

CALCUL ALGEBRIQUE en 4^{ème} / 3^{ème}

Des activités pour donner du sens.

Diagram illustrating algebraic activities for 4^{ème} / 3^{ème} using a grid method.

Activity 1 (Left):

$x-8$	$x-7$
$x-1$	x

2

$$x(x-8) - (x-1)(x-7)$$

$$\underline{x^2 - 8x - (x^2 - 7x + x - 7)}$$

$$\underline{x^2 - 8x - x^2 + 7x + x - 7}$$

$$\underline{-7}$$

2

$2x-16$	$x-14$
$x-2$	x

3

$$x \times (x-16) - (x-14)(x-2)$$

$$\underline{x^2 - 16x - (x^2 - 2x + 14x - 28)}$$

$$\underline{x^2 - 16x - x^2 + 2x - 14x + 28}$$

$$\underline{-28}$$

Activity 2 (Right):

$x-24$		$x-21$
$x-3$		x

4

$$x \times (x-24) - (x-3) \times (x-21)$$

$$\underline{x^2 - 24x - (x^2 - 21x - 3x + 63)}$$

$$\underline{x^2 - 24x - x^2 + 21x + 3x - 63}$$

$$\underline{-63}$$

Danielle BERGUE - Jacqueline BORREANI - Michel CHEVALLIER - Hélène COLONNA

UNIVERSITÉ DE ROUEN
I.R.E.M. DE ROUEN

CALCUL ALGEBRIQUE en 4^{ème} / 3^{ème}

Des activités pour donner du sens.

$x-8$	$x-7$
$x-1$	x

2

$$x_1(x-8) - (x-1)(x-7)$$

$$\underline{x^2 - 8x} - \underline{x^2 + 7x + x - 7}$$

$$-7$$

2

$2x-16$	$x-14$
$x-2$	x

3

$$x \times (x-16) - (x-14)(x-2)$$

$$x^2 - 16x - x^2 + 2x + 14x - 28$$

3

$x-24$	$x-21$
$x-3$	x

4

$$x \times (x-24) - (x-3) \times (x-21)$$

$$x^2 - 24x - (x^2 - 21x - 3x + 63)$$

$$\underline{x^2 - 24x} - \underline{x^2 + 21x + 3x - 63}$$

Danielle BERGUE - Jacqueline BORREANI - Michel CHEVALLIER - Hélène COLONNA

SOMMAIRE :

Introduction p. 1

I- Un peu d’histoire p. 5

II- Objectifs communs p. 11

III- Des exemples d’activités p. 15

 1 - Les carrés du calendrier p. 17

 2 - Les carrés bordés p. 25

 3 - Le puzzle p. 31

IV- Bibliographie p. 47

INTRODUCTION

L'apprentissage du calcul algébrique est mis en oeuvre tout au long du premier cycle.

Les tests d'entrée en seconde montrent que les connaissances exigibles sont en fait très peu disponibles. En particulier la non maîtrise des opérations utilisant les nombres décimaux relatifs est très souvent handicapante pour l'ensemble des calculs algébriques, alors que ces nombres sont abordés dès la sixième.

Dans un premier temps, on peut s'interroger sur la manière dont est introduit le concept de nombre relatif. Ces nombres sont abordés en sixième par l'étude de systèmes types : ascenseur, escalier, pertes et gains où des quantités prennent des valeurs positives ou négatives : ils sont donc là uniquement des outils de codage. Ils ne naissent pas d'une réponse à une exigence interne aux mathématiques, c'est à dire en étant un outil permettant de dépasser un obstacle identifié par les élèves. Ils se construisent donc **à côté** des nombres déjà connus (décimaux positifs), sans qu'il y ait une nécessaire réorganisation des connaissances. Cette coexistence entraînera les confusions que l'on voit apparaître dès que les calculs se font un peu plus difficiles (multiplication dans $\mathbb{Z}$, calculs avec parenthésage, distributivité).

Sans revenir à une construction des ensembles de nombres telle que proposée dans les programmes des années 1971, il semble pourtant nécessaire qu'un lien entre les systèmes de nombres et les outils de calcul algébrique **se fasse**.

Dans un deuxième temps, on peut observer que l'enseignement de l'algèbre au collège tend à l'apprentissage de manipulations purement formelles d'expressions algébriques. Savoir développer, factoriser, résoudre une équation ne signifie pas que le statut de la lettre manipulée dans ces calculs soit compris.

Par exemple savoir passer de $(3x - 2)^2 - 4(x + 1)(6x - 4) + (9x^2 - 4)$

à l'expression factorisée $-2(3x - 2)(x + 4)$

ne signifie pas que le fait de remplacer x par (-2) pour vérifier son calcul soit naturel ou même compris comme le souligne *Chevallard*.

Il n'y a pas forcément mise en relation entre les manipulations d'expressions algébriques d'une part et la substitution aux lettres de valeurs numériques d'autre part. On peut même dire qu'il y a contradiction entre "deux types de régime d'un même savoir" (1).

C'est pourquoi dans cette brochure, nous proposons des situations-problèmes permettant l'apprentissage de manipulations d'expressions algébriques, mais où la lettre prend un statut dans la mesure où ces manipulations ont un but extérieur au calcul algébrique.

Ces situations-problèmes permettent la mise en oeuvre de divers niveaux de preuves :

- généralisation opérante,
- généralisation explicite,
- recherche de preuves ou de justifications par des formules.

Dans la phase première, les élèves vont montrer l'exactitude de leur conjecture en multipliant le nombre d'exemples : il y a **généralisation opérante**.

Ils feront varier les valeurs numériques, le plus possible. Le choix de grands nombres est souvent dans cette phase un test de mise à l'épreuve de la véracité de l'algorithme de calcul. L'exactitude pour de telles valeurs vaut preuve pour certains élèves et s'instituera en obstacle pour la construction de l'outil algébrique.

Dans la deuxième phase, les élèves vont essayer d'expliquer en français leur algorithme de calcul; il y a une **généralisation explicite**.

C'est dans la production de ces explications que la lettre va progressivement devenir nécessaire. Ils se rendent compte que pour chaque exemple, il faut produire une explication dont seule une petite partie change.

La troisième phase utilise la lettre comme outil permettant d'exprimer les calculs sans passer par une succession de cas particuliers. il y a **modélisation**.

C'est dans cette phase que l'apprentissage de techniques de calculs formels prend du sens.

A l'intérieur même de ces situations, le statut de la lettre varie : **indéterminée** dans les formules, elle devient **inconnue** dans la recherche de solutions d'une équation puis la recherche de dépendance entre les grandeurs fera apparaître la notion de **variable**.

Nous présentons donc trois situations qui ont été expérimentées dans des classes de quatrième et de troisième de nos établissements, situations élaborées lors de stages MAFPEN. Nous avons construit les situations pour faire travailler l'un ou l'autre des trois statuts. L'analyse des productions des élèves et de leurs comportements lors des premières expérimentations nous a amené à faire évoluer les consignes. Ces situations prenant en compte la nouvelle formulation des consignes permettent des modélisations qui seules donnent du sens à la réalisation de calculs algébriques. Il faut souligner que l'attitude des élèves dans ce type de production est aussi évolutive. Si dans une première étape la compréhension du problème se fait le plus souvent par la notion d'indéterminée, par contre seule la modélisation, même si elle est parfois difficile à atteindre, est suffisamment intéressante pour maintenir un niveau de motivation suffisant dans la recherche. Cette remarque est valable aussi bien pour les " bons " élèves que pour ceux qui sont le plus en difficulté.

I - UN PEU D' HISTOIRE

Le symbolisme et l'usage des lettres ont très lentement cheminé aux cours des siècles, et par des détours sinueux. Diverses représentations, utilisées par les algébristes, ont eu cours dans cette lente évolution de la constitution des connaissances.

Tous les écrits qui nous sont parvenus proposent des problèmes en relation avec la vie courante : partage de récolte, héritage, doublement de volumes ... Le calcul algébrique, qui s'est mis en place pour y répondre, est avant tout un outil et s'est construit comme réponse à des classes de problèmes. Schématiser ces problèmes, les poser puis les résoudre passent par différents degrés de difficultés, des écritures plus ou moins facilement manipulables et des méthodes de résolution diverses.

Babyloniens, Egyptiens et Grecs jusqu'à Diophante (2ème siècle) ont une algèbre terminologique. Tout raisonnement est écrit en toutes lettres sans aucune notation ni symbole. L'écriture des Babyloniens et des Egyptiens comportent un certain nombre d'idéogrammes dont certains sont utilisés pour l'addition et la soustraction. S'ils ne savent pas écrire une équation du type $ax + b = c$, ils savent résoudre des problèmes se ramenant à ce type. Ces problèmes sont énoncés et résolus en langage géométrique mais sans souci d'homogénéité entre les grandeurs. Ce que nous noterions x pour inconnue est appelé côté et sa puissance deux, x^2 , est appelée carré. Ce qui dans notre notation s'écrit :

$$x^2 - x = 3$$

s'exprimait alors "le résultat du côté soustrait de l'aire d'un carré est 3". On soustrait alors des grandeurs qui ne sont pas de même nature.

Pour les Grecs, les problèmes se présentent sous forme de constructions : "construire un rectangle connaissant son aire et son côté". Les équations du second degré sont résolues par construction à la règle et au compas et sont à la base de la géométrie grecque. Le nombre est alors une interprétation géométrique en tant que mesure. Une grande partie des "Eléments" d'Euclide est occupée par l'étude des segments de mesure $a + \sqrt{b}$, les "binômes", avec a et b rationnels positifs. Les livres des "Eléments" consacrés à cette étude sont à la base du développement de la théorie des équations.

C'est à partir de Diophante (200 ans après J.C.) que la référence à la géométrie s'estompe. Un début de symbolisme apparaît fait d'un mélange d'abréviation et de signes conventionnels. S'il n'y a pas de véritable manipulation algébrique, on a pu parler d'algèbre syncopée. Les phrases côtoient des abréviations et certains mots sont remplacés par leurs initiales. Diophante ne note qu'une seule inconnue et chacune de ses puissances a une notation particulière. L'unité est notée M^o , l'inconnue ς , le carré ΔY , le cube KY , la puissance quatrième $\Delta Y \Delta$, la puissance cinquième ΔKY (carré cube), la puissance sixième KYK (cube cube). Au delà, ce type de notation et de calcul se généralisent difficilement.

Le véritable fondateur de l'algèbre proprement dit est al-Khwarizmi (IXème siècle). La théorie qu'il développe s'applique à des problèmes arithmétiques et géométriques. Dans ses écrits, tout s'exprime encore en toutes lettres, l'inconnue se nomme la chose et son carré, le bien (la richesse). Les mathématiciens arabes ramènent

les résolutions d'équations à la résolution de six types canoniques où tous les coefficients sont positifs, soit en écriture actuelle :

$a x^2 = b x$	$a x^2 + b x = c$
$a x^2 = c$	$a x^2 + c = b x$
$b x = c$	$b x + c = a x^2$

La résolution de ces équations fait appel à deux types d'opération : al-jabr (complément), ajouter des termes égaux dans les deux membres pour se débarrasser de termes à soustraire, et al-muqabala (balancement), simplifier des termes égaux dans les deux membres.

Les successeurs d'al Khwarizmi vont développer méthodes et algorithmes, méthodes par approximation, qui restent encore très arithmétisées, pour résoudre des problèmes où figurent des expressions avec inconnue.

Héritier de l'algèbre arabe, le Moyen Age, en Europe, utilise encore une algèbre "syncopée". C'est en Italie et avec l'avènement de la Renaissance que s'est développée une algèbre "symbolique". L'inconnue se nomme encore la "chose" et son carré le "cens". Pour Tartaglia (vers 1500 - 1557), Cardan (1501 - 1576), Bombelli (1526 - 1573), les expressions : 1, x, x², x³, x⁴, x⁵, x⁶, s'écrivent respectivement, unité, chose ou côté, carré, cube, carré de carré, relate premier, carré de cube et se notent 1, N, q, c, qq, β, qc, bien que ce système d'abréviations puisse changer d'un auteur à un autre.

L'équation " $x^2 + x = 3$ " s'écrivait alors "1 q p 1 N aequale 3".

Dès 1484, en France, dans les écrits de N.Chuquet, on trouve un symbolisme : 4 x² se note 4 2, 7 x³ se note 7 3, x se note 1 1, 12 se note 12 0 (pour indiquer que x ne figure pas).

L'équation " $4 x^2 + x^3 = 3$ " s'écrivait alors 4 2 p 1 3 egault à 3.

Cette notation est aussi pratique que la nôtre pour les règles de calculs algébriques. Si Chuquet est un précurseur de notre écriture exponentielle, un pas de plus est franchi avec F.Viète. Celui-ci introduit l'usage de lettres de l'alphabet pour toutes les grandeurs connues ou inconnues, il réserve les consonnes pour les grandeurs connues et les voyelles pour les grandeurs inconnues : " $4x^2 + x^3 = a$ " s'écrit alors "4 in A quad + A cubus aequatur D solido", où A est l'inconnue et D est un paramètre.

C'est au début du 16 ème siècle que les résolutions algébriques des équations du troisième et du quatrième degré ont été établies par Tartaglia et Cardan :

<i>Quand le cube uni avec les choses Est égal à un certain nombre Trouve moi deux autres qui en différent Comme cela se fait habituellement Que leur produit soit égal Au cube du tiers des choses Il suffit ensuite en général De bien soustraire leurs racines cubiques Pour que tu aies la valeur de la chose principale</i>	$x^3 + c x = d$ $a \text{ et } b ; \quad a - b = d$ $\frac{a}{a b} = \frac{c^3}{3^3}$ $x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$
---	---

C'est, dans les ouvrages de Cardan (Ars Magna), que l'on voit apparaître une approche des racines carrées de nombres négatifs.

L'égalité " $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$ " est écrite par Cardan sous la forme "5 p: Rm : 15 , 5 m : Rm : 15 , 25 m : m : 15 q d est 40".

Bombelli a poursuivi dans cette voie dans son seul traité mathématique l'Algebra (1572), qui, à la différence de la plupart des auteurs de son temps, est écrit en italien et non en latin : *"J'ai trouvé une autre sorte de racine cubique, très différente des autres, ce qui arrive dans le cas où le cube égale la première puissance et un nombre, quand le cube du tiers de la première puissance est supérieur au carré de la moitié du nombre absolu, de sorte que la racine carrée a dans l'algorithme un nom et une opération différente des autres; dans ce cas, on ne peut l'appeler plus ou moins; je l'appellerai cependant plus de moins quand il devra être ajouté, et moins de moins lorsqu'il devra être retranché"*. Bombelli étend le champ des nombres utilisés pour la résolution d'équations, ce qui a permis une avancée importante dans le calcul algébrique. Lui aussi utilise une notation proche de Chuquet :

L'équation " $x^2 + 6x = 16$ " s'écrit alors " $l^2 p 6^1$ eguali a 16".

Il préconise de remplacer la lecture de l'inconnue "chose" par le vocable "tant", c'est à dire le substantif abstrait correspondant à une quantité indéfinie ou indéterminée, mieux approprié d'après lui pour les quantités numériques :

"Quelques-uns s'étonneront peut-être que j'aie à l'encontre de l'usage antique des auteurs italiens, de ceux qui ont jusqu'à ce jour écrit sur la science Arithmétique. Quand ils ont eu à traiter de la quantité inconnue, ils l'ont toujours désignée sous le vocable de la chose comme le vocable commun à toutes les choses inconnues, moi je désigne maintenant ces quantités par Tant. Celui qui considérera bien ce fait, réalisera que ce vocable de Tant est le vocable convient mieux que celui de Chose. Ceci parce qu'on doit se dire que le Tant est le vocable approprié pour les quantités numériques. Ce ne peut être dit du mot chose, chose étant le vocable universel et commun à toute substance tant inconnue que connue. En outre, j'ai trouvé que l'auteur Grec Diophante la nommait ainsi, ce qui n'est pas un mince argument, venant de la propre et vraie parole d'un Ecrivain aussi antique et d'une telle valeur (comme je l'ai dit dans le premier livre)....

Le Tant donc, est une quantité inconnue, avec laquelle à la fin des opérations on en vient à trouver un nombre qui lui soit identique, ou égal. Arrivé à cette fin on trouvera ce que vaut un Tant (comme on le montrera dans la résolution d'équation), ce Tant se notera par le symbole √...

Le dix-septième siècle parvient à une algèbre symbolique qui atteint avec Descartes, à peu près, sa forme actuelle. L'équation " $x^2 - 6x = 16$ " s'écrit alors " $Z^2 - 6 Z \asymp 16$ ". Si le symbolisme est très actuel, les méthodes de résolutions restent liées au domaine géométrique. La résolution d'une équation du second degré est encore une résolution géométrique, mais Descartes va utiliser sa méthode algébrique (par sa géométrie des coordonnées) pour résoudre des problèmes de construction. Le problème est alors inversé, ce n'est plus la géométrie qui permet la résolution de certaines équations, c'est le calcul algébrique qui permet de justifier l'existence de certaines constructions.

"Ainsi voulant résoudre quelques problèmes, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes connues pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune équation".

Les bases de tout le calcul algébrique étudiées au collège, et même au lycée, sont alors posées. Il faut souligner que toutes les propriétés du calcul algébrique et les méthodes de résolution des équations ont été découvertes sans recours aux symboles et aux lettres . Ceci est sans doute à la source de bien des détours et des retards dans l'avancée des connaissances. Le symbolisme, s'il permet un gain de temps d'écriture, fait-il comprendre plus vite qu'une écriture en toutes lettres? ou du moins peut-être est-il porteur de sens? Ce dont on pourrait douter en voyant les errements de l'histoire.

II - OBJECTIFS COMMUNS

1- OBJECTIFS GENERAUX :

- * Provoquer l'utilisation de calcul algébrique comme un outil de preuve.

Les situations permettent divers niveaux d'appréhension, mais la preuve complète nécessite l'utilisation de la " langue algébrique ". Il s'agit à ce moment de provoquer un saut par lequel des relations identifiées entre les quantités de façon générale, se traduisent dans une expression mathématique. C'est selon *Chevallard* le passage du " mathématique " au " mathématisé ".

- * Permettre, dans un calcul, une analyse du sens donné à la lettre.

2- OBJECTIFS DISCIPLINAIRE ET METHODOLOGIQUE :

- * Découvrir des algorithmes sur des nombres entiers.
- * Généraliser des calculs.
- * Utiliser des règles de calcul algébrique.

3- OBJECTIFS DE COMPORTEMENT :

- * Savoir s'organiser.
- * Savoir communiquer.

III - DES EXEMPLES D'ACTIVITES

1 - LES CARRES DU CALENDRIER

1.1 - Pré-requis :

- La priorité des opérations.
- La distributivité.

1.2 - Description :

Quelques mois d'un calendrier ont été sélectionnés (voir feuille suivante).

On distribue à chaque élève un mois du calendrier.

Les élèves travaillant ultérieurement en groupe, on fait en sorte que tous ceux d'un même groupe aient le même mois. Les mois sont différents d'un groupe à l'autre.

La consigne suivante a été donnée aux élèves :

Dans ce calendrier, à chaque jour du mois correspond un nombre compris entre 1 et au maximum 31.

On peut regrouper ces nombres dans des carrés dont les côtés sont plus ou moins grands. Nous les appellerons les " carrés du calendrier ".

Dessiner sur votre calendrier quelques " carrés du calendrier " de diverses grandeurs. Pour chacun d'eux, vous calculerez la différence entre les produits des nombres situés aux extrémités des diagonales.

- *Quelles remarques pouvez-vous faire ? Les démontrer.*
- *Et si les calendriers étaient différents ?*

1.3 - Mise en oeuvre dans la classe :

La situation se déroule en plusieurs étapes.

L'étape individuelle est indispensable. Elle peut éventuellement être plus longue afin de permettre une bonne appropriation de la consigne qui, comme l'analyse a priori le montre, n'est pas évidente à comprendre.

- *1ère étape individuelle* : 10 minutes.
- * Appropriation de la consigne.
- * Aide éventuelle pour comprendre la notion de " carré du calendrier ".

- **2ème étape en groupe** : 50 minutes.

* Recherche de solutions.

* Recherche de généralisation.

La consigne est complétée oralement par : “ *Vous trouvez 7, 28, etc ... Comment pouvez-vous l'expliquer ?* ”, “ *Et si le calendrier était plus grand ?* ”.

- **3ème étape en groupe** : 60 minutes ou plus.

* Ecriture d'un compte rendu commun.

* Prolongement de la recherche.

1.4 - Analyse a priori :

♦ Le problème de la notion de carrés :

La consigne risque de présenter des difficultés de compréhension, d'autant plus que les cases du calendrier sont elles-mêmes carrées.

Le “ mélange ” entre l'outil géométrique, le carré, qui entoure les nombres sur lesquels il faut travailler et le carré d'un nombre peut être un obstacle pour certains élèves.

♦ La taille des calendriers, qui ne permet qu'un nombre restreint de carrés, peut être un obstacle à la nécessité d'une preuve algébrique. En fait, avec un certain temps certes, on peut exhiber tous les résultats par le calcul.

La prégnance d'un travail sur les carrés magiques peut également bloquer certains élèves, ainsi que les “ tableaux carrés ” de la quatrième proportionnelle.

♦ Deux directions de généralisation peuvent être envisagées, qui conduisent à une modélisation mathématique :

- Montrer le lien qui existe entre les différences obtenues et la dimension du carré (nombre de cases d'un côté).

- Justifier le fait que pour une taille donnée de carrés on obtient toujours la même différence.

1.5 - Analyse des réponses des élèves :

A - Recherche de régularité

Pour la plupart des groupes observés, on constate que le jeu sur la recherche de régularité sur les nombres est très motivant. Ils trouvent toutes sortes de régularité :

Par exemple:

a - Pour tous les carrés de dimension 2, la différence est de 7 ou - 7.

Pour tous les carrés de dimension 3, la différence est de 28 ou - 28.

Pour tous les carrés de dimension 4, la différence est de 63 ou - 63.

Nous allons faire les calculs dans les carrés de deux cases, de trois cases, de quatre cases.

4	5
11	12

$$4 \times 12 = 48$$

$$5 \times 11 = 55$$

Différence $55 -$

$$48 = 7$$

7	8
14	15

$$7 \times 15 = 105$$

$$8 \times 14 = 112$$

Différence

$$112 - 105 = 7$$

9	10
15	16
22	23

$$22 \times 10 = 220$$

$$24 \times 8 = 192$$

Différence

$$220 - 192 = 28$$

4	5	6
11	12	13
18	19	20

$$4 \times 20 = 80$$

$$18 \times 6 = 108$$

Différence

$$108 - 80 = 28$$

On remarque qu'il y a toujours une différence de 7

On remarque qu'il y a toujours une différence de 28

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

$$4 \times 28 = 112$$

$$7 \times 25 = 175$$

Différence $175 - 112$

$$= 63$$

On remarque qu'il y a toujours une différence de 63

7	8	9	10
14	15	16	17
21	22	23	24
28	29	30	31

$$7 \times 31 = 217$$

$$10 \times 28 = 280$$

Différence $280 - 217 = 63$

b -

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

2	3
9	10

6	7	8	9
13	14	15	16
20	21	22	23
27	28	29	30

14	15	16
21	22	23
28	29	30

4	5
11	12

2	3	4
9	10	11
16	17	18

$$64 - (12) = 52$$

quand on a 3 case dont 9 en tout nous avons la différence de $28 = 9 \times 3 = 27 + 1$

quand on a 2 case dont 4 en tout nous avons la différence de $7 = 4 \times 2 = 8 - 1$

quand on a la case dont 16 en tout nous avons la différence de $63 = 16 \times 4 = 64 - 1$

quand on multiplie le nombre de cases on obtient le carré parfait du nombre

c - $7 = 7 \times 1$
 $28 = 7 \times 4$
 $63 = 7 \times 9$

et 1, 4, 9 sont des carrés parfaits.

d - Un groupe continuant la confusion entre le numérique et la géométrie pense a priori que la différence doit être nulle, car “*les diagonales d'un carré sont égales*”.

B - Essai d'algébrisation

Le passage au calcul *algébrique* pour prouver leurs résultats n'apparaît pas comme aisément disponible. En effet, l'utilisation de lettres pour essayer de prouver n'est effective qu'après une heure de travail, et encore pas pour tous les groupes. Une incitation des professeurs est nécessaire.

- Certains groupes utilisent, pour coder le tableau de dimension 2, quatre lettres a, b, c, d, l'ordre des lettres suivant l'ordre des nombres. Ce codage va les bloquer, car ils ont un nombre de variables trop grand et la liaison entre ces variables ne leur apparaît pas.

* Ecrire $a - b = 7$ ne leur permet pas d'écrire $(a - 7)$ à la place de b.

* Voir que c, est le jour qui suit b, ne leur permet pas d'écrire que $(b + 1)$ peut remplacer c.

- Un groupe code les jours en utilisant, des lettres de l'alphabet. Il effectue le produit avec les lettres.

a = 1	g = 7	M = 13	T = 20	$a \times i = au$ $b \times h = bh$ $ai - bh$
b = 2	h = 8	N = 14	U = 21	
c = 3	l = 9	O = 15	V = 22	
d = 4	j = 10	P = 16	W = 23	
e = 5	k = 11	Q = 17	X = 24	
f = 6	L = 12	R = 18	Y = 25	
		S = 19	Z = 26	

- Pourtant certains groupes arrivent à faire des substitutions pour n'avoir finalement qu'une seule variable.

Dans chaque carré on prendra :

a	b
c	d

a		b
c		d

a			b
c			d

Dans le petit carré : $a = x, b = x+1, c = x+7$ et $d = x+8$

Dans le moyen carré : $a = x, b = x+8, c = x+14$ et $d = x+16$

Dans le grand carré : $a = x, b = x+3, c = x+21$ et $d = x+24$

Autrement dit, ces élèves peuvent peut-être avoir appris les règles de simplification, la distributivité, pour autant le calcul algébrique n'est pas pour eux fonctionnel.

Il nous semble donc indispensable de travailler sur ce type d'activité.

- D'autres n'utilisent que deux variables.

Je remarque qu'il y a une proportionnalité entre les différents carrés.

carré 1	carré 2	carré 3
7	28	63

$\times 4$ $\times 2,25$

$\times 9$

- Voici quelques exemples d'autres travaux d'élèves :

On trace des carrés de trois sur trois...
On fait le produit des sommets situés en diagonal

x	$x+1$	$x+2$
$x+7$	$x+8$	$x+9$
$x+14$	$x+15$	$x+16$

$$\textcircled{1} x \times (x+16) =$$

$$\underline{x^2 + 16x}$$

$$\textcircled{2} (x+2) \times (x+14) =$$

$$\underline{x^2 + 14x + 2x + 28}$$

$$\underline{x^2 + 16x + 28}$$

différence

$$(x^2 + 16x) - (x^2 + 16x + 28) = 28$$

28 est un multiple de (7)

$$7 \times 4 = 28$$

$$28 : 4 = (7)$$

■ A la question : "Pouvez-vous expliquer pourquoi la lettre x n'apparaît plus dans votre résultat ?", voici la réponse du groupe :

$$J \times L - K \times I$$

$$(x+1)(x+7) - (x+2) \times x$$

$$x^2 + 8x + 7 - (x^2 + 2x)$$

$$x^2 + 8x + 7 - x^2 - 2x$$

$$= 7$$

On trouve les mêmes
résultats avec les nombres
et les lettres donc les
résultats ne dépendent pas de
la valeur des ~~co~~ mais
de la grandeur des carrés.

JANVIER							
	L	M	M	J	V	S	D
							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					

MARS							
	L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		

AVRIL							
	L	M	M	J	V	S	D
						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30

MAI							
	L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				

JUIN							
	L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30		

JANVIER							
	L	M	M	J	V	S	D
							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					

MARS							
	L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		

AVRIL							
	L	M	M	J	V	S	D
						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30

MAI							
	L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				

JUIN							
	L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30		

JANVIER							
	L	M	M	J	V	S	D
							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					

MARS							
	L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		

AVRIL							
	L	M	M	J	V	S	D
						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30

MAI							
	L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				

JUIN							
	L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30		

2 - LES CARRES BORDES

2.1 - Pré-requis :

Aucun pré-requis.

Cette situation peut être abordée dès la fin de la 5ème. Elle est un bon support pour l'apprentissage de la notion de modélisation.

2.2 - Description :

C'est une situation apparemment très simple.

Sur un papier avec quadrillage carré, on dessine un carré dont le côté a pour longueur "n" carreaux. On colorie les carreaux qui bordent les côtés du carré à l'intérieur.

Voici la consigne :

Sur une feuille de papier quadrillé, construire plusieurs carrés de tailles différentes.

Colorier les carreaux qui bordent le carré intérieur.

Pour chaque carré, il y a un certain nombre de carreaux coloriés et de carreaux non coloriés.

Pierre trouve, pour son carré, 6592 carreaux coloriés.

André trouve, pour le même carré, 6594 carreaux coloriés.

Qui a raison? Pourquoi?

Combien ce carré contient-il de carreaux non coloriés? Pouvez-vous le prévoir?

Remarque:

Pour des élèves ayant des difficultés on peut poser le même problème mais en donnant 72 et 74 comme nombres de carreaux coloriés ce qui permet une éventuelle représentation.

Il s'est avéré qu'il est plus intéressant de faire faire des conjectures simultanément sur les carreaux coloriés et non coloriés pour provoquer un réel questionnement des élèves.

La situation est intéressante car les étapes de la modélisation sont bien structurées. Elle pointe la difficulté de la mise en place des relations entre le texte de l'énoncé et les objets auxquels les élèves se réfèrent.

2.3 - Mise en oeuvre dans la classe :

Première étape :

- Les élèves ont un temps de recherche individuelle pendant lequel ils construisent chacun quelques carrés.

- Ils écrivent souvent des valeurs sans les organiser : c'est un constat.

Deuxième étape :

- Mise en groupe par 3 ou 4 et recherche d'une réponse commune.
- On peut se contenter d'une feuille commune.
- Beaucoup de groupes essayent de trouver une explication utilisant les formules qu'ils connaissent autour du périmètre et de l'aire.
- Il y a souvent une grosse difficulté à s'occuper de la mesure du côté du carré.

2.4 - Analyse a priori :

A - Trois phases conduisant à la modélisation de la situation sont particulièrement bien marquées :

- La première phase correspond à l'appropriation de la situation par la construction de plusieurs carrés.
- La deuxième phase est provoquée par la recherche du carré correspondant au nombre de carreaux coloriés donné. Lors de ce travail, les élèves sont amenés à faire fonctionner leur algorithme "à l'envers" et pour cela à l'expliquer.
- Dans la troisième phase, prévoir entraîne la nécessité d'une modélisation, voire d'une algébrisation.

B - Le choix de variables :

<> L'explication même des résultats induit le choix des variables.

- Le texte induit de choisir un nombre de carreaux plutôt qu'une longueur (il peut y avoir ambiguïté).

- Ce nombre de carreaux peut être celui par côté ou pour le tour du carré choisi (sorte de périmètre).

<> L'expression généralisée peut ne pas nécessiter de lettres mais des mots ; Ceci rappelle la construction historique de cette notion : "la chose" devenant "le truc" ou ici le "côté".

<> La valeur choisie pour le nombre de carreaux coloriés est une variable didactique de la situation, en effet :

- Les valeurs 6592 et 6594 obligent l'élève à dérouler son algorithme en sens envers. Cette confrontation doit permettre la mise en évidence des relations entre les carreaux coloriés et la taille des carrés.

- Par contre, les valeurs 72 et 74, si elles peuvent provoquer un même type de comportement dans un premier temps, permettent la construction de carrés et donc un contrôle des résultats.

2.5 - Analyse des réponses des élèves :

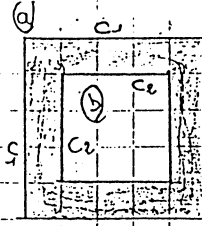
A -Premier essai de généralisation :

Dans ces travaux, la phase de recherche sur des exemples est longue.

Beaucoup comptent les carreaux coloriés et en déduisent le nombre de carreaux non coloriés avec la formule :

$$\text{Aire du carré} - \text{Aire des coloriés} = \text{Aire des carreaux non coloriés}$$

consigne 1



il y a 16 carreaux qui bordent l'intérieur du carré

consigne 2

il y a 9 carreaux non coloriés

consigne 1 - on calcule l'aire du carré

$1^{\text{er}} C: 5 \times 5 = 25$ carres

$2^{\text{de}} C: 3 \times 3 = 9$ carres

$25 - 9 = 16$ carreaux il y a 16 carreaux qui bordent l'intérieur du carré

consigne 2

$25 - 16 = 9$ carres

il y a 9 carres non coloriés

conclusion - En général

consigne 1

① Aire = $G \times C_1$

② Aire = $G \times C_2$

③ - ② = le nombre de carreaux coloriés

consigne 2 - ③ - le nombre de carreaux coloriés = au

- Il leur semble qu'ainsi, ils ont généralisé la situation.

- Seule la confrontation avec la deuxième partie de la consigne peut les déstabiliser.

B - Le rôle particulier du nombre "4" :

Dans beaucoup de travaux le rôle du nombre 4 est particulier. En effet, pour un carré dont le nombre de carreaux par côté est 4, cette valeur 4 joue un double rôle : variable liée aux nombres de carreaux et constante liée au nombre de côtés du carré. Or ce double rôle n'est pas perçu clairement par les élèves.

Exemple :

On trouve écrit :

"4 côtés - 4" qui signifie :

"4 fois le nombre de carreaux sur un côté, moins 4 carreaux".

Or une fois écrit cela devient :

"4 côtés - 4 = 4 côtés - côté = 3 côtés"

car le carré choisi avait un côté de 4 carreaux.

Bien sûr, cette formule confrontée à d'autres carrés sera réfutée et sera dite "cas particulier" à juste titre.

Formule : $4 \times \text{côté} - 4 =$

$4 \times 4 - 4 =$

$3 \times \text{côté}$

C - Exemple d'évolution vers l'algébrisation :

C.1 - Les élèves commencent par montrer sur le dessin comment trouver le nombre de carreaux non coloriés en disant finalement, on fait : "ça fois ça".

Puis ils proposent :

"côtés $\times$ côté - 4 côtés - nombre de carreaux d'angle"

puis

"(côté - 2) $\times$ (côté - 2)"

enfin

"(côté - 2) + (côté - 2) + (côté - 2) + (côté - 2)"

C.2 - mais "ça ne marche que pour les côtés pairs" dit un élève.

Ils essayent donc d'améliorer leur "formule".

C - 2 = et on fait $\times$

C.3 - Les points de suspension ne faisant pas “ mathématique ”, ils préfèrent :

$$C - 2 = 7 \text{ et on fait } 7 \times 7 = 7^2$$

C.4 - Nicolas ne comprend pas le choix de la valeur particulière 7. Pour lui n'importe quoi c'est “x” d'où :

$$C - 2 = x \text{ et } x \times x = x^2$$

Ils se mettent d'accord pour écrire (côté - 2)² comme formule finale.

C.5 - Le professeur intervient en montrant à la classe ce que le groupe a écrit :

Les élèves sont tous d'accord pour dire : *“c'est la même chose que nous, mais “c” c'est un nombre alors que “côté”, c'est une généralité”*.

C.6 - Retour sur la première formule :

“côté × 4 - 4”, devient dans un souci de généralisation :

“côtés × x - 4 mais x = 4, parce qu'il y a 4 côtés”.

On peut encore se poser ici quel est le véritable statut de la lettre x des élèves. *“On met x parce que ça fait mieux”*. En fait, c'est une réponse en fonction d'un contrat didactique sur la représentation de la formule.

3 - LE PUZZLE :

3.1 - Pré-requis :

- *Pour la 1ère partie :*

* Les équations.

- *Pour la 2ème partie :*

* Les inéquations.

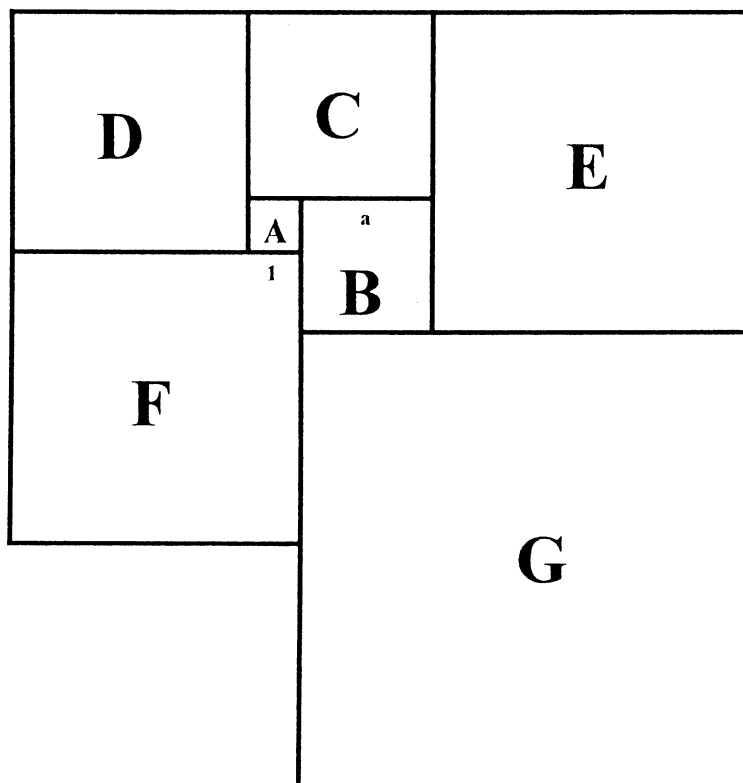
3.2 - Description :

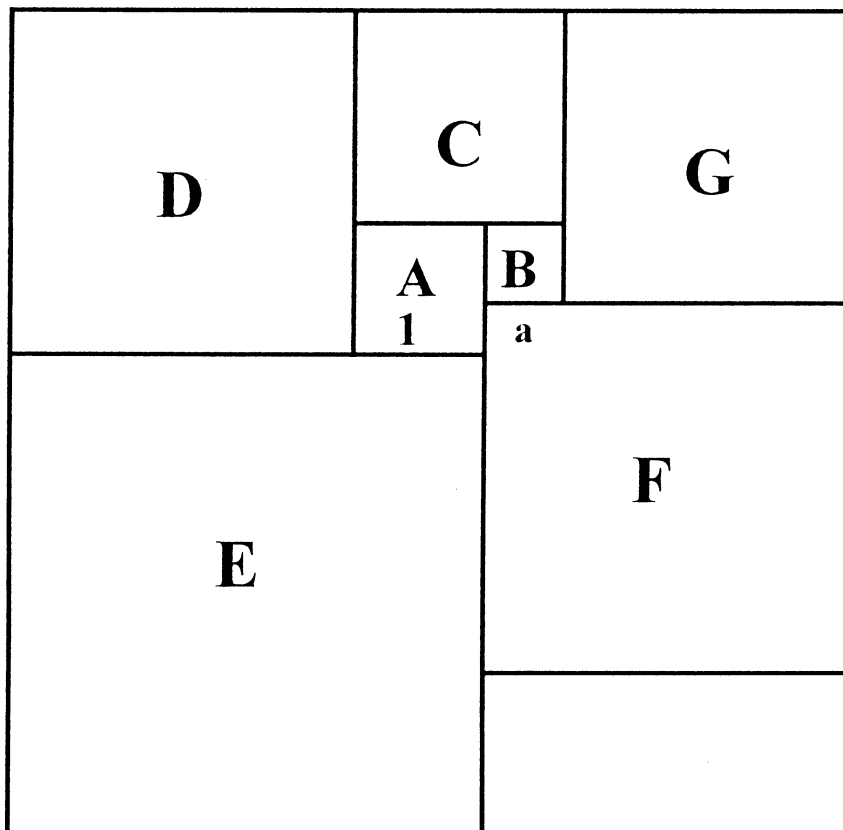
- Issue de la brochure APM n° 388, la situation a été expérimentée et modifiée à plusieurs reprises car on obtenait des fonctionnements autobloquants ou sans enjeu.

- Nous en sommes arrivés à la situation suivante en 3 étapes :

◊ *Une première étape préliminaire :*

* On projette à l'écran sur transparent successivement les 2 puzzles en les décrivant (cf. ci-dessous). Cette première étape a pour but l'appréhension de la figure par les élèves.





* Puis on donne les consignes suivantes :

- “Construire des dessins pour des valeurs de “A” que vous choisirez et que vous vous répartirez dans le groupe de façons aussi variées que possibles”.

On impose le format A4 de la feuille qui peut être blanche ou à carreaux.

◇ *Deuxième étape :*

* Consigne :

- “On complète le quadrilatère par une pièce “V”. Comment choisir les dimensions de la pièce “B” pour que la pièce “V” soit carrée ?”

◇ *Troisième étape :*

Dans cette étape, deux consignes sont proposées suivant le niveau des groupes :

1 - Pour quelle(s) valeur(s) de “a” le quadrilatère lui-même peut-il être un carré ? Peut-on avoir simultanément “V” carré ?

2 - Pour quelle(s) valeur(s) de “a” le quadrilatère peut-il être dessiné dans une feuille 21 x 29,7 ?

(On peut habiller cette étape en proposant la construction d’un jeu puzzle dans une entreprise avec le moins de pertes possible).

3.3 - Mise en oeuvre dans la classe :

<> Etape 1 :

- Les transparents sont projetés au rétroprojecteur.
- On laisse environ ½ heure aux élèves pour construire des dessins variés.
- Dès cette étape, il est fort possible que par essais, un ou des élèves trouvent la valeur de “A = 3”, pour lequel la pièce “V” est carrée, cela ne gêne pas l’étape 2.

<> Etape 2 :

- Les élèves sont libres de leur recherche ; dessins et calculs sont admis au départ ; mais si la valeur trouvée l’est par le dessin, il faudra la valider.
- Les deux cas “ $a > 1$ et $a \leq 1$ ” sont à envisager.
- L’ensemble du travail est proposé en ½ heure.

<> Etape 3 :

- Elle peut être faite soit en classe par un groupe rapide, soit à la maison.
- Elle est reprise lors de l’heure de mise en commun des résultats.

3.4 - Analyse a priori :

A - Quelques constructions possibles suivant les valeurs choisies pour “a” :

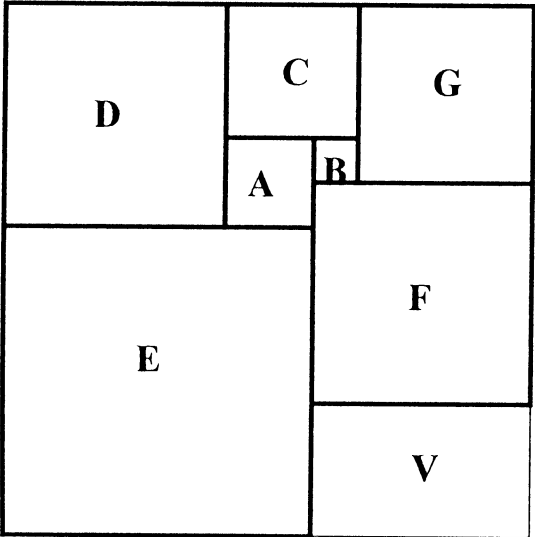
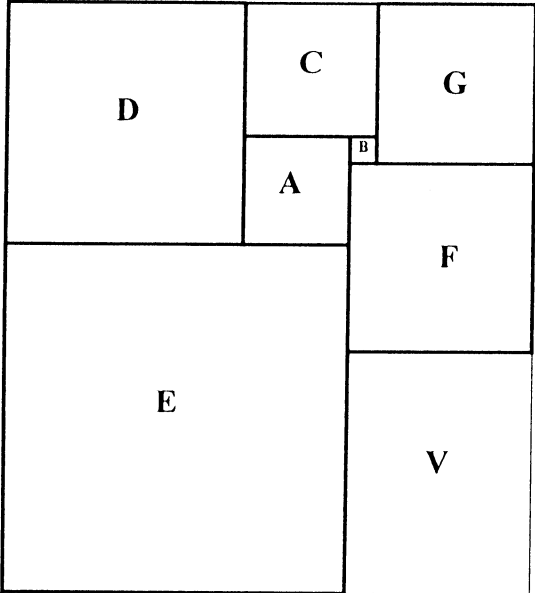
Les valeurs proposées sont les suivantes :

$$a = 0, a = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}, a = 1, a = 2, a = 3.$$

a=0.
La pièce B n’existe pas.

D	C	G
	A	F
E		V

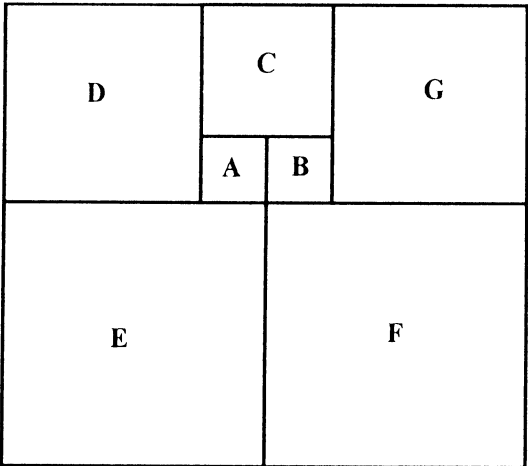
$$a=\frac{1}{4}.$$

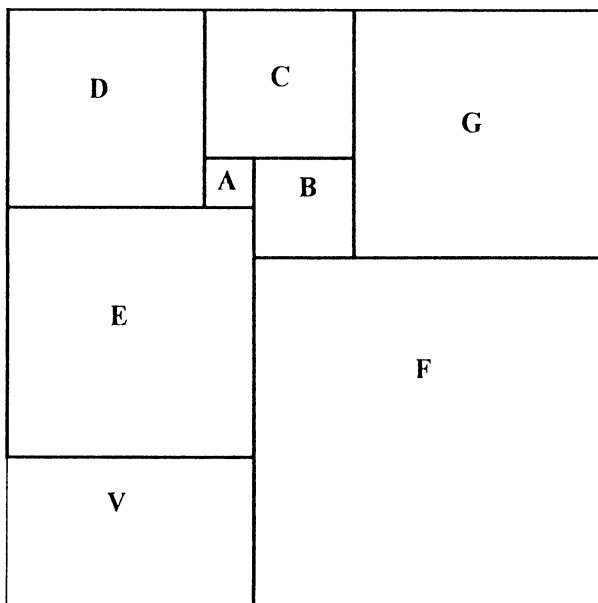


$$a=\frac{1}{2}.$$

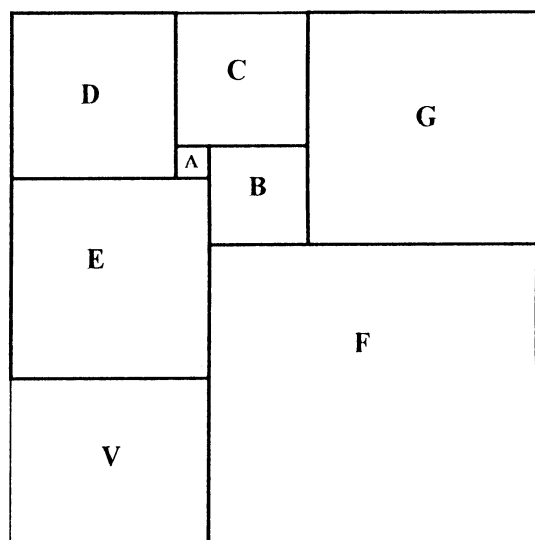
Le quadrilatère est “carré”.

$a=1$.
La pièce V n’existe plus.





$a=2$.
Le quadrilatère est «carré».



$a=3$.
La pièce V est «carrée».

B - Quel questionnement pour quel objectif ?

- Quelles sont les dimensions de chaque morceau ?
* Objectif : calcul littéral .
- Pour quelles valeurs de a le puzzle obtenu est-il carré ?
* Objectif : résolution d'équations.
- Pour quelles valeurs de " a " le morceau V est-il un carré ?
* Objectif : résolution d'équations.
- Quelles sont toutes les valeurs possibles de " a " pour que le puzzle tienne dans la feuille ?
* Objectif : résolution d'inéquations.

C - Calculs des diverses valeurs :

C-1 - Calcul des côtés du puzzle et de la pièce V.

C-1-1 Si $0 < a \leq 1$:

* Calcul des côtés du quadrilatère dans lequel s'inscrit le puzzle

Côté de la pièce A : 1.
Côté de la pièce B : a.
Côté de la pièce C : $a + 1$.
Côté de la pièce D : $a + 2$.
Côté de la pièce E : $a + 3$.
Côté de la pièce G : $2a + 1$.
Côté de la pièce F : $3a + 1$.

On obtient les dimensions suivantes pour le quadrilatère :

Dimension 1 : $4a + 4$.
Dimension 2 : $2a + 5$.

* Dimensions de la pièce "V" :

Dimension 1 : $3 - 3a$.
Dimension 2 : $3a + 1$.

C-1-2 Si $a \geq 1$:

* Calcul des côtés du quadrilatère dans lequel s'inscrit le puzzle

Côté de la pièce A : 1.
Côté de la pièce B : a.
Côté de la pièce C : $a + 1$.
Côté de la pièce D : $a + 2$.
Côté de la pièce E : $a + 3$.
Côté de la pièce G : $2a + 1$.
Côté de la pièce F : $3a + 1$.

On obtient les dimensions suivantes pour le quadrilatère :

Dimension 1 : $4a + 4$
Dimension 2 : $5a + 2$

* Dimensions de la pièce "V" :

Dimension 1 : $a + 3$.
Dimension 2 : $3a - 3$.

C-2 - A quelles conditions la pièce V est-elle un carré ?

C-2-1 Si $0 < a \leq 1$:

$$\begin{aligned} 3 - 3a &= 3a + 1 \\ 2 &= 6a \\ a &= \frac{2}{6} \\ a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

C-2-2 Si $a \geq 1$:

$$\begin{aligned} 3 + a &= 3a - 3 \\ 6 &= 2a \\ a &= \frac{6}{2} \\ a &= 3 \end{aligned}$$

C-3 - A quelles conditions le quadrilatère est-il un carré ?

C-3-1 Si $0 < a \leq 1$:

$$\begin{aligned} 2a + 5 &= 4a + 4 \\ 1 &= 2a \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

C-3-2 Si $a \geq 1$:

$$\begin{aligned} 5a + 2 &= 4a + 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

C-4 - Pour quelles valeurs de a les dimensions du quadrilatère sont-elles maximales dans une feuille 21 x 29,7 cm ?

C-4-1 Si $0 < a \leq 1$:

<u>Format A4 sens vertical</u>	<u>Format A4 sens horizontal</u>
$\begin{cases} 2a + 5 \leq 29,7 \\ 4a + 4 \leq 27 \\ a \leq \frac{24,7}{2} \\ a \leq \frac{17}{4} \\ a \leq 12,35 \\ a \leq 4,25 \end{cases}$	$\begin{cases} 2a + 5 \leq 21 \\ 4a + 4 \leq 29,7 \\ a \leq \frac{16}{2} \\ a \leq \frac{25,7}{4} \\ a \leq 8 \\ a \leq 6,425 \end{cases}$

Conclusion :
Toutes les valeurs de a comprises entre 0 et 1 conviennent.

C-4-2 Si $a \geq 1$:

<u>Format A4 sens vertical</u>	<u>Format A4 sens horizontal</u>
$\begin{cases} 5a + 2 \leq 29,7 \\ 4a + 4 \leq 21 \\ a \leq \frac{27,7}{5} \\ a \leq \frac{17}{4} \\ a \leq 5,44 \\ a \leq 4,25 \end{cases}$ donc, $1 \leq a \leq 4,25$	$\begin{cases} 5a + 2 \leq 21 \\ 4a + 4 \leq 29,7 \\ a \leq \frac{19}{5} \\ a \leq \frac{25,7}{4} \\ a \leq 3,8 \\ a \leq 6,425 \end{cases}$ donc, $1 \leq a \leq 3,8$

Conclusion :
<> Si $1 \leq a \leq 3,8$, le puzzle tient dans les deux sens.
<> Si $3,8 < a \leq 4,25$, le puzzle tient dans un seul sens.

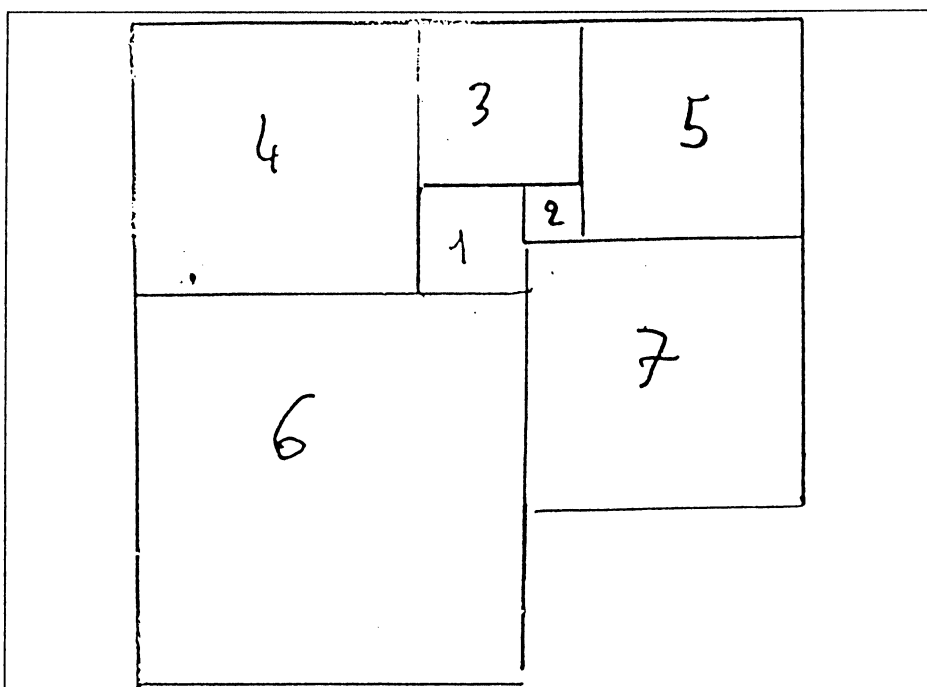
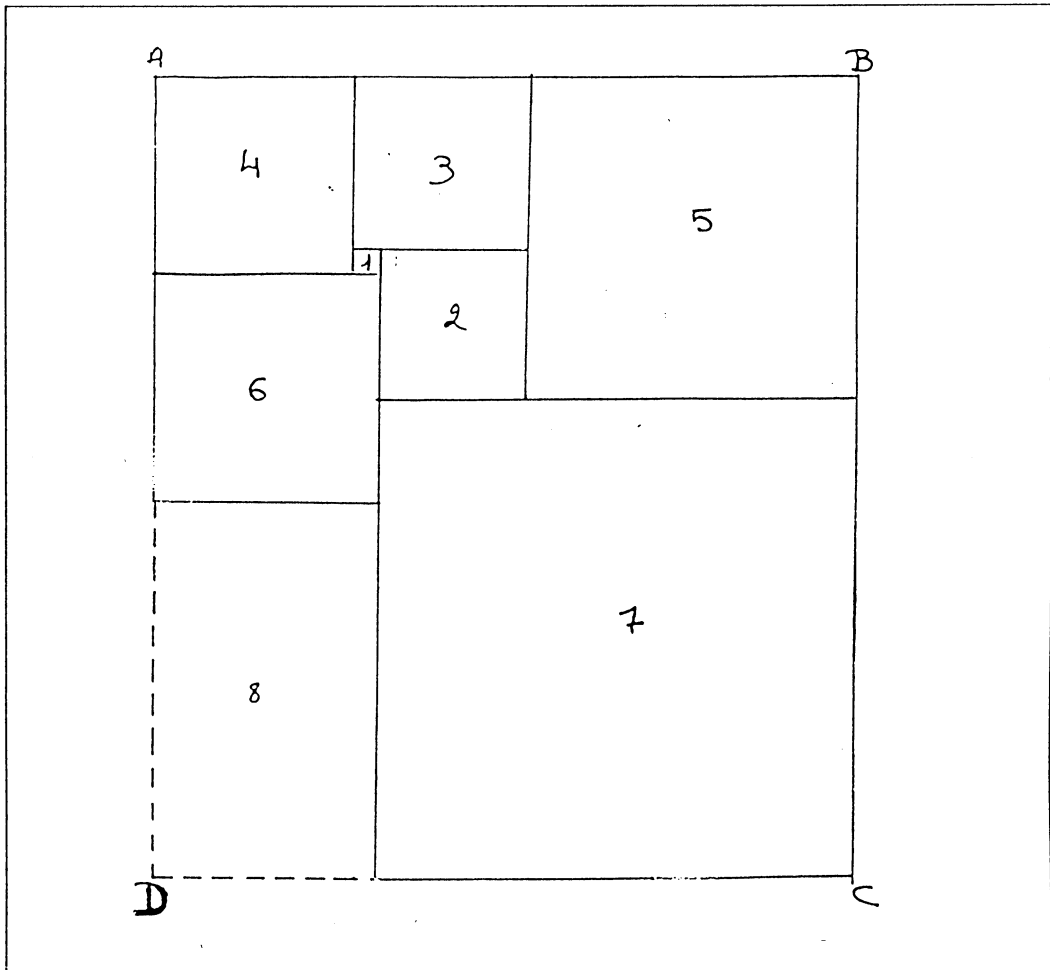
En résumé

Pour :	Pour que le puzzle tienne dans la feuille A4 :	Longueur et largeur du puzzle entier :	longueur et largeur de la pièce V :	quadrilatère carré si :	pièce V carrée si :
$0 < a \leq 1$	Il tient toujours.	Dim1 = $4a + 4$ Dim2 = $2a + 5$	Dim1 = $3a + 1$ Dim2 = $3 - 3a$	$a = \frac{1}{2}$	$a = \frac{1}{3}$
$a \geq 1$	a doit être inf. à 4,25.	Dim1 = $4a + 4$ Dim2 = $5a + 2$	Dim1 = $3 + a$ Dim2 = $3a - 3$	$a = 2$	$a = 3$

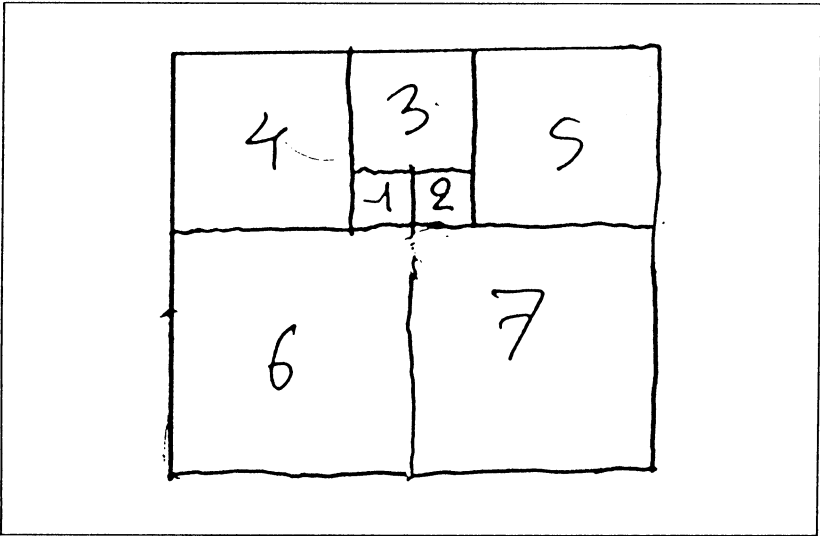
3.5 - Analyse des travaux des élèves :

A - Quelques exemples de constructions :

Voici trois réalisations :



La troisième montre le choix pour “a” d’une valeur particulière conduisant à un cas qui rend incompréhensible, pour l’élève, la suite de la recherche.



Il est intéressant d’un point de vue méthodologique de convaincre les élèves de la nécessité de diversifier leurs dessins.

B - Analyse des démarches des élèves :

B-1 - Les élèves ont pour la plupart écrit directement sur leur dessin les mesures des longueurs correspondantes.

- Pour certains, la difficulté de coder ce qu’ils pensent les amène à écrire des égalités en partant directement du nom de chaque pièce.

$$C = A + B$$

$$D = C + A, \text{ etc. ...}$$

On pourrait penser qu’il y a confusion entre aire du carré et mesure de son côté. Ce n’est pas le cas : les élèves écrivent ceci en pensant à une notation du côté du carré.

Cependant, la multiplicité des inconnues ne leur permet pas d’aboutir à une mise en équation.

B-2 - L’absence d’unité de mesure peut être perturbante pour certains élèves. Il est rare d’avoir des situations où les difficultés entre grandeur et mesure émergent.

Voici deux exemples de réflexions d’élèves :

côté C = x + a
côté D = 2x + a
côté E = x + 2a

1 + a
2 + a
1 + 2a

pour que
mais on ne
puisse pas

x = 1

côté du grand carré :

côté C + D + E =

x + a + 2x + a + x + 2a

E = 4 + 4a

L'unité de mesure de 1 n'est pas précisée donc on peut prendre n'importe quelle mesure.

$A = 1$ ensuite pour chaque côté on ajoute 0,5. C'est à dire

$$F = 2,5 \quad A = 1$$

$$1 \div 2,5 = 0,4$$

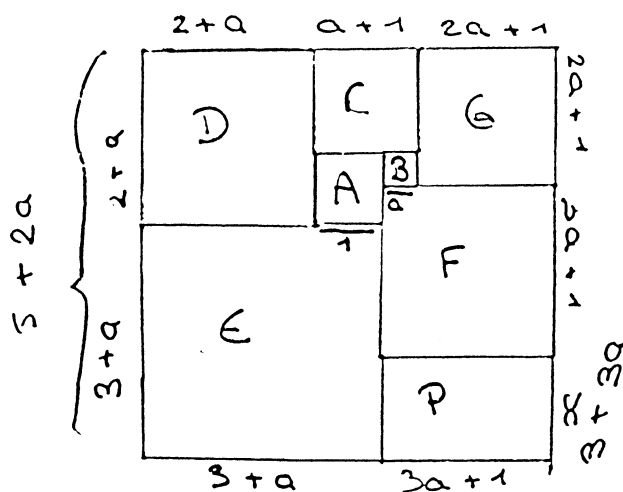
B-3 - La recherche des deux valeurs de "a" est effectuée par tous les groupes observés. Ceci est rendu plus aisé par la construction des deux types de dessin dans la première partie.

Un constat cependant :

Dès que les élèves se retrouvent dans le domaine du calcul formel, ils lui font une absolue confiance. Aucun des groupes observés n'a vérifié si les valeurs de "a" trouvées donnaient effectivement bien un carré sans y être engagé par le professeur.

Ceci montre comment ce type d'exercice peut permettre de faire travailler les liaisons entre le calcul formel et le modèle qui conduit à une prise de sens du calcul algébrique. Ce type de travail va être prolongé dans la dernière partie.

- Exemple de travail d'élève :



I $1 < a$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2a - (2a + 1 + 3a + 1) \\ x &= 5 + 2a - (5a + 2) \\ x &= 5 + 2a - 5a - 2 \\ x &= 3 - 3a \end{aligned}$$

Cherchez "a" pour que P soit un carré.

Si P est un carré alors : $3a + 1 = 3 - 3a$

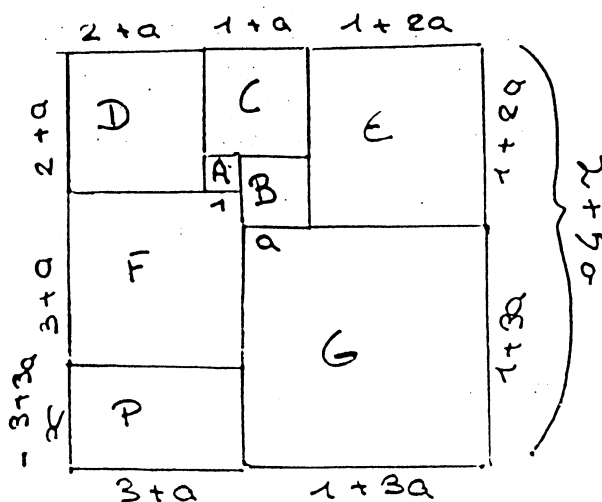
$$3a + 3a = 3 - 1$$

$$6a = 2$$

$$a = \frac{2}{6}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\underline{a = \frac{1}{3}}$$



II $1 > a$

$$\begin{aligned} x &= 2 + 5a - (3 + a + 2 + a) \\ x &= 2 + 5a - (5 + 2a) \\ x &= 2 + 5a + 5 - 2a \\ x &= -3 + 3a \end{aligned}$$

Cherchez "a" pour que P soit un carré

Si P est un carré alors : $3 + 3a = 3 + a$

$$-3 - 3a = a - 3a$$

$$-6 = -2a$$

$$a = \frac{-6}{-2}$$

$$a = 3$$

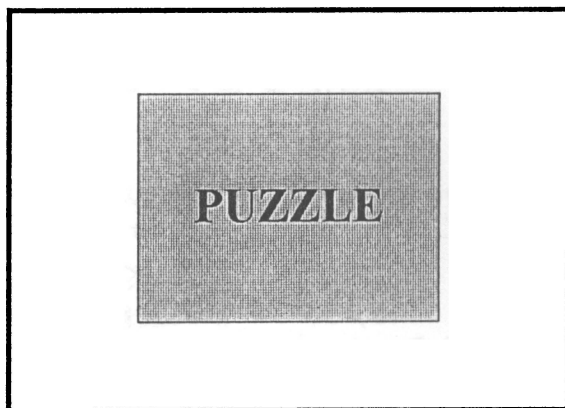
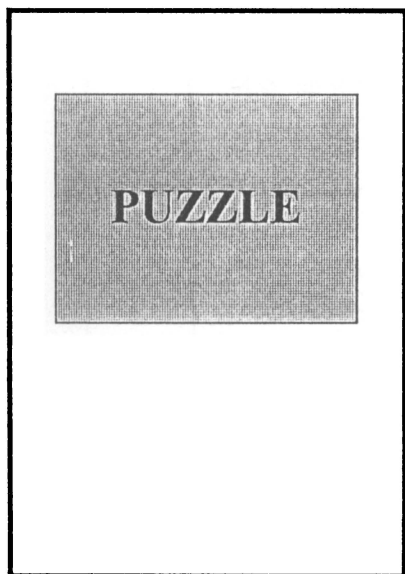
$$\underline{a = 3}$$

C - Difficultés de gestion des résultats :

- Dans cette dernière partie, la gestion des différents résultats possibles pose de nombreux problèmes aux élèves qui identifient mal les relations entre la réalité (c'est-à-dire les objets auxquels se réfère le problème) et les inégalités algébriques qu'ils écrivent.

- Cela apparaît très nettement dans la discussion finale.

* Comment placer la feuille ?



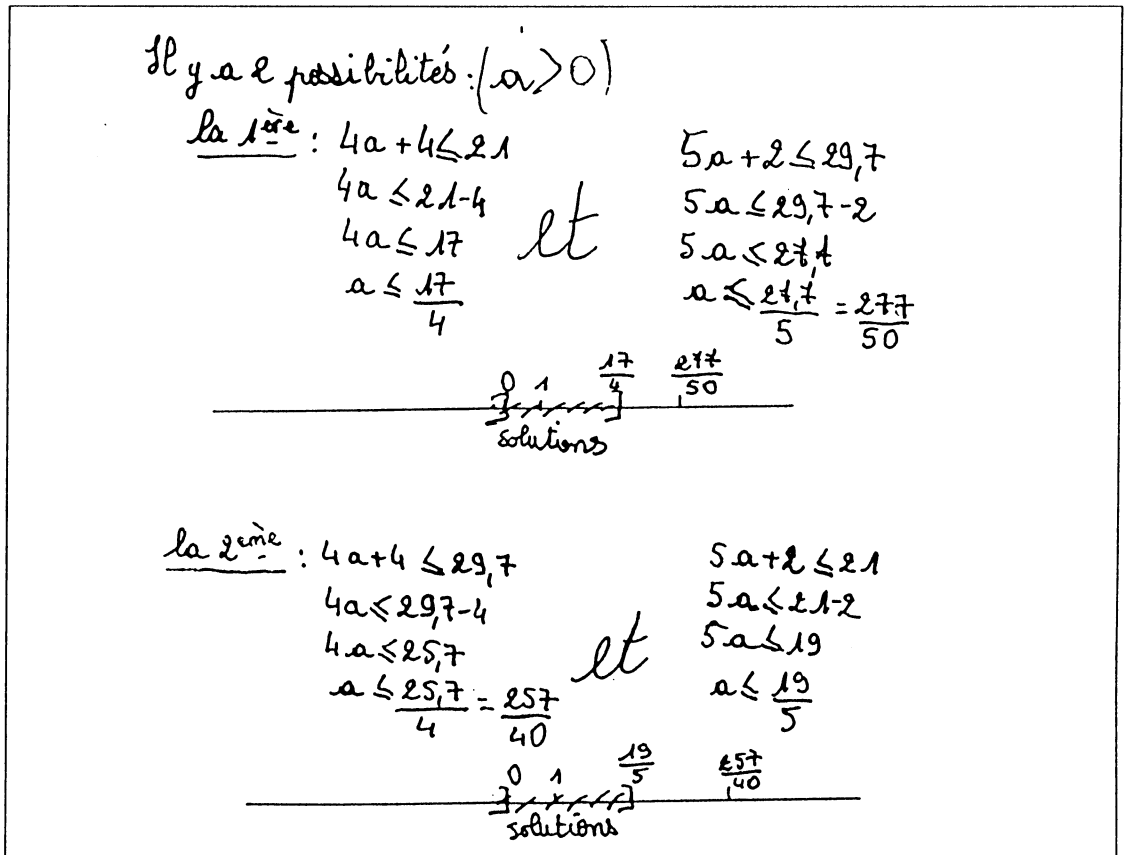
* Comment choisir dans ces valeurs de "a" ?

$$\begin{aligned}2a + 1 + a + 1 + 2a + 1 &= 21 \\4a + 6 &= 21 \\4a &= 21 - 6 \\4a &= 15 \\a &= \frac{15}{4} \\a &= 3,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a + 1 + 3a + 1 &= 29,7 \\5a + 2 &= 29,7 \\5a &= 29,7 - 2 \\5a &= 27,7 \\a &= \frac{27,7}{5} \\a &= 5,54\end{aligned}$$

} C'est faux
a doit avoir
la même mesure.

- Certains élèves ont bien compris le problème d'orientation du puzzle dans la feuille en donnant par l'intermédiaire de graphiques l'ensemble des valeurs de "a" qui leur semblent convenir. Ils ne différencient cependant pas les deux cas.



- D'autres vont avoir effectivement un souci de relation entre ce qu'ils ont trouvé comme valeur et le possible du modèle.

On peut penser que pour ceux-ci, le calcul algébrique prend effectivement du sens même s'ils ne tiennent pas compte dans leur raisonnement de résultats préalablement trouvés (le puzzle est carré quand $a = 2$).

sachant que la feuille de carton est d'un format de $21 \times 29,7$ cm et que le puzzle demande par le patron a une forme carrée, ce carré doit mesurer 21 cm de côté.

Toutes nos mesures sont en cm.

nous écrivons l'équation: $2 + 5a = 21$
 $a = 3,8$ cm

on a remplacé dans les côtés des carrés, D, C, E, a par 3,8 cm et notre vérification ne fonctionnait pas correctement.

- Voici là encore un travail où la gestion de l'inconnue et son sens ont été bien maîtrisés (même si on trouve des problèmes de choix des inconnues : confusion entre le nom du carré et celui donné à son côté).

$$D+C+E=4+4a$$

$$E+G=2+5a.$$

$$\text{Si } D+C+E=21$$

$$4+4a=21$$

$$4a=17$$

$$a=4,25$$

$$\text{Alors } E+G=2+5a$$

$$2+5 \times 4,25$$

$$E+G=23,25.$$

La surface occupée est $21 \times 23,25$.

$$\text{Si } E+G=21$$

$$2+5a=21$$

$$5a=19$$

$$a=3,8$$

$$\text{Alors } D+C+E=4+4a$$

$$=4+4 \times 3,8$$

$$D+C+E=19,2$$

La surface occupée est $21 \times 19,2$.

Pour perdre le moins de place, il faut utiliser la 1^{ère} solution : $a=4,25$.

IV - BIBLIOGRAPHIE

- 1 - *Sur l'introduction de calcul littéral*, Parsi, Groupe de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, 1988.
- 2 - *Petit x*, 5, Spécial calcul algébrique, 1985.
- 3 - *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, 2ème partie, CHEVALLARD Yves, Petit X, n° 19, 1989.
- 4 - *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, 3ème partie, CHEVALLARD Yves, Petit X, n° 23, 1989-1990.
- 5 - *Le calcul algébrique au collège*, Petit X, n° 24, 1990.
- 6 - *L'algèbre avant la lettre*, Petit X, n° 24, 1990.
- 7 - *Travaux numériques en 4ème*, fascicule 2, IREM Poitiers, 1988.
- 8 - *Le puzzle*, Bulletin APMEP, 388, 1993.
- 9 - *Algébrisation en 4^{ème} et 3^{ème}*, IREM de Lorraine, 1991.
- 10 - *Les problèmes de mise en équation*, Annales de didactique et sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 1993.

Ref : 113

TITRE : *CALCUL ALGEBRIQUE EN 4ème/3ème*
DES ACTIVITES POUR DONNER DU SENS

AUTEUR : Danielle BERGUE
Michel CHEVALLIER

Jacqueline BORREANI
Hélène COLONNA

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de collège.

RESUME : Le calcul algébrique en 4ème 3ème prend difficilement sens pour nos élèves. Nous proposons trois exemples de situation où l'utilisation de lettres rend la modélisation nécessaire. Développement, factorisation, résolution d'équations et d'inéquations trouvent alors leur justification.
Ces situations prennent en compte les différents niveaux de formalisation des élèves de collège en permettant à tous de s'impliquer dans la recherche.

MOTS CLES : activités - gestion de classe - modélisation - calcul littéral.

DATE : Mai 1997

NB DE PAGES : 49

N° D'ISBN : 2-86239-072-0

PUBLICATION : IREM de ROUEN

Bon de commande

M. , Mme, Mile : _____
Adresse : _____

	Prix	Quantité	Total
[R 113] CALCUL ALGEBRIQUE EN 4 EME - 3 EME	30 F		
Frais d'envoi : 15 F pour le 1 ^{er} livre et 10 F par livre supplémentaire (France)			
Frais réels pour l'étranger			
SOMME DUE :			

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :
L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN
Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 138 - 76821 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02.35.14.61.41.
RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00003000118 84

DATE : _____ SIGNATURE : _____