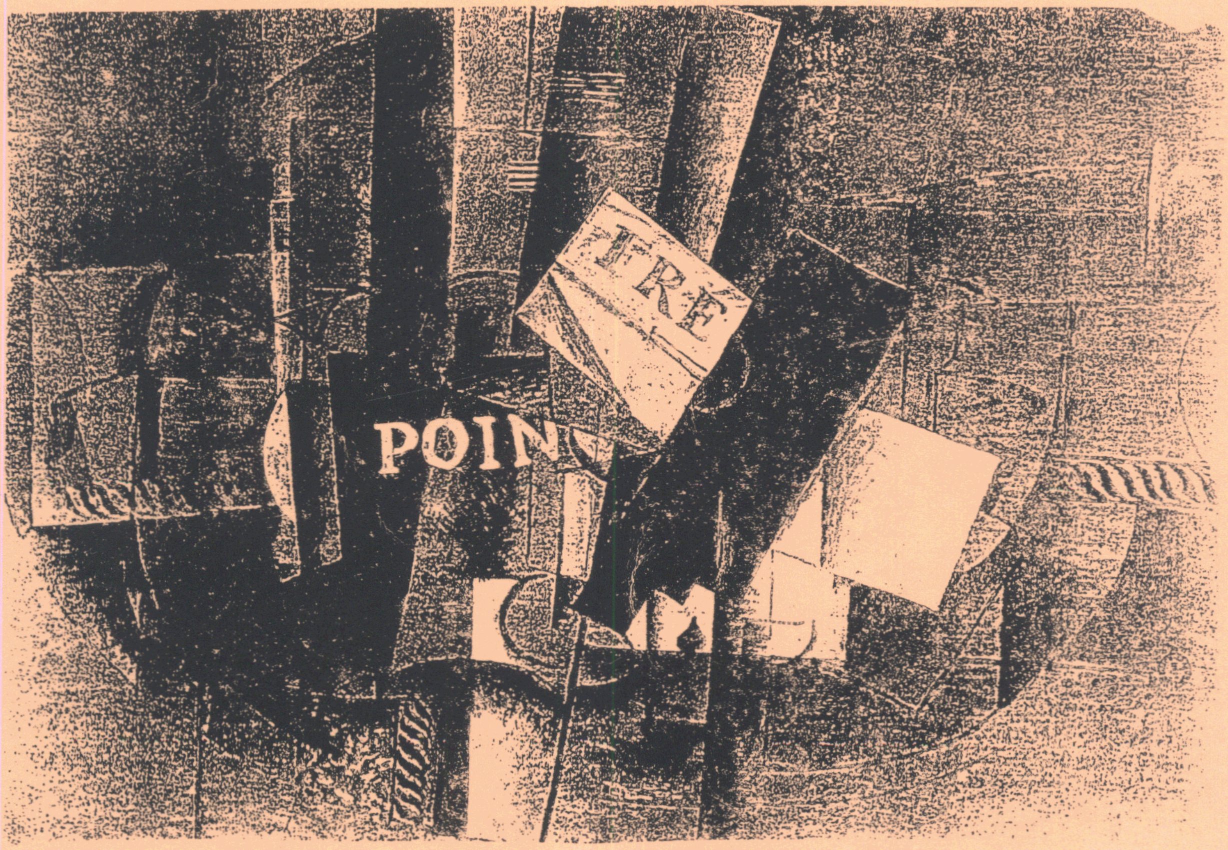
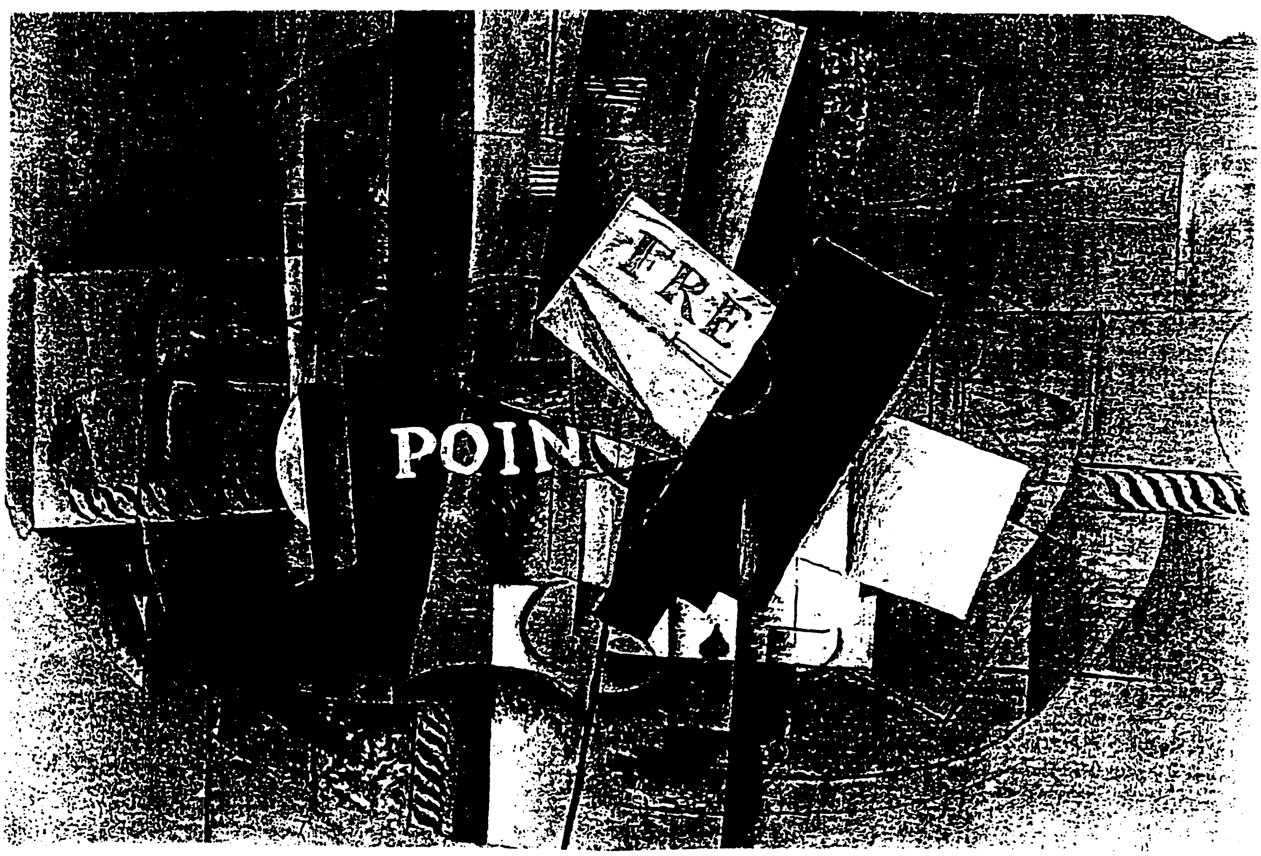
IREM de ROUEN



QUELQUES PROBLEMES OBTENUS EN FAISANT TOURNER UNE EQUERRE

IREM de ROUEN

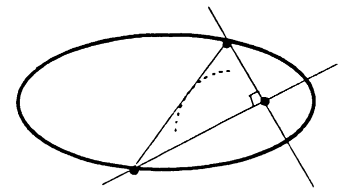


QUELQUES PROBLEMES OBTENUS EN FAISANT TOURNER UNE EQUERRE

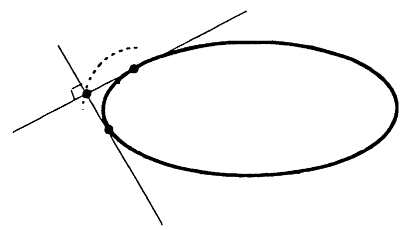
0 Introduction

Le point de départ de notre travail et donc de cet exposé fut de réfléchir sur les deux exercices classiques suivants:

• faire tourner une équerre au centre d'une conique et rechercher l'enveloppe de l'hypoténuse.



• envelopper la conique par l'équerre et rechercher le lieu du sommet de l'angle droit (cercle orthoptique).



Notre recherche s'est effectuée dans trois directions
1°) modifier certaines hypothèses (par exemple ne plus privilégier le centre de la conique) pour obtenir les théorèmes les plus généraux possibles.
2°) trouver des méthodes et des solutions (par exemple en utilisant l'algèbre linéaire) qui fassent ressortir la dualité des deux problèmes.
3°) simplifier certaines hypothèses (prendre un cercle comme conique) pour construire une série d'exercices élémentaires résolubles en utilisant les outils d'un élève de lycée.

Ce document est évidemment le produit de cette recherche, mais nous avons voulu qu'il aille au delà d'une présentation thématique d'exercices corrigés. Il nous a semblé important d'essayer de rappeler les difficultés que nous avions rencontrées et ainsi de faire comprendre au lecteur pourquoi nous avons progressivement changé les angles d'attaque des problèmes et les outils utilisés. La géométrie analytique qui semble parfois pouvoir venir à bout de tout (surtout lorsqu'on se borne - à tort - à des problèmes très simples), échoue ici assez vite. Il faut donc ou bien faire appel à la géométrie synthétique et donc connaître des propriétés géométriques des courbes étudiées (principalement les coniques), ou bien introduire des concepts mathématiques *a priori* plus ambitieux, algèbre linéaire et bilinéaire, coordonnées tangentielles, polarité.

Le plan qui suit essaie de suggérer comment ces outils sophistiqués interviennent *naturellement* pour résoudre notre problème. Il pourra donc intéresser, au delà de l'équerre tournante, tous ceux qui souhaiteraient rapidement approfondir leurs connaissances en algèbre et en géométrie sans vouloir se tourner vers des manuels anciens, en général très bien faits mais assez volumineux, ou très récents, mais écrits de façon axiomatisée et abstraite.
Cette présentation transversale illustre les rapports entretenus par les objets et les méthodes de la géométrie et ceux des champs voisins, analyse, algèbre ou mécanique. Si la géométrie se nourrit de ces théories annexes, elle a aussi dans une grande mesure permis leur développement. Cette idée est sans doute assez banale si l'on s'en tient à l'analyse ou à la cinématique. Elle est plus provocatrice si on englobe l'algèbre. En France, l'enseignement de l'algèbre, même dans le secondaire, a toujours reposé sur la méthode axiomatique. Et lorsque les programmes ont changé, au début des années quatre-vingts, on a jeté l'algèbre avec l'eau de l'axiomatisation, oubliant qu'historiquement les structures algébriques étaient nées, au dix neuvième siècle en partie à cause du développement de la géométrie, de l'étude des cubiques et de la recherche d'invariants.

La fin de ce texte contient la partie mécanique. Nous n'avons envisagé ce point de vue (sans doute à cause de lacunes de notre formation), qu'après un certain temps, alors que la traduction physique de notre sujet était évidente. Cette étude *a posteriori* nous a heureusement permis, et ceci en partie grâce à la lecture de Chasles[1], de comprendre comment ce point de vue éclairait les parties précédentes et ainsi d'écrire un dernier chapitre de prolongements. Là encore, le mouvement des programmes de Lycée et ensuite des premiers cycles d'Université va vers une suppression presque totale des parties consacrées à la cinématique et à la mécanique. Certes tous s'accordent pour reconnaître à la géométrie synthétique des qualités pour former à la démonstration. Mais si l'on oublie les rapports géométrie-mécanique, on cantonne la géométrie dans un rôle utile mais rhétorique. Il faudrait donc pouvoir dépasser ce cloisonnement.

Nous nous sommes permis de présenter certains concepts importants avec une certaine désinvolture. Par exemple la définition donnée d'un espace projectif n'est pas canonique, car nous avons choisi de nous placer autant qu'il est possible dans $\mathbb{R}^n$. Tous ceux qui désireraient des cours complets sur ces notions devront donc se reporter aux manuels classiques (donnés en bibliographie). Rappelons qu'il ne s'agit pas ici de donner un cours complet mais de permettre une première approche de ces notions. Cette approche, rédigée à un niveau très élémentaire et lisible par tout enseignant de Lycée, doit permettre d'envisager tous ces concepts non pour eux-mêmes, mais pour leurs relations.

Il nous paraît enfin utile d'annoncer, dans cette introduction, les grandes lignes de ce plan, en précisant le sens que nous avons voulu donner à chaque section. Il va sans dire que plusieurs entrées sont possibles et que nous espérons que chaque lecteur trouvera son propre itinéraire et peut-être un peu d'intérêt pour ce travail.

La première section contient les démonstrations qui reposent sur une technique simple et bien définie: géométrie analytique ou géométrie élémentaire. On présente ensuite rapidement la notion d'enveloppe pour poser le problème *dual* de celui de l'équerre tournante, quel est le lieu *dessiné* par l'hypoténuse? Enfin la connaissance des propriétés des tangentes aux coniques permet d'aller un peu plus loin et même de commencer une généralisation au cas où l'angle de l'équerre n'est plus droit.

La seconde section regroupe les techniques situées au carrefour de plusieurs domaines des mathématiques. On essaie de montrer les diverses facettes d'un même problème, et comment en passant de l'une à l'autre (comme par un jeu de miroirs) la résolution est facilitée. Ce chapitre prépare la section suivante (en particulier par l'emploi des coordonnées tangentielles), où l'on

---

[1] CHASLES (Michel). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1878, 6.
CHASLES (Michel). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861 t.LII.

introduira des objets plus compliqués toujours avec l'intention de simplifier et ainsi d'accéder à des hypothèses plus générales.

La troisième section contient la résolution algébrique et la solution géométrique du problème général pour les coniques. On définit l'espace projectif et son complexifié, et on étudie les rapports qu'il y a entre la notion d'enveloppe et celle de polarité. On donne en termes de matrices la traduction entièrement algébrique du problème, avant d'illustrer géométriquement ces nouveaux objets par une élégante démonstration par *polarité réciproque*.

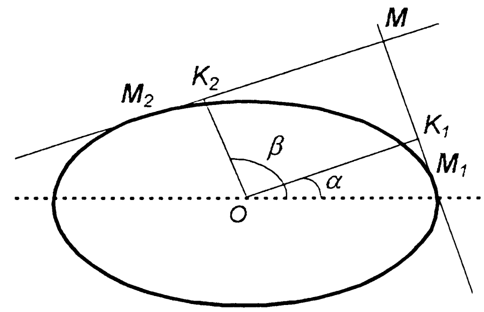
Après avoir défini, comment dans un mouvement simple on peut trouver le centre instantané de rotation, on traite le cas du cercle orthoptique (la démonstration est de Chasles) et celui, un peu plus sophistiqué du cercle dual.

I. Premiers outils, premières méthodes.

A. Exemples en géométrie analytique.

1. Tangente de George Salmon[2]

Soit (E) l'ellipse de centre O et de paramètres a et b, d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On mène par un point M extérieur à l'ellipse, deux tangentes orthogonales qui rencontrent (E) en M_1 et M_2. On appelle K_1 et K_2 les projections orthogonales de O sur ces tangentes. On cherche le lieu des points M.
On note α et β les angles $(\vec{i}, \vec{OK_1})$ et $(\vec{i}, \vec{OK_2})$.



L'idée de la démonstration repose sur le calcul de la distance OM, par application du théorème de Pythagore dans le rectangle OK_1MK_2.
Toutefois comme la proposition réciproque est assez délicate à présenter, nous commencerons par énoncer quelques équivalences simples, utiles pour la suite.

Proposition 1 : Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse (E).
Une droite D d'équation normale $x \cos \gamma + y \sin \gamma = \rho$ est tangente à l'ellipse (E) en M_0 si et seulement si $\rho x_0 = a^2\cos \gamma$ et $\rho y_0 = b^2\sin \gamma$.

En effet, une équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ est $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1$ et la proposition précédente ne fait que traduire la proportionnalité des coefficients de deux équations d'une même droite.

Proposition 2 : Soit D une droite d'équation normale $x \cos \gamma + y \sin \gamma = \rho$, K la projection orthogonale de O sur D et $\gamma = (\vec{i}, \vec{OK})$.
La droite D est tangente à l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
si et seulement si $\rho^2 = a^2\cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma$.

En effet si D est tangente à (E) en $M_0(x_0, y_0)$, on a $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1$, et d'après la proposition précédente on a $\rho x_0 = a^2\cos \gamma$ et $\rho y_0 = b^2\sin \gamma$.
L'équation $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1$ entraîne alors $\frac{a^2\cos^2 \gamma}{\rho^2}+\frac{b^2\sin^2 \gamma}{\rho^2} = 1$, c'est-à-dire l'égalité désirée.
Réciproquement, si l'on suppose que $\rho^2 = a^2\cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma$, on peut introduire le point $N(x_N, y_N)$ tel que $\rho x_N = a^2\cos \gamma$ et $\rho y_N = b^2\sin \gamma$.
L'égalité $\frac{a^2\cos^2 \gamma}{\rho^2}+\frac{b^2\sin^2 \gamma}{\rho^2} = 1$ entraîne $\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{y_N^2}{b^2} = 1$, donc le point N appartient à (E).

---

[2] Nous nous sommes permis d'associer à cette méthode le nom du grand géomètre car une partie de cette méthode figure dans les *Conic Sections*. Mais c'est surtout ici, l'occasion d'engager le lecteur à redécouvrir les traités de géométries analytiques du professeur irlandais qui sont à la fois simples, gradués et passionnants.

La réciproque de la proposition 1, permet alors de conclure : la droite D est la tangente en N à l'ellipse (E).

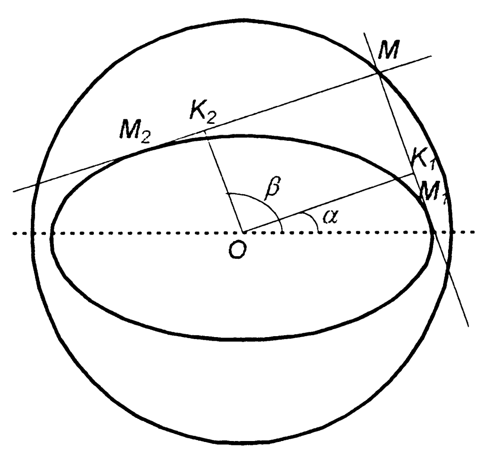
Théorème :
Le lieu des points M qui regardent l'ellipse (E) d'un angle droit est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, appelé cercle orthoptique de l'ellipse.

Pour démontrer le sens direct, on remarque que dans le rectangle OK_1MK_2 et avec les notations introduites au début du paragraphe[3],

$$OM^2 = OK_1^2 + OK_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$$
$$= a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta = a^2 + b^2$$

puisque les angles α et β diffèrent d'un angle droit.

Démonstration de la réciproque :
Soit M un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. On peut mener par M (extérieur à (E)) une tangente D à l'ellipse. On appelle M_1 le point de tangence et K_1 la projection de O sur D. On construit ensuite le rectangle OK_1MK_2 et comme précédemment, on note α et β les angles $(\vec{i}, \vec{OK_1})$ et $(\vec{i}, \vec{OK_2})$. Les angles α et β diffèrent donc encore d'un angle droit.



On a, par le théorème de Pythagore dans le triangle OMK_1,

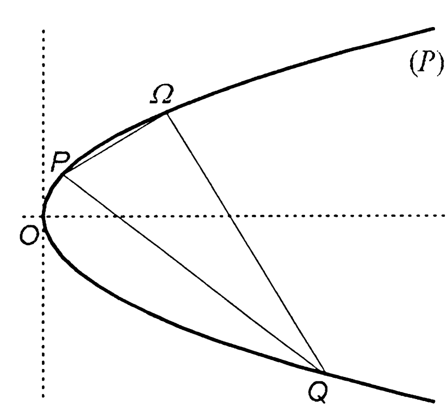
$$OK_2^2 = MK_1^2 = OM^2 - OK_1^2$$
$$= a^2 + b^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)$$
$$= a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$$

La droite (MK_2) est donc tangente à (E) d'après la réciproque de la proposition 2.

Ainsi tout le cercle est décrit.

2 Le point de Frégier et la parabole

Par un point Ω d'une parabole (P), on mène deux droites orthogonales qui recoupent (P) en deux points P et Q. On cherche à montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe.



Prenons comme origine du repère le sommet de la parabole et soit (P) la parabole d'équation :

$$(P) : y^2 = 2px$$

$$(P) : y^2 = 2px.$$

---

[3] Si l'on veut éviter toute notion sur les équations normales il faudra utiliser $d(O,(M_1M)) = OK_1 = \frac{|-\rho|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$

Ω, P et Q sont des points de (P), leurs coordonnées sont donc de la forme : $\Omega\left(\frac{a^2}{2p}\ ,\ a\right)$, $P\left(\frac{b^2}{2p}\ ,\ b\right)$ et $Q\left(\frac{c^2}{2p}\ ,\ c\right)$

$(\Omega P) \perp (\Omega Q)$ si et seulement si $\vec{\Omega P}\,.\,\vec{\Omega Q} = 0$

si et seulement si $\frac{b^2-a^2}{2p}.\frac{c^2-a^2}{2p}+(b-a)(c-a)=0$

si et seulement si $a^2+a(b+c)+bc+4p^2=0$ $\quad(*)$

L'équation de la droite (PQ) est

$$(PQ):\left(\frac{c^2-b^2}{2p}\right)(y-b)=(c-b)\left(x-\frac{b^2}{2p}\right)$$

soit, après simplifications

$$(PQ): 2px-(b+c)y+bc=0\,.$$

Comme d'après $(*)$, $(b+c)a+bc=-4p^2-a^2$ on remarque que, dans l'équation de la droite (PQ), si $y=-a$ alors $2px-a^2-4p^2=0$ ou encore $x=\frac{a^2+4p^2}{2p}$.

Ainsi, les droites (PQ) passent toutes par le point fixe $A\left(\frac{a^2+4p^2}{2p};-a\right)$ que l'on appelle **Point de Frégier**.

Remarques :

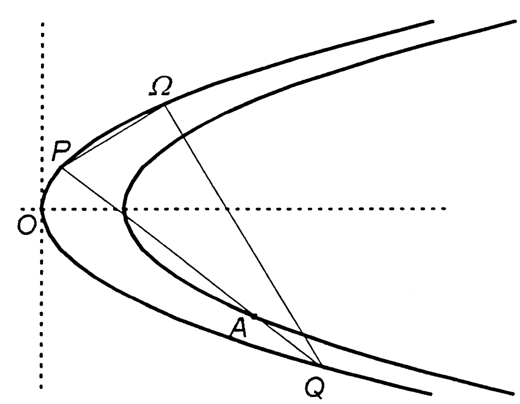
a) Si $\Omega(0,0)$, la droite (PQ) « tourne autour du point A », on dira encore que l'enveloppe des droites (PQ) est le point $A(2p,0)$.

b) Si Ω varie sur (P), alors les coordonnées de A vérifient

$$2px-4p^2=y^2,$$

soit

$$y^2=2p(x-2p).$$



Donc A se trouve sur la parabole (P') déduite de (P) par une translation de vecteur $2p\vec{i}$. Cette nouvelle parabole est entièrement décrite puisque l'ordonnée de A décrit $\mathbb{R}$.

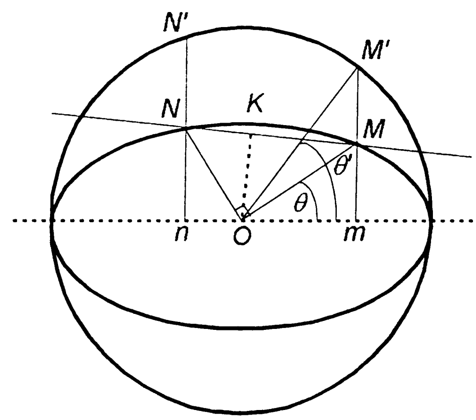
B. Un peu plus de géométrie.

Les démonstrations géométriques dans les cas simples (par exemple dans le cas du cercle orthoptique, ou celui où le sommet de l'équerre se trouve au centre de la conique) reposent sur des propriétés géométriques[4] des coniques non étudiées au lycée et des études de lignes de niveau. Nous étudierons ces prolongements au paragraphe **D** de cette section.

Nous commençons par traiter ici, trois situations qui ne font appel qu'à des propriétés élémentaires. La première est traitée sous forme d'exercice et repose sur l'affinité; les deuxième et troisième font appel à la définition monofocale des coniques (celle des classes de TS).

1. Utilisation de l'affinité (exercice).

En introduisant l'affinité qui transforme une ellipse de centre O, d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, en son cercle principal (le cercle de centre O et de rayon a), et les données de la figure ci-contre :



a) Exprimer $\frac{1}{ON^2}$ en fonction de θ.

(On montrera que $ON^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ ce qui revient à trouver une équation polaire de l'ellipse en prenant O comme pôle et l'axe des foyers comme axe polaire)

b) Démontrer que dans le triangle rectangle OMN, on a $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OM^2}$.

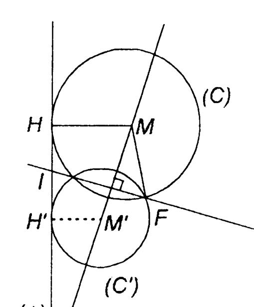
c) En déduire OK et le lieu du point K.

2. Ensemble des points qui regardent une parabole avec un angle droit.

Propriété 1

Soit M un point de la parabole (P) (de foyer F, de directrice (Δ)) et H le projeté orthogonal de M sur (Δ).

La tangente à (P) en M est la médiatrice de $[FH]$



Démonstration : Soit (C) le cercle de centre M et de rayon MF et (C') le cercle de centre M' et de rayon MF'. Ces cercles ont un axe radical (ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles (C) et (C')) passant par F et perpendiculaire à (MM') (droite des centres).

Appelons I le point d'intersection de cet axe radical avec (Δ). (On ne peut avoir (Δ) parallèle à l'axe radical car sinon on aurait $(MM')\perp(\Delta)$.)

I est sur l'axe radical donc a même puissance par rapport aux deux cercles. Or ces puissances valent respectivement IH^2 et IH'^2.

Donc $IH=IH'$ et I est le milieu de $[HH']$.

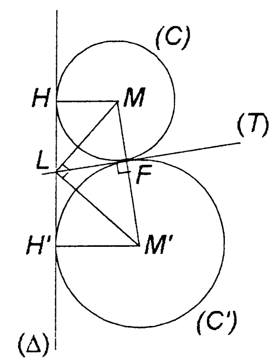
Ainsi, quand on fait tendre H' vers H, I tend simultanément vers H, la droite (IF) tend vers la droite (HF). Comme (MM') reste perpendiculaire à (IF), sa position limite est perpendiculaire à (HF).

[4] Le symétrique d'un foyer par rapport aux tangentes à la conique décrit le cercle directeur relatif à l'autre foyer.

Conclusion : la tangente en M à (P) est perpendiculaire à (HF) et passe par M (qui vérifie $HM=MF$ ...) donc elle est la médiatrice de $[HF]$.

Propriété 2
Des points de (Δ), on voit la parabole sous un angle droit.

<u>Démonstration</u> :
Considérons les cercles (C) et (C') tangents extérieurement entre eux, il faut donc que $MF+M'F=MM'$ soit $F\in[MM']$.
Soit (T) la tangente commune en F à (C) et (C'). Elle coupe (Δ) en L. (si on avait $(\Delta)//(T)$, on aurait une nouvelle fois $(MM')\perp(\Delta)$ car $(MM')\perp(T)$ ...)
Les droites (Δ) et (T) sont les tangentes à (C) (respectivement à (C')) passant par L.



On en déduit que : (LM) est la : -bissectrice de $\widehat{HLF}$ (*)
-médiatrice de $[HF]$
et donc la tangente à (P) en M.
(LM') est la : -bissectrice de $\widehat{H'LF}$ (**)
-médiatrice de $[H'F]$
et donc la tangente à (P) en M'.

(*) et (**) donnent $\widehat{M'LM}=\frac{1}{2}\widehat{H'LH}=\frac{\pi}{2}[\pi]$

<u>Remarque</u> :
$L\in[HH']$ car (T) axe radical de (C) et (C') donc L est le milieu de $[HH']$!
Et même : $LH=LF=LH'$ ... de sorte que HFH' soit rectangle en F ... etc.

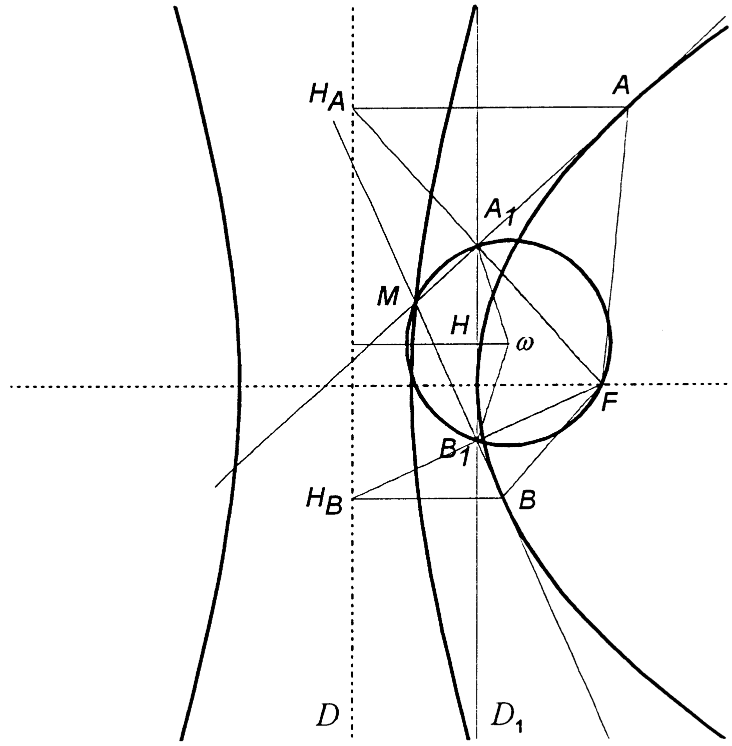
Conclusion : les tangentes à (P) passant par L forment un angle droit.
(Réciproquement, connaissant L, on reconstitue la figure ci-dessus en partant de (T) confondue avec (LF) puis la perpendiculaire à (T) passant par F coupe les bissectrices de l'angle de droites (T,Δ) en M et M'.)

3. Ensemble des points qui regardent une parabole avec un angle constant non droit.
Par un point M on a mené deux tangentes à la parabole de foyer F et de directrice D. On appelle A et B les points de contacts, H_A et H_B leurs projections sur D.
L'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$ est constant et vaut α.

La parallèle à la directrice menée par le sommet D_1, coupe ces tangentes en A_1 et B_1. Nous savons que les tangentes sont les médiatrices de $[FH_A]$ et $[FH_B]$ et donc que, par projection du sommet de la parabole, les points A_1 et B_1 sont les pieds de ces médiatrices.
Les points M, A_1 B_1, F sont cocycliques puisque les angles en A_1 et B_1 sont droits.
On a donc $(\vec{FA_1}, \vec{FB_1}) = \alpha\ [\pi]$.

On suppose évidemment $\alpha \neq 0\ [\frac{\pi}{2}]$.

Le centre ω du cercle circonscrit à MA_1F n'appartient pas à la droite (A_1B_1). On appelle H la projection orthogonale de ω sur la droite (A_1B_1).



La droite (ωH) est une bissectrice de l'angle $(\omega\vec{A}_1,\ \omega\vec{B}_1)$ puisque le triangle ωA_1B_1 est isocèle.

On a par cocyclicité

$$(\omega\vec{A}_1,\ \omega\vec{B}_1) = 2\alpha\ [2\pi]$$

et donc

$$(\omega\vec{A}_1, \omega\vec{H}) = \alpha\ [\pi]$$

On a donc

$$\omega H = \omega A_1 \,|\cos(\omega\vec{A}_1, \omega\vec{H})|$$
$$= \omega F \,|\cos(\omega\vec{A}_1, \omega\vec{H})|$$

Finalement (comme $\cos\alpha \neq 0$)

$$\omega F = \frac{1}{|\cos\alpha|}\,\omega H$$

Le point ω appartient donc à l'hyperbole (Γ) de foyer F de directrice (A_1B_1) et d'excentricité

$$e = \frac{1}{|\cos\alpha|}\ (e>1).$$

La réciproque qui ne pose pas de problème est laissée au lecteur.

L'ensemble des points ω est donc exactement l'hyperbole Γ.

Comme on obtient M par une homothétie h de centre F et de rapport 2 on déduit que le lieu des points M d'où l'on voit la parabole d'un angle α à π près est l'hyperbole $h(\Gamma)$ de foyer F de directrice $h(D_1)$ et d'excentricité $\dfrac{1}{|\cos\alpha|}$.

Précisons que les asymptotes de l'hyperbole obtenue sont les droites qui font un angle de $\pm\,\alpha$ avec l'axe focal de la parabole.

C. En utilisant la notion d'enveloppe.

Pour résoudre le problème dual des problèmes précédents - faire tourner une équerre à l'intérieur d'une courbe et rechercher le lieu *dessiné* ou *enveloppé* par l'hypoténuse, il faut faire appel à une notion mathématique supplémentaire, celle d'*enveloppe*.

Nous commençons par rappeler une méthode pour déterminer analytiquement l'enveloppe d'une famille de droites du plan et donner quelques applications. Nous verrons ensuite, qu'il est souvent possible de déterminer autrement cette enveloppe et donc avec moins de calcul. Toutefois savoir que le calcul est possible est parfois apaisant...

1. La théorie

a) Définitions

Etant donnée une famille de droites $(\Delta_u)_{u\in I}$, I désignant un intervalle réel, on dit que C est *une courbe enveloppant* les droites (Δ_u) quand toute droite Δ_u est tangente en un point de C et quand toute tangente à C est une droite de la famille $(\Delta_u)_{u\in I}$

Remarque : C peut naturellement être paramétrée à l'aide du paramètre u. On peut même en suivant la définition précédente, construire une surjection entre les points $M(u)$ de C et les droites (Δ_u) tangentes à C en $M(u)$. On appelle $M(u)$ le point « caractéristique » de l'enveloppe C.

Exemple : Etant donnés deux réels strictement positifs a et b la famille de droites d'équations cartésiennes $\frac{x\cos u}{a}+\frac{y\sin u}{b}=1$, avec $u\in\mathbb{R}$, a pour enveloppe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

b) Détermination pratique

Théorème: La famille $(\Delta_u)_{u\in I}$ d'équation générale :

$$x.\lambda(u)+y.\mu(u)+\gamma(u)=0,$$

λ, μ et γ étant trois fonctions définies et de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admet en général une enveloppe C engendrée, lorsque u varie, par le point commun à Δ_u et à la droite Δ_u' associée dont l'équation :

$$x.\lambda'(u)+y.\mu'(u)+\gamma'(u)=0$$

est obtenue en annulant la dérivée par rapport à u du premier membre de l'équation de Δ_u.

Démonstration : nous allons pour des raisons pratiques associer à tout point M un triplet $(x,y,1)$ (x et y désignant les coordonnées[5] ordinaires).

Pour tout réel u fixé de I, l'équation de Δ_u est alors $x.\lambda(u)+y.\mu(u)+\gamma(u)=0$.

On a donc[6] $M\in\Delta_u \Leftrightarrow \vec{F}(u)\,.\,\vec{N}(u)=0$ $\quad(*)$.

Supposons d'abord qu'il existe une paramétrisation $\vec{F}(u)$ $(\alpha(u),\beta(u),\gamma(u))$, $\vec{F}$ étant une fonction dérivable sur I, de l'enveloppe C déterminée par la famille de droites $(\Delta_u)_{u\in I}$.

Pour tout point M de l'enveloppe C il existera donc un réel u et une droite Δ_u telle que Δ_u est la tangente en M à C et $\vec{OM}=\vec{F}(u)$. Soit $\vec{N}(u)$ la fonction vectorielle de classe C^∞ sur I définie par $\vec{N}(u)$ $(\lambda(u),\mu(u),\gamma(u))$.

On a donc en dérivant (*) $\vec{F}(u).\vec{N}'(u)+\vec{F}'(u).\vec{N}(u)=0$.

Par définition $\vec{F}'(u)$ est nul ou directeur de Δ_u, ce qui donne $\vec{F}'(u).\vec{N}(u)=0$.

Finalement le point M est déterminé par les deux égalités (Σ) $\begin{cases}\vec{F}(u).\vec{N}(u)=0\\ \vec{F}(u).\vec{N}'(u)=0\end{cases}$

Réciproquement, si le système possède une solution[7] unique $\vec{F}(u)$, on déterminera par cette fonction une courbe paramétrée qui répondra entièrement au problème posé.

Il ne reste plus qu'à traduire en termes affines et analytiques le système (Σ) pour obtenir le théorème proposé.

---

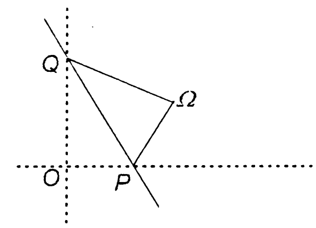
[5] Si le lecteur connaît déjà la notion d'espace projectif, ou s'il se reporte en III.A., il comprend qu'on associe à M un système de *coordonnées homogènes*. Notre démonstration, à condition de remplacer 1 par z, permet d'envisager les asymptotes, à la place des tangentes.

[6] On utilise ici le produit scalaire canonique défini dans $\mathbb{R}^3$.

[7] On peut remarquer, que lorsque cette solution correspond à $z = 0$, on ne trouve pas un point de l'enveloppe mais une asymptote.

2 Une application

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit Ω un point de coordonnées (a,b) ne se trouvant pas sur les axes. On mène par ce point deux droites orthogonales qui coupent respectivement $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ en P et en Q.
Déterminons l'enveloppe C engendrée par les droites (PQ) lorsque P (et donc Q) varie sur $(O, \vec{i})$.



Si on note θ l'angle formé par $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega P})$, alors (ΩP) a pour équation $y-b=\tan\theta(x-a)$ et (ΩQ) pour équation $-\tan\theta(y-b)=x-a$.

Une équation cartésienne de (PQ) est donc par exemple

$$x(b-a\tan\theta)+y(a+b\tan\theta)=(b-a\tan\theta)(a+b\tan\theta)$$

On détermine le point caractéristique de C, $M(\theta)$, en recherchant l'intersection de la droite (PQ) avec la droite $(PQ)'$ d'équation:

$$xa-yb=2ab\tan\theta+a^2-b^2$$

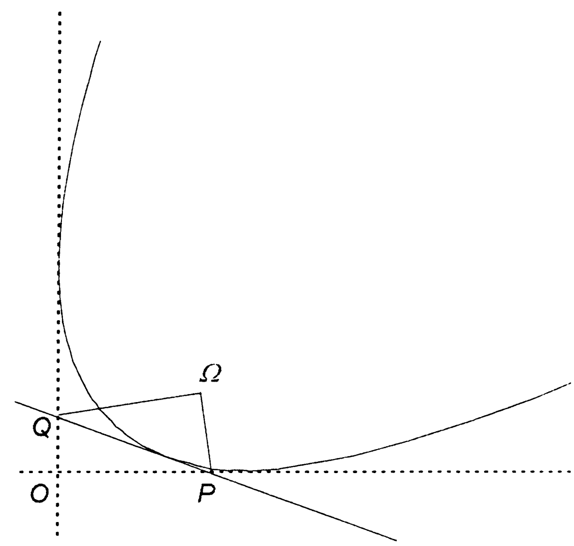
On trouve, après avoir résolu le système :

$$x=\frac{a(a+b\tan\theta)^2}{a^2+b^2}$$

$$y=\frac{b(b-a\tan\theta)^2}{a^2+b^2}$$

Les coordonnées de $M(\theta)$ sont donc solutions de l'équation

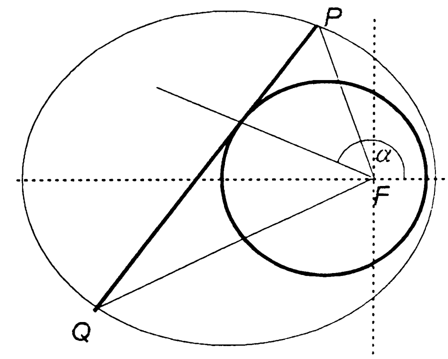
$$(by-ax-(a^2+b^2))^2=4(a^2+b^2)ax\,.$$



Ainsi l'enveloppe recherchée est une parabole.

D Avec un peu de savoir sur les coniques

1 En utilisant les coordonnées polaires



Considérons un foyer F comme pôle et l'axe des foyers comme axe polaire.
Une ellipse (E) a ainsi pour équation[8]

$$(E): r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \quad e<1.$$

Notons α l'angle formé par l'axe des foyers et la bissectrice de $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ})$.
Alors P et Q ont pour coordonnées polaires :

$$P\left(\frac{p}{1+e\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)};\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } Q\left(\frac{p}{1+e\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)};\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

et pour coordonnées cartésiennes :

$$P\left(\frac{p\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+e\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)};\frac{p\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+e\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \text{ et } Q\left(\frac{p\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{1+e\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)};\frac{p\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{1+e\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

On obtient ainsi une équation de la droite (PQ), après simplifications :

$$(PQ):\ -p+x(\sqrt{2}\cos\alpha+e)+y\sqrt{2}\sin\alpha=0$$

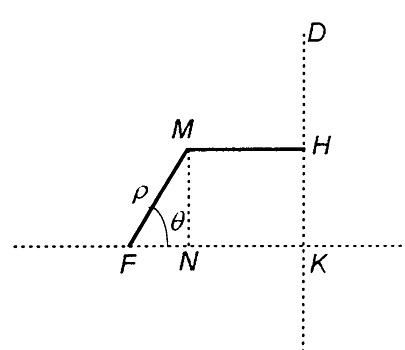
puis, pour obtenir le point caractéristique :

$$(PQ)':\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$$

La solution est le point de coordonnées
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(p-ex)\cos\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}(p-ex)\sin\alpha\right)$ qui vérifient $x^2+y^2=\frac{1}{2}(p-ex)^2$.

---

[8] Soit Γ la conique d'excentricité e de foyer F et de directrice D. On note pour tout point M du plan θ l'angle $(\vec{FK}, \vec{FM})$, ρ la distance FM, h la mesure algébrique $\overline{FK}$, et N la projection orthogonale de M sur l'axe focal.



$$M\in\Gamma \Leftrightarrow MF^2=e^2MH^2$$

Or $e^2MH^2 = e^2(NK)^2 = e^2(NF+FK))^2 = e^2(-\rho\cos(\theta)+h)^2$
Donc $M\in\Gamma \Leftrightarrow \rho=e(-\rho\cos(\theta)+h))$ ou $\rho=e(\rho\cos(\theta)-h))$

Dans le premier cas on trouve $\rho=\frac{eh}{1+e\cos(\theta)}$ et dans le second $\rho=\frac{-eh}{1-e\cos(\theta)}$.
Mais il est facile de voir que si un point M de paramètres polaires $(\theta+\pi,-\rho)$ vérifie la première équation alors le point M' de paramètre (θ,ρ) vérifie la seconde, et vice versa. Une équation polaire de la conique Γ est donc $\rho=\frac{p}{1+e\cos(\theta)}$.

La valeur absolue du réel $p=eh$ qui représente la valeur de ρ lorsque θ vaut $\frac{\pi}{2}$ est appelé le paramètre de la conique.

Soit, en revenant aux coordonnées polaires : $r = \dfrac{\dfrac{p}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{e}{\sqrt{2}}\cos\theta}$ qui est l'équation polaire d'une ellipse

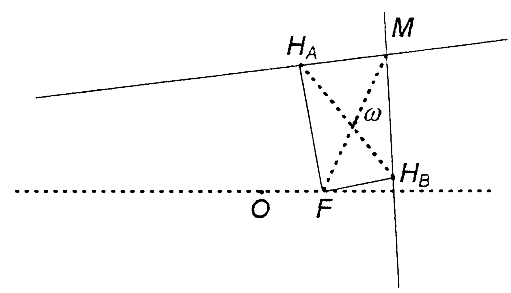
puisque $\dfrac{e}{\sqrt{2}} < 1$.

On remarque que, d'après son équation, la droite $(PQ)'$ est la bissectrice de $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ})$. Le point caractéristique est donc à l'intersection de cette bissectrice et de l'hypoténuse (PQ).

2 Cercle principal et orthoptique

Rappel : La projection d'un foyer F d'une conique à centre sur une tangente menée par M, appartient au cercle principal.

Par un point M on a mené deux tangentes à la conique de demi-diamètre a et de demi-distance focale c. On appelle A et B les points de contacts, H_A et H_B les projections du foyer F sur ces tangentes (ces points appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon a) et ω le milieu de $[FM]$.



L'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est droit si et seulement si ω est milieu de $[H_AH_B]$, ou encore si et seulement si on a l'égalité

$$\omega O^2 = OH_B^{\ 2} - \omega H_B^{\ 2}.$$

Pour démontrer le sens direct, il suffit de remarquer que si ω est milieu de $[H_AH_B]$ alors ω est le pied de la médiatrice du segment $[H_AH_B]$ et d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ωOH_B. Pour démontrer le sens réciproque, on applique la réciproque du théorème de Pythagore.

Finalement

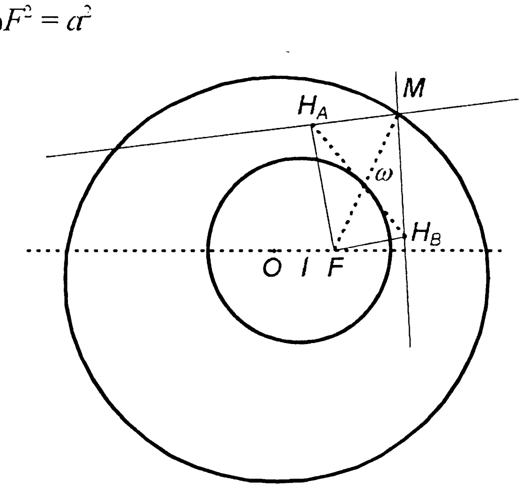
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ est droit } \Leftrightarrow (*) \quad \omega O^2 + \omega F^2 = a^2$$

En introduisant I le milieu de $[OF]$ on a facilement par le théorème de la médiane:

$$(*) \Leftrightarrow \omega I^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Le point ω décrit donc un cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$.

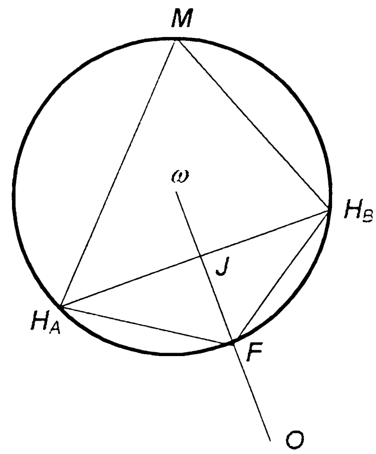
L'homothétie de centre F et de rapport 2 transforme le point I en O, et le point ω en M.



Le point M décrit donc le cercle homothétique du cercle précédent, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$ qu'on appelle le cercle orthoptique de la conique.

Généralisation.

On garde les notations du paragraphe précédent.
L'angle $(\vec{MA},\vec{MB})$ est désormais constant, et vaut α à 2π près.
On note J le milieu de $[H_A H_B]$.
Les points $H_A\, M\, H_B F$ sont sur un même cercle de centre ω.



On a donc

$$(\vec{\omega J},\vec{\omega H_B}) = \frac{1}{2}(\vec{\omega H_A},\vec{\omega H_B})\ [\pi]$$

et

$$\begin{aligned}(\vec{\omega H_A},\vec{\omega H_B}) &= 2(\vec{MH_A},\vec{MH_B})\ [2\pi]\\ &= 2\,(\vec{MA},\vec{MB})\ [2\pi]\end{aligned}$$

donc on obtient

$$(\vec{\omega J},\vec{\omega H_B}) = (\vec{MA},\vec{MB})\ [\pi]\ (*)$$

Les points ω, O, J, sont sur la médiatrice de $[H_A H_B]$ donc

$$OJ^2 = OH_B^{\,2} - JH_B^{\,2}$$
$$OJ^2 + JH_B^{\,2} = a^2$$

Comme $JH_B = \sin(J\omega H_B)\, F\omega$ et comme on peut confondre, à cause du carré et (*), α avec l'angle géométrique $(J\omega H_B)$, on obtient finalement

$$OJ^2 + \sin^2\alpha\ F\omega^2 = a^2\ (**)$$

De plus

$$\begin{aligned}\vec{OJ}^2 &= (\vec{O\omega} + \vec{\omega J})^2 = O\omega^2 + \omega J^2 + 2\,\vec{O\omega}.\,\vec{\omega J}\\ &= O\omega^2 + \cos^2\alpha\ \omega H_B^{\,2} + 2\,\vec{O\omega}.\,\vec{\omega H_B}\\ &= O\omega^2 + \cos^2\alpha\ \omega F^2 + 2\,O\omega.\omega F\cos(\vec{O\omega},\,\vec{\omega H_B})\\ &= O\omega^2 + \cos^2\alpha\ \omega F^2 + 2\,\varepsilon\, O\omega\, \omega F\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Le réel ε vaut 1 ou -1 en fonction de la détermination de l'angle.

Donc (**) entraîne $E(\varepsilon,\alpha)$:

$$F\omega^2 + O\omega^2 + 2\,\varepsilon\, O\omega\,\omega F\cos(\alpha) = a^2$$

La détermination de ε semble difficile sans détailler les différents cas possibles.
Nous nous bornerons à remarquer que, comme $E(\varepsilon,\alpha) = E(-\varepsilon,\pi-\alpha)$, l'ensemble des lignes de niveau de type $E(\varepsilon,\alpha)$ est le même lorsque α varie que celui défini par l'équation

$$F\omega^2 + O\omega^2 - 2\,O\omega\,\omega F\cos(\alpha) = a^2$$

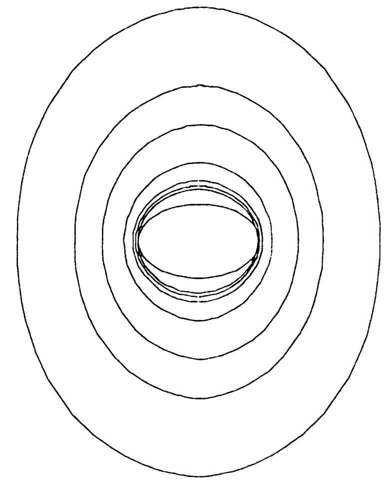
ou encore

$$(O\omega - e^{i\alpha}\omega F)\,(O\omega - e^{-i\alpha}\omega F) = a^2$$
$$|\,O\omega - e^{i\alpha}\omega F\,| = a$$

Les courbes, sauf dans le cas où α est droit, sont du quatrième degré, par exemple si $\varepsilon=-1$ on obtient

$$x^2 + y^2 + c^2 - \cos\alpha\sqrt{(x^2+y^2+2xc+c^2)(x^2+y^2-2xc+c^2)} - 2a^2 = 0$$

Voici quelques unes de ces lignes de niveau calculées pour une ellipse lorsque α appartient à l'ensemble $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}$.



Jusqu'à présent nous avons résolu le problème de l'enveloppe de l'hypoténuse de *l'équerre tournante* dans le cas où le sommet de l'angle droit avait une position très particulière (centre ou foyer de la conique). Mais que se passe-t-il lorsque ce point est quelconque? Les méthodes précédentes, et en particulier la méthode analytique, échouent à moins d'opérer un approfondissement théorique en introduisant les coordonnées tangentielles. Mais ne brûlons pas les étapes...
On va commencer par attaquer un cas particulier intéressant, celui du cercle, en mélangeant plusieurs des techniques vues au chapitre précédent.

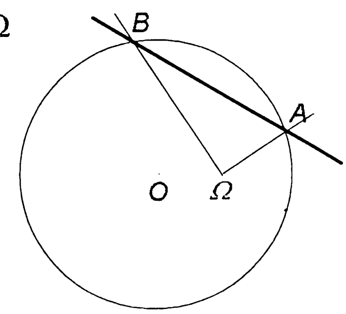
II. Au carrefour de plusieurs domaines mathématiques.

A Le cas du cercle (géométrie pure - géométrie analytique).

Etant donné un cercle (C) de centre O, de rayon 1; un point Ω tel que $O\Omega \leq 1$; A et B deux points de (C) tels que

$$(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}.$$

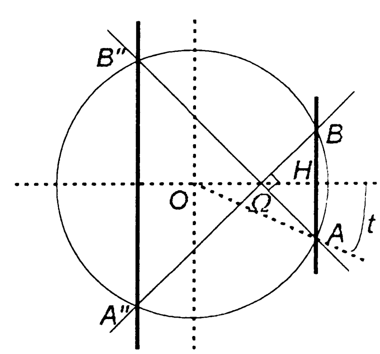
Quelle est l'enveloppe des droites (AB) ?



1.Exercices d'approche

a) L'expérience et le chapitre précédent laissant penser que l'enveloppe en question est une ellipse, nous appellerons désormais (E) cette solution conjecturée et nous allons commencer par nous intéresser aux positions particulières que peut prendre la droite (AB).
Dans toute la suite, on considère un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct, O désignant le centre du cercle (C), de sorte que Ω ait pour coordonnées[9] $(\alpha, 0)$ et $\alpha \in [0;1]$.

1^er^ cas particulier :
(AB) parallèle à l'axe des ordonnées; deux positions sont envisageables comme les indique la figure ci-contre.



Dans le triangle isocèle ΩHA rectangle en H:

$$2\ \Omega H^2 = \Omega A^2$$

La formule d'*Al-Kashi*, appliquée convenablement dans le triangle ΩOA nous permet d'écrire d'autre part :

$$\Omega A^2 = \Omega O^2 + OA^2 - 2\ OA\ \Omega O \cos t$$

où $t = (\vec{O\Omega}, \vec{OA})$

On définit : $2\ \Omega H^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos t$

Comme enfin : $\Omega H^2 = AH^2 = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, on peut affirmer que $\cos t$ est solution de l'équation : $2x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$ qui a pour discriminant (réduit) $\delta = 2 - \alpha^2$ toujours strictement positif puisque $\alpha^2 < 1$ et qui a donc deux solutions réelles distinctes $\dfrac{\alpha \pm \sqrt{2-\alpha^2}}{2}$. Il est alors aisé de vérifier que la fonction

---

[9] On pourra vérifier que les calculs des pages suivantes ne souffriraient pas de l'hypothèse $\alpha \in [-1,1]$. Le seul cas vraiment gênant est $|\alpha| = 1$.

définie par $g(x) = \dfrac{x + \varepsilon\sqrt{2-x^2}}{2}$ (avec $\varepsilon=\pm1$) est croissante sur $[0,1]$ et varie de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ à 1 pour $\varepsilon=1$ et de $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ à 0 pour $\varepsilon=-1$.

Ce qui nous autorise la conclusion suivante : il existe toujours deux solutions en t telles que

$$\cos t = \frac{\alpha \pm\sqrt{2-\alpha^2}}{2}.$$

Remarques : (1) si on prend par exemple $\alpha=\frac{1}{2}$, autrement dit si Ω est au milieu d'un rayon de (C), on obtient la valeur suivante $\cos t = \dfrac{1 \pm\sqrt{7}}{4}$ que l'on croirait sortie d'une vieille malle en osier du grenier...etc.

(2) On vient de déterminer -tout au moins on l'imagine- la position des tangentes verticales de l'ellipse (E) et par là, son centre m, dont les coordonnées sont $(\frac{\alpha}{2};0)$ (demi-somme des solutions précédentes). Le point m est donc tout simplement le milieu de $[O\,\Omega]$.

(3) Dans le cas $\alpha=1$, le point Ω appartient au cercle (C), la droite (AB) est un diamètre et contient toujours le point O qu'elle *enveloppe*.

2ème cas particulier :

(AB) parallèle à l'axe des abscisses :

Ici l'on a

$$OK^2 = \Omega K^2 - O\Omega^2 \text{ (dans le triangle } O\Omega K)$$
$$= OA^2 - AK^2 \text{ (dans le triangle } OKA)$$

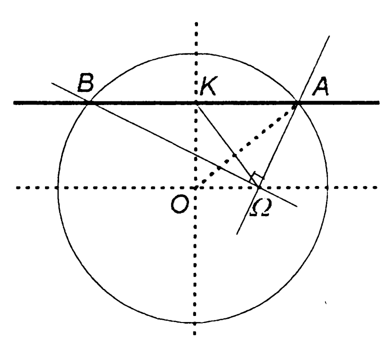
Or puisque K est le centre du cercle circonscrit au triangle $A\Omega B$, $\Omega K^2 = AK^2$

On en déduit

$$OK^2 = (OA^2 - OK^2) - O\Omega^2$$

et finalement

$$OK^2 = \frac{1-\alpha^2}{2} \text{ soit } OK = \pm\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}}$$



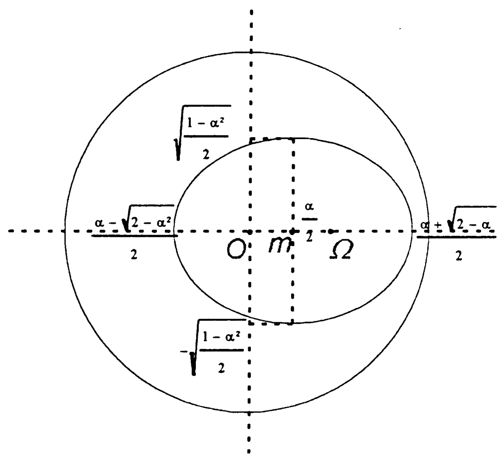
Remarques : (1) pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $OK = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ .....?

(2) On vient de déterminer ce qui sera la position des tangentes horizontales à (E), *ie* les demi-axes verticaux.

Récapitulation

(E) doit avoir pour équation cartésienne réduite :

$$\frac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{\frac{(2-\alpha^2)}{4}}+\frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}}=1$$



* On observe que les foyers sont situés en O et Ω!

En effet si l'on pose $a=\frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ et $b=\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}}$

on a bien, toujours, $a>b$ et $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\alpha}{2}$.

* cas particuliers : (1) $\alpha=0$ (*ie* Ω au centre O) l'équation devient $2x^2+2y^2=1$, c'est-à-dire celle du cercle de centre O, de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) $\alpha=\frac{1}{2}$, on obtient l'ellipse $\frac{16}{7}(x-\frac{1}{4})^2+\frac{8}{3}y^2=1$

(3) $\alpha=1$ (Ω est sur le cercle), on obtient $y=0$ et le segment $[O\Omega]$ comme ellipse aplatie. Ceci prouve la non continuité du phénomène puisque dans ce cas nous devrions trouver un point comme nous l'avons vu au numéro 3 des remarques de la page précédente.

b) Le problème posé n'a pas manqué de nous renvoyer à nos classiques. Notre problème revient à résoudre les exercices suivants:

Exercice 1

« Etant donné un cercle $C(O;1)$, Ω un point du plan tel que $O\Omega<1$, (Δ) et (D) deux droites perpendiculaires en Ω coupant C, respectivement en A, A', et B, B'

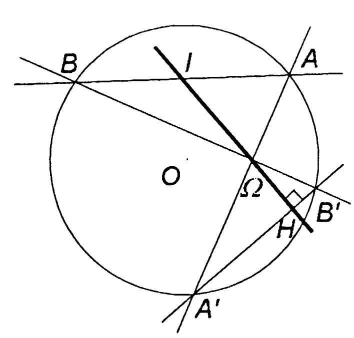
(on peut bien sûr choisir $(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B})=\frac{\pi}{2}$).

Démontrer que la médiane du triangle ΩAB issue de Ω est la hauteur du triangle $\Omega A'B'$. »

Cet exercice se résout très bien à l'aide du produit scalaire ou celle de notion de puissance par rapport à un cercle (ce qui revient au même).

En effet on pourra écrire:

$$\vec{\Omega I}=\frac{1}{2}(\vec{\Omega A}+\vec{\Omega B})$$



puis

$$\begin{aligned}\vec{\Omega I}.\vec{A'B'}&=\frac{1}{2}(\vec{\Omega A}+\vec{\Omega B}).(\vec{\Omega B'}-\vec{\Omega A'})\\&=\frac{1}{2}(\vec{\Omega B}.\vec{\Omega B'}-\vec{\Omega A}.\vec{\Omega A'})\\&=0\end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega B}.\overrightarrow{\Omega B'} = \alpha^2-1$, invariant qu'on appelle puissance du point Ω par rapport au cercle C.

Exercice 2

Avec les mêmes hypothèses que celles de l'exercice 1 démontrer que le lieu du point I milieu de $[AB]$ quand le point A parcourt le cercle C est le cercle de centre m milieu de $[O\Omega]$ et de rayon $r=\dfrac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$. Quel est le lieu de H projeté orthogonal de Ω sur $[AB]$?

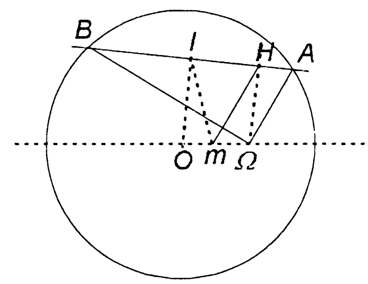
Ceci est une application reconnue de la leçon sur les *lignes de niveaux*.
On écrit que I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si il est le pied de la médiatrice de $[AB]$ et donc

$$I \text{ milieu de } [AB] \text{ si et seulement si } \quad OI^2+ IA^2 = 1$$

On a même (de façon un peu redondante)

$$I \text{ milieu de } [AB] \text{ si et seulement si } \ (*)\begin{cases} OI^2+ IA^2 = 1 \\ \Omega I= \Omega A \end{cases}$$

Par la formule de la médiane dans le triangle $OI\Omega$ (qui est ici une identité) on a encore



$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} OI^2+ IA^2 = 1 \\ \Omega I= \Omega A \\ 4\, mI^2+O\Omega^2=2(OI^2+I\Omega^2) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} OI^2+ IA^2 = 1 \\ 4\, mI^2+O\Omega^2=2(OI^2+AI^2) \end{cases}$$

(Dans le sens direct, c'est évident, et pour revenir en arrière à $\Omega I= \Omega A$, il suffit de comparer la seconde équation du système à l'identité de la médiane.)

Finalement

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} OI^2+ IA^2 = 1 \\ 4\, mI^2+O\Omega^2=2 \end{cases}$$

et donc en éliminant la première équation par la même technique que précédemment :

$$(*) \Leftrightarrow 4\, mI^2+O\Omega^2=2$$

$$(*) \Leftrightarrow mI^2=\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2-\alpha^2}{4}$$

Le lieu du point I est donc le cercle γ de centre m et de rayon $\dfrac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$

<u>Remarque</u> : Si l'on se souvient qu'en a) l'équation $2x^2-2\alpha x+\alpha^2-1=0$ avait pour solutions $\dfrac{\alpha \pm\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ on peut deviner que γ est le cercle principal de l'ellipse (E).

De la même façon, H est le pied de la hauteur du triangle rectangle ΩAB si et seulement si

$$(**)\ H\Omega^2= - \overline{HA}.\overline{HB}$$

$$(**)\ \Leftrightarrow H\Omega^2= \mathscr{P}_{\Gamma}(H) = -(\,OH^2-1)$$

($\mathscr{P}_{\Gamma}(H)$ désigne la puissance du point H par rapport à Γ).

En utilisant l'égalité de la médiane dans le triangle $OH\Omega$ on a

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} H\Omega^2 = 1 - OH^2 \\ 4\, mH^2 + O\Omega^2 = 2(OH^2 + H\Omega^2) \end{cases}$$

Finalement

$$(**) \Leftrightarrow 4\, mH^2 + O\Omega^2 = 2$$

Le lieu du point[10] H est donc aussi le cercle γ.

2. Résolution du problème initial

a) Equation de (AB)

Pour résoudre analytiquement un tel problème d'enveloppes de droites, il nous faut une équation paramétrée de la droite variable (AB). Or si l'on procède de façon triviale en cherchant les coordonnées de A et B -surtout de B- en fonction par exemple de $u = (\vec{i}\,;\ \vec{OA})$, on obtient des calculs qui décourageraient le plus opiniâtre.

Mais la chance nous sourit avec le point H qui est sur (AB) et dont les coordonnées, comme nous l'avons vu à l'exercice 2 du paragraphe précédent, sont de la forme $\begin{pmatrix} r\cos\theta + \frac{\alpha}{2} \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$.

où $\theta = (\vec{i}\,;\ \vec{mH})$ et $r = \dfrac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$

On en déduit que $\vec{\Omega H}\begin{pmatrix} r\cos\theta - \frac{\alpha}{2} \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$, vecteur orthogonal à (AB) et donc qu'une équation de (AB) prend les formes suivantes :

$$(r\cos\theta - \frac{\alpha}{2})(r\cos\theta + \frac{\alpha}{2} - x) + (r\sin\theta)(r\sin\theta - y) = 0$$

$$x\,(r\cos\theta - \frac{\alpha}{2}) + y\,(r\sin\theta) = r^2 - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$x\,(r\cos\theta - \frac{\alpha}{2}) + y\,(r\sin\theta) = \frac{1-\alpha^2}{2}$$

Cette dernière équation est du type $x.\lambda(\theta) + y.\mu(\theta) = \gamma(\theta)$, la fonction γ ne dépendant pas de θ.

b) Solution analytique.

On considère le système

$$(\Sigma)\begin{cases} x\lambda(\theta) + y\,\mu(\theta) = \gamma(\theta) \\ x\lambda'\theta + y\,\mu'(\theta) = \gamma'(\theta) \end{cases}$$

ici

[10] On peut donner une démonstration encore plus élémentaire: En effet, les droites (OI) et (AB) sont perpendiculaires (propriété de médiatrice), tout comme $(\Omega I')$ et (AB) (exercice 1). Les droites $(\Omega I')$ et (OI) sont donc parallèles tout comme (ΩI) et (OI'). Le quadrilatère $(OI\Omega I')$ est donc un parallélogramme; dans ce cas, m, le milieu de $[O\Omega]$ devient le milieu de $[II']$. $[II']$ devient un diamètre de γ et puisque H (ou H') est tel que IHI' est rectangle en H (ou H'), on a bien H sur le cercle γ.
Réciproquement si H est un point du cercle γ, on trace la perpendiculaire à (ΩH) passant par H. Elle coupe le cercle initial en A et B, et recoupe le cercle γ en I (éventuellement confondu avec H). Le point I est d'après la réciproque de l'exercice précédent le milieu de l'hypoténuse du triangle ΩAB qui est nécessairement rectangle. Ceci reconstruit parfaitement le problème.

$$(\Sigma)\begin{cases} x\,(r\cos\theta - \dfrac{\alpha}{2}) + y\,(r\sin\theta) = \dfrac{1-\alpha^2}{2} \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases}$$

qui donne les coordonnées du point caractéristique M (de la courbe (E)) en fonction de θ.

On note que le déterminant du système (Σ) est $\Delta = \dfrac{r}{2}(2\,r - \alpha\cos\theta)$ et que ce réel n'est jamais nul sauf[11] pour $\begin{cases} \alpha = 1 \\ r = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$ (En effet $\left.\begin{matrix} 2r = \sqrt{2-\alpha^2} > 1 \\ |\,\alpha\cos\theta\,| < 1 \end{matrix}\right\}$ pour $\alpha \in [0,1[$).

On peut alors écrire le couple solution : $\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \dfrac{1-\alpha^2}{2\,r - \alpha\cos\theta} \\ y(\theta) = \sin\theta \dfrac{1-\alpha^2}{2\,r - \alpha\cos\theta} \end{cases}$

et ensuite la norme du vecteur $\vec{OM}$: $\rho(\theta) = \dfrac{1-\alpha^2}{2\,r - \alpha\cos\theta}$

(en insistant sur le fait que d'après la remarque précédente $2\,r - \alpha\cos\theta > 0$)

On reconnaît l'équation polaire[12] d'une ellipse dont un des foyers est l'origine du repère (ici O) de référence et dont l'excentricité est $e = \dfrac{\alpha}{2r}$.

Remarque : On peut éviter le passage aux coordonnées polaires en reprenant l'équation trouvée au paragraphe récapitulation du a).

$$\frac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{\frac{(2-\alpha^2)}{4}} + \frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = 1$$

pour vérifier que $x(\theta)$ et $y(\theta)$ vérifient cette équation quel que soit le réel θ, par exemple comme suit

$$\frac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{r^2} = \frac{(2\,r\cos\theta - \alpha)^2}{(2\,r - \alpha\cos\theta)^2} \qquad \text{et} \quad \frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = \frac{2(1-\alpha)^2\sin^2\theta}{(2\,r - \alpha\cos\theta)^2}$$

et $(2\,r - \alpha\cos\theta)^2 - (2\,r\cos\theta - \alpha)^2 = (2\,r - \alpha)(1+\cos\theta)\,(2\,r + \alpha)(1-\cos\theta) = 2\,(1-\alpha^2)\sin^2\theta$
car $4r^2 = 2 - \alpha^2$...

c) Où l'on retrouve un peu de géométrie.

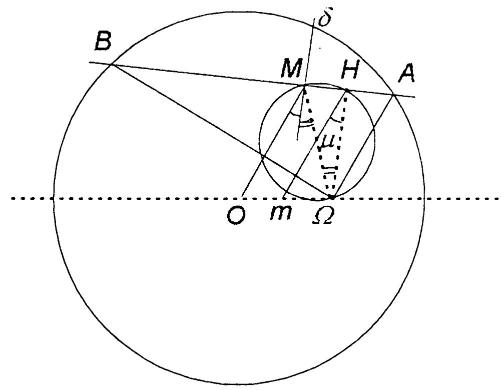
On peut en effet éviter ce calcul cartésien et procéder -disons- plus géométriquement. Mais pour ce faire il faut interpréter les équations qui nous ont permis de résoudre le système (Σ); la deuxième équation de (Σ) est celle d'une droite parallèle à (mH) (dont un vecteur directeur est bien $\vec{u}(\cos\theta, \sin\theta)$ et passant par O, ce qui nous permet d'affirmer que le point caractéristique M est à l'intersection de (AB) et de la parallèle à (mH) passant par O (d'où une construction géométrique!)

---

[11] Nous laissons au lecteur concentré le plaisir de juger cette situation critique.

[12] L'équation en polaire d'une conique dont un foyer est O est de la forme $\rho = \dfrac{ed}{1 \pm e\cos(\theta)}$ avec d qui représente la distance de O à la directrice associée au foyer (cf chapitre I).

Considérons la droite (δ), perpendiculaire à (AB) et passant par M. Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{M\delta}$.



On a bien $(OM) // (mH)$ et $(\delta) // (\Omega H)$, donc:

(1) $(\vec{MO}, \vec{M\delta}) = (\vec{Hm}, \vec{H\Omega})$ $[\pi]$
(angles correspondants)

et

(2) $(\vec{M\delta}, \vec{M\Omega}) = (\vec{\Omega H}, \vec{\Omega M})$ $[\pi]$
(angles alternes internes)

De plus, dans le triangle $O\Omega M$, la droite (mH) projette le milieu m de $[O\Omega]$ sur le milieu μ de $[\Omega M]$, centre du cercle circonscrit au triangle ΩMH rectangle en H.
On en déduit l'égalité

$$(3)\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega H}) = (\vec{H\Omega}, \vec{Hm})\ [\pi]$$

(triangle isocèle $\mu\Omega H$)

Les égalités (1) (2) (3) nous permettent d'écrire

$$(\vec{MO}, \vec{M\delta}) = (\vec{M\delta}, \vec{M\Omega})\ [\pi]$$

La droite δ est donc bissectrice de $(\vec{MO}, \vec{M\Omega})$ et par suite (AB) est aussi l'une des bissectrices du même angle. La droite (AB) ne coupant[13] pas le segment $[O\Omega]$, on conclut que δ est la bissectrice intérieure de $(\vec{MO}, \vec{M\Omega})$.

On se propose enfin de montrer que la fonction : $\phi : \theta \to OM(\theta) + \Omega M(\theta)$ est constante.

Rappel : Soit $\vec{\varphi}$ une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur I, alors la fonction f: $\theta \to \| \vec{\varphi}(\theta) \|$ est dérivable sur I et $f'(\theta) = \dfrac{\vec{\varphi}.\vec{\varphi}'}{\| \vec{\varphi} \|}$.

En effet, pour tout θ fixé la fonction $\vec{\varphi}$ admet un développement limité à l'ordre 1 au point θ $\varphi(\theta+h) = \varphi(\theta) + h\vec{\varphi}'(\theta) + o(h)$, que l'on peut développer selon le carré scalaire pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(\theta+h) &= \sqrt{\vec{\varphi}(\theta+h).\vec{\varphi}(\theta+h)} = \sqrt{[\vec{\varphi}(\theta) + h\vec{\varphi}'(\theta) + o(h)]^2} \\ &= \sqrt{[\vec{\varphi}^2(\theta) + 2h\vec{\varphi}(\theta).\vec{\varphi}'(\theta) + o(h)]} \\ &= \sqrt{\vec{\varphi}^2(\theta))}\sqrt{1 + \frac{2h\vec{\varphi}(\theta).\vec{\varphi}'(\theta)}{\vec{\varphi}^2(\theta)} + o(h)} \\ &= \| \vec{\varphi}(\theta) \| (1 + \frac{h\vec{\varphi}(\theta).\vec{\varphi}'(\theta)}{\vec{\varphi}^2(\theta)} + o(h)) \end{aligned}$$

(en utilisant un développement de la racine)

Ainsi

$$f(\theta+h) = \| \vec{\varphi}(\theta) \| + \frac{h\vec{\varphi}(\theta).\vec{\varphi}'(\theta)}{\| \vec{\varphi}(\theta) \|} + o(h)$$

[13] Il suffit de faire y=0 dans l'équation de (AB).

Comme $f(\theta+h) = f(\theta) + \dfrac{h\,\vec{\varphi}(\theta).\vec{\varphi}'(\theta)}{\|\vec{\varphi}(\theta)\|} + o(h)$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en θ et est donc dérivable en θ, pour tout réel θ, c'est-à-dire dérivable sur I.
La fonction $\theta \to \vec{OM}(\theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, la fonction $\phi_1 : \theta \to OM(\theta)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et a comme dérivée $\phi_1'(\theta) = \dfrac{\vec{OM}(\theta).\vec{OM}'(\theta)}{OM(\theta)}$

On a le même résultat avec la fonction $\phi_2 : \theta \to \Omega M(\theta)$ $\phi_2'(\theta) = \dfrac{\vec{\Omega M}(\theta).\vec{OM}'(\theta)}{\Omega M(\theta)}$, si l'on a remarqué que $\vec{OM}$ et $\vec{\Omega M}$ avait la même dérivée $\vec{OM}'(\theta)$ puisque $\vec{\Omega M} = \vec{\Omega O} + \vec{OM}$.

Appelons $\vec{u}$ (resp $\vec{v}$) le vecteur $\dfrac{\vec{OM}(\theta)}{OM(\theta)}$ unitaire (resp $\dfrac{\vec{\Omega M}(\theta)}{\Omega M(\theta)}$). Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dirige la bissectrice intérieure de $(\vec{MO}, \vec{M\Omega})$ alors que par définition de l'enveloppe, en tout point régulier $\vec{OM}'(\theta)$ dirige (AB). Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{OM}'(\theta)$ sont donc orthogonaux et

$$\phi'(\theta) = \phi_1'(\theta) + \phi_2'(\theta) = \frac{\vec{OM}(\theta).\vec{OM}'(\theta)}{OM(\theta)} + \frac{\vec{\Omega M}(\theta).\vec{OM}'(\theta)}{\Omega M(\theta)} = (\vec{u} + \vec{v}).\vec{OM}'(\theta) = 0$$

On a ainsi pour tout réel θ, $OM(\theta) + \Omega M(\theta) = C^{te}$, c'est-à-dire que le point M appartient à une ellipse de foyers O et Ω.

B. Coordonnées tangentielles (analytique - algébrique).
Lorsque le système qui permet de déterminer le point caractéristique conduit à des calculs difficiles, le problème se complique. Il est alors préférable de *faire un pas de côté* c'est-à-dire de ne pas rechercher directement l'enveloppe par une équation cartésienne, mais de se donner une droite (AB) et d'étudier à quelle condition elle est tangente à la courbe recherchée.

a) Définition
Définition: On appelle *équation tangentielle* d'une courbe (algébrique) Γ, une condition nécessaire et suffisante portant sur le triplet (u, v, w), permettant de déterminer si la droite d'équation $ux+vy+w=0$ est tangente à Γ.

On remarque que dans cette définition le triplet (u, v, w) est défini à un coefficient de proportionnalité près, et que les réels u et v ne sont pas tous nuls.

b) Exemples
- Equation tangentielle d'un cercle (C) de centre O et de rayon R ($R>0$) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
  La droite Δ : $ux+vy+w=0$ est tangente à Γ si et seulement si $d(O,\Delta) = R$.
  Cette équation équivaut encore à $\dfrac{|w|}{\sqrt{u^2+v^2}} = R$
  Une équation tangentielle de ce cercle est donc $R^2(u^2+v^2) - w^2 = 0$
- Equation tangentielle d'une ellipse (E) de centre O et d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
  La droite Δ : $ux+vy+w=0$ est tangente à (E) si et seulement si il existe $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ tel que
  $$\begin{cases} ux_0 + vy_0 + w = 0 \\ \mathrm{rg}((u, v, w), (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, -1)) \leq 1 \end{cases}$$

Si nous remarquons que w n'est pas nul, ce système est encore équivalent à la proposition suivante:

$$\text{il existe } M_0\,(x_0,y_0) \in (E) \text{ tel que } \begin{cases} x_0=-ua^2w^{-1} \\ y_0=-vb^2w^{-1} \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Ce qui est encore équivalent (en éliminant x_0 et y_0) à l'équation

$$u^2\,a^2+v^2\,b^2=w^2$$

Réciproquement il est facile de voir que toute courbe dont l'équation tangentielle serait

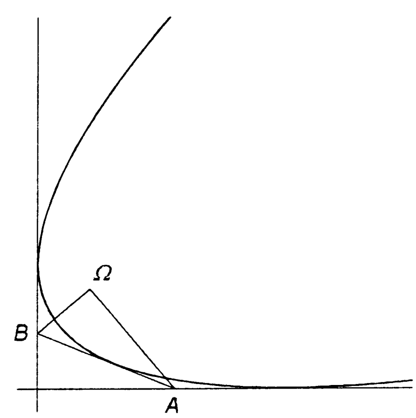
$$u^2a^2+v^2\,b^2=w^2$$

est une ellipse de centre O et de paramètres a et b.

On trouverait un résultat analogue pour les hyperboles.

c) Exercice

Au chapitre précédent, nous avons cherché l'enveloppe de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ΩAB quand les sommets A et B s'appuient sur les axes orthogonaux du repère. Pour traiter le même exercice en coordonnées tangentielles, on pose *a priori* une équation de la droite (AB): $ux+vy+w=0$.
On suppose que Ω a pour coordonnées (a, b) avec $a^2+b^2=1$.



Comme les coordonnées des points A et B sont alors $x_A=\dfrac{-w}{u}$ $y_A=0$, $x_B=0$ $y_B=\dfrac{-w}{v}$, on peut écrire que la droite d'équation $ux+vy+w=0$ est solution si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont orthogonaux.

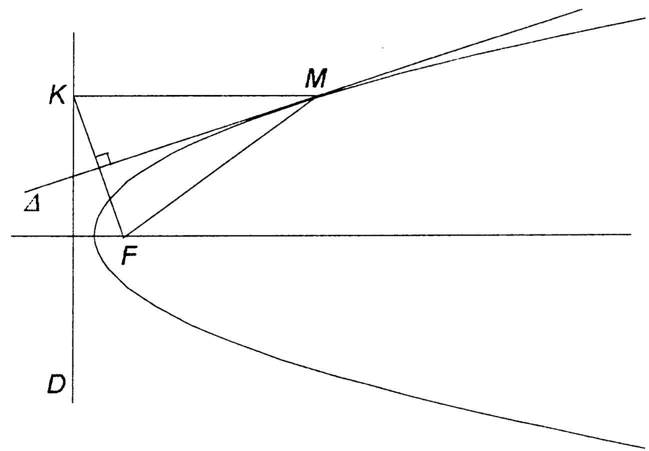
Comme $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega B}=(a+\dfrac{w}{u})\,a+(b+\dfrac{w}{v})\,b$, une équation tangentielle du lieu recherché est

$$uw+awv+bwu=0.$$

Si nous ne savions pas déjà, grâce à l'étude précédente que ce lieu est une parabole, un peu de savoir sur les catégories d'équations tangentielles reste nécessaire. On aurait envie d'écrire que ce lieu est une conique puisqu'il correspond à une équation du second degré. Cette étude sera faite en liaison avec l'algèbre dans le prochain chapitre, ne brûlons pas les étapes...
Pour l'instant bornons nous à remarquer ce qui se passe quand la situation est symétrique, c'est-à-dire lorsque le point Ω est sur la première bissectrice du repère.

Donnons d'abord une condition *géométrique* pour qu'une droite Δ soit tangente à une parabole de foyer F et de directrice D, c'est-à-dire une *équation tangentielle non analytique*.

Proposition : La droite Δ est tangente à la parabole de foyer F et de directrice D si et seulement si le symétrique du foyer par rapport à Δ appartient à la directrice D.

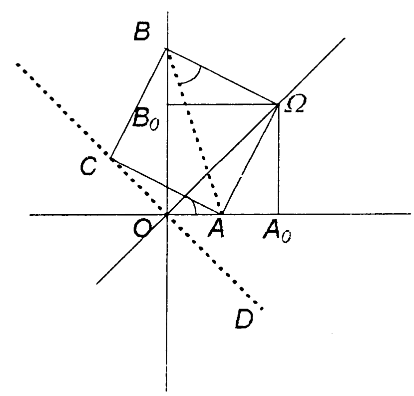


En effet le sens direct est immédiat si l'on se souvient que la tangente en un point M de la parabole est la médiatrice du segment $[KF]$ (K désignant le projeté orthogonal de M sur la directrice).

Réciproquement si par une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ le point F est transformé en K de la directrice D, on peut remarquer que Δ ne peut être parallèle à l'axe de symétrie de la conique. La parallèle à cet axe menée par K et la droite Δ sont donc sécantes en un point M qui appartient à la parabole. La droite Δ est donc la tangente en M à cette parabole.

Supposons que le point Ω se projette orthogonalement sur les axes en A_0 et B_0 (avec A_0 dans le demi plan défini par les abscisses positives). Soit Δ une droite du plan qui coupe les axes en A et B. Construisons le parallélogramme $A\Omega BC$.

Proposition : Le triangle $A\Omega B$ est rectangle en Ω si et seulement si le quadrilatère $A\Omega BC$ est un carré.



Seul le sens direct de cette proposition mérite attention. Si l'angle en Ω est droit, le quadrilatère $A\Omega BO$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. L'angle $(BA, B\Omega)$ est donc égal à $(OA, O\Omega)$ donc à $\frac{\pi}{4}$ à π près, et le rectangle $A\Omega BC$ est un carré.

Il existe une similitude directe **s** de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ qui transforme A_0 en O. Le parallélogramme $A\Omega BC$ est un carré si et seulement si le point C est l'image de A par **s**.

Or l'image de (OA_0) par **s** est la droite qui fait un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses et qui contient l'image de A_0, O, c'est-à-dire que **s**$((OA_0))$ la seconde bissectrice du repère D.

Si le point C est l'image de A il appartient donc à D. Réciproquement puisque **s** est bijective tout point de D est l'image d'un point de l'axe des abscisses autour duquel le problème peut être reconstruit.

Finalement, le triangle $A\Omega B$ est rectangle en Ω si et seulement si le point C appartient à la seconde bissectrice du repère. La droite (AB) enveloppe donc la parabole de foyer Ω et de directrice D.

2. Cordes vues du centre

Considérons (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne. : $ux+vy-w=0$, qui admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=vt \\ y=-ut-\lambda \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $\lambda=-\dfrac{w}{v}$.

Ainsi

$$M\in(\Delta)\cap(E)\Leftrightarrow\begin{cases} x=vt \\ y=-ut-\lambda \\ \dfrac{(vt)^2}{a^2}+\dfrac{(ut+\lambda)^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

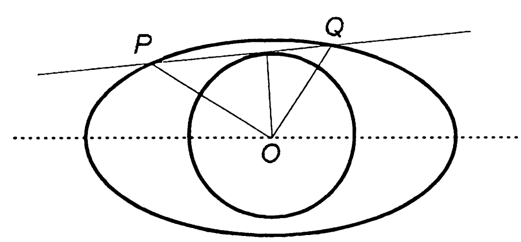
$$M\in(\Delta)\cap(E)\Leftrightarrow\begin{cases} x=vt \\ y=-ut-\lambda \\ t^2\left(\dfrac{v^2}{a^2}+\dfrac{u^2}{b^2}\right)+2t\dfrac{u\lambda}{b^2}+\dfrac{\lambda^2}{b^2}-1=0 \quad (*) \end{cases}$$

Soient P et Q les points de (E) de paramètres t_1 et t_2 solutions de l'équation (*).

En utilisant $t_1.t_2=\dfrac{\dfrac{\lambda^2}{b^2}-1}{\dfrac{u^2}{b^2}+\dfrac{v^2}{a^2}}$ et $t_1+t_2=\dfrac{-\dfrac{2u\lambda}{b^2}}{\dfrac{u^2}{b^2}+\dfrac{v^2}{a^2}}$,

$$\begin{aligned}\vec{OP}.\vec{OQ}=0 &\Leftrightarrow vt_1.vt_2+(-ut_1-\lambda)(-ut_2-\lambda)=0\\ &\Leftrightarrow (u^2+v^2)t_1t_2+\lambda u(t_1+t_2)+\lambda^2=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(u^2+v^2)\left(\dfrac{\lambda^2}{b^2}-1\right)}{\dfrac{u^2}{b^2}+\dfrac{v^2}{a^2}}+\frac{\lambda u\left(-\dfrac{2u\lambda}{b^2}\right)}{\dfrac{u^2}{b^2}+\dfrac{v^2}{a^2}}+\lambda^2=0\\ &\Leftrightarrow w^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)=u^2+v^2\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'un cercle centre O et de rayon $R=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ qui est donc l'ensemble recherché.



3. Utilisation d'un logiciel de calcul formel (Maple)

On se donne l'équation de l'ellipse (dont la forme correspondante est stockée dans E1) et une équation générique de l'hypoténuse du triangle rectangle (D) (stockée dans Ed). On prend le sommet de l'angle droit $\Omega(\alpha,\beta)$ sur l'ellipse.

```
> E1:=(x-alpha)^2/a^2+(y-beta)^2/b^2-1;
```

$$E1:=\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-1$$

```
> Ed:=u*x+v*y+w;
```

$$Ed:=ux+vy+w$$

La recherche des intersections entre la conique et la droite, menée grâce à *solve({E1,Ed},{x,y}):* ne renvoie bien entendu rien d'intéressant. Le logiciel utilise les racines d'un polynôme du second degré pour donner les résultats. L'emploi du logiciel ne dispense donc pas de réfléchir un peu. Si l'on appelle x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersections P et Q sur lesquels on peut travailler bien que ne possédant pas leurs expressions exactes (c'est de l'algèbre!), il est facile de voir que le produit scalaire $\vec{\Omega P}.\vec{\Omega Q}$ qui est une fonction symétrique de x_1 et x_2 peut s'exprimer simplement en fonction de leur somme et leur produit.

```
>PS:=factor(x1*x2+solve(subs(x=x1,Ed),y)*solve(subs(x=x2,Ed),y));
```

$$PS := \frac{(x_1x_2v^2 + x_1x_2u^2 + ux_1w + ux_2w + w^2)}{v^2}$$

On ordonne et l'on exprime en fonction de la somme et du produit.

```
>PS1:=collect(PS,[u,w]):
>PS2:=simplify(PS1,[x1+x2=s,x1*x2=p]);
```

$$PS_2 := \frac{wus+w^2+(u^2+v^2)p}{v^2}$$

Pour avoir la somme et le produit, il faut écrire l'équation T du second degré dont x_1 et x_2 sont les racines.

```
>T:=subs(y=solve(Ed,y),E1):
>s:=-factor(coeff(T,x,1)/coeff(T,x,2)):
>p:=factor(coeff(T,x,0)/coeff(T,x,2)):
>PS3:=factor(PS2);
```

On vient de calculer explicitement la somme et le produit des racines en fonction des coefficients de T, pour trouver le produit scalaire. Une dernière simplification s'impose, il faut écrire que le point Ω appartient à l'ellipse.

```
>PS4:=subs(alpha^2=a^2*(1-beta^2/b^2),PS3);
```

La condition recherchée est le numérateur de ce dernier calcul.

```
>Condi:= simplify(numer(PS4)):
```

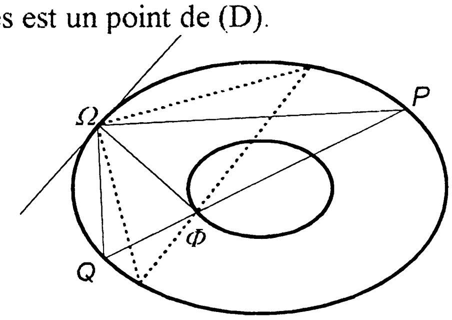
On trouve finalement l'équation tangentielle recherchée:

$$2\beta a^2v+ wa^2+2\alpha b^2u+wb^2= 0$$

On remarque ainsi que le point Φ de coordonnées suivantes est un point de (D).

$$x:= 2\frac{\alpha b^2}{b^2+a^2}$$

$$y:= 2\frac{\beta a^2}{b^2+a^2}$$



Quels que soient les points P et Q de l'ellipse tels que les droites (AP) et (AQ) soient perpendiculaires, les droites (PQ) contiennent toutes un même point, ce point est donc l'unique point de l'ensemble recherché.

On remarque encore que les coordonnées du point Φ vérifient:

$$\frac{(b^2+a^2)^2}{4b^4a^2}x^2+\frac{(b^2+a^2)^2}{4a^4b^2}y^2=1$$

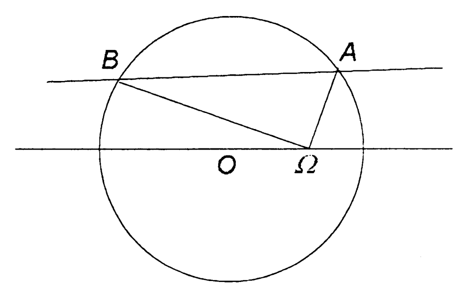
et donc, si Ω décrit l'ellipse, le point Φ décrit lui aussi une ellipse.

Remarque:
Dans le cas du cercle, si les cordes $[PQ]$ sont vues d'un point M du cercle sous un angle droit alors $[PQ]$ est un diamètre et toutes les droites (PQ) contiennent le point O. L'ensemble recherché est alors le point O.

Nous n'avons pas donné, pour ne pas surcharger le travail du copiste (ou du lecteur) les expressions explicites des calculs effectués formellement. Cet exemple illustre bien sûr l'intérêt de tels logiciels mais il montre aussi combien il serait erroné de croire que la machine pourrait pallier un défaut d'analyse ou de méthode. Pour que cela se passe bien il nous a fallu utiliser la méthode tangentielle et une démarche plus algébrique qu'analytique, nous avons donc dépassé le niveau de l'utilisateur aveugle. Nous verrons, au chapitre suivant, que nous pourrons nous passer de ce genre de calculs quand le contenu algébrique de ces concepts aura été développé et qu'il aura pris une signification géométrique grâce aux méthodes de polarité inverse.

4. Retour sur le cas du cercle

Nous avons vu, au début de ce chapitre (page 16), que désaxer le centre de l'équerre tournante, compliquait les calculs, même dans le cas où la conique extérieure est un cercle. Nous avons résolu le problème grâce à une paramétrisation judicieuse du milieu de l'hypoténuse. Nous allons donc traiter ce même problème par la méthode tangentielle qui s'applique ici avec profit.



Les points A et B intersection de l'hypoténuse et du cercle sont définis par le système

$$\begin{cases} ux+vy+w = 0 \\ (x+\alpha)^2 + y^2=1 \end{cases}$$

Après élimination des ordonnées, ce système conduit à l'équation quadratique

$$x^2(1+\frac{u^2}{v^2}) +2x\,(\alpha+\frac{uw}{v^2}) +\alpha^2-1+\frac{w^2}{v^2} = 0$$

Comme au paragraphe précédent, si l'on appelle s et p la somme et le produit des racines de cette équation, on a

$$\vec{\Omega A}.\vec{\Omega B} = \frac{wus+w^2+(u^2+v^2)p}{v^2}$$

donc

$$\vec{\Omega A}.\vec{\Omega B} = \frac{-2wu(\alpha+\frac{uw}{v^2})(1+\frac{u^2}{v^2})^{-1}+w^2+(u^2+v^2)\,(\alpha^2-1+\frac{w^2}{v^2})(1+\frac{u^2}{v^2})^{-1}}{v^2}$$

$$\vec{\Omega A}.\vec{\Omega B} = \frac{-2wu(\alpha+\frac{uw}{v^2}) +w^2(1+\frac{u^2}{v^2})+(u^2+v^2)\,(\alpha^2-1+\frac{w^2}{v^2})}{u^2+v^2}$$

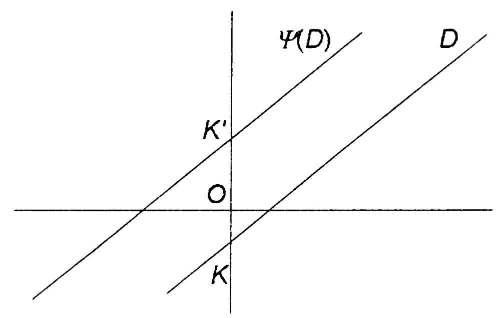
Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ΩAB soit rectangle est donc (après simplifications)

$$(u^2+v^2)(\alpha^2-1)+2\,w(w-u\alpha)= 0.$$

Mais comme cette équation tangentielle n'a pas encore été répertoriée, il nous faut produire encore un peu de travail avant de conclure.

Soit l'application qui à la droite définie par le triplet (u,v,w) associe la droite définie par le nouveau triplet $(u,v,\ u\frac{\alpha}{2} + w)$. Au départ comme à l'arrivée les coefficients u et v de x et y ne peuvent s'annuler en même temps, et de plus cette relation est définie à un coefficient de proportionnalité près.

Nous avons donc bien une application Ψ définie sur l'ensemble des droites. Toute droite D est parallèle à son image $\Psi(D)$. L'intersection K de D avec l'axe des ordonnées est d'abscisse $-\frac{w}{v}$ sur cet axe. L'intersection K' de $\Psi(D)$ avec l'axe des ordonnées est d'abscisse $-\frac{w}{v} - \frac{u\alpha}{2v}$ sur cet axe.



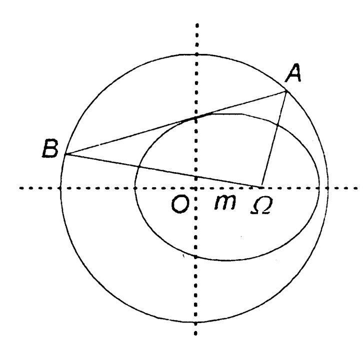
On a $\overline{KK'} = -\frac{u\alpha}{2v}$ et donc $\Psi(D)$ s'obtient par une translation de vecteur $-\frac{u\alpha}{2v}\vec{j}$ ou encore $-\frac{\alpha}{2}\vec{i}$ à partir de D.

Comme par la transformation précédente, l'équation tangentielle devient

$$u^2\left(\frac{2-\alpha^2}{4}\right) + u^2\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) - w^2 = 0$$

que l'on reconnaît comme équation d'une ellipse de paramètres $a^2 = \frac{2-\alpha^2}{4}$ et $b^2 = \frac{1-\alpha^2}{2}$ et centrée au centre du repère[14].

Notre précédente équation est donc celle d'une ellipse de centre m le milieu de $[O\Omega]$ et possédant les mêmes paramètres. Nous avons donc bien retrouvé la même ellipse que par la méthode du début du chapitre.



Il semble toutefois difficile d'envisager de faire systématiquement ce genre de considérations pour pouvoir se ramener à des formes tangentielles connues. Nous allons étudier dans le prochain chapitre, un peu de théorie qui nous permettra d'éviter ce genre d'écueil.

[14] Ces calculs ont déjà été faits à la page 18.

III Une étape supplémentaire vers l'abstraction

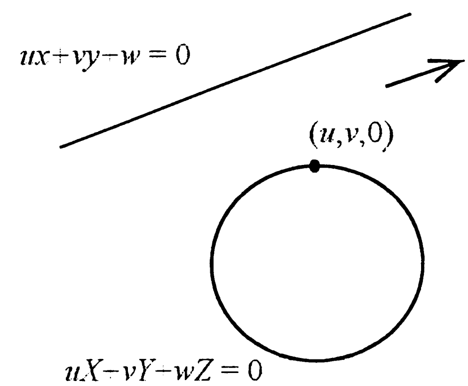
A Théorie algébrique

Il serait préférable d'exposer la théorie des espaces projectifs et de leurs complexifiés dans la plus grande généralité. Nous avons fait ici le choix de travailler en dimension 2 et de tout ramener (en fixant un repère) à $\mathbb{R}^2$. Ce parti pris n'est pas intrinsèque mais facilite et accélère la présentation de ces notions. Nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ces rudiments aux manuels généraux de géométrie indiqués dans la bibliographie.

1. Espace projectif.

a. Définition

Nous entendons par plan projectif $\tilde{P}$ la réunion du plan affine P usuel avec un nouvel ensemble ∞_P que l'on appelle droite à l'infini. Un repère ayant été choisi, à tout point M de P de coordonnées (x,y) on associe un triplet (X,Y,T) (avec $T \neq 0$) tel que $X=Tx$ et $Y=Ty$. On fabrique alors la droite à l'infini ∞_P en considérant toutes les directions de P.
A une direction (u,v) $(u^2+v^2 \neq 0)$ on associe un triplet $(U,V,0)$ tel que $U=\lambda\ u$ et $V=\lambda\ v$ (en remarquant que cette définition est indépendante du choix du couple (u,v) qui représente la direction).



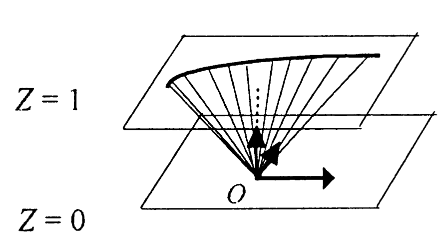
On définit ainsi une bijection de l'espace $P \cup \infty_P$ sur l'espace $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ quotienté par la relation de proportionnalité.

A toute courbe (algébrique) affine d'équation $f(x,y)=0$ (avec f une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) on peut associer l'ensemble des points de $P \cup \infty_P$ de coordonnées (X,Y,T) telles que

$$F(X,Y,T)= T^n f(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T})=0$$

L'entier n non nul est choisi de manière « convenable », ce qui risque toutefois de rajouter parfois la droite à l'infini d'équation $T=0$, comme solution étrangère.
Réciproquement, à toute courbe algébrique de $P \cup \infty_P$ (c'est-à-dire tout ensemble d'équation $F(X,Y,T)=0$, avec F un polynôme homogène des trois variables) on peut faire correspondre une courbe affine en posant $x=X$, $y=Y$ et $T=1$.

Remarque :
Une autre présentation consiste à immerger le plan que l'on étudie dans l'espace, à la place du plan $Z=1$. Les éléments du plan projectif sont alors les droites de l'espace contenant l'origine. A toute droite de l'espace passant par l'origine et non parallèle au plan horizontal correspond une unique intersection dans le plan d'équation $Z=1$ (et vice verçà). Les points de la droite à



l'infini correspondent aux droites incluses dans le plan d'équation $Z=0$. A toute courbe affine tracée dans ce plan va correspondre une surface conique réalisant ainsi l'application qui à la courbe d'équation $f(x,y)=0$ associe la surface $F(X,Y,Z)=0$.

b. Exemples:

α) Une droite du plan affine D correspond, comme on l'a dit, à la réunion $\widetilde{D} = D \cup \infty_D$ de la droite et du point à l'infini constitué par sa direction. Si une équation cartésienne de D est $ux+vy+w = 0$ $(u^2+v^2 \neq 0)$, on obtient la courbe correspondante de $\widetilde{P}$ en considérant l'équation

$$T(u\frac{X}{T}+v\frac{X}{T}+w) = 0 \qquad \text{soit encore } uX+vY+wT= 0.$$

Réciproquement, si $u^2+v^2+w^2 \neq 0$ la courbe d'équation $uX+vY+wT= 0$ (que l'on va appeler une droite de $\widetilde{P}$) correspond bien à l'union de la droite D et du point à l'infini de coordonnées $(-v,u,0)$, c'est-à-dire à la direction de D.

β) Si on connaît deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de (AB), l'équation de la droite affine est

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0$$

ce qui est équivalent à écrire

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0.$$

L'équation projective de la droite est donc, si l'on note (X_A, Y_A, Z_A), (X_B, Y_B, Z_B) les nouvelles coordonnées de A et B dans $\widetilde{P}$ qu'on appelle coordonnées homogènes.

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} X_A & X_B & X \\ Y_A & Y_B & Y \\ Z_A & Z_B & Z \end{pmatrix}=0$$

γ) A toute conique Γ affine d'équation

$$ax^2+by^2+2dxy+2ex+2fy+c=0$$

correspond donc ce que nous allons appeler une conique projective de $\widetilde{P}$ en considérant la courbe d'équation

$$aX^2+bY^2+cT^2+2dXY+2eXT+2fYT=0.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire

$$(X\ \ Y\ \ Z)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=0$$

En introduisant la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ et le vecteur $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, l'équation de la conique prend la nouvelle forme: ${}^t\mathcal{X}A\mathcal{X}= 0$.

<u>Définition</u> : Etant donnée une matrice A symétrique, la conique d'équation ${}^t\mathcal{X}A\mathcal{X}= 0$ est dite dégénérée si et seulement si $\mathbf{det}\, A =0$.

Rappelons la propriété fondamentale suivante:
Toute conique dégénérée est constituée de deux droites distinctes ou confondues.

c. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$

Proposition : l'application $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to {}^t\mathcal{Y}.\mathcal{X}$ définit un produit scalaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ noté $<\mathcal{X},\mathcal{Y}>$.

En effet la linéarité par rapport à la première composante ne pose pas de problème et l'on a bien $<\mathcal{X},\mathcal{Y}> = <\mathcal{Y},\mathcal{X}>$.
De plus $<\mathcal{X},\mathcal{X}> >0 \Leftrightarrow \mathcal{X} \neq 0$.

Ce produit permet de définir le produit vectoriel $\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}$. C'est l'unique vecteur tel que pour tout $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^3$ on a ${}^t(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}).\mathcal{Z} = \mathbf{det}\,(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

Applications :

α) Etant donnés deux points distincts $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$, la droite qui contient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ est définie par l'équation ${}^t(\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2).\mathcal{X}=0$.
En effet un point de coordonnées $\mathcal{X}$ appartient à cette droite si et seulement si

$$\mathbf{det}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X})=0$$

ce qui est équivalent à l'équation précédente.

β) Le point d'intersection de deux droites distinctes d'équations ${}^t\,\mathcal{U}_1.\mathcal{X}=0$ et ${}^t\,\mathcal{U}_2.\mathcal{X}=0$, est de coordonnées $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$, puisque ${}^t\,\mathcal{U}_1.(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) = 0$ et ${}^t\,\mathcal{U}_2.(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) = 0$.

2. Etude des tangentes en géométrie projective.

Soit M_0 un point fixé d'une courbe affine algébrique d'équation $f(x,y)=0$. On sait alors que si M_0 n'est pas un point singulier (c'est-à-dire si les dérivées partielles de f ne sont pas toutes nulles en M_0) la courbe admet une tangente d'équation cartésienne

$$(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,, y_0\,) + (y-y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,, y_0\,) = 0$$

Pour transposer ces notions en géométrie projective nous allons commencer par étendre au plan projectif la notion de singularité.

Proposition : Soit M_0 un point singulier de P, alors si (X_0,Y_0,T_0) représente un système de coordonnées homogènes de M_0 dans le plan projectif $\tilde{P}$ on a

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_0\,,Y_0,T_0) = \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_0\,,Y_0,T_0) = \frac{\partial F}{\partial T}(X_0\,,Y_0,T_0) = 0.$$

Démonstration :

En dérivant l'égalité fondamentale

$$F(X,Y,T)= T^n f(x\,,y\,)=0$$

on trouve (puisque T_0 ne dépend ni de x, ni de y)

$$T_0^n\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\;\,y_0\,) = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial X}(X_0\,,Y_0,T_0) = T_0\,\frac{\partial F}{\partial X}(X_0\,,Y_0,T_0)$$

On a donc

$$T^{n-1}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\;\,y_0\,) = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0\,,Y_0,T_0)$$

et de la même façon

$$T^{n-1}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\;\,y_0\,) = \frac{\partial F}{\partial Y}(X_0\,,Y_0,T_0)$$

Ainsi si le point M_0 est singulier on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ et par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) = \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_0, Y_0, T_0) = 0$$

Mais l'identité d'Euler appliquée à la fonction homogène F entraîne

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + Y_0 \frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) + T_0 \frac{\partial F}{\partial T}(X_0, Y_0, T_0) = n\, F(X_0, Y_0, T_0) = 0$$

et donc la troisième dérivée partielle est également nulle en M_0: $\frac{\partial F}{\partial T}(X_0, Y_0, T_0) = 0$.

Par extension de cette proposition on appellera donc point singulier de $\tilde{P}$, tout point qui annule les trois dérivées premières de la fonction F (quand F définit implicitement la courbe). Tout point singulier du plan projectif situé à distance finie correspond évidemment à un point singulier de la courbe affine correspondante.

Nous allons maintenant pouvoir étudier la complétion projective d'une tangente affine.
Si $M_0(x_0, y_0)$ est non singulier, une équation de la tangente en M_0 est

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

.La complétion projective de cette droite sera

$$\left(\frac{X}{T} - \frac{X_0}{T_0}\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \left(\frac{Y}{T} - \frac{Y_0}{T_0}\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

$$\left(\frac{X}{T} - \frac{X_0}{T_0}\right)\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + \left(\frac{Y}{T} - \frac{Y_0}{T_0}\right)\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) = 0$$

$$\frac{X}{T}\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + \frac{Y}{T}\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) = \frac{X_0}{T_0}\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + \frac{Y_0}{T_0}\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0)$$

D'après la relation d'Euler

$$\frac{X_0}{T_0}\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + \frac{Y_0}{T_0}\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) = -\frac{\partial F}{\partial T}(X_0, Y_0, T_0)$$

Ainsi l'équation de la tangente complétée est

$$X\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + Y\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) + T\frac{\partial F}{\partial T}(X_0, Y_0, T_0) = 0$$

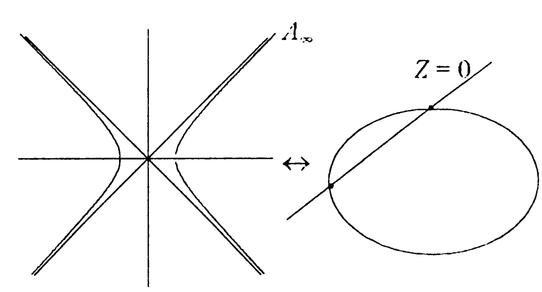
Les trois coefficients n'étant pas simultanément nuls.

Définition : On appelle tangente en un point non singulier d'une courbe projective la droite d'équation $X\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0, T_0) + Y\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0, T_0) + T\frac{\partial F}{\partial T}(X_0, Y_0, T_0) = 0$.

(Les courbes algébriques projectives possèdent donc des tangentes en tout point).

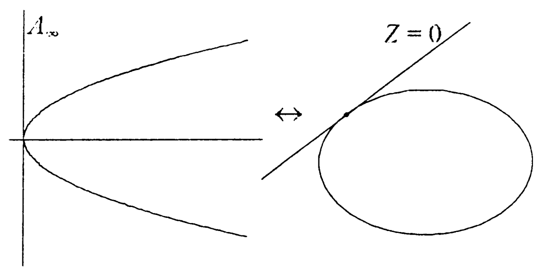
Exemples :

α) Soit l'hyperbole d'équation affine $x^2 - y^2 = 1$ et donc d'équation projective $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$.
La tangente en un point courant a pour équation
$X X_0 - Y Y_0 - Z Z_0 = 0$ et donc les tangentes aux points à *l'infini* (1,1,0) et (1,-1,0) ont pour équations $X=Y$ et $X=-Y$. Ces tangentes de la géométrie projective correspondent aux



asymptotes en géométrie affine.

β) Si on fait le même calcul avec la parabole d'équation affine $y^2 = 2px$ et donc d'équation projective $Y^2 = 2pXZ$
on trouve que la droite à l'infini d'équation $Z=0$ est tangente à la parabole au point de coordonnées (1,0,0).



3. Equation tangentielle d'une courbe.

Etant donnée une fonction F algébrique et homogène, une droite $\tilde{D}$ définie par les trois réels u, v, w (c'est-à-dire d'équation $uX+vY+wT= 0$ avec $u^2+v^2+w^2 \neq 0$) sera tangente à la courbe $\tilde{\Gamma}$ d'équation $F(X,Y,T)=0$ si et seulement s'il existe un triplet de réels (X_0,Y_0,Z_0) tels que

$$(1)\ F(X_0,Y_0,Z_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (2)\ \mathrm{rang}(\ [\ \{\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial T}\}(X_0\ ,Y_0,T_0)];[u,v,w].) = 1$$

Démonstration:
Comme par l'identité d'Euler 1°) implique

$$X_0\ \frac{\partial F}{\partial X}(X_0\ ,Y_0,T_0) + Y_0\ \frac{\partial F}{\partial Y}(X_0\ ,Y_0,T_0) + T_0\ \frac{\partial F}{\partial T}(X_0\ ,Y_0,T_0) = n\ F(X_0,Y_0,Z_0) = 0.$$

(1) et (2) impliquent ensemble (3) $uX_0+vY_0+wT_0= 0$, c'est-à-dire que le point de tangence doit appartenir à la courbe!
Réciproquement, si l'on suppose
(2) $\mathrm{rang}(\ [\ \{\frac{\partial F}{\partial X},\frac{\partial F}{\partial Y},\frac{\partial F}{\partial T}\}(X_0\ ,Y_0,T_0)];[u,v,w]\ ) = 1$ et 3°) $uX_0+vY_0+wT_0= 0$
l'identité d'Euler permet alors d'écrire (1) $F(X_0,Y_0,Z_0) = 0$.

Finalement la droite $\tilde{D}$ définie par les trois réels u, v, w est tangente à la courbe $\tilde{\Gamma}$ d'équation $F(X,Y,T)=0$ si et seulement s'il existe un triplet de réels (X_0,Y_0,Z_0) tels que
(3) $uX_0+vY_0+wT_0= 0$ et (2) grad(F) $(X_0\ ,Y_0,T_0)$ est colinéaire à [u,v,w].

On obtient donc pratiquement une condition nécessaire et suffisante portant sur u, v, w en éliminant (X_0,Y_0,Z_0) entre les équations précédentes.

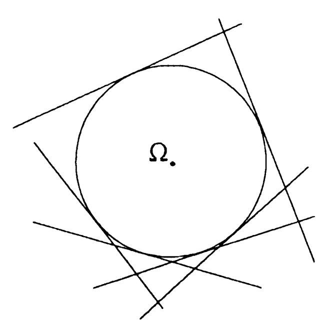
Exemple : Equation tangentielle d'un cercle:
Cherchons l'équation tangentielle d'un cercle de centre $\Omega(\alpha,\ 0,\ 1)$ et de rayon R.
Son équation homogène est

$$X^2+ Y^2 - 2\alpha XT + (\alpha^2 - R^2)T^2 = 0.$$

Le gradient qui est le double de

$$(X-\alpha T;\ Y;\ (\alpha^2 - R^2)T - \alpha X),$$

est colinéaire à (u,v,w).



Ce qui donne après résolution

$$X = \frac{uR^2 - \alpha w - u\alpha^2}{vR^2} Y \qquad T = \frac{-\alpha u - w}{vR^2} Y$$

On a donc $uX + vY + wT = 0$ qui est équivalent à $u(uR^2 - \alpha w - u\alpha^2) + v^2R^2 - w(\alpha u + w) = 0$.

On trouve finalement $u^2(R^2 - \alpha^2) + v^2R^2 - w^2 - 2\alpha wu = 0$

On peut remarquer qu'il était beaucoup plus simple de raisonner directement dans l'espace affine euclidien, comme on l'a fait au chapitre précédent.
La droite D d'équation $ux + vy + w = 0$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - R^2) = 0$ si et seulement si la distance du centre Ω du cercle à la droite est le rayon, c'est-à-dire si et seulement si

$$R^2 = \frac{(u\alpha + w)^2}{u^2 + v^2}$$

Ce qui conduit à la même équation.

4. Application aux coniques

a) Equation tangentielle d'une conique.

Soit une conique non dégénérée d'équation

$$aX^2 + bY^2 + cT^2 + 2dXY + 2eXT + 2fYT = 0$$

associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ symétrique et inversible.

Nous savons alors que cette équation peut s'écrire ${}^t\mathcal{X}A\mathcal{X} = 0$ avec ${}^t\mathcal{X} = (x, y, z)$
Il est facile de voir que le gradient de la fonction F peut s'écrire $2A\mathcal{X}$ et que si l'on pose ${}^t\mathcal{U} = (u, v, w)$ les deux équations (3) et (2) du théorème précédent s'écrivent

$${}^t\mathcal{U}\mathcal{X} = 0 \text{ et } \mathcal{U} = \lambda A\mathcal{X}$$

avec λ un réel donné. On voit finalement que le résidu de l'élimination est

$${}^t\mathcal{U}A^{-1}\mathcal{U} = 0.$$

On trouve donc une équation du même type que la conique de départ.

Par exemple, si l'on applique cette technique à l'équation du cercle précédent on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha^2 - R^2 \end{pmatrix}$$

Et après calcul

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{R^2 - \alpha^2}{R^2} & 0 & \frac{-\alpha}{R^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\alpha}{R^2} & 0 & \frac{-1}{R^2} \end{pmatrix}$$

On retrouve finalement l'équation: $u^2(R^2 - \alpha^2) + v^2R^2 - w^2 - 2\alpha wu = 0$

b) Cas où la matrice de départ n'est pas inversible.

Si la conique est dégénérée on ne peut effectuer la dernière étape de l'élimination du paragraphe précédent. La droite d'équation ${}^t\mathcal{U}\mathcal{X} = 0$ est tangente à la conique si et seulement si on peut trouver un vecteur $\mathcal{X}_0$ tel que à la fois

$${}^t\mathcal{U}\mathcal{X}_0 = 0 \text{ et } \mathcal{U} = \lambda A\mathcal{X}_0 \text{ avec } \lambda \text{ un réel donné.}$$

Une condition nécessaire est donc que $\mathcal{U}$ appartienne à l'image[15] de A.
Pour une matrice symétrique A le noyau $K = \mathbf{Ker}\ A$ et l'image $S = \mathbf{Im}\ A$ sont en somme directe (orthogonale). Alors la restriction de A au vecteurs de S induit une application de S dans S. Cette application est nécessairement surjective, et réalise donc un isomorphisme de S dans S.
Appelons f l'endomorphisme dont A est la matrice dans la base canonique, et g sa restriction à S. Le vecteur $\mathcal{X}_0$ se décompose en $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_K + \mathcal{X}_S$ suivant la somme directe.
L'équation $\mathcal{U} = f(\mathcal{X}_0)$ devient donc $\mathcal{U} = f(\mathcal{X}_S) = g(\mathcal{X}_S)$, et l'on a $\mathcal{X}_0 = g^{-1}(\mathcal{U}) + \mathcal{X}_K$.
Mais comme on a pris *a priori* $\mathcal{U}$ dans S, on a par orthogonalité entre S et K

$$^t\mathcal{U}.\mathcal{X}_0 = {}^t\mathcal{U}.\,g^{-1}(\mathcal{U}).$$

Il nous reste à traduire matriciellement cette égalité pour conclure. On appelle P la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée adaptée à la somme directe formée avec K et S. La matrice de f dans cette base est ${}^tPAP$. Les coordonnées du vecteur qui a pour coordonnées $\mathcal{U}$ dans la base canonique sont ${}^tP\mathcal{U}$. La matrice de f dans la base adaptée est constituée d'un bloc carré inversible B entouré de 0. On notera par B^{-1} la matrice obtenue en inversant le bloc et en laissant les zéros. On remarque bien entendu que le bloc correspond à la matrice de g dans la base obtenue en ne gardant que les vecteurs de la base adaptée qui sont dans S. On a donc $g^{-1}(\mathcal{U}) = PB^{-1}\,{}^tP\mathcal{U}$.
La condition nécessaire et suffisante de l'élimination est donc

$$\begin{cases} \mathcal{U} \in \mathbf{Im}\ A \\ {}^t\mathcal{U}PB^{-1}\,{}^tP\mathcal{U} = 0 \end{cases}$$

Ici c'est le choix matriciel qui complique l'expression de cette condition.

Exemples :

Si la matrice A vaut $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La base canonique est directement la base adaptée $P = I$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\mathcal{U}$ a donc pour dernière coordonnée $w=0$ et les deux autres vérifient

$$\frac{u^2}{4} - v^2 = 0.$$

c) Equation tangentielle et polarité.

A la conique non dégénérée d'équation ${}^t\mathcal{X}A\mathcal{X} = 0$ avec ${}^t\mathcal{X}\ (x, y, z)$, correspond une forme quadratique $\mathbf{q}(\mathcal{X})$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\mathbf{q}(\mathcal{X}) = {}^t\mathcal{X}A\mathcal{X}$.
On sait que si la matrice A est inversible, cette forme quadratique est non dégénérée
La technique de *polarisation* permet d'associer à $\mathbf{q}$ une forme bilinéaire $< , >$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$< \mathcal{X}, \mathcal{Y} > = {}^t\mathcal{X}A\mathcal{Y}$$

avec ${}^t\mathcal{X} = (x, y, z)$ et ${}^t\mathcal{Y} = (x', y', z')$

Rappel : Etant donnée une conique non dégénérée associée à la matrice symétrique A, on appelle polaire d'un point M_0 (de coordonnées $\mathcal{X}_0$) du plan projectif l'ensemble des points M (de coordonnées $\mathcal{X}$) du plan projectif tels que ${}^t\mathcal{X}_0A\mathcal{X} = 0$.

[15] C'est-à-dire à l'image de l'endomorphisme f que A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Il est facile de remarquer que puisque A est inversible les coefficients de ${}^t\mathscr{X}_0 A = {}^t(A\mathscr{X}_0)$ ne sont pas tous nuls et que la polaire d'un point M_0 est donc une droite du plan projectif.

Proposition : Le point M_0 appartient à la conique non dégénérée associée à la matrice A si et seulement si sa polaire est tangente à la conique, c'est-à-dire si ses coefficients ${}^t\mathscr{U}$ vérifient l'équation tangentielle ${}^t\mathscr{U}A^{-1}\mathscr{U} = 0$.

Démonstration :
Soit M_0 un point de coordonnées ${}^t\mathscr{X}_0$. Les coefficients de sa polaire sont ${}^t\mathscr{X}_0 A$ et donc

$${}^t\mathscr{U}A^{-1}\mathscr{U} = ({}^t\mathscr{X}_0 A)\,A^{-1}\,{}^t({}^t\mathscr{X}_0 A) = {}^t\mathscr{X}_0 A\,\mathscr{X}_0\,.$$

La polaire vérifie donc l'équation tangentielle de la conique si et seulement si le point M_0 appartient à la conique.

Remarque : on comprend mieux pourquoi la résolution de certains exercices est facilitée par la méthode tangentielle. Du point de vue algébrique introduire une équation tangentielle revient à éviter dans un premier temps une inversion de matrice! Elle permet à peu de frais de travailler directement dans le dual.

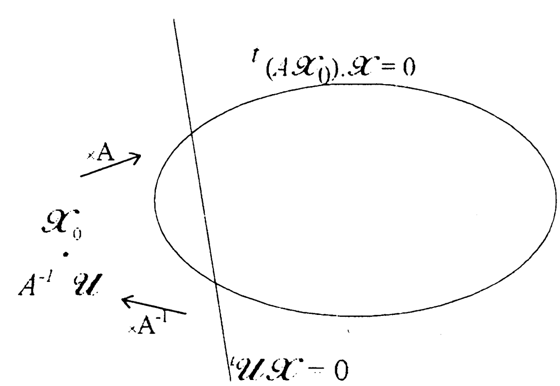
d) Réciprocité polaire.

Théorème et définition : On dit qu'une droite d'équation ${}^t\mathscr{U}\mathscr{X} = 0$ admet $\mathscr{X}_0$ comme *pôle* si et seulement si cette droite est la polaire de $\mathscr{X}_0$ par rapport à la conique non dégénérée définie par la matrice A.

Le pôle de la droite d'équation ${}^t\mathscr{U}\mathscr{X} = 0$ est

$$\mathscr{X}_0 = A^{-1}\,\mathscr{U}.$$

En effet pour que la droite d'équation ${}^t\mathscr{U}\mathscr{X} = 0$ coïncide avec la polaire de $\mathscr{X}_0$ par rapport à la conique d'équation ${}^t\mathscr{X}_0 A\mathscr{X} = 0$, il faut et il suffit que ${}^t\mathscr{U}$ soit proportionnel à ${}^t\mathscr{X}_0 A$.



Il est commode de désigner par $(\mathscr{X}_0\mathscr{Y}_0)^*$ le pôle de la droite $(\mathscr{X}_0\mathscr{Y}_0)$, par $(\mathscr{U})^*$ le pôle de la droite d'équation ${}^t\mathscr{U}\mathscr{X} = 0$, et par $(\mathscr{X}_0)^*$ la polaire du point $\mathscr{X}_0$.

Proposition : On a pour tout couple de points distincts $\mathscr{X}_0$ et $\mathscr{Y}_0$:

$$(\mathscr{X}_0\mathscr{Y}_0)^* = (\mathscr{X}_0)^* \cap (\mathscr{Y}_0)^*.$$

En effet la droite $(\mathscr{X}_0\mathscr{Y}_0)$ est d'équation ${}^t(\mathscr{X}_0 \wedge \mathscr{Y}_0).\mathscr{X} = 0$, et donc son pôle est

$$(\mathscr{X}_0\mathscr{Y}_0)^* = A^{-1}\,(\mathscr{X}_0 \wedge \mathscr{Y}_0)$$

L'intersection des droites $(\mathscr{X}_0)^*$ d'équation ${}^t\mathscr{X}_0 A\mathscr{X} = 0$, et $(\mathscr{Y}_0)^*$ d'équation ${}^t\mathscr{Y}_0 A\mathscr{X} = 0$ est le point

$$(A\mathscr{X}_0 \wedge A\mathscr{Y}_0).$$

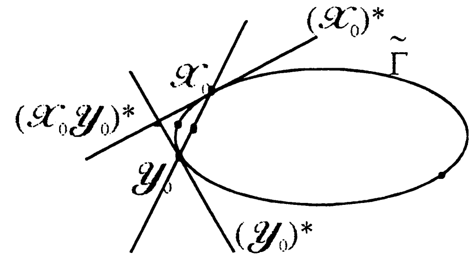
Le calcul qui suit prouve que ces deux points coïncident. En effet on a pour tout vecteur $\mathscr{Z}$,

$$
\begin{aligned}
{}^t(A^{-1}(\mathcal{X}_0 \wedge \mathcal{Y}_0))\,\mathcal{Z} = {}^t(\mathcal{X}_0 \wedge \mathcal{Y}_0)\,A^{-1}\,\mathcal{Z} &= \mathbf{det}\,(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0, A^{-1}\,\mathcal{Z}) \\
&= \mathbf{det}\,(A^{-1})\,\mathbf{det}(A\mathcal{X}_0, A\mathcal{Y}_0, \mathcal{Z}) \\
&= \mathbf{det}\,(A^{-1})\,{}^t(A\mathcal{X}_0 \wedge A\mathcal{Y}_0)\,\mathcal{Z}.
\end{aligned}
$$

Applications :

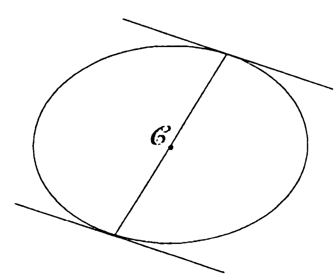
α) construction de la polaire.

Si une droite coupe une conique en $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{Y}_0$, on remarque que la tangente en $\mathcal{X}_0$ à la conique est en même temps la polaire de $\mathcal{X}_0$ par rapport à cette même conique. Les tangentes en $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{Y}_0$ sont donc sécantes au pôle de la droite $(\mathcal{X}_0\mathcal{Y}_0)$.

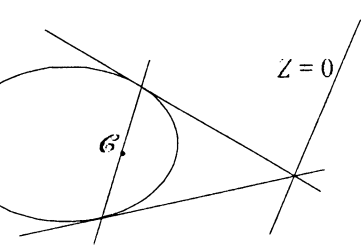


Réciproquement pour construire la polaire d'un point $\mathcal{X}_0$ il suffit de tracer, quand cela est possible les tangentes à la coniques menées par $\mathcal{X}_0$.

β) Si la conique possède un centre $\mathcal{C}$ à distance finie, toute sécante contenant $\mathcal{C}$ coupe la conique en deux points qui possèdent des tangentes parallèles. Le pôle de $\mathcal{C}$ est donc la droite à l'infini d'équation Z=0.



Réciproquement considérons le pôle $\mathcal{C}$ de la droite d'équation Z=0: ou bien il est à distance finie, une sécante contenant ce point aura deux tangentes parallèles, donc $\mathcal{C}$ est le centre de symétrie de la conique, ou bien ce point appartient à la droite à l'infini. Si nous notons $\mathcal{T}$ le vecteur ${}^t(0, 0, 1)$, on peut résumer la discussion précédente en énonçant les résultats suivants.



Une conique de matrice A possède un centre $\mathcal{C}$ si et seulement si $A^{-1}\mathcal{T}$ n'appartient pas à la droite d'équation Z=0 (dans ce cas $\mathcal{C} = A^{-1}\mathcal{T}$).

Une conique de matrice A possède un centre $\mathcal{C}$ si et seulement si ${}^t\mathcal{T}\mathcal{C} = {}^t\mathcal{T}A^{-1}\mathcal{T} \neq 0$.

Une conique possède un centre si et seulement si elle n'est pas tangente à la droite à l'infini.

On retrouve ainsi que les coniques propres à centres sont les hyperboles et les ellipses et que la parabole ne possède pas de centre symétrie.

5. Introduction des points cycliques.

a) Définitions

On peut craindre après s'être placé dans un espace projectif, de ne plus pouvoir traduire les propriétés euclidiennes des figures. Il n'en est rien, si l'on fait encore l'effort de changer de corps de référence[16].

Considérons $\mathbb{C}^3$ à la place de $\mathbb{R}^3$ pour construire notre espace projectif.

[16] Cette remarque joue un rôle historique important. La géométrie projective une fois complexifiée joue un rôle unificateur. La géométrie métrique n'en est plus qu'un cas particulier. Les propriétés des distance et des angles ne sont que des cas particuliers de propriétés projectives plus générales.

La relation de proportionnalité sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est alors définie ainsi:

$\forall((X,Y,Z),(X',Y',Z')) \in (\mathbb{C}^3)^2 \quad (X,Y,Z)\ \mathcal{R}\ (X',Y',Z') \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}\ \ (X,Y,Z) = \lambda(X',Y',Z')$.

Nous noterons $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ le plan projectif ainsi complexifié.

A toute courbe algébrique de $\widetilde{P}$, d'équation $F(x,y,t)=0$, avec F un polynôme homogène à coefficients réels des trois variables réelles (x,y,t), on peut faire correspondre l'ensemble des points de $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ de coordonnées complexes (X,Y,T) tels que $F(X,Y,T)=0$.

Réciproquement à toute courbe de $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ définie à partir d'une fonction réelle: c'est-à-dire toute courbe d'équation $F(X,Y,T)=0$ avec F un polynôme homogène à coefficients réels des trois variables complexes (X,Y,T) correspond une courbe algébrique de $\widetilde{P}$ (son image ou sa trace dans le plan réel) d'équation $F(x,y,t)=0$.

A toute droite de $\widetilde{P}$ d'équation ${}^t\mathcal{U}x=0$ (avec ${}^tx=(x, y, t)$ et ${}^t\mathcal{U}=(u, v, w)$) correspond la courbe de $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ d'équation ${}^t\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$ (avec ${}^t\mathcal{X}=(X, Y, T)$ et ${}^t\mathcal{U}=(u, v, w)$).

Cette courbe sera appelée une droite de $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ puisqu'elle représente le quotient d'un espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$.

A toute conique de $\widetilde{P}$ d'équation ${}^tx.A.x = 0$ avec ${}^tx=(x, y, t)$, et A une matrice symétrique à coefficients réels, correspond la courbe de $\widetilde{P}^{\mathcal{C}}$ d'équation ${}^t\mathcal{X}.A.\mathcal{X}=0$ avec ${}^t\mathcal{X}=(X, Y, T)$.

<u>Application :</u>
Une conique (non dégénérée) est un cercle si et seulement si elle coupe la droite à l'infini aux deux points $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de coordonnées $(1,i,0)$ et $(1,-i,0)$ appelés les points *cycliques*.

En effet, appelons $A=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ la matrice de notre conique. Si ${}^t\mathcal{I}=(1,i,0)$, on a

${}^t\mathcal{I}.A.\mathcal{I}= (1,i,0)\,(a+di,d-bi,e+fi) = a+di+ di-b=(a-b)+2di.$

La conique contient donc le point cyclique $\mathcal{I}$ (et par suite son conjugué) si et seulement si les coefficients de sa matrice vérifient $a=b$ et $d=0$.

Remarquons que si l'équation d'une conique non dégénérée est

$$a(x^2+y^2)+2\,exz+ 2\,fyz+ cz^2 =0,$$

le coefficient a ne peut être nul.

Ramenée dans le plan affine cette équation devient

$$(x^2+y^2)+2\,e'x+ 2\,f'y+ c' =0,$$

équation d'un cercle (éventuellement imaginaire si $e'^2+f'^2- c'<0$).

La conique contient donc les points cycliques si et seulement si c'est un cercle.

b) Produit vectoriel dans $\mathbb{C}^3$

Proposition : l'application $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to {}^t\mathcal{Y}.\mathcal{X}$ définit une forme bilinéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ notée $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle$ dont la restriction à l'espace $\mathbb{R}^3$ est le produit scalaire introduit à la page 32.

En effet la linéarité par rapport à la première composante ne pose pas de problème et l'on a bien $<\mathcal{X},\mathcal{Y}>=<\mathcal{Y},\mathcal{X}>$

Attention, cette forme n'est évidemment pas définie, mais en revanche, elle est non dégénérée.

En effet un vecteur $\mathcal{Y}$ qui serait orthogonal à tout vecteur $\mathcal{X}$ de $\mathbb{C}^3$ serait aussi orthogonal à chaque élément de la base canonique donc serait nul.
Ce produit permet de définir le produit vectoriel $\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}$ de la même manière que précédemment[17]. Il est défini par l'égalité: pour tout $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{C}^3$ on a ${}^t(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}).\mathcal{Z}=$ **det** $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

On vérifie facilement les énoncés suivants:
α) Etant donnés deux points distincts $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$, la droite qui contient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ est définie par l'équation ${}^t(\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2).\mathcal{X}=0$.
β) Le point d'intersection de deux droites distinctes d'équations ${}^t\,\mathcal{U}_1.\mathcal{X}=0$ et ${}^t\,\mathcal{U}_2.\mathcal{X}=0$, est de coordonnées $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$, puisque ${}^t\,\mathcal{U}_1.(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) = 0$ et ${}^t\,\mathcal{U}_2.(\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2) = 0$.

c) biraports
Etant donnée une droite d'un espace projectif de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un repère fixé, considérons l'équation ${}^t\,\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$.
Si l'on se donne le vecteur $\mathcal{U}$ non nul, cette équation représente une droite, mais si c'est le vecteur $\mathcal{U}$ qui varie et que l'on s'est donné le vecteur $\mathcal{X}$ (non nul) cette équation représente l'ensemble des droites qui contiennent $\mathcal{X}$ que l'on appelle un *faisceau* de droites. Dans un cas comme dans l'autre, l'ensemble considéré est entièrement défini par la donnée de trois constantes.

Théorème et définition :
Etant donnés quatre points $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$, (les deux premiers étant par exemple distincts et fixés) sur la droite d'équation ${}^t\,\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$ (resp quatre droites $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$ d'un même faisceau), il existe deux couples de nombres (λ,μ) et (λ',μ') tels que

$$\mathcal{X}_3 = \lambda\mathcal{X}_1 + \mu\mathcal{X}_2 \text{ et } \mathcal{X}_4 = \lambda'\mathcal{X}_1 + \mu'\mathcal{X}_2$$

$$(\text{ resp } \mathcal{U}_3 = \lambda\mathcal{U}_1 + \mu\mathcal{U}_2 \text{ et } \mathcal{U}_4 = \lambda'\mathcal{U}_1 + \mu'\mathcal{U}_2).$$

Ces couples sont uniques (à un facteur de proportionnalité près).
On appelle birapport des quatre points (resp des quatre droites) et l'on note $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_3,\mathcal{X}_4]$ le nombre $\dfrac{\lambda}{\mu} : \dfrac{\lambda'}{\mu'}$ (resp $[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_4]$).

Démonstration :
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$ l'équation ${}^t\,\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$ définit un hyperplan dont une base est par exemple $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ si ces deux vecteurs ne sont pas liés, ce qui est le cas si l'on a supposé les points représentés par $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ distincts.
Les coefficients qui expriment un vecteur de l'hyperplan dans cette base sont donc uniques et donc les couples sont définis à une constante multiplicative près[18].

---

[17] L'identification entre un espace vectoriel E et son dual E* est possible dès que la forme est non dégénérée (cf par exemple le cours de mathématiques de Lelong Ferrand-Arnaudiès tome 1 p.368 chez Dunod).
[18] Cette constante peut être rajoutée pour $\mathcal{X}_3$ mais pas indépendamment pour $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ qui eux sont fixés.

Remarques :

α) Etant donnés quatre points A, B, C, D sur une même droite (à distance finie), on peut montrer facilement que le birapport des quatre points (A,B,C,D) est la quantité $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

En effet il est alors possible de considérer et que C et D, quand ils sont différents de A, sont barycentres de A et B affectés des coefficients respectifs u et -1 et u' et -1.

Dans ce cas $(A,B,C,D) = u' \div u$.

β) Si a, b, c, d sont les abscisses des points A, B, C, D d'origine O,

$$(A,B,C,D) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}$$

γ) Rapport anharmonique.

Un cas particulier important, arrive lorsque (A,B,C,D) =-1. On dit alors que les points C et D divisent harmoniquement le segment $[A, B]$.

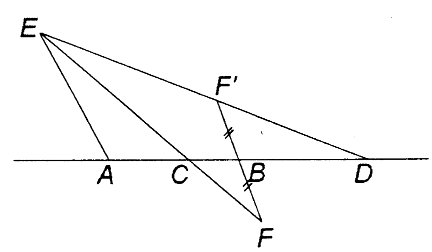
Dans ce cas, comme l'écrit par exemple Poncelet[19], on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ et "la ligne AB est divisée en segment proportionnels par le point C ou le point D".

Mais pourquoi utiliser le mot "harmonique"? Parce que la distance CD est la moyenne harmonique des distances DA et DB. En effet on a $\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b}{a} = -1$, si l'on choisit D au centre du repère, et donc $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Conclusion $\frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}} = \frac{2}{\overline{DC}}$.

Le point D est le "conjugué" harmonique du point C par rapport à deux points distincts fixés A et B (*ie* (A,B,C,D)=-1) si et seulement si D est le barycentre de A et B affectés des mêmes coefficients que C (au signe près pour l'un deux). Cette remarque nous permet de donner une construction géométrique du quatrième point quand les trois premiers sont donnés.

Il suffit de réaliser géométriquement C comme barycentre de A et de B par deux segments parallèles $[AE]$ et $[BF]$, puis de construire F' le symétrique de F par rapport au point B.



On obtient une relation classique en introduisant le point O milieu du segment $[CD]$. Dans ce cas la relation principale devient $\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b+c}{a+c} = -1$ ou encore $c^2 = ab$.

Le birapport de (A,B,C,D) est donc anharmonique si et seulement si $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OC^2 = OD^2$, c'est-à-dire si et seulement si tout cercle contenant A et B est orthogonal au cercle de diamètre $[CD]$.

Théorème : Etant donnée une droite projective d'équation ${}^t\mathcal{V}.\mathcal{X}=0$ qui coupe quatre droites $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$ d'un même faisceau en $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ alors le birapport $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4]$ est égal au birapport $[\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4]$.

[19] Traité des propriétés projectives des figures Tome 1 p.12. Paris Gauthier-Villars (1865).

Démonstration : L'intersection de la droite $\mathcal{U}_1$ et de la droite $\mathcal{V}$, est le point défini par les équations ${}^t\mathcal{V}.\mathcal{X}=0$ et ${}^t\mathcal{U}_r\mathcal{X}=0$, c'est-à-dire $\mathcal{X}_1 = \mathcal{V}\wedge\mathcal{U}_r$.
Si par exemple $\mathcal{U}_3 = \lambda\mathcal{U}_1 + \mu\mathcal{U}_2$ on aura

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{V}\wedge\mathcal{U}_3 = \mathcal{V}\wedge(\lambda\mathcal{U}_1 + \mu\mathcal{U}_2) = \mathcal{V}\wedge\lambda\mathcal{U}_1 + \mathcal{V}\wedge\mu\mathcal{U}_2 = \lambda\mathcal{X}_1 + \mu\mathcal{X}_2$$

de même, si $\mathcal{U}_4 = \lambda'\mathcal{U}_1 + \mu'\mathcal{U}_2$ on aura $\mathcal{X}_4 = \lambda'\mathcal{X}_1 + \mu'\mathcal{X}_2$ et donc l'égalité des birapports.

d) Dualité par rapport à une conique.

Théorème : Etant donnée $\tilde{\Gamma}$ une conique non dégénérée d'équation ${}^t\mathcal{X}A\mathcal{X} = 0$.

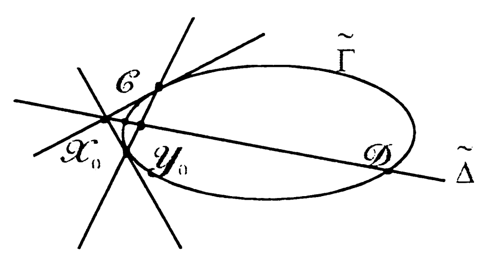
Une droite $\tilde{\Delta}$ contenant le point $\mathcal{X}_0$ coupe $\tilde{\Gamma}$ et deux points $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On a le résultat suivant:

La droite $\tilde{\Delta}$ coupe la polaire de $\mathcal{X}_0$ par rapport à $\tilde{\Gamma}$ en $\mathcal{Y}_0$
si et seulement si $[\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{X}_0,\mathcal{Y}_0]=-1$

Commençons par remarquer que sur le corps $\mathbb{C}$ la droite coupe toujours la conique.

Démonstration du sens direct :
Il existe deux nombres λ et μ tels que

$$\mathcal{X}_0 = \lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}.$$



La polaire de $\mathcal{X}_0$ par rapport à $\tilde{\Gamma}$ est donc d'équation ${}^t(\lambda\ \mathcal{C} + \mu\mathcal{D})A\mathcal{X} = 0$. Comme la droite $\tilde{\Delta}$ a elle-même pour équation

$${}^t(\mathcal{C}\wedge\mathcal{D})\mathcal{X} = 0,$$

le point d'intersection $\mathcal{Y}_0$ est de coordonnées

$$(\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}) \wedge {}^t({}^t(\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D})A) = (\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}) \wedge (A(\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D})).$$

On a donc par linéarité, puis en utilisant la formule du double produit vectoriel

$$\mathcal{Y}_0 = \lambda(\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}) \wedge A\mathcal{C} + \mu(\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}) \wedge A\mathcal{D}$$

$$\mathcal{Y}_0 = \lambda[\,({}^t\mathcal{C}.A\mathcal{C})\mathcal{D} - ({}^t\mathcal{D}.A\mathcal{C})\mathcal{C}\,] + \mu[\,({}^t\mathcal{C}.A\mathcal{D})\mathcal{D} - ({}^t\mathcal{D}.A\mathcal{D})\mathcal{C}\,]$$

Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont sur la conique, on a ${}^t\mathcal{C}.A\mathcal{C} = {}^t\mathcal{D}.A\mathcal{D} = 0$, et donc

$$\mathcal{Y}_0 = -\lambda({}^t\mathcal{D}.A\mathcal{C})\mathcal{C} + \mu\,({}^t\mathcal{C}.A\mathcal{D})\mathcal{D}$$

Puisque ${}^t\mathcal{D}.A\mathcal{C} = {}^t\mathcal{C}.A\mathcal{D}$, le birapport $[\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{X}_0,\mathcal{Y}_0] = \dfrac{\lambda}{\mu} : \dfrac{-\lambda}{\mu} = -1$.

Démonstration du sens réciproque :

Prenons deux points $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{Y}_0$ sur $\tilde{\Delta}$ tels que $[\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{X}_0,\mathcal{Y}_0] = -1$.
On peut écrire par exemple $\mathcal{X}_0 = \lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$ et $\mathcal{Y}_0 = \lambda\mathcal{C} - \mu\mathcal{D}$.

$${}^t\mathcal{X}_0A\mathcal{Y}_0 = {}^t(\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D})\,A(\lambda\mathcal{C} - \mu\mathcal{D}) = -\lambda\mu{}^t\mathcal{C}A\mathcal{D} + \lambda\mu{}^t\mathcal{D}A\mathcal{C} = 0.$$

Le point de coordonnées $\mathcal{Y}_0$ appartient donc bien à la polaire de $\mathcal{X}_0$ par rapport à $\tilde{\Gamma}$.

e) Traduction projective de l'orthogonalité.
Dans l'espace projectif complexifié, les deux points *cycliques* $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de coordonnées homogènes $(1,i,0)$ et $(1,-i,0)$, que nous avons déjà rencontrés pour caractériser les cercles, jouent un rôle important pour traduire une notion qui semblait perdue: l'orthogonalité.

Théorème :

A tout couple de droites (AB) et (AC) de l'espace affine euclidien, on peut associer $(\widetilde{AB})$ et $(\widetilde{AC})$ leurs images dans le plan projectif complexe. On a le résultat suivant:

$$(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow [(\widetilde{AB});(\widetilde{AC});(\widetilde{A\mathcal{I}});(\widetilde{A\mathcal{J}})] = -1$$

<u>Démonstration :</u> Si l'on prend u=(a,a') et v=(b,b') les vecteurs normaux aux droites (AB) et (AC), et si l'on pose $\mathcal{U}=(a, a',1)$ et $\mathcal{V}=(b, b',1)$, les droites projectives $(\widetilde{AB})$ et $(\widetilde{AC})$ auront pour équations ${}^t\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$ et ${}^t\mathcal{V}.\mathcal{X}=0$. Leur point d'intersection aura comme coordonnées dans le plan projectif $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$.

La droite $(\widetilde{A\mathcal{I}})$ est l'ensemble des points de coordonnées $\mathcal{X}$ tels que $\det(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V},\mathcal{I},\mathcal{X})=0$.
Cette dernière équation équivaut à écrire ${}^t[(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})\wedge\mathcal{I}].\ \mathcal{X}=0$
Le vecteur qui représente cette droite dans le faisceau de sommet A est donc $(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})\wedge\mathcal{I}$.
Comme on sait que $(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})\wedge\mathcal{I}=({}^t\mathcal{U}.\mathcal{I})\mathcal{V}-({}^t\mathcal{V}.\mathcal{I})\mathcal{U}$
on a

$$[(\widetilde{AB});(\widetilde{AC});(\widetilde{A\mathcal{I}});(\widetilde{A\mathcal{J}})] = \frac{-{}^t\mathcal{V}.\mathcal{I}}{{}^t\mathcal{U}.\mathcal{I}} : \frac{-{}^t\mathcal{V}.\mathcal{J}}{{}^t\mathcal{U}.\mathcal{J}} \frac{(b+ib')(a-ia')}{(b-ib')(a+ia')} = \frac{ab+a'b'+i(ab'-a'b)}{ab+a'b'-i(ab'-a'b)}$$

et donc

$$(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow [(\widetilde{AB});(\widetilde{AC});(\widetilde{A\mathcal{I}});(\widetilde{A\mathcal{J}})] = -1$$

Puisque nous savons désormais traduire l'orthogonalité en termes projectifs, nous allons pouvoir *linéariser* notre problème. Associer la première conique avec le lieu du sommet de l'angle droit ou l'enveloppe de l'hypoténuse (lieux qui sont du second degré), revient à définir une correspondance entre leurs matrices respectives. De plus nous allons constater comment l'introduction des coordonnées tangentielles (ce qui nous a permis de symétriser *via* la notion de polaire les rôles de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{X}$ dans l'équation ${}^t\mathcal{U}.\mathcal{X}=0$) traduit algébriquement la dualité géométrique des deux situations.

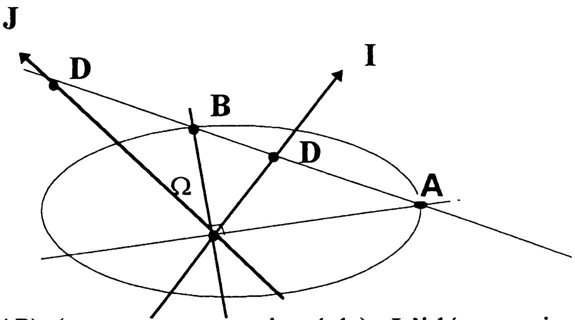
B. Méthode algébrique complexe.

1. Interprétation algébrique du problème.

Soit (E) une conique associée, dans le plan projectif à la matrice symétrique

$$H=\begin{pmatrix} p & p' & q' \\ p' & q & r' \\ q' & r' & r \end{pmatrix}$$

dans le repère centré en Ω. Une équerre de sommet Ω rencontre la conique en A et B; l'on recherche l'enveloppe de la droite (AB).



On écrit une équation $ux+vy+wz=0$ de la droite (AB) (u, v, w sont trois réels). L'idée consiste à traduire l'orthogonalité des droites (ΩA) et (ΩB) par une relation de conjugaison que l'on saura traiter algébriquement, et ainsi de trouver une équation tangentielle du lieu recherché.

Si l'on désigne par I et J les points cycliques et par Δ la droite (AB) on a:

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [(\Omega A);(\Omega B);(\Omega I);(\Omega J)] = -1$$

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [(\Omega A)\cap\Delta;(\Omega B)\cap\Delta;(\Omega I)\cap\Delta;(\Omega J)\cap\Delta]=-1$$

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [A\,;B\,;(\Omega I)\cap\Delta;(\Omega J)\cap\Delta] = -1$$

Finalement les droites (ΩA) et (ΩB) sont perpendiculaires si et seulement si les points D et D' intersections de Δ avec (ΩI) et (ΩJ) sont conjugués par rapport à la conique.

On écrit une équation de (ΩI) (resp. (ΩJ)) : $y=ix$ (resp. $y=-ix$)

et les coordonnées homogènes de D (resp. D') $(-w, -iw, u+iv)$ (resp. $(-w,-iw, u-iv)$).

Si le vecteur U' (resp $\overline{U'}$) représente les coordonnées de D (resp D') on a

$$U' = (K_1 + iK_2)\,U \text{ et } \overline{U'} = (K_1 - iK_2)\,U.$$

en utilisant les matrices antisymétriques $K_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La relation géométrique de conjugaison par rapport à (E) se traduit par

$${}^t\overline{U'}\,H\,U' = 0$$

ou encore par

$${}^tU.{}^t(K_1 - iK_2).H.\,(K_1 + iK_2)\,U=0$$

La partie antisymétrique ${}^tK_2.H\,K_1 - {}^tK_1.H\,K_2$ de la matrice n'a aucun effet sur l'équation qui ne dépend donc que de ${}^tK_1.H\,K_1 + {}^tK_2.H\,K_2$ la partie symétrique

On a donc trouvé l'équation tangentielle de la droite (AB):

$${}^tU.({}^tK_1.H\,K_1 + {}^tK_2.H\,K_2)U.=0.$$

Cette équation peut encore être notée ${}^tU\,\Phi(H)\,U = 0$ en introduisant l'application

$$\Phi:\begin{pmatrix} p & p' & q' \\ p' & q & r' \\ q' & r' & r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -r & 0 & q' \\ 0 & -r & r' \\ q' & r' & -p-q \end{pmatrix}.$$

2. Exemples

a) Si la conique possède un centre, sommet de l'angle droit, la matrice H prend alors la forme suivante:

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \varepsilon\in\{-1,1\})$$

et la matrice $\Phi(H)$ de l'équation tangentielle de l'enveloppe de (AB) est

$$\Phi(H)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{1}{a^2}+\frac{\varepsilon}{b^2}) \end{pmatrix}$$

On trouve donc, dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole avec a<b, l'équation tangentielle d'un cercle et dans le cas d'une hyperbole avec a>b, le vide.

b) Si le sommet de l'angle droit est sur la conique, on a, avec les mêmes notations

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\varepsilon}{b^2} & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \Phi(H)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\varepsilon}{b^2}\right) \end{pmatrix}$$

L'équation tangentielle est donc $\quad 2\alpha uw+2\beta vw=(\frac{1}{a^2}+\frac{\varepsilon}{b^2})w^2$

ou encore $\quad 2\alpha u+2\beta v=(\frac{1}{a^2}+\frac{\varepsilon}{b^2})\,w \quad$ ou $w=0$.

c'est-à-dire celle du faisceau[20] de droites qui contient le point de coordonnées homogènes:

$$(2\alpha,\ 2\beta, -(\frac{1}{a^2}+\frac{\varepsilon}{b^2})).$$

3. Cas général du cercle.

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 1. Le repère est centré en Ω intérieur au disque de contour le cercle. On peut écrire l'équation générale du cercle dans un repère orthonormé centré en Ω et tel que (ΩO) soit le support de l'axe des abscisses :

$$x^2+y^2-2\alpha x-1+\alpha^2=0$$

On a $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1+\alpha^2 \end{pmatrix}$ et $\quad \Phi(H)=\begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 \\ -\alpha & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

La matrice de la conique solution est l'inverse de la matrice $\Phi(H)$:

$$\begin{pmatrix} -2(1-\alpha^2) & 0 & \alpha(1-\alpha^2) \\ 0 & -2+\alpha^2 & 0 \\ \alpha(1-\alpha^2) & 0 & (1-\alpha^2)^2 \end{pmatrix}.$$

[20]Dans le cas d'une hyperbole équilatère toutes ces droites sont parallèles et le point recherché est à l'infini.

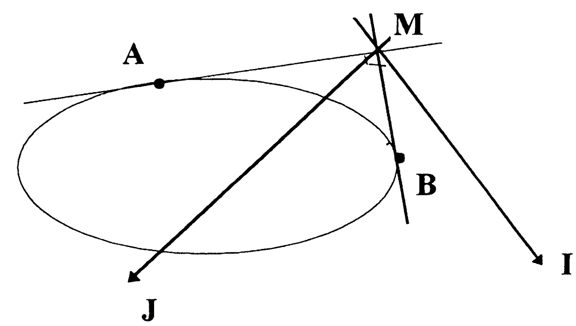
On trouve comme au paragraphe 1 l'équation d'une conique $\dfrac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{\frac{(2-\alpha^2)}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = 1$.

En posant $a^2 = \dfrac{(2-\alpha^2)}{4}$ et $b^2 = \dfrac{(1-\alpha^2)}{2}$, après avoir remarqué que ces deux quantités sont positives puisque $0<\alpha<1$, on obtient une ellipse centrée en $\omega(\frac{\alpha}{2};0)$ (milieu de $[\Omega O]$), de paramètres a, b. On a $c^2 = \dfrac{\alpha^2}{4}$ et donc l'excentricité vaut $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2-\alpha^2}}$

4. Application au cercle orthoptique

On mène d'un point M deux tangentes orthogonales à une conique fixée. On cherche le lieu des points M.

On appelle $H = \begin{pmatrix} p & p' & q' \\ p' & q & r' \\ q' & r' & r \end{pmatrix}$, la matrice de la conique dans un repère projectif. Désormais le point M n'est plus au centre.



Les équivalences

$$(MA) \perp (MB) \Leftrightarrow [(MA);(MB);(MI);(MJ)] = -1$$

$\Leftrightarrow$ (MI) et (MJ) sont conjugués par rapport à (H).

$\Leftrightarrow$ $(MI)^*$ et $(MJ)^*$ sont conjugués par rapport à (H).

permettent cette fois d'énoncer le résultat suivant:

Les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires si et seulement si les pôles $(MI)^*$ et $(MJ)^*$ des droites (MI) et (MJ) sont conjugués par rapport à la conique.

a) Equation générale

$$m(X,Y,Z) \in (MI) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & 1 & x \\ Y & i & y \\ Z & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow izX - zY + (y-ix)Z = 0.$$

Soit (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du pôle de (MI). L'équation de la polaire de ce pôle est

$$(x_0, y_0, z_0)\, H \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0.$$

Or cette droite a aussi une équation de la forme $(iz, -z, (y-ix)) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$.

On a donc (à un facteur de proportionnalité près) $(x_0, y_0, z_0)\, H = (iz, -z, y-ix)$ donc en transposant

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si l'on note U le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et U' le vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ qui représente les coordonnées de $(MI)^*$ et si l'on reprend les notations de la page 44, l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme:

$$U' = H^{-1}(K_2 - iK_1)\, U.$$

Comme la conjugaison respecte les sommes et les produits on obtient de la même façon les coordonnées de $(MJ)^*$: $\overline{U'} = H^{-1}(K_2 + iK_1)\, U.$

On trouve donc après des calculs similaires à ceux de la page 44 que l'équation de conjugaison des deux pôles par rapport à la conique est:

$$^t\overline{U'}\, H\, U' = 0$$

ou encore

$$^t\, U.^t(K_2 + iK_1).\, H^{-1}H.\, H^{-1}(K_2 - iK_1)\, U.=0$$
$$^t\, U.^t(K_2 + iK_1).\, H^{-1}(K_2 - iK_1)\, U.=0$$

Comme précédemment c'est la partie symétrique $^tK_1\, H^{-1}.K_1 + {}^tK_2.H^{-1}\,{}^tK_2$ qui définit l'équation du lieu recherché.

La traduction algébrique de cette condition permet d'associer à la matrice H de départ une nouvelle matrice $\Phi(H^{-1})$ qui, dans ce cas, donne directement le lieu des points M recherché. C'est donc la même application linéaire, opérant sur l'algèbre des matrices qui permet de résoudre le problème de l'enveloppe de l'équerre et celui du lieu des sommets de l'équerre exinscrite à la conique. Simplement dans le premier cas, il s'agit d'une équation tangentielle (qu'un passage par la comatrice de $\Phi(H)$ permet de ramener à une équation ordinaire) alors que dans le second on a trouvé une équation ordinaire. Cet exercice illustre comment la dualité algébrique s'articule sur la dualité géométrique.

Exemples :

En considérant le cas d'une conique à centre *(E)* on obtient les matrices suivantes:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } H^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \Phi(H^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a^2+\varepsilon b^2) \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est celle d'un cercle centré au centre de la conique et de rayon $\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2}$ si l'on suppose que $a^2+\varepsilon\, b^2 > 0$, c'est-à-dire si l'on a pris une ellipse ou une hyperbole avec $a>b$. Ce cercle est le cercle **orthoptique** de la conique.

Dans le cas d'une hyperbole équilatère ce cercle se réduit à un cercle point.

Pour une parabole on part de la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont l'inverse est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{p} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $\Phi(H^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{p} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et correspond à l'équation $2\frac{1}{p}zx + z^2=0$. Le lieu du sommet de l'équerre est donc à la droite de l'infini, et à la verticale d'équation affine $x=-\frac{p}{2}$, c'est-à-dire la directrice de la parabole.

C. Polarité inverse

1. Etude élémentaire.

a) Généralités.

Définition

Etant donnés un cercle (C) (du plan euclidien P) de centre O, de rayon $R>0$, et (Γ) une courbe admettant, en chacun de ses points, une tangente ne passant pas par O ; on peut alors construire point par point une courbe (Γ') en considérant les pôles des tangentes de (Γ) par rapport à (C).
(Γ') est appelée *la polaire inverse* de (Γ) (par rapport à (C)).

Remarques :
Il est assez clair que la courbe (Γ') sera d'autant plus régulière que la courbe (Γ) le sera à un degré supérieur. On soupçonne que (Γ') sera continue quand (Γ) est de classe C^1 et qu'elle aura des tangentes dès que (Γ) sera de classe C^2. Enfin, on imagine que les (éventuelles) tangentes de (Γ') seront les polaires des points de (Γ). (Ainsi (Γ) sera-t-elle la polaire inverse de (Γ') !)

Supposons (Γ) donnée par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t),y(t))$ dans le repère orthonormal $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ de P (où O est, rappelons le, le centre de (C)). En M_0 de coordonnées $(x_0=x(t_0),y_0=y(t_0))$, la tangente à (Γ), (T_0) a pour équation :

$$xy_0' - yx_0' = \Delta_0$$

où l'on a noté $x_0' = x'(t_0)$, $y_0' = y'(t_0)$ et $\Delta_0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_0' \\ y_0 & y_0' \end{vmatrix}$

On voit bien que (T_0) passe par l'origine de R si et seulement si $\Delta_0 = 0$ et on reconnaît les coordonnées du pôle de (T_0) (par rapport à (C)) dès que $\Delta_0 \neq 0$, à l'aide des constantes de l'équation de (T_0) *(cf I.2)*, on a :

$$\begin{cases} \bar{x}(t_0) = \dfrac{y_0'}{\Delta_0} R^2 \\ \bar{y}(t_0) = -\dfrac{x_0'}{\Delta_0} R^2 \end{cases}$$

Ainsi la courbe (Γ'), polaire inverse de la courbe (Γ), de paramétrisation $[x(t),y(t)]$, par rapport à (C) (de centre O, de rayon R) est-elle donnée par la paramétrisation :

$$(*)\quad \begin{cases} \bar{x}(t) = \dfrac{y'(t)}{\Delta(t)} R^2 \\ \bar{y}(t) = -\dfrac{x'(t)}{\Delta(t)} R^2 \end{cases} \quad \text{où } \Delta(t) = x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$$

On en déduit aussitôt la continuité de (Γ') dès que (Γ) est de classe C^1 (partout où $\Delta(t) \neq 0$).

Si de plus (Γ) est de classe C^2, on peut considérer les dérivées de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \dfrac{\Delta y'' - \Delta' y'}{\Delta^2} = -y\dfrac{x'y'' - x''y'}{\Delta^2} \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = -\dfrac{x''\Delta + x'\Delta'}{\Delta^2} = x\dfrac{x'y'' - x''y'}{\Delta^2} \end{cases}$$

(à la constante multiplicative près R^2)

Il s'ensuit $x\dfrac{d\bar{y}}{dt} - y\dfrac{d\bar{x}}{dt} = \dfrac{x'y'' - x''y'}{\Delta^2}$ (qu'on pourrait noter $\bar{\Delta}(t)$?) de sorte que, si l'on applique les formules de (*) à la courbe (Γ'), on retrouve x, y, c'est-à-dire exactement :

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}(t) = \dfrac{\frac{d\bar{y}}{dt}}{\bar{\Delta}(t)} = x(t) \\ \bar{\bar{y}}(t) = \dfrac{\frac{d\bar{x}}{dt}}{\bar{\Delta}(t)} = y(t) \end{cases}$$

Conclusion :
Dès que (Γ) est de classe C^2, elle est la polaire inverse de (Γ').

<u>Quelques exemples simples :</u>
(1) Prenons pour (Γ) la droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \lambda t \\ y(t) = \beta + \mu t \end{cases}$$

qui donne pour équation cartésienne $\mu x - \lambda y = \mu\alpha - \lambda\beta$.

(Γ) passe par $A(\alpha,\beta)$, est dirigée par $\vec{u}(\lambda,\mu)$ et ne contient l'origine O de R que si :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \mu \end{vmatrix} = 0$$

qui correspond précisément à $\Delta(t)$!

Prenons pour simplifier (C) de rayon 1, les formules (*) donnent dans ce cas très particulier :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \dfrac{\mu}{\mu\alpha - \lambda\beta} \\ \bar{y}(t) = \dfrac{-\lambda}{\mu\alpha - \lambda\beta} \end{cases}$$

c'est-à-dire les coordonnées d'un point, le pôle de la droite (Γ) par rapport à (C).

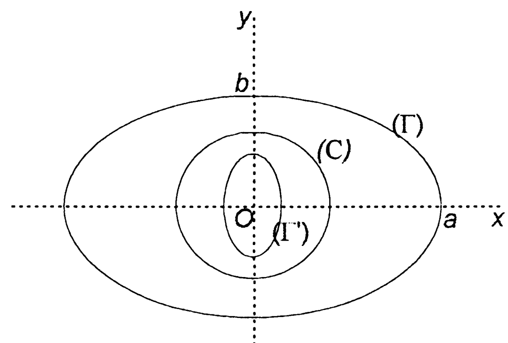
(2) Prenons pour (Γ), une ellipse de centre O, de demi-axes a et b et (C) le cercle de centre 0, de rayon 1 ((Γ) et (C) sont donc concentriques !).
On peut paramétrer (Γ) de la façon suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$ et $\Delta(t) = ab$

si bien que la paramétrisation de (Γ') est $\begin{cases} \bar{x}(t) = \dfrac{1}{a}\cos t \\ \bar{y}(t) = \dfrac{1}{b}\sin t \end{cases}$

(Γ') est (bien sûr) une ellipse de centre O : son axe focal est orthogonal à l'axe focal de (Γ) :



On se pose naturellement la question de savoir ce que devient (Γ') quand (Γ) est une ellipse, voire un cercle ou une hyperbole non plus centrés en O. C'est l'objet du paragraphe suivant.

b) Polaire inverse d'une conique par rapport à un cercle (ou une autre conique)
Théorème
La polaire inverse d'un cercle par rapport à un cercle (C) (de centre O, de rayon a) est une conique dont le point O est un des foyers.

<u>1ère démonstration :</u>
On considère (Γ) sous la forme paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + a\cos t \\ y(t) = \beta + a\sin t \end{cases}$$

On a $\begin{cases} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = a\cos t \end{cases}$ et $\Delta(t) = a(a + \alpha\cos t + \beta\sin t)$

Donc (Γ') est donnée par la paramétrisation :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \dfrac{\cos t}{a + \alpha\cos t + \beta\sin t} \\ \bar{y}(t) = \dfrac{\sin t}{a + \alpha\cos t + \beta\sin t} \end{cases}$$

On en déduit $\rho(t) = \sqrt{\bar{x}(t)^2 + \bar{y}(t)^2} = \dfrac{1}{|a + \alpha\cos t + \beta\sin t|}$

(il s'agit de la distance OM', où M' est le point caractéristique de (Γ'))

Si on pose $d = O\Omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{d}$ $\sin\theta = \dfrac{\beta}{d}$, on peut encore écrire :

$$\rho(t)=\frac{\frac{1}{a}}{\left|1+\frac{d}{a}(\cos\theta.\cos t+\sin\theta.\sin t)\right|}=\frac{\frac{1}{a}}{\left|1+\frac{d}{a}\cos(t-\theta)\right|}$$

On reconnaît là, l'équation en polaire d'une conique d'excentricité $e=\frac{d}{a}$ et de paramètre $p=\frac{1}{a}$[21].

On remarque que:

(Γ') est une ellipse si $d<a$, c'est-à-dire que O est dans le disque de centre Ω, de rayon a; dans ce cas, aucune tangente à (Γ) ne passe par O et (Γ') n'a pas de "point à l'infini".

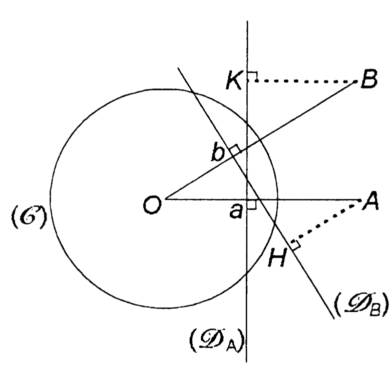
(Γ') est une parabole si $d=a$, c'est-à-dire que O est sur (Γ); dans ce cas, la tangente à (Γ) en O donne un "point à l'infini" à (Γ').

Enfin, (Γ') est une hyperbole si $d>a$, c'est-à-dire que O est à l'extérieur du disque de centre Ω, de rayon a; dans ce cas, il existe deux tangentes à (Γ) passant par O qui donnent "deux points à l'infini" à (Γ').

2$^{\text{ème}}$ démonstration :

(1) On démontre d'abord l'égalité suivante dite de "Salmon" :

Si (C) est un cercle de centre O, A et B deux points de polaires $\mathscr{D}_{(A)}$, $\mathscr{D}_{(B)}$ et d'inverses a, b par rapport à (C),



Si on appelle H (respectivement K) le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}_{(B)}$ (respectivement de B sur $\mathscr{D}_{(A)}$),

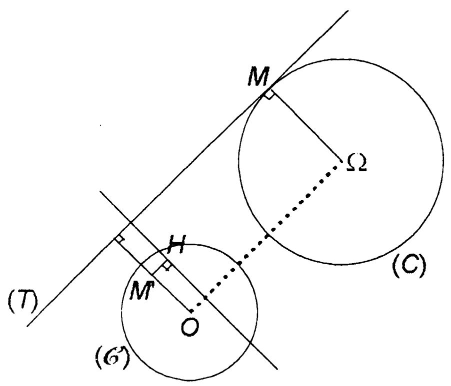
Alors $OA.BK=OB.AH$

(Il suffit d'écrire :

$$\vec{OA}.\vec{BK}=\vec{OA}.(\vec{BO}+\vec{Oa}+\vec{aK})$$
$$=\vec{OA}.\vec{BO}+R^2+0$$
$$\vec{OB}.\vec{AH}=\vec{OB}.(\vec{AO}+\vec{Ob}+\vec{bH})$$
$$=\vec{OB}.\vec{AO}+R^2+0\ )$$

(2) On considère (C) (le cercle de centre O, ...), (Γ) (le cercle de centre Ω de rayon a tel que $O\Omega=d>0$).

[21] Par définition, $p=eh$ où h est la distance du foyer, ici O, à la directrice associée.



M un point de (Γ); (T) la tangente à (Γ) en M; M' le pôle de (T) par rapport à (C) $(\mathscr{D})$la polaire de Ω par rapport à (C), H le projeté orthogonal de M' sur $(\mathscr{D})$
Puisque M est le projeté orthogonal de Ω sur (T) et (T) la polaire de M', l'égalité de Salmon donne ici :

$$\frac{M'O}{M'H} = \frac{\Omega O}{\Omega M} = \frac{d}{a}$$

La courbe (Γ') est donc une conique de foyer O dont la directrice associée est la droite $(\mathscr{D})$ et dont l'excentricité a pour valeur $\frac{d}{a}$.

2. Polaire réciproque d'une courbe par rapport à une conique non dégénérée.

Définition: Etant donnée une conique (C) (non dégénérée) d'équation ${}^t\mathscr{X}A\mathscr{X}= 0$ et une courbe (Γ) de classe C^1 on appelle polaire réciproque de (Γ) par rapport à (C) l'ensemble des pôles des tangentes à (Γ) dans la polarité par rapport à (C).

Remarque: par le principe de réciprocité polaire cette transformation est égale à son application réciproque, et est donc involutive.

Expressions analytiques:

(1) Si la courbe (Γ) est définie implicitement dans l'espace projectif par une équation du type $F(X,Y,Z) =0$ avec F de classe C^1 alors la tangente $T_{\mathscr{X}_0}$ à la courbe (Γ) en un point $\mathscr{X}_0$ non singulier est d'équation ${}^t\,\mathbf{grad}\, F_{\mathscr{X}_0}\, \mathscr{X}= 0$, le pôle $(T_{\mathscr{X}_0})^*$ de cette tangente est donc

$$(T_{\mathscr{X}_0})^* = A^{-1}\,(\mathbf{grad}\, F_{\mathscr{X}_0})$$

Par exemple, la droite d'équation ${}^t\,\mathscr{U}\mathscr{X}= 0$, dont le gradient est $\mathscr{U}$ a pour polaire inverse l'unique point de coordonnées $A^{-1}\mathscr{U}$. Et donc par réciprocité polaire, au point $\mathscr{X}_0$ correspond la droite d'équation ${}^t(A\mathscr{X}_0)\, \mathscr{X}= 0$. Ainsi les effets de la réciprocité polaire quand on se restreint aux points et aux droites coïncident avec les effets de la polarité ordinaire par rapport à la conique (C).

(2) Si la courbe (Γ) est définie explicitement par une fonction ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$\phi\colon (u,v) \to (X,Y,Z)$$

l'équation de la tangente au point $\mathscr{X}_0$ de paramètres $(u_0\,,v_0)$ non singulier est

$${}^t\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)_{\mathscr{X}_0} \mathscr{X}= 0$$

Son pôle a donc pour coordonnées

$$A^{-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) = A^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial u}\wedge A^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial v}$$

Proposition : La correspondance par polarité réciproque conserve les birapports.

En effet, la polaire inverse d'une droite est son pôle par rapport à (C) et l'on sait que le birapports d'un faisceau de quatre droites est égal au birapport de leur pôles.

Théorème : La polaire réciproque d'une conique (associée à une matrice B) par rapport à une conique (associée à une matrice A) est une conique (associée à une matrice $AB^{-1}A$).

En appliquant la décomposition vue en (1) au cas où $(\textbf{grad}\, F_{\mathscr{X}_0}) = B\mathscr{X}_0$ on trouve

$$\mathscr{X}_1 = (T_{\mathscr{X}_0})^* = A^{-1}\, B\mathscr{X}_0$$

et donc puisque $\mathscr{X}_0 = B^{-1}\, A\mathscr{X}_1$

$$^t\, \mathscr{X}_0 B\mathscr{X}_0 = 0 \Leftrightarrow {}^t\, \mathscr{X}_1\, AB^{-1}A\mathscr{X}_1 = 0$$

Proposition : Au couple constitué par un point et sa polaire par rapport à la conique (Γ) correspond par polarité inverse, le couple constitué par une droite et son pôle par rapport à la polaire inverse de (Γ).

Démonstration :
Nous avons au départ un point $\mathscr{X}_0$ et sa polaire par rapport à (Γ) la droite d'équation ${}^t(B\mathscr{X}_0).\mathscr{X} = 0$.
Par polarité inverse le point $\mathscr{X}_0$ devient la droite d'équation ${}^t(A\mathscr{X}_0).\mathscr{X} = 0$, et sa polaire devient le point de coordonnées $A^{-1}B\mathscr{X}_0$.
Or dans la polarité par rapport à la conique image, la polaire de ce point est la droite d'équation ${}^t(AB^{-1}AA^{-1}B\mathscr{X}_0).\mathscr{X} = 0$, soit ${}^t(A\mathscr{X}_0).\mathscr{X} = 0$.

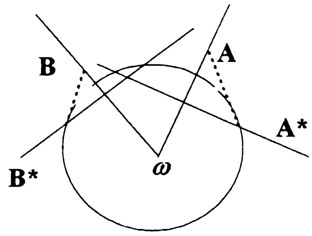
Remarque :
Cherchons de quel point la droite à l'infini est l'image par polarité inverse.
Soit ${}^t\mathscr{T} = (0,0,1)$. Une équation de la droite à l'infini est donc ${}^t\mathscr{T}\mathscr{X} = 0$. C'est la polaire inverse du point $\mathscr{C} = A^{-1}\mathscr{T}$.
Deux cas se présentent. Ou bien $\mathscr{C}$ est à distance finie, et dans ce cas c'est le centre de la conique directrice, ou bien $\mathscr{C}$ appartient lui-même à la droite infinie, et donc ${}^t\mathscr{T}A^{-1}\mathscr{T} = 0$. (c'est l'équation tangentielle de la conique directrice). La conique (C) est donc tangente à la droite à l'infini, c'est une parabole.

Proposition : Si la conique directrice n'est pas une parabole, son centre $\mathscr{C}$ admet la droite à l'infini comme polaire inverse. Dans ce cas la conique image possède un centre si et seulement si (Γ) ne contient pas $\mathscr{C}$.

Si la conique image (Γ') possède un centre $\mathscr{D}$, ce centre est le pôle de la droite à l'infini par rapport à la (Γ'). A ce système correspond par polarité inverse, le centre de la conique directrice et sa polaire par rapport à (Γ). La conique (Γ) ne contient donc pas le centre de (C).
Si la conique image (Γ') ne possède pas de centre, elle est tangente en un point $\mathscr{X}$ à la droite à l'infini. Au système constitué par le point $\mathscr{X}$ et par la droite à l'infini, correspond par polarité inverse, le centre de la conique directrice et sa polaire par rapport à (Γ). La conique (Γ) contient donc dans ce cas le centre de (C).

Corollaire : Pour que la polaire inverse d'une conique (Γ) soit une parabole, il faut et il suffit que (Γ) passe par le centre de la conique directrice (C).

Applications :
La méthode des polaires réciproques, appliquée lorsque (C) est un cercle de centre ω, transforme un cercle du plan en une conique ayant pour foyer le point ω. Ceci permet de ramener l'étude de certaines propriétés des coniques à celle du cercle. On utilise de plus dans ce cas la proposition suivante.



Si les points A et B sont transformés en les droites A^* et B^*, on a

$$((\omega A), ((\omega B)) \equiv (A^*, B^*) \qquad [\pi]$$

(1) Lieu des points d'où l'on voit une parabole donnée sous un angle constant.

Nous avons traité cette situation au premier chapitre, par des moyens élémentaires. Examinons comment on peut résoudre le problème par la méthode des polaires réciproques.

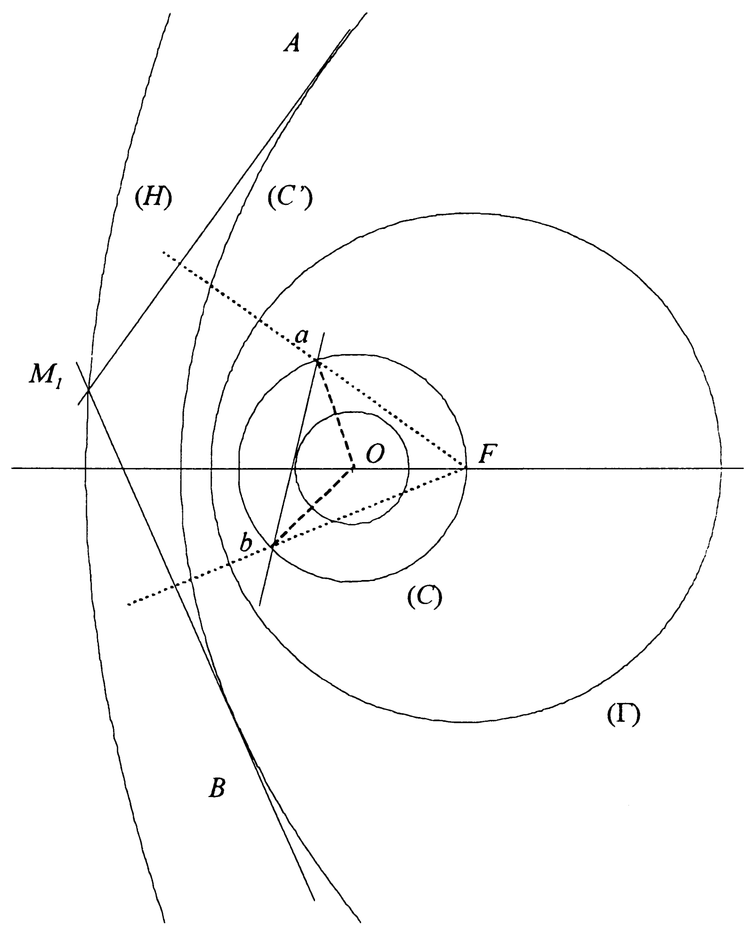
Nous considérons la parabole de foyer F, (C'), comme image par polarité inverse d'un cercle (C) (de centre O et de rayon R) qui passe par le centre F du cercle directeur (Γ). Aux tangentes (MA) et (MB) qui voient la parabole sous une angle constant α à π près, correspondent deux points a et b (leurs pôles) situés sur le cercle (C) tels que

$$((Fa),(Fb)) \equiv \alpha \quad [\pi].$$

Si α n'est pas droit, la droite $(ab)= M^*$ enveloppe donc le cercle de centre O et de rayon $R\,|\cos \alpha|$. Le point M décrit l'image de ce lieu par la polarité réciproque, c'est-à-dire une conique de foyer F et d'excentricité

$$\frac{R}{R\,|\cos \alpha|} = \frac{1}{|\cos \alpha|}.$$

Cette conique est donc une hyperbole (H).



Si α est droit, la droite $(ab)= M^*$ enveloppe donc le point O. Le point M décrit donc la polaire de O par rapport au cercle directeur. Appelons F' le symétrique de F par rapport à O et Ω le point à l'infini de la droite $(F'F)$ nous avons

$$[F,F',O,\Omega] = -1.$$

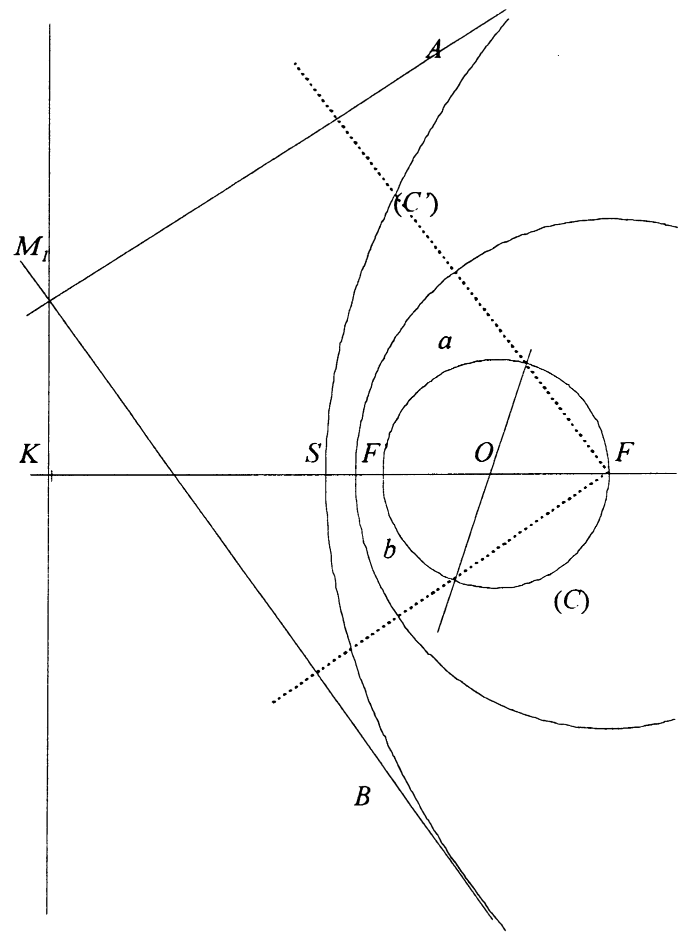
Si nous notons d_M la droite perpendiculaire en M à (FF') nous avons

$$[d_F, d_{F'}, d_O, d_\Omega] = -1.$$

Les pôles de ces trois droites sont donc aussi en division harmonique, donc en remarquant que le pôle de d_Ω la droite à l'infini est F, celui de d_F est Ω, et celui de $d_{F'}$ est S le sommet de la parabole. On a donc (si K est le pôle de d_O)

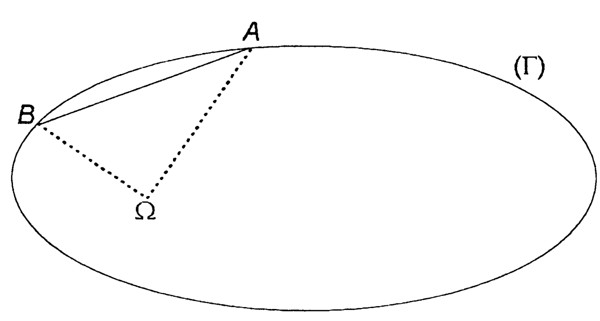
$$[\Omega, S, K, F] = -1.$$

Le point K est donc le symétrique de F par rapport à S. Le lieu recherché est la directrice de la parabole.



(2) Lieu des points d'où l'on voit une ellipse donnée sous un angle droit.

On considère une fois pour toute une ellipse (Γ), un point Ω dans le plan de l'ellipse de sorte que deux demi-droites orthogonales issues de Ω coupent (Γ) en deux points A et B. Pour être plus précis et plus simple, on prendra Ω à l'intérieur de (Γ) et l'angle $A\Omega B$ droit et direct



On va utiliser un cercle de centre Ω, noté (C), choisi de sorte qu'il soit compris tout entier à l'intérieur de (Γ)[22], et la polarité inverse par rapport à (C)[23].

Appelons (Γ') la courbe polaire inverse de (Γ): on sait qu'il s'agit d'une conique (c'est le résultat central du développement algébrique qui précède ce chapitre).

---

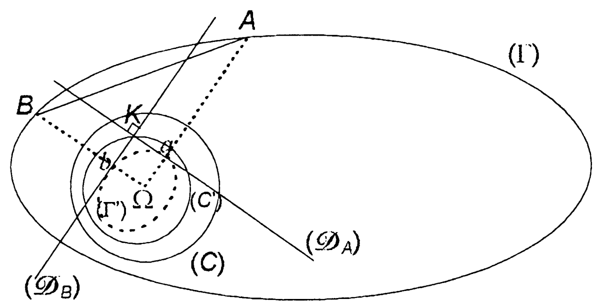
[22] Cette restriction a pour objectif de simplifier la vision des choses. Elle n'entame en rien la généralité du raisonnement qui suit. Plus loin sera étudié le cas où Ω est sur (Γ), auquel cas cette restriction n'a plus de sens.

[23] On ne précisera pas, dans la suite, systématiquement "par rapport à C" puisqu'aucune confusion ne sera permise.

Compte tenu du choix de (C), on peut même affirmer que (Γ') est une ellipse; en effet, toutes les tangentes à (Γ) sont extérieures à (C), si bien que (Γ') est bornée par (C)...

Les polaires ($\mathscr{D}_A$) et ($\mathscr{D}_B$) de A et de B sont, par définition, des tangentes à (Γ'). Or, par construction les droites ($\mathscr{D}_A$) et ($\mathscr{D}_B$) sont orthogonales à (ΩA) et (ΩB).

Donc, comme par ailleurs: $(\Omega A)\perp(\Omega B)$, on fait ainsi apparaître un rectangle, disons ΩaKb, où on a noté a (resp b) l'inverse de A (resp B) par rapport à (C), et K l'intersection des droites ($\mathscr{D}_A$) et ($\mathscr{D}_B$).



En tant que tel, K est le pôle de la droite (AB), de sorte que, si (AB) parcourt l'ensemble des tangentes de l'enveloppe recherchée, disons (E), K parcourt, lui, la polaire inverse de (E), disons (E').
Mais on sait que ($\mathscr{D}_A$) et ($\mathscr{D}_B$) sont deux tangentes à (Γ') perpendiculaires; donc, quand A (et B) parcourent l'ellipse (Γ), K parcourt le lieu des points d'intersection des tangentes perpendiculaires à l'ellipse (Γ'). Ce lieu (il s'agit précisément de (E')) est connu, il s'agit du cercle orthoptique de (Γ').
On aboutit à la conclusion suivante: (E) est la polaire inverse du cercle (E'), c'est donc une conique[24]! Par souci du détail, on peut identifier la nature exacte de cette conique en cherchant ses points à l'infini. Par construction, on vérifie aisément que Ω est à l'intérieur de l'ellipse (Γ'), *a fortiori*, Ω est à l'intérieur de son cercle orthoptique (E'). Par conséquent, aucune tangente à (E') ne passe par Ω et aucun point de (E) n'est envoyé à l'infini: (E) est bien une ellipse!
Il nous est permis d'énoncer finalement :

> L'enveloppe des droites (AB), dans le cas où Ω est à l'intérieur (au sens stricte) de l'ellipse (Γ), est une ellipse.

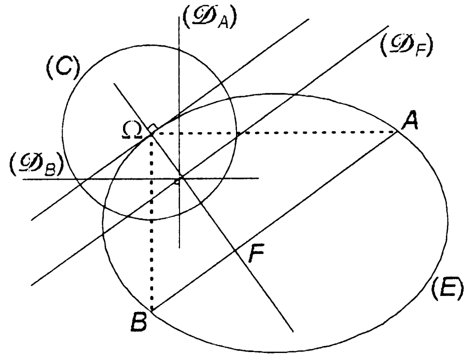
Remarque Etude du cas où Ω est situé sur l'ellipse (Γ).

La courbe (Γ') est alors une parabole et non plus une conique à centre. En effet, parmi les tangentes à (Γ), il y en a une et une seule qui passe par Ω, à savoir la tangente en Ω! La polaire inverse (Γ') a donc un point à l'infini et un seul, c'est donc bien une parabole.
Le "cercle orthoptique" de (Γ') n'est plus un cercle mais une droite, exactement la directrice de (Γ')[25]; (E') est cette droite et sa polaire inverse se réduit à un point, son pôle! L'ensemble (E) se réduit à un point appelé *point de Frégier*, autrement dit les droites (AB) sont concourantes.

---

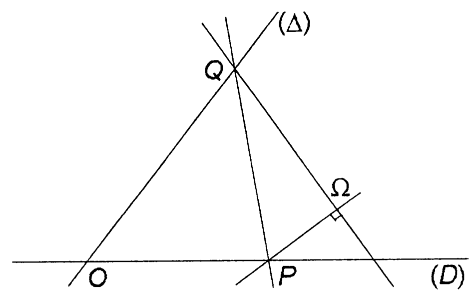
[24] ...dont l'un des foyers est Ω!

[25] Résultat élémentaire: la directrice d'une parabole est le lieu des points d'où l'on voit la parabole sous un angle droit.

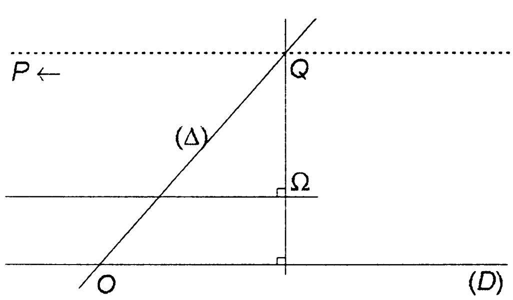


(3) Lieu des points d'où l'on voit deux sécantes sous un angle droit.

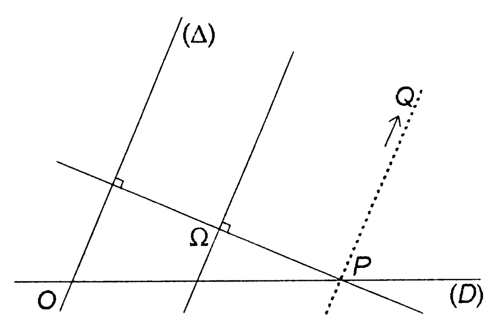
On considère deux droites D et Δ, sécantes en O (c'est-à-dire une conique dégénérée) et un point Ω non situé sur ces deux droites. On construit le triangle rectangle ΩPQ tel que P soit sur D, Q sur Δ.
On recherche l'enveloppe des droites (PQ).



NB: Il existe deux situations critiques représentées ci-dessous:



$(\Omega Q) \perp D$: P est le point à l'infini de D, la droite (PQ) est la parallèle à D passant par Q.

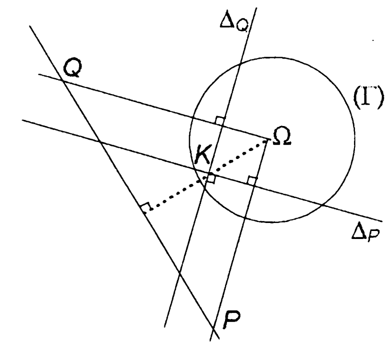


$(\Omega P) \perp \Delta$: Q est le point à l'infini de Δ, la droite (PQ) est la parallèle à Δ passant par P.

On introduit la polarité inverse par rapport à (Γ) un cercle centré en Ω.

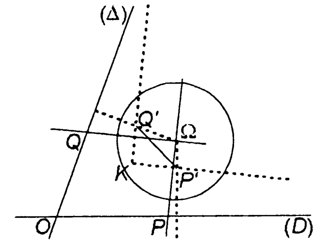
Quels que soient P sur D et Q sur Δ, la polaire de P (resp Q) par rapport à (Γ) est une droite Δ_P (resp Δ_Q) perpendiculaire à (ΩP) (resp (ΩQ)). Puisque les droites (ΩP) et (ΩQ) sont perpendiculaires, Δ_P et Δ_Q le sont également. Leur point d'intersection est K le pôle de la droite (PQ).

Puisque P décrit D, sa polaire Δ_P enveloppe le pôle P' de D. De même Δ_Q enveloppe le pôle Q' de Δ. On en déduit -sauf situations critiques P en O (ou Q en O) pour lesquelles K se confond avec Q' (resp P')- que le triangle $KP'Q'$ est rectangle en K, c'est-à-dire que le point K décrit le cercle de diamètre[26] $[P'Q']$.



Le point K, qui est le point caractéristique de la courbe polaire inverse de l'enveloppe des droites (PQ) décrit un cercle. L'enveloppe recherchée est donc la polaire inverse du cercle de diamètre $[P'Q']$ (par rapport à (Γ) le cercle directeur). C'est donc une conique (C) qui possède zéro point à l'infini, un point à l'infini, ou deux points à l'infini, selon que le point Ω se trouve à l'intérieur, sur la frontière ou à l'extérieur du cercle de diamètre $[P'Q']$.

[26] Si K est sur le cercle de diamètre $[P'Q']$ privé des points P' et Q', on reconstruit le triangle ΩPQ en traçant la perpendiculaire à (KQ') (resp (KP')) passant par Ω qui coupe Δ (resp D) en Q (resp P). On a bien $(\Omega P)\perp(\Omega Q)$ puisque les droites (KQ') et (KP') sont perpendiculaires. Le point K parcourt donc bien entièrement le cercle de diamètre $[P'Q']$.



IV. La mécanique

A. La théorie

1 Mouvement d'un repère mobile dans un repère fixe en dimension 3

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}_1$ les espaces rapportés aux repères orthonormés directs $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. fixe, et $R_t=(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, mobile. On désigne par $(\Omega(t),\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t))$ la position de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{E}$ à l'instant t.

On supposera que les fonctions $\overrightarrow{O\Omega}(t)$, $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ sont au moins de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dans le mouvement de $\mathscr{E}_1$ par rapport à $\mathscr{E}$, la position de Ω étant connue (et donc $\vec{V}_\Omega$), déterminons, à chaque instant, *le champ des vecteurs vitesses* de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{E}$.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M} \text{ et donc}$$

$$(\,*\,)\ \vec{V}_M=\vec{V}_\Omega+\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega M}}{\mathrm{dt}}$$

$\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées dans $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le triplet constant (X,Y,Z) et pour coordonnées dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le triplet (x_1,y_1,z_1) (qui suivent les variations de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$).

On a $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ où P est la matrice orthogonale de passage de la bond ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) à la bond $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Donc les coordonnées de $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega M}}{\mathrm{d}t}$ dans ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) sont : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=$ constante et

celles dans $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sont ${}^tP.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ car ${}^tP=P^{-1}$.

Or ${}^tP.P=I$ à tout instant t, d'où $\dfrac{\mathrm{d}{}^tP}{\mathrm{d}t}.\mathrm{P}+{}^tP.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0$

$\dfrac{\mathrm{d}{}^tP}{\mathrm{d}t}.\mathrm{P}=-{}^tP.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ et sachant que $\dfrac{\mathrm{d}{}^tA}{\mathrm{d}t}=\dfrac{{}^t\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, on obtient $\dfrac{{}^t\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.\mathrm{P}=-{}^tP.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$

soit

$${}^t\left({}^tP.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)=-{}^tP.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi, ${}^tP.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ est antisymétrique.[27]

---

[27] On peut également retrouver cette matrice antisymétrique en posant $\overrightarrow{\Omega M}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$ et en dérivant les deux membres :

Or, toute application antisymétrique φ de $\mathbb{R}^3$ est associée à un vecteur unique $\vec{r}$ tel que :

$$\text{pour tout vecteur } \vec{V} \text{ de } \mathscr{E},\ \varphi(\vec{V}) = \vec{r} \wedge \vec{V}$$

Si $\vec{r} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{r} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et (*) devient :

$$(\ *\ )\ \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \vec{r} \wedge \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{où } \vec{r} = \begin{pmatrix} d \\ -b \\ a \end{pmatrix} \text{ par identification}$$

On retrouve, qu'à chaque instant, le champ des vitesses est *un torseur*, appelé *torseur cinématique* à l'instant t.

La résultante $\vec{r}(t)$ du torseur est appelée le *vecteur rotation instantanée* du mouvement à l'instant t et $\vec{r} \wedge \overrightarrow{\Omega M}$ peut apparaître comme une rotation autour de "l'axe" $\vec{r}$.

M étant un point donné dans $\mathscr{E}_1$, comme par exemple lié à un solide, ses coordonnées x, y et z sont des constantes dans R_r. (*) devient :

$$(\ *\ )\ \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + x\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}} + y\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} + z\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}}$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale donc $\vec{u}^2 = 1 \Rightarrow \vec{u}.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}}$ et donc il existe deux réels a et b tels que $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

De même, en considérant les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, il existe des constantes réelles c, d, e et f telles que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = c\vec{u} + d\vec{w} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}} = e\vec{u} + f\vec{v}$$

Or, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés par la relation $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ d'où :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u} \wedge \vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}}$$

$$ie\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}}$$

$$ie\ (a\vec{v} + b\vec{w}) \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge (c\vec{u} + d\vec{w} = (e\vec{u} + f\vec{v})$$

$$ie\ -b\vec{u} - d\vec{v} = e\vec{u} + f\vec{v}$$

$$\text{et donc } \begin{cases} e = -b \\ f = -d \end{cases}$$

De même, si on utilise, $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$, on obtient, en plus, $a = -c$ et (*) devient :

$$(\ *\ )\ \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + x(a\vec{v} + b\vec{w}) + y(-a\vec{u} + d\vec{w}) + z(-b\vec{u} - d\vec{v})$$

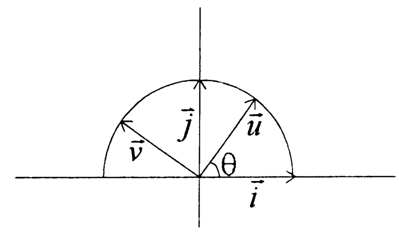
$$(\ *\ )\ \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -d \\ b & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

2. Mouvement plan sur plan

Supposons que le mouvement de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{E}$ soit tel qu'il existe un plan (Π_1) de $\mathscr{E}_1$ qui reste constamment en coïncidence avec un plan (Π) de $\mathscr{E}$.

Choisissons le plan (Π_1) de repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ coïncidant avec (Π) de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tels que l'on ait constamment $\vec{w}=\vec{k}$. On a donc, dans le mouvement de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{E}$, $\dfrac{d\vec{w}}{dt}=\vec{0}$ d'où $e=f=0$.

et finalement $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$.



En considérant $(\vec{i},\vec{u})=\theta$, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})}{dt}=\theta'(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})=\theta'\vec{v} \text{ donc } a=\theta'$$

(*) devient $\vec{V}_M=\vec{V}_\Omega+\vec{r}\wedge\overrightarrow{\Omega M}=\vec{V}_\Omega+\theta'.\vec{k}\wedge\overrightarrow{\Omega M}$

Si $\theta'(t)=0$, le mouvement de (Π_1) sur (Π) est, à l'instant t, un mouvement de translation de vecteur vitesse orthogonal à $\vec{k}$.

Si $\theta'(t)\neq 0$, recherchons les éventuels points où la vitesse s'annule :

$$\vec{V}_M=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{k}\wedge\overrightarrow{\Omega M}=-\frac{1}{\theta'}\vec{V}_\Omega$$

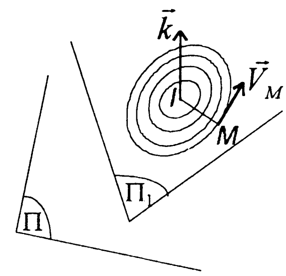
$$\Leftrightarrow\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge\overrightarrow{\Omega M}\right)=-\frac{1}{\theta'}\vec{k}\wedge\vec{V}_\Omega$$

$$\Leftrightarrow(\vec{k}.\overrightarrow{\Omega M})\vec{k}-(\vec{k}.\vec{k})\overrightarrow{\Omega M}=-\frac{1}{\theta'}\vec{k}\wedge\vec{V}_\Omega$$

Or $\vec{k}.\overrightarrow{\Omega M}=0$ et $\vec{k}.\vec{k}=1$ d'où $\vec{V}_M=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{\Omega M}=-\frac{1}{\theta'}\vec{k}\wedge\vec{V}_\Omega$

soit : $\boxed{\overrightarrow{\Omega M}=\frac{1}{\theta'}\vec{k}\wedge\vec{V}_\Omega}$

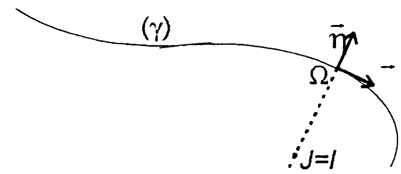
On détermine ainsi un point et un seul, que nous noterons désormais $I(t)$; il s'agit, par définition du *centre instantané de rotation* (c.i.r.) à l'instant t du mouvement de (Π_1) sur (Π).



Nous avons $\vec{V}_I=\vec{0}=\vec{V}_\Omega+\theta'.\vec{k}\wedge\overrightarrow{\Omega I}$ et $\vec{V}_M=\vec{V}_\Omega+\theta'.\vec{k}\wedge\overrightarrow{\Omega M}$ d'où, par soustraction, (*) devient

$$(\,*\,)\ \vec{V}_M=\theta'.\vec{k}\wedge\overrightarrow{IM}$$

Remarque 1 : Dans le cas où $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est le repère de Frenet $(\Omega, \vec{\tau}, \vec{\eta})$ d'une courbe plane (γ), le c.i.r. est le centre de courbure au point Ω.



En effet, soit J le centre de courbure en Ω.
On a $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{\rho}\vec{\eta}$ où ρ est le rayon de courbure.

Posons $(\vec{i},\vec{\tau}) = \theta$, on a dans ce cas $\frac{d\theta}{ds} = \theta'\frac{dt}{ds}$ où s est l'abscisse curviligne sur l'arc (γ) et $s(t) = \int_{t_0}^{t}\left\|\overrightarrow{O\Omega}'(t)\right\|dt = \int_{t_0}^{t}\left\|\vec{V}_\Omega(t)\right\|dt$.

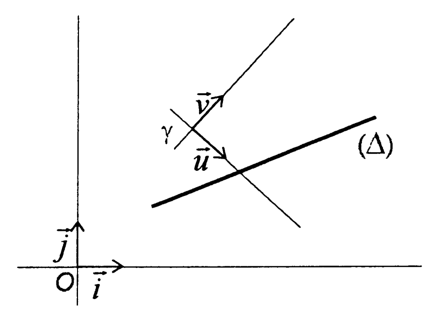
Donc $\frac{ds}{dt} = \left\|\vec{V}_\Omega(t)\right\|$ et $\rho = \frac{\theta'}{V_\Omega}$ nous donnent finalement : $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{V_\Omega}{\theta'}\vec{\eta}$.

Or, si I est le c.i.r. du mouvement de $(\Omega,\vec{\tau},\vec{\eta})$ sur $(O,\vec{i},\vec{j})$ alors :

$$\vec{V}_\Omega = \theta'.\vec{k}\wedge\overrightarrow{I\Omega} \Rightarrow \overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{\theta'}.\vec{V}_\Omega\wedge\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{\theta'}.\vec{k}\wedge\vec{V}_\Omega = \frac{1}{\theta'}.\vec{k}\wedge(V_\Omega\vec{\tau}) = \frac{V_\Omega}{\theta'}\vec{\eta}$$

Donc $I = J$

Remarque 2 : Lorsqu'une droite (Δ) est liée à $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ et dans le cas du mouvement de $(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on peut être amené à déterminer la courbe enveloppe de la famille des droites (Δ) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



Soit alors une enveloppe (γ) et $M(t_0)\in(\gamma)\cap\Delta(t_0)$
La vitesse du point de contact M - que l'on peut voir comme un point de la droite $\Delta(t_0)$ et de l'enveloppe (γ) - a pour direction la droite $(\Delta(t_0))$ et le c.i.r. se trouve sur la normale à $(\Delta(t_0))$.[28]

Dans le cas particulier où la droite enveloppe un point, le c.i.r. $I(t_0)$ est sur la normale à $(\Delta(t_0))$ passant par ce point.

Remarque 3 : L'ensemble des positions dans le plan (Π) de $I(t_0)$ est *la base* du mouvement de (Π_1) sur (Π) (ou trajectoire dans le repère fixe) ; l'ensemble des positions dans (Π_1) de $I(t_0)$ est *la roulante* (ou trajectoire dans le repère mobile).
Dans le cas où $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est le repère de Frenet, la base est *la développée* et la roulante une partie de la droite $(\Omega,\vec{v})$.

3. Compositions de mouvements

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ trois espaces rapportés aux repères orthonormés directs $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $R_1 = (O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ et $R = (O_2, \vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k_2})$.

[28] Ce résultat, réutilisé dans les applications, sera justifié ultérieurement à l'aide des compositions des vitesses (A.3)

Supposons qu'un point M attaché à l'espace $\mathcal{E}_2$ soit en mouvement par rapport à $\mathcal{E}_1$ qui lui même est en mouvement par rapport à $\mathcal{E}$. Nous avons ainsi à distinguer trois mouvements :
- Le mouvement de $\mathcal{E}_2$ (ou M) par rapport à $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}$, qui est appelé mouvement absolu
- Le mouvement de $\mathcal{E}_2$ (ou M) par rapport à $\mathcal{E}_1$, noté $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$, qui est appelé mouvement relatif
- Le mouvement de $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}$, qui est appelé mouvement d'entraînement.

Le mouvement de $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}$ est alors le composé des deux mouvements $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}$ dans cet ordre.
On désigne par $(M(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t))$ la position de M par rapport à $\mathcal{E}_1$. On supposera que les fonctions $\overrightarrow{OM}(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t)$ et $\vec{w}(t)$ sont au moins de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

On a $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{u}(t)\vec{i_1} + \vec{v}(t)\vec{j_1} + \vec{w}(t)\vec{k_1}$

Déterminons la vitesse de M dans $\mathcal{E}$, soit la vitesse absolue de M :

$$\vec{V}_a(M(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right)_E = u(t)\vec{i}_1'(t) + v(t)\vec{j}_1'(t) + w(t)\vec{k}_1'(t) + u'(t)\vec{i}_1(t) + v'(t)\vec{j}_1(t) + w'(t)\vec{k}_1(t)$$

Les trois premiers termes de $\vec{V}_a(M)$ représentent la vitesse absolue de $M(t)$ si on avait envisagé $u' = v' = w' = 0$, soit si M (ou $\mathcal{E}_2$) était attaché à $\mathcal{E}_1$. Ces termes représentent alors la vitesse d'entraînement de M, $\vec{V}_e(M)$.
Les trois autres termes de $\vec{V}_a(M)$ représentent la vitesse obtenue si on avait envisagé $\vec{i_1}' = \vec{j_1}' = \vec{k_1}' = \vec{0}$, soit si $\mathcal{E}_1$ était attaché à $\mathcal{E}$. Ce vecteur représente donc la position par rapport à $\mathcal{E}$ de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{E}_1$. Ces termes représentent alors la vitesse relative de M, $\vec{V}_r(M)$.

On obtient alors la formule dite de la composition des vitesses : $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M)$

Remarques :
a) Détermination de la vitesse relative à l'instant t :
$\mathcal{E}_1$ étant immobilisé par rapport à $\mathcal{E}$ et rien n'étant changé du mouvement de M (ou de $\mathcal{E}_2$) par rapport à $\mathcal{E}_1$ à l'instant t, la vitesse absolue de M à l'instant t dans ce dernier mouvement est la vitesse relative de M à l'instant t.

b) En utlisant le vecteur rotation instantanée du mouvement de $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$ à l'instant t, la formule de la composition des vitesses devient : $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_a(O_1) + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{V}_r(M)$

Application aux c.i.r.
Dans le cas d'un mouvement plan sur plan, considérons (Π_0), (Π_1) et (Π_2) des plans de $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ restant constamment en coïncidence.
Les mouvements $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ sont alors constamment tangents à des rotations d'axes perpendiculaires au plan (Π_0) que nous supposerons être la direction de $\vec{k}$.
Le point de l'axe instantané du mouvement de (Π_2/Π_1), (Π_2/Π_0) ou (Π_1/Π_0) sur Π_0 est le centre instantané du mouvement de (Π_2/Π_1), (Π_2/Π_0) ou (Π_1/Π_0) qui est noté, respectivement, I_1^2, I_0^2 ou I_0^1.

A tout instant, le vecteur rotation instantané du mouvement composé $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0$ des deux mouvements $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ est la somme des vecteurs rotations instantanés des mouvements composants :

$$\vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0) = \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0)$$

<u>Démonstration</u> : La rotation instantanée d'un mouvement étant indépendante du choix de l'origine, on peut supposer qu'à l'instant t, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ont tous la même origine O.
Appliquons alors la formule de la composition des vitesses à un point M et utilisons les vecteurs rotations instantanés :
Pour tout point $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M)$ peut se traduire par :

$$\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M) = \vec{V}_{\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0}(M) + \vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1}(M)$$

soit $\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(O) + \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0}(O) + \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1}(O) + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) \wedge \overrightarrow{OM}$

or $\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(O) = \vec{V}_{\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0}(O) + \vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1}(O)$

et donc $\vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) \wedge \overrightarrow{OM}$

puis, sachant que $\overrightarrow{OM}$ est quelconque : $\vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0) = \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0)$

A tout instant t, les mouvements composants sont tous tangents à des rotations autour d'axes parallèles de direction $\vec{k}$, ce qui nous permet de poser :
$\vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) = (\theta_1^2)'\,\vec{k}$, $\vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) = (\theta_0^1)'\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M) &= \vec{r}(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) \wedge \overrightarrow{I_0^1M} + \vec{r}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) \wedge \overrightarrow{I_1^2M}\\ &= (\theta_1^2)'\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{I_0^1M} + (\theta_0^1)'\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{I_1^2M}\\ &= \vec{k} \wedge \left((\theta_1^2)'\,\overrightarrow{I_0^1M} + (\theta_0^1)'\,\overrightarrow{I_1^2M}\right)\end{aligned}$$

<u>1er cas</u> : $(\theta_1^2)' + (\theta_0^1)' = 0$

$\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M) = (\theta_1^2)'\,\vec{k} \wedge (\overrightarrow{I_0^1M} - \overrightarrow{I_1^2M}) = (\theta_1^2)'\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{I_0^1 I_1^2} = \vec{V}$

$\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M)$ est un vecteur indépendant de M, le mouvement de $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0$ est tangent à une translation dont la vitesse est orthogonale à $\vec{k}$.

<u>2ème cas</u> : $(\theta_1^2)' + (\theta_0^1)' \neq 0$
Soit I le barycentre du système $\{(I_0^1, (\theta_0^1)'); (I_1^2, (\theta_1^2)')\}$

On a, pour tout point M, à l'instant t : $((\theta_1^2)' + (\theta_0^1)')\overrightarrow{IM} = (\theta_1^2)'\,\overrightarrow{I_0^1M} + (\theta_0^1)'\,\overrightarrow{I_1^2M}$

$$((\theta_1^2)' + (\theta_0^1)')\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M).$$

Le mouvement de $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0$ est donc tangent à un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à la direction de $\vec{k}$.
Comme $\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(I) = \vec{0}$, nous pouvons noter ce point I_0^2 et posons $(\theta_0^2)' = (\theta_1^2)' + (\theta_0^1)'$, nous avons alors : $\vec{V}_{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0}(M) = (\theta_0^2)'\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{I_0^2M}$

et, pour tout point M : $(\theta_0^2)'\,\overrightarrow{I_0^2M} = (\theta_1^2)'\,\overrightarrow{I_0^1M} + (\theta_0^1)'\,\overrightarrow{I_1^2M}$

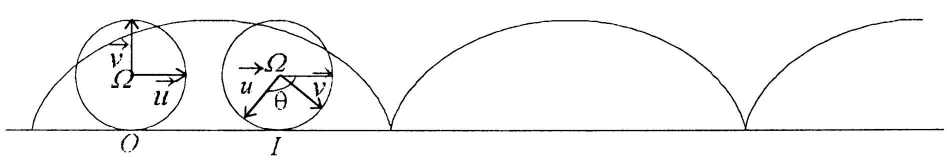
soit, en prenant comme point particulier I_1^2, par exemple : $(\theta_0^2)'\,\overrightarrow{I_0^2 I_1^2} = (\theta_1^2)'\,\overrightarrow{I_0^1 I_1^2}$ et les trois centres de rotations instantanées sont alignés.

Remarque : Si l'une des vitesses angulaire est nulle, soit $(\theta_i^j)'$, le point I_i^j est rejeté à l'infini sur la droite qui joint les deux autres c.i.r. Le mouvement de $\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_i$ est alors tangent à une translation dont la vitesse est portée par la normale à la droite des c.i.r.

B. Quelques applications

1. Etude de la cycloïde

On appelle *cycloïde* d'un plan (Π) toute courbe décrite par un point d'un cercle (C) qui reste constamment dans le plan (Π) et qui roule sans glisser sur une droite (Ox).
Nous supposerons ce cercle de rayon 1 et de centre Ω.

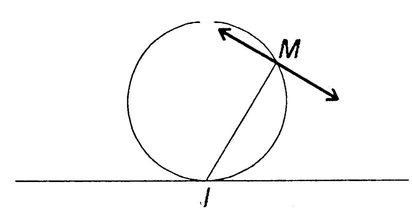


Après un temps t de roulement sans glissement, si $(\vec{u}, \vec{i})=\theta$ alors $\Omega(-\theta,1)$ (car θ est la longueur de l'arc du cercle de rayon 1) et $\theta = \theta'.t$ où θ' est une constante.

Dans ce cas, le c.i.r. est le point I, le point de contact car :

$$\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{\theta'}\vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega = \frac{1}{\theta'}\vec{k} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O\Omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\theta'}\vec{k} \wedge (-\theta'\vec{i}) = -\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{j}$$

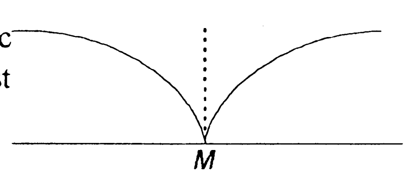
Conséquence :
La connaissance du c.i.r. nous permet d'obtenir le tracé des tangentes à la trajectoire en un point M, c'est la perpendiculaire à (IM) passant par I.



Remarques
a) On peut retrouver le c.i.r. de ce mouvement si on considère la définition suivante du mouvement sans glissement :
On dit que dans un intervalle de temps $[t_0,t_1]$ un solide S, limité par une surface σ, assujettie à rester tangente à la surface-limite σ_1 d'un solide S_1, roule sans glisser sur S_1, lorsque tout point de contact de σ et σ_1, à l'instant t, possède par rapport à S_1 une vitesse nulle, pour tout $t\in[t_0,t_1]$.
On obtient ainsi un point où la vitesse s'annule, par défintion le c.i.r. du mouvement.

b) Lorsque M se trouve sur l'axe (Ox), dans ce cas la vitesse s'annule et la tangente est verticale. Le point est un point de rebroussement.

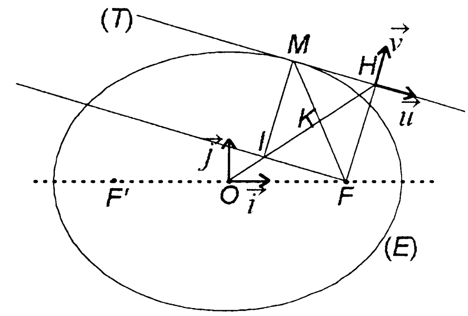
c) $I\in(Ox)$ dans (Π) donc (Ox) est la base du mouvement.
$I\in(C)$ dans (Π) donc (C) est la roulante.



2) Podaire

On cherche le lieu des points H , projetés d'un foyer F sur les tangentes (T) à une ellipse définie comme au 1.

Les droites (HM) enveloppent (E) donc le c.i.r. I du mouvement de $(H, \vec{u}, \vec{v})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se trouve sur la normale à (HM) passant par M. Les normales à (HM) contiennent le point F (ou enveloppent le point F) donc le c.i.r. I se trouve sur la normale à (HF) passant par F (*cf* **remarque 2** du A.2).



Comme la normale en M à (E) est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ où F et F' sont les foyers de (E) alors $\widehat{IMF}=\widehat{IMF'}$.

De plus $IFHM$ est un rectangle donc $\widehat{IMF}=\widehat{IHF}$ donc la droite contenant les points I, K et H est parallèle à (MF').

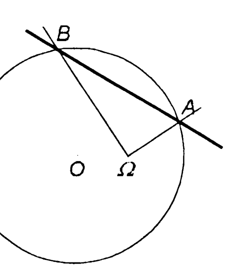
Dans le triangle MFF', comme K est le milieu de $[MF]$ (centre du rectangle $IFHM$) alors (HK) qui est parallèle à (MF') coupe $[FF']$ en son milieu.
Les points O, I, K et H sont alignés.

$O \in (IH) \Rightarrow \vec{V}_H \perp \overrightarrow{OH} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OH}}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{OH} = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OH})^2}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow OH = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ et H se trouve sur un cercle de centre O (qui est le cercle principal de (E)).

C. Retour au problème initial

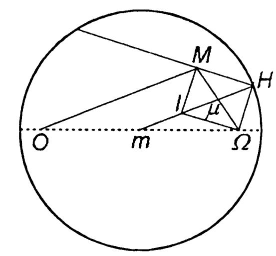
1. Cas du cercle

Soit (C) un cercle que nous supposerons de rayon 1 et Ω un point intérieur à (C) tel que $O\Omega = \alpha$. Soit A et B deux points de (C) tels que $(\Omega A) \perp (\Omega B)$. On cherche l'enveloppe des droites (AB).



On sait que le pied de la hauteur H issue de Ω dans le triangle ΩAB se trouve sur un cercle de centre m, milieu de $[O\Omega]$.

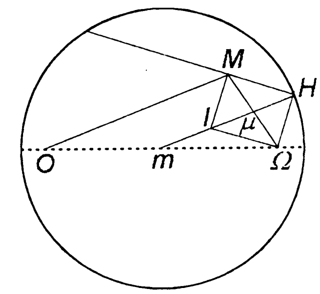
Comme H décrit un cercle de centre m, le c.i.r. I du mouvement de $(H, \vec{u}, \vec{v})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se trouve sur (Hm).
H se trouve sur $(H\Omega)$, le c.i.r. se trouve donc sur la perpendiculaire à $(H\Omega)$ passant par Ω (*cf* **remarque 2** du A.2).



Le point I nous permet ainsi de construire le point caractéristique M de l'enveloppe des droites (AB) en le projetant orthogonalement sur (AB).

m est le milieu de $[O\Omega]$ et μ le milieu de $[M\Omega]$, en appliquant le théorème de Thales dans le triangle $OM\Omega$, (OM) // (mH) et $OM = 2m\mu$

Comme $HMI\Omega$ est un rectangle , on a $M\mu = \mu H$



$$\begin{aligned} OM + M\Omega &= 2m\mu + 2M\mu \\ &= 2(m\mu + M\mu) \\ &= 2\ mH \end{aligned}$$

NB : $\mu \in [mH]$ car I se trouve sur le diamètre $[HH']$ et μ est le milieu de $[IH]$.

En reprenant un résultat du I.D.2; : $mH^2 = \dfrac{2-\alpha^2}{4}$

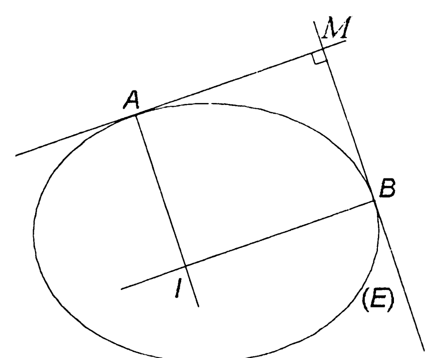
et $OM + M\Omega = \dfrac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ donc M se trouve sur l'ellipse de foyers O et Ω.

2. Cas de l'ellipse

Reprenons l'exercice qui consiste à déterminer le cercle orthoptique de l'ellipse :

(E) est une ellipse. de centre O.

Deux tangentes en A et B à (E) se coupent orthogonalement en M.



Par construction (AM) a pour enveloppe l'ellipse, le c.i.r. I du mouvement de $(M, \vec{u}, \vec{v})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se trouve sur la normale en A à (AM) (*cf* **remarque 2** du A.2). De même, I se trouve sur la normale en B à (BM).

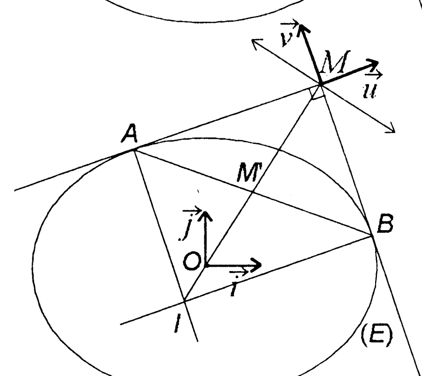
Montrons que $O \in (IM)$

Soit M' le conjugué de M par rapport à l'ellipse. On sait que O, M et M' sont alignés.

D'autre part, $AIBM$ etant un rectangle alors M' est le milieu de $[IM]$.

Donc O, M, M' et I sont alignés.

De nouveau $O \in [IM]$ et M se trouve sur un cercle de centre O.



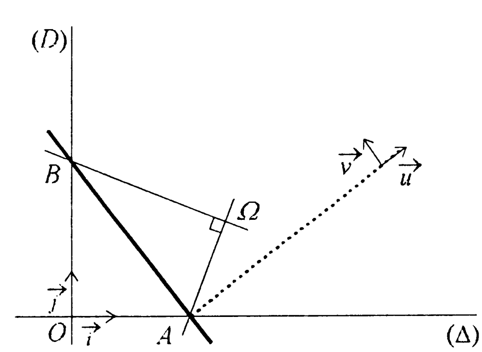
3.Cas d'une conique dégénére

Deux droites perpendiculaires (Δ) et (D) se coupent en O.

Ω, un point du plan hors des deux droites, est un sommet d'un triangle rectangle (équerre) ΩAB avec A sur (Δ) et B sur (D).

On fait " tourner l'équerre ΩAB " de sorte que A (resp. B) parcourt (Δ) (resp. (D)).

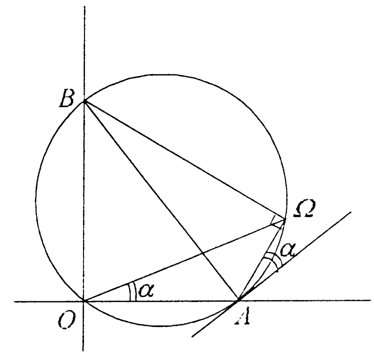
On cherche (sempiternellement) l'enveloppe de la droite (AB).



Considérons le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct de sorte que $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ (cf figure) mobile dans le repère fixe ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

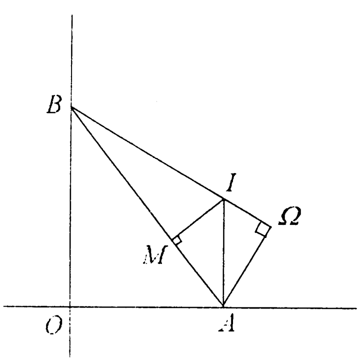
A parcourt (Δ), donc à tout instant le c.i.r. I du mouvement de $(A, \vec{u}, \vec{v})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est sur la normale à (Δ) passant par A.

Observons par ailleurs que $OA\Omega B$ sont sur le cercle (C) de diamètre $[AB]$ en conséquence de quoi les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{A\Omega})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega})$ sont égaux à π près (angles inscrits dans (C) interceptant le même arc $\overset{\frown}{A\Omega}$).



Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega}) \equiv \alpha[2\pi]$ où α est une constante.

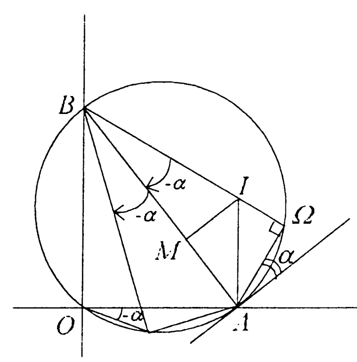
On en déduit que la droite $(A\Omega)$ est fixe dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et que le c.i.r. I est sur la normale à $(A\Omega)$ en Ω.



I est ainsi à l'intersection de (ΩB) et de la perpendiculaire à (Δ) en A. Le point I nous permet de construire le point caractéristique M de l'enveloppe de (AB) à l'instant considéré, projeté orthogonal de I sur (AB).

Montrons alors que le point M décrit une certaine parabole de foyer Ω.
Pour cela, on peut considérer la similitude s de centre B qui envoie I sur M, posons s$(A) = H$.
s est d'angle $-\alpha$ ou $-\alpha + \pi$

$$\text{car } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Omega}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega}) \equiv \alpha[\pi]$$



M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ car IMB est rectangle en M

$I \to M$
$B \to B$
$A \to H$

Donc AHB est rectangle en M

On en déduit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}) \equiv -\alpha[\pi]$ (par le théorème des angles inscrits dans (C))

s$(A) = H$ donc la droite (OA) a pour image par s une droite passant par H et faisant un angle de $-\alpha[\pi]$ avec (OA) : il s'agit précisément de (OH).

On a ainsi obtenu :
s : $(OA) \to (OH)$
$(IA) \to (MH)$
$(OA) \perp (IA)$ d'après la construction de I donc $(OH) \perp (MH)$ ie H est le projeté orthogonal de M sur (OH).

Vérifions enfin que $MH = M\Omega$

Cela résulte du fait que (BA) est "axe de symétrie" (par sa bissectrice) intérieure de $(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BH})$ et M est sur (AB), H et Ω sur (C).

Conclusion :
- La droite (OH) est fixe puisque faisant un angle $(-\alpha)$ avec (Δ).
- Ω est fixe par hypothèse.

$MH = M\Omega$ avec H projeté orthogonal de M sur $(OH) = \delta$ signifie que M est sur la parabole de foyer Ω et de directrice δ.

I - AUTEURS

Hamel Thierry, Sinègre Luc, Vivien Frédéric

II - TITRE

R 126 QUELQUES PROBLEMES OBTENUS EN FAISANT TOURNER UNE EQUERRE

III - CARACTERISTIQUES DE L'EDITION

Edité par l'IREM DE ROUEN
Brochure de l'IREM de ROUEN
Format : A4
ISBN : 2-86-239-081-X
Date de parution : Octobre 1998

IV - TYPE DE DOCUMENTS ET SUPPORT

Type : /
Support : /

V - PUBLIC VISE

NIV : Professeurs de lycée, Post-Bac
AGE : /

VI - CONTENUS

RESUME : Comme point de départ, les deux exercices classiques :

Faire tourner une équerre au centre d'une conique et rechercher l'enveloppe de l'hypoténuse.

Envelopper la conique par l'équerre et rechercher le lieu du sommet de l'angle droit (cercle orthoptique)

On réfléchit sur les différentes façons d'approcher un problème de géométrie :

Analyse, géométrie analytique, algèbre linéaire, emploi de points imaginaires, cinématique.

Bibliogr. /

MCL : Géométrie, conique, tangente, équerre, orthoptique, Frégier,
coordonnées tangentielles, polarité réciproque,
espace projectif, complexifié, matrice,
mécanique, cinématique, centre instantané de rotation.

****

BON DE COMMANDE

M., Mme, Melle :
Adresse :

LIBELLE :	*PRIX*	*QUANTITE*	*TOTAL*
R 126 Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre	30 F		

Frais d'envoi : 15 F pour le 1[er] livre et 5 F par livre supplémentaire (France)
Frais réels pour l'étranger

SOMME DUE :

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :
L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN
Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02.35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 00044004056 81

****

DATE : **SIGNATURE :**