacts*, *Inclinaisons*, *Lieux plans*, *Sections de rapport*. Avec Euclide et Archimède, Apollonios a marqué la géométrie pour près de vingt siècles.



Apollonios à Eudème, salut.

Si ta santé est bonne et si tout le reste va comme tu le désires, je te félicite; quant à nous, nous allons passablement. Je t'ai vu, pendant le temps que j'ai

passé à Pergame avec toi, très désireux de prendre connaissance de nos travaux sur les coniques; je t'envoie donc le premier Livre après l'avoir corrigé; les autres suivront, lorsque nous en serons satisfaits; tu n'as pas, je pense, dû oublier ce que je t'avais dit: que j'ai fait ce traité sur la demande du géomètre Naucrète, à l'époque où il était venu à Alexandrie et partageait nos occupations qu'ayant rédigé en tout huit livres, nous lui en avons aussitôt donné communication, mais qu'étant pressés parce qu'il était sur le point de s'embarquer, nous n'avons pu les perfectionner, qu'au contraire, nous avions écrit tout ce qui se présentait à notre esprit, avec l'intention de revenir dessus plus tard. Nous publions donc ces Livres, maintenant que nous avons le temps, au fur et à mesure de leur correction. Mais, comme il se trouve que plusieurs de ceux qui sont en relation avec nous ont eu également communication du premier et du second Livre avant qu'ils eussent été retouchés, ne t'étonne pas si tu les rencontres avec d'autres rédactions.

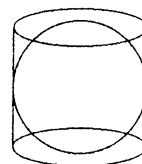
De ces huit livres, les quatre premiers suivent une marche élémentaire; le premier renferme la génération des trois sections et des Section opposées, ainsi que leurs propriétés capitales, le tout exposé plus amplement et avec plus de généralité que dans les autres traités sur la matière. Le second Livre concerne les diamètres et les axes des sections, les asymptotes et d'autres questions d'un usage général ou indispensable pour les limitations¹; tu sauras par le premier Livre quelles sont les lignes que j'appelle diamètres et celles que j'appelle axes. Le troisième contient un grand nombre de théorèmes singuliers qui servent soit pour la synthèse des lieux solides, soit pour les limitations; la plupart et les plus beaux sont nouveaux; en les recherchant, nous avions conscience qu'Euclide n'avait pas effectué la synthèse du lieu à trois et quatre lignes², mais seulement celle au hasard d'une partie de ce lieu, et cela d'une façon assez malheureuse; c'est qu'il n'était pas possible de faire la synthèse complète, sans ce que nous avons trouvé de nouveau. Le quatrième Livre détermine en combien de manières les sections coniques peuvent se rencontrer entre elles et avec une circonférence de cercle et résout, en outre d'autres questions dont aucune n'a été traitée par ceux qui nous ont précédés, en combien de points une section conique ou une circonférence de cercle rencontre des sections opposées.

Les derniers Livres appartiennent à des théories plus recherchées; l'un traite, en effet, avec développement, des minima et maxima, l'autre de l'égalité et de la similitude des sections coniques, le suivant de théorèmes de limitations, le dernier, enfin, de problèmes déterminés sur les coniques. Au reste, quand tous seront publiés, il sera loisible à ceux qui les étudieront de les apprécier selon ce qu'ils en jugeront. Salut.

¹ Limitations: étude des conditions de possibilité des problèmes.

² Problème dit de Pappus, que Descartes abordera afin de prouver la supériorité de sa méthode.

Né: 287 BC à Syracuse, Sicile Mort: 212 BC à Syracuse, Sicile



Les contributions les plus importantes d'Archimède sont relatives à la géométrie. Ses méthodes préfigurent le calcul intégral 2000 ans avant Newton et Leibniz.

Archimède est né à Syracuse en Sicile. Des récits de Plutarque, de Tite-Live et d'autres décrivent des machines inventées par Archimède pour la défense de Syracuse; citons la catapulte, le palan et un miroir destiné à brûler les navires ennemis.

Parmi les travaux les plus célèbres d'Archimède mentionnons:

- La mesure du cercle, dans lequel il encadre la valeur exacte de π par $3 \frac{10}{71}$ et $3 \frac{1}{7}$. Il obtient

ces résultats en inscrivant et en circonscrivant à un cercle des polygones réguliers de 96 côtés.

- Archimède prouva que le volume de la sphère valait les deux tiers du volume du cylindre circonscrit. Il considérait ce résultat comme le plus significatif et demanda qu'on grave une représentation d'un cylindre circonscrit à une sphère sur sa tombe.

- Archimède découvrit les théorèmes fondamentaux relatifs au centre de gravité des figures planes et spatiales. Son plus célèbre théorème donne le poids d'un solide immergé dans un liquide et est appelé le principe d'Archimède.

- L'habileté mécanique d'Archimède combinée à ses connaissances théoriques le rendirent capable de construire de nombreuses machines extrêmement ingénieuses. Archimède passa quelque temps en Egypte, où il inventa un engin connu sous le nom de vis d'Archimède. Il s'agit d'une pompe toujours utilisée dans de nombreux endroits du monde.

Il fut tué lors de la prise de Syracuse par les Romains lors de la deuxième guerre punique et Plutarque fait ainsi le récit de sa mort:

Comme le destin le voulait, Archimède était en train de résoudre un problème par un diagramme et avait les yeux et l'esprit fixés sur l'objet de sa réflexion; il ne remarqua pas l'entrée des Romains, ni le fait que la ville avait été prise. Inopinément un soldat survint et lui demanda de l'accompagner. Comme il refusait d'obtempérer tant que son problème n'était pas résolu, le soldat fou de rage brandit son sabre et le transperça..

Archimède à Dosithée, prospérité!

Quand j'appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui

n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné ou à celle d'un segment de cercle donné, après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône entier¹ et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant pour la démonstration le lemme que voici: l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que les cercles ont entre eux le rapport des carrés sur leurs diamètres et que les sphères ont entre elles le rapport des cubes sur leurs diamètres, et ils ont démontré que toute pyramide est équivalente au tiers du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône, en prenant un lemme semblable à celui que nous venons d'indiquer. Il se trouve cependant que tous ces théorèmes cités sont considérés comme non moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme; il me suffit d'avoir amené au même degré de certitude ceux que je publie maintenant. Je t'envoie donc les démonstrations que j'ai rédigées pour le théorème (sc. indiqué), en montrant d'abord comment je l'ai examiné par la mécanique, ensuite aussi comment je l'ai prouvé par la géométrie. Je ferai précéder, de plus, mes démonstrations de propositions élémentaires sur les coniques utiles pour la démonstration. Sois en bonne santé.

¹ Le mot « entier », $\delta\lambda\omicron\nu$, n'a pas de sens; il est probable que le texte a été altéré ici par un copiste.

Né: 31 Mars 1596 à La Haye (maintenant Descartes), Touraine. France
Mort: 11 Février 1650 à Stockholm, Suède

1°) Biographie

Descartes naît le 31 mars 1596 à LA HAYE, en Touraine. (Cette petite ville s'appelle maintenant Descartes). Il fait ses études de 1606 à 1614 au collège Royale de LA FLECHE où enseignaient les jésuites; il s'y exerce à l'arithmétique et à la géométrie: « *seule exempte de fausseté et d'incertitude* ». Il obtient son Baccalauréat et sa licence de droit en 1616 à POITIERS.

Descartes s'engage dans l'armée en 1618 et se rend alors en Hollande où il rencontre BEECKMAN, professeur à l'université de Caen qui professait le mécanisme.

Descartes quitte la Hollande en 1619 et gagne le Danemark, puis l'Allemagne et s'engage dans les troupes de Maximilien de Bavière. Le 10 novembre 1619, il connaît la « nuit d'enthousiasme » qui lui inspire la découverte des « fondements d'une science admirable ».

Dès 1620, il renonce à la vie militaire et voyage en Allemagne, en Hollande, puis revient en France en 1622. Là, il règle ses affaires de famille, se trouve assez fortuné pour n'avoir pas à gagner sa vie, voyage en Italie et revient à Paris en 1625. Durant deux ans, il mène une vie mondaine, se bat notamment en duel pour une femme, mais surtout rencontre des savants tels que MORIN, MERSENNE, MY-DORGE.

En 1627, il rencontre le nonce du pape, qui lui fait obligation de conscience de se consacrer à la philosophie.

Descartes se retire à la campagne durant l'hiver 1627-28, puis repart pour la Hollande, où il s'installe de façon définitive en 1629.

Il y écrit, en 1629, les « règles pour la direction de l'esprit ».

Descartes habite le quartier des bouchers, à Amsterdam afin de pouvoir pratiquer de nombreuses dissections.

1629: recherche sur les météores.

1631: Problème de Pappus, proposé par Golius, ce qui amène la découverte de la géométrie analytique.

1633: Traité de l'Homme.

22 juin 1633: condamnation de Galilée par le Saint Office, lequel interdit d'affirmer le mouvement de la terre, même à titre d'hypothèse. Descartes renonce à publier « le monde » (publication posthume).

8 juin 1637: parution du « discours de la méthode » et de trois essais dont « la géométrie ».

1637-1641: Descartes vit à Santpoort.

A la fin de sa vie, Descartes engage de nombreuses polémiques avec d'autres savants, comme Fermat (problème des tangentes).

1644: parution des « principia philosophiae ».

Il fait de brèves apparitions en France en 1647-48 où il rencontre Roberval, Hobbes, Gassendi et le jeune Blaise Pascal.

1647: parution des « méditationes ».

1649: publication des « passions de l'âme ».

1649: arrivée de Descartes à Stockholm;

Descartes prend froid en janvier 1650, est atteint d'une pneumonie en février, refuse les soins des

médecins de la reine et se soigne seul. Il meurt le 11 février 1650.

1667: retour de son corps en France où son crâne et plusieurs ossements disparaissent. Les restes de Descartes se trouvent en l'église de St Germain des prés, à Paris.

Les oeuvres mathématiques de Descartes sont éparpillées dans toute son oeuvre, sauf « la géométrie ». On les trouve surtout dans des lettres, adressées à d'autres savants: Mersenne, Beeckman, etc.

2°) Les règles de la méthode.

Parution le 8 juin 1637. Cet essai s'adresserait à Eudoxe¹: « Eudoxe, homme de médiocre esprit, mais duquel le jugement n'est perverti par aucune fausse créance et qui possède la raison selon la pureté de sa nature² ». Son sous-titre est : « *pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. »

1ère phrase: *Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée:...*

Méthode: méta=vers; hodos=route.

Méthode ≠ recherche au hasard, ≠ erreur (errer).

« *Ce que j'entends par méthode, c'est un ensemble de règles certaines et faciles, par l'observation exacte desquelles on sera certain de ne prendre jamais le faux pour le vrai, et, sans dépenser inutilement les forces de son esprit, mais en accroissant son savoir par un progrès continu, de parvenir à la connaissance vraie de tout ce dont on sera capable*³. »

Pour Descartes, la raison doit d'abord être un exercice de la volonté qui rende l'attention active. Déçu par l'enseignement scolastique du collège jésuite de la Flèche, qui confondait science et érudition, Descartes entreprend de fonder son savoir par le seul exercice de la raison.

« *Nous ne deviendrons mathématiciens, même en connaissant par coeur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas en même temps capable de résoudre n'importe quel problème et nous ne deviendrons jamais philosophe, si nous avons lu tous les raisonnements de Platon et d'Aristote et que nous sommes incapables de porter un jugement assuré sur le sujet qu'on nous propose; dans ce cas, en effet, ce ne sont point des sciences que nous aurions apprises, mais de l'histoire.* »

« *Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons, mais je ne remarquais point encore leur vrai usage, et, pensant qu'elles ne servaient qu'aux arts mécaniques, je m'étonnais de ce que, leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti dessus de plus élevé.* »

¹ Un des rédacteurs des « Eléments » d'Euclide.

² recherche sur la vérité. p 498.

³ règle IV.

Né: 19 Juin 1623 à Clermont (maintenant Clermont-Ferrand), Auvergne, France

Mort: 19 Août 1662 à Paris, France

Le père de Pascal (Etienne) avait des idées non orthodoxes sur l'éducation et décida d'éduquer lui-même son fils. Il décida que Pascal n'étudierait pas les mathématiques avant 15 ans et fit disparaître tous les écrits mathématiques de leur maison. Cependant, Pascal eut la curiosité éveillée par cela et commença à étudier par lui-même la géométrie à l'âge de 12 ans. Il découvrit que la somme des angles d'un triangle valait deux droits et quand son père s'en rendit compte, celui-ci lui donna un exemplaire des *Eléments* d'Euclide¹.

A l'âge de 14 ans, Pascal commença à assister aux exposés de Mersenne. Mersenne appartenait à l'ordre des Minimes, et sa cellule à Paris était un lieu de réunion pour Fermat, Pascal, Gassendi, et d'autres. A l'âge de 16 ans, Pascal présenta une simple feuille de papier à une des réunions de Mersenne; il contenait une série de théorèmes de **géométrie projective**, y compris celui de l'**hexagone mystique** de Pascal.

Pascal inventa la **première machine à calculer** (1642) pour aider son père. L'appareil, appelé **Pascaline**, ressemblait aux machines à calculer mécaniques des années 1940. On a même suggéré que Pascal était l'auteur de l'invention des roues de brouette. Des études en géométrie, en hydrodynamique, en hydrostatique et en pression atmosphérique le conduisirent à inventer la seringue et la presse hydraulique et à découvrir le principe de Pascal.

Il étudia les **sections coniques** et obtint d'importants théorèmes en géométrie projective. Dans sa correspondance avec Fermat il posa les fondements de la **théorie des probabilités**.

Son oeuvre philosophique la plus connue, les *Pensées*, est un recueil de pensées sur la souffrance humaine et la foi en dieu. Le "pari de Pascal" tentait à prouver que sa croyance en dieu était rationnelle par l'argument suivant.

Si Dieu n'existe pas, on ne perdra rien à croire en lui, alors que s'il existe on perdra tout en n'y croyant pas.!

Son dernier travail traita de la **cycloïde**, la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle roulant.

Pascal mourut à l'âge de 39 ans dans d'atroces douleurs d'un cancer de l'estomac qui s'était propagé au cerveau.

Extraits de « **ESPRIT DE GEOMETRIE** »

On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité: l'un, de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine....

La géométrie, qui excelle en ces trois genres, a expliqué l'art de découvrir les vérités inconnues;

et c'est ce qu'elle appelle analyse, et dont il serait inutile de discourir après tant d'excellents ouvrages qui ont été faits.

Celui de démontrer les vérités déjà trouvées, et de les éclaircir de telle sorte que la preuve en soit invincible, est le seul que je veux donner; et je n'ai pour cela qu'à expliquer la méthode que la géométrie y observe: car elle l'enseigne parfaitement par ses exemples, quoiqu'elle n'en produise aucun discours. Et parce que cet art consiste en deux choses principales, l'une de prouver chaque proposition en particulier, l'autre de disposer toutes les propositions dans le meilleur ordre, j'en ferai deux sections, dont l'une contiendra les règles de la conduite des démonstrations géométriques, c'est-à-dire méthodiques et parfaites, et la seconde comprendra celles de l'ordre géométrique, c'est-à-dire méthodique et accompli: de sorte que les deux ensemble enfermeront tout ce qui sera nécessaire pour la conduite du raisonnement à prouver et discerner les vérités, les quelles j'ai dessein de donner entières....

Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales: l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions....

C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction. Car il n'y a rien de plus faible que le discours de ceux qui veulent définir ces mots primitifs. Quelle nécessité y a-t-il, par exemple, d'expliquer ce qu'on entend par le mot homme? Ne sait-on pas assez quelle est la chose qu'on veut désigner par ce terme?...

Mais on n'en sera pas surpris, si l'on remarque que cette admirable science ne s'attachant qu'aux choses les plus simples, cette même qualité qui les rend dignes d'être ses objets, les rend incapables d'être définies; de sorte que le manque de définition est plutôt une perfection qu'un défaut, parce qu'il ne vient pas de leur obscurité, mais au contraire de leur extrême évidence, qui est telle qu'encore qu'elle n'ait pas la conviction des démonstrations, elle en a toute la certitude. Elle suppose donc que l'on sait quelle est la chose qu'on entend par ces mots: mouvement, nombre, espace; et, sans s'arrêter à les définir inutilement,

¹ Certains commentateurs pensent qu'il s'agit d'une légende.

elle en pénètre la nature, et en dé couvre les mer-
veilleuses propriétés....

Ainsi il y a des propriétés communes à toutes
choses, dont la connaissance ouvre l'esprit aux
plus grandes merveilles de la nature. La princi-
pale comprend les deux infinités qui se rencon-
trent dans toutes: l'une de grandeur, l'autre de
petitesse.

Car quelque prompt que soit un mouvement, on
peut en concevoir un qui le soit davantage, et
hâter encore ce dernier; et ainsi toujours à l'infini,
sans jamais arriver à un qui le soit de telle sorte
qu'on ne puisse plus y ajouter. Et au contraire,
quelque lent que soit un mouvement, on peut le
retarder davantage, et encore ce dernier; et ainsi
à l'infini, sans jamais arriver à un tel degré de
lenteur qu'on ne puisse encore en descendre à une
infinité d'autres sans tomber dans le repos.

De même, quelque grand que soit un nombre, on
peut en concevoir un plus grand, et encore un qui
surpasse le dernier; et ainsi à l'infini, sans jamais
arriver à un qui ne puisse plus être augmenté. Et
au contraire, quelque petit que soit un nombre,
comme la centième ou la dix-millième partie, on
peut encore en concevoir un moindre, et toujours
à l'infini, sans arriver au zéro ou néant.

Quelque grand que soit un espace, on peut en
concevoir un plus grand, et encore un qui soit
davantage; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver
à un qui ne puisse plus être augmenté. Et au
contraire si quelque petit que soit un espace, on
peut encore en considérer un moindre, et toujours
à l'infini, sans jamais arriver à un indivisible qui
n'ait plus aucune étendue.

Il en est de même du temps. On peut toujours en
concevoir un plus grand sans dernier, et un moi-
ndre, sans arriver à un instant et à un pur néant
de durée.

C'est-à-dire, en un mot, que quelque mouvement,
quelque nombre, quelque espace, quelque temps
que ce soit, il y en a toujours un plus grand et un
moindre: de sorte qu'ils se soutiennent tous entre
le néant et l'infini, étant toujours infiniment éloi-
gnés de ces extrêmes.

Toutes ces vérités ne se peuvent démontrer, et
cependant ce sont les fondements et les principes
de la géométrie. Mais comme la cause qui les rend
incapables de démonstration n'est pas leur obs-
curité mais au contraire leur extrême évidence, ce
manque de preuve n'est pas un défaut, mais plu-
tôt une perfection....

Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et
l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.

Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles
étant unis ne font par une étendue. Car, quand ils
sont unis, ils se touchent chacun en une partie; et
ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas
séparées, puisque autrement elles ne se touche-
raient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point
d'autres parties: donc ils n'ont pas de parties
séparées; donc ils ne sont pas une étendue, par la

définition qui porte la séparation des parties. On
montrera la même chose de tous les autres indi-
visibles qu'on y joindra, par la même raison. Et
partant un indivisible, multiplié autant qu'on
voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est
pas de même genre que l'étendue, par la défini-
tion des choses du même genre.

Voilà comment on démontre que les indivisibles
ne sont pas de même genre que les nombres. De
là vient que deux unités peuvent bien faire un
nombre, parce qu'elles sont de même genre et que
deux indivisibles ne font pas une étendue, parce
qu'ils ne sont pas du même genre. D'où l'on voit
combien il y a peu de raison de comparer le rap-
port qui est entre l'unité et les nombres à celui
qui est entre les indivisibles et l'étendue.

Mais si l'on veut prendre dans les nombres une
comparaison qui représente avec justesse ce que
nous considérons dans l'étendue, il faut que ce
soit le rapport du zéro aux nombres; car le zéro
n'est pas du même genre que les nombres, parce
qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser: de
sorte que c'est un véritable indivisible de nombre,
comme l'indivisible est un véritable zéro d'éten-
due. Et on en trouvera un pareil entre le repos et
le mouvement, et entre un instant et le temps; car
toutes ces choses sont hétérogènes à leurs gran-
deurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles
ne peuvent jamais faire que des indivisibles
d'étendue, et par la même raison. Et alors on
trouvera une correspondance parfaite entre ces
choses; car toutes ces grandeurs sont divisibles à
l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de
sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'in-
fini et le néant.

Voilà l'admirable rapport que la nature a mis
entre ces choses, et les deux merveilleuses infini-
tés qu'elle a proposées aux hommes, non pas à
concevoir, mais à admirer; et pour en finir la
considération par une dernière remarque, j'ajou-
terai que ces deux infinis, quoique infiniment
différents, sont néanmoins relatifs l'un à l'autre,
de telle sorte que la connaissance de l'un mène
nécessairement à la connaissance de l'autre.

Car dans les nombres, de ce qu'ils peuvent tou-
jours être augmentés, il s'ensuit absolument qu'ils
peuvent toujours être diminués, et cela claire-
ment: car si l'on peut multiplier un nombre jus-
qu'à 100 000, par exemple, on peut aussi en pren-
dre une cent millième partie, en le divisant par le
même nombre qu'on le multiplie, et ainsi tout
terme d'augmentation deviendra terme de divi-
sion, en changeant l'entier en fraction. De sorte
que l'augmentation infinie enferme nécessaire-
ment aussi la division infinie.

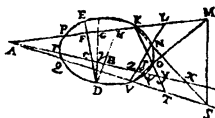


Fig. 1

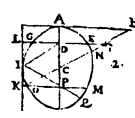


Fig. 2

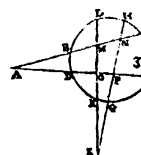


Fig. 3

I - AUTEURS
Michel FRECHET (groupe Histoire et épistémologie des mathématiques de ROUEN)
II - TITRE
R – 127 – HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN CLASSE, QUELQUES PISTES ...
III - CARACTERISTIQUES DE L'ÉDITION
Edité par l'IREM DE ROUEN Brochure de l'IREM de ROUEN Format : A4 ISBN : 2-86239-082-8 Date de parution : Octobre 99
IV - TYPE DE DOCUMENTS ET SUPPORT
Type : Document pour la classe Support :
V - PUBLIC VISE
NIV : 1 ^{ère} S – T.C – T.S -
VI - CONTENUS
RESUME « Je pense qu'il n'est pas possible de comprendre les mathématiques d'aujourd'hui si l'on n'a pas au moins une idée sommaire de leur histoire » Cette remarque, extraite de « pour l'honneur de l'esprit humain » est de Jean DIEUDONNE Je souscris totalement à ce constat. Comment alors introduire au lycée, une approche historique et épistémologique des mathématiques ? Cette brochure se propose de donner quelques pistes. On y trouvera, dans une première partie, la plupart des « devoirs-maison » à support épistémologique donnés à des élèves de 1 ^{ère} S – T.C – T.S. Ces devoirs sont précédés d'une introduction permettant de situer la problématique. Ils sont parfois suivis d'une correction sommaire. Dans une deuxième partie, se trouve une série d'articles parus dans le journal de la régionale de ROUEN de l'A.P.M.E.P. et qui peuvent être donnés à lire aux élèves. Enfin, j'ai regroupé dans la dernière partie des textes présentant certains mathématiciens dont tout lycéen devrait avoir entendu parlé durant sa scolarité. Pages : 73. MCL : Epistémologie – histoire des mathématiques – devoirs-maison – lycée – classes scientifiques – biographie de mathématiciens – articles mathématiques.

BON DE COMMANDE

M., Mme, Melle :

Adresse :

LIBELLE :	PRIX	QUANTITE	TOTAL
R 127 -	50.00 F		
Frais Divers de Gestion	10.00 F		
Frais d'envoi réel:			
SOMME DUE :			

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN

Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02.35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 00044004056 81

DATE :

SIGNATURE :