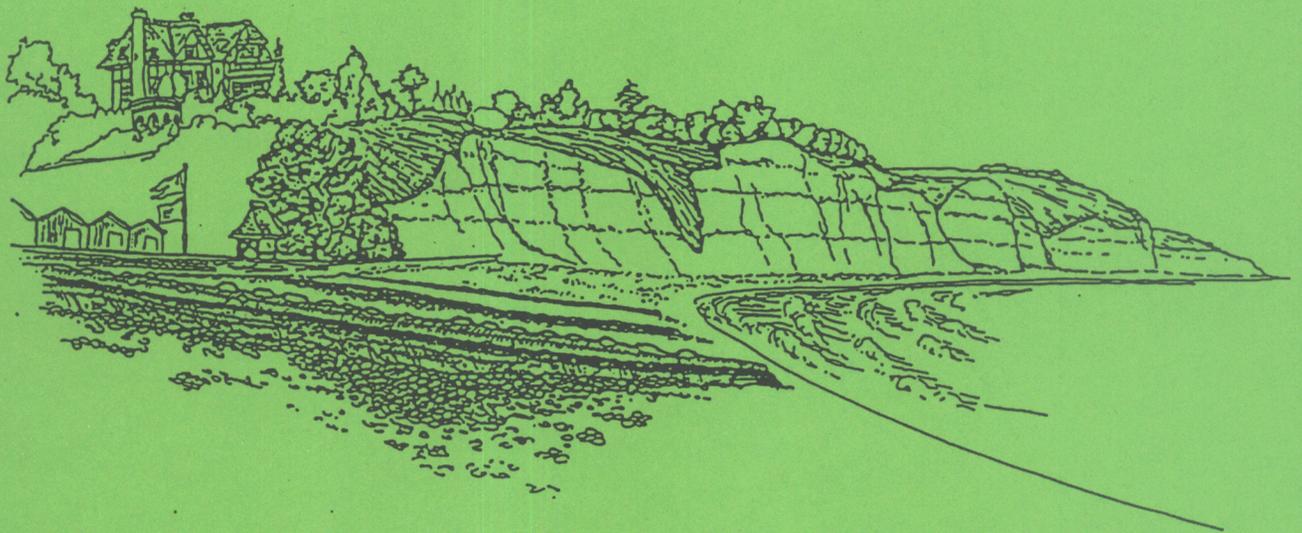


UNIVERSITÉ DE ROUEN
I.R.E.M. DE ROUEN



Pourville
37

AIMER
FAIRE DES MATHS
AU LYCEE 4

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE ROUEN

BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES, AV. DE BROGLIE
B.P. 138 , 76821 MONT SAINT AIGNAN

TÉL. FAX. 35-14-61-41

SOMMAIRE

<i>page</i>		
1	<i>Une définition d'Apollonius des coniques à centre.</i>	Luc Sinègre (Rouen).
16	<i>Utilisation de la mécanique en géométrie.</i>	Thierry Hamel (Evreux).
24	<i>L'algorithme CORDIC.</i>	Yves Suprin (Rouen-APM).
29	<i>Logarithme en turbo Pascal.</i>	François Couloigner (Forges-les-Eaux).
35	<i>Probabilités à bâton ... rompu.</i>	Dominique Pommier et Jean-Claude Jovet (Dieppe).
45	<i>Théorème de Morley.</i>	Bertrand Fort (Dieppe).
49	<i>Période d'un pendule.</i>	Bertrand Fort (Dieppe).
52	<i>Calcul d'une valeur approchée de π par la formule de Viète.</i>	Yves Suprin (Rouen-APM).

UNE DEFINITION D'APOLLONIUS DES CONIQUES A CENTRE

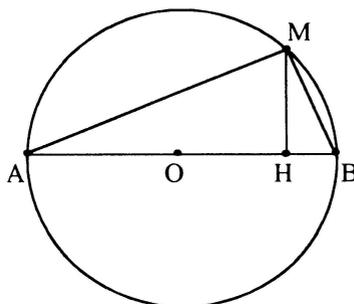
Introduction: caractérisation du cercle.

Proposition: Etant donnés A et B deux points distincts, le cercle de diamètre $[AB]$ est le lieu des points M tels que, si H désigne la projection orthogonale du point M sur la droite (AB) on ait

$$MH^2 = -\overline{HA} \cdot \overline{HB}$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{MH} + \vec{HB}) \\ &= MH^2 + \vec{HA} \cdot \vec{HB}\end{aligned}$$



Remarque: Si l'on prend A et B confondus dans la proposition précédente, on trouve un cercle point.

Exercice: Construire à la règle et au compas le réel \sqrt{a} lorsque a est un entier ou un rationnel positif.

Nous nous proposons d'étudier une généralisation de cette définition, en ajoutant dans un premier temps un coefficient devant le produit des mesures algébriques, puis dans un second, la direction de projection.

A. Première caractérisation des coniques à centre.

Définition: Soient A et B deux points distincts et λ un réel non nul. Pour tout point M du plan on note H la projection orthogonale de M sur (AB) . On appelle Γ l'ensemble des points M du plan tels que

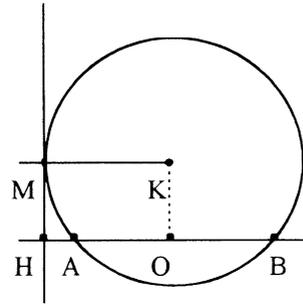
$$MH^2 = \lambda \overline{HA} \cdot \overline{HB}.$$

Remarquons d'abord que l'ensemble Γ est non vide et plus précisément que l'intersection de Γ avec (AB) se réduit aux points A et B .

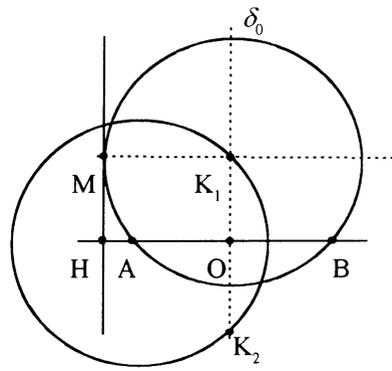
Dans le cas où λ est égal à -1 nous venons de voir que Γ est le cercle de diamètre $[AB]$. Nous allons montrer que toutes les courbes qui correspondent à un coefficient négatif peuvent être ramenées, par une transformation convenable, au cas du cercle. Mais pour pouvoir adopter la même démarche lorsque le coefficient est positif, il faut donc, d'abord, étudier le cas $\lambda=1$.

1. a. L'hyperbole équilatère.

Soit M un point de Γ non situé sur (AB) et H sa projection orthogonale sur (AB) . Appelons O le milieu de $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle ABM , γ , a pour centre K et pour rayon r . Puisque $MH^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HB}$, la puissance du point H par rapport au cercle γ est MH^2 et la droite (HM) est tangente en M au cercle γ . On a donc $r = HO = MK = AK$.

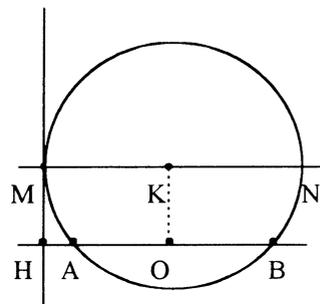


Réciproquement, étant donné un point $H \in (AB) \setminus]AB[$ on obtient les points de Γ dont la projection orthogonale est H par la construction suivante. On appelle K_1 et K_2 les intersections de la médiatrice de $[AB]$, δ_o , avec le cercle de centre A et de rayon HO ($OH \geq OA$). Les cercles de centre K_i et de rayon $r=HO$ sont tangents à la perpendiculaire en H à (AB) en deux points M_1 et M_2 solutions.



L'ensemble Γ admet donc (AB) comme axe de symétrie.

Pour trouver les points de Γ dont les projections orthogonales sur δ_o sont un point K quelconque fixé on trace l'intersection du cercle de centre K et de rayon KA avec la parallèle à (AB) passant par K . On trouve ainsi deux solutions symétriques par rapport à δ_o .

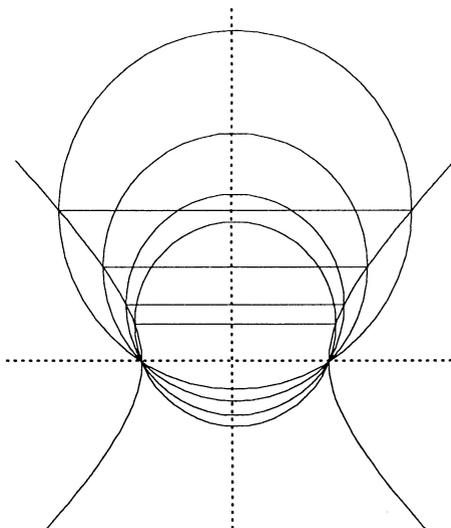


L'ensemble Γ admet donc δ_o comme axe de symétrie.

En résumé, l'hyperbole équilatère possède deux axes de symétrie δ_o et (AB) , et donc un centre de symétrie O . L'ensemble de ses projections orthogonales sur (AB) est la droite (AB) privé du segment $]AB[$, l'ensemble de ses projections orthogonales sur δ_o est la droite δ_o .

Remarque: Nous venons de voir que $OK \leq AK = HO$, dans un repère orthonormé \mathcal{R} de centre O tel que $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, l'hyperbole équilatère est entièrement située dans les secteurs angulaires définis par les bissectrices du repère et contenant les points A et B .

On peut ainsi construire quelques points de l'hyperbole pour en obtenir l'allure.



Remarque dans le repère orthonormé centré en O tel que les points A, B , et M sont de coordonnées $(-a, 0), (a, 0)$ et (x, y) (avec $a > 0$) on a

$$MH^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HB} \Leftrightarrow y^2 = (x+a)(x-a)$$

Une équation de l'hyperbole équilatère dans ce repère est donc $x^2 - y^2 = a^2$

Exercice:

1°) Montrer qu'un point M du plan appartient à l'hyperbole équilatère Γ si et seulement si il existe une similitude indirecte s telle que

$$\begin{aligned} s: H &\rightarrow H \\ M &\rightarrow A \\ B &\rightarrow M \end{aligned}$$

2°) En déduire¹ que

¹ On obtient ainsi une caractérisation angulaire de l'hyperbole qui ressemble beaucoup à celle du cercle. Cette dualité suscita, en 1852, cet échange de lettres entre le mathématicien anglais De Morgan et l'irlandais Hamilton.

"Je peux comprendre votre dernière perspective imaginaire. Ce qui se cache derrière est une substitution du cercle par l'hyperbole équilatère. ...J'ai toujours regretté que l'hyperbole équilatère n'ait pas eu quelque propriété remarquable, comme le cercle en a, qui aurait permis à Euclide de les introduire conjointement"

Et la réponse de Hamilton:

"A propos d'Euclide et de l'hyperbole équilatère, on pourrait penser presque aussi naturel de considérer le cas d'un triangle de base donnée, dont la différence, à la place de la somme, des angles de la base serait un angle droit".

Correspondance entre Sir William Rowan Hamilton et Augustus De Morgan, dans le livre de Robert Graves *Life of Sir William Rowan Hamilton* tome 3 pp.337-339 (Arno Press New York 1975).

La notion d'affinité de rapport complexe i (cf annexe) peut en effet expliquer cette propriété:

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{AB}) + (\vec{MB}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

indications pour une solution:

1°) Montrer que si M appartient à Γ alors $\frac{HM}{HA} = \frac{HB}{HM}$ et remarquer que par la position du point H la similitude s est nécessairement indirecte.

2°) On montre l'équivalence en remarquant que pour tout point M de projection orthogonale H sur (AB) on a

$$(\vec{MA}, \vec{AB}) + (\vec{MB}, \vec{AB}) = (\vec{MA}, \vec{HA}) + (\vec{MB}, \vec{HB}) + \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et l'on conclut par une méthode de fausse position.

Application:

Lorsque M s'éloigne infiniment de O , le milieu de $[AB]$, l'angle $\alpha = (\vec{MA}, \vec{MB})$ tend vers 0.

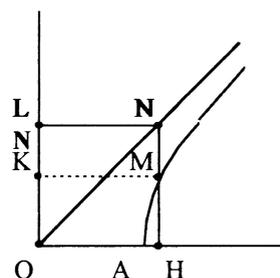
La relation de l'exercice précédent permet donc de noter que l'angle (\vec{MA}, \vec{AB}) tend vers $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$ près. L'hyperbole Γ possède donc deux directions asymptotiques de pentes 1 et -1.

Soit maintenant un point K pris aussi éloigné de O que l'on veut sur δ_o , un point M sur Γ de projections orthogonales K sur δ_o et H sur (AB) . On construit dans le rectangle $MKOH$ un carré $NLOH$ avec le point N situé sur la demi-droite $[HM)$ (ce qui est justifié par la position de la courbe par rapport aux bissectrices du repère).

On a

$$\begin{aligned} HN-HM &= HO - KO \\ &= KA - KO = \sqrt{KO^2 + AO^2} - KO \\ &= KO \left(\sqrt{1 + \frac{AO^2}{KO^2}} - 1 \right) \sim \frac{AO^2}{2KO} \end{aligned}$$

Le réel $HN-HM$ tend donc vers 0, lorsque l'abscisse de K sur l'axe (O, δ_o) , convenablement orienté, tend vers l'infini, puisque AO est borné.

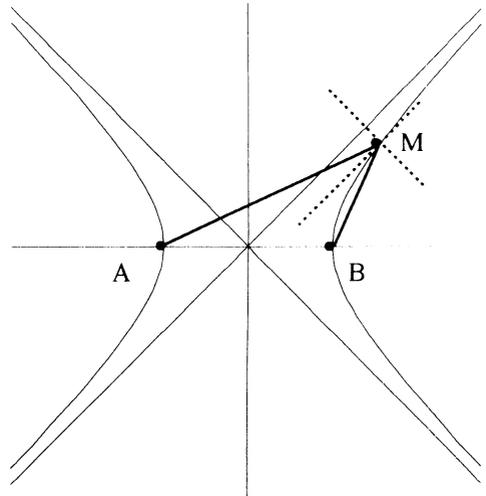


L'hyperbole équilatère possède donc deux asymptotes orthogonales qui sont les bissectrices du couples de droites $((AB), \delta_o)$.

Remarque: Si l'on prend A et B confondus dans la définition de l'hyperbole équilatère, Γ se réduit justement aux bissectrices précédentes.

Soit a l'affinité de base (AB) et de rapport i ; elle transforme les points réels du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ en des points imaginaires de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$. On sait de plus que l'affinité a transforme deux droites réelles orthogonales en deux droites imaginaires qui ont les mêmes bissectrices que \mathcal{R} .

Exercice: Montrer que pour tout point M non situé sur (AB) , les bissectrices de l'angle de droites (MA, MB) sont parallèles aux asymptotes.



Nous avons vu que dans le repère orthonormé \mathcal{R} centré en O tel que les points A, B , et M sont de coordonnées $(-a, 0)$, $(a, 0)$ et (x, y) (avec $a > 0$) l'équation cartésienne de l'hyperbole équilatère était $x^2 - y^2 = a^2$.

En posant $X=x-y$ et $Y=x+y$, la matrice du changement de repère est donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs définissant le nouveau repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) sont donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{i} + \vec{j})$, qui dirigent les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

Une équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est donc $XY = \frac{a^2}{2}$.

Remarque: une hyperbole équilatère est entièrement déterminée par la donnée d'un point et des deux asymptotes.

b. Intersection d'une hyperbole équilatère Γ et d'une droite (d) (d n'ayant pas la direction des asymptotes).

Soit $uX+vY+w=0$ l'équation de (d) dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) (avec $uv \neq 0$).

$$M(x, y) \in (d) \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} XY = \frac{a^2}{2} \\ uX+vY+w=0 \end{cases}$$

$$M(x, y) \in (d) \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} uX vY = uv \frac{a^2}{2} \\ uX+vY = -w \end{cases}$$

Les nombres uX et vY sont donc les réels dont la somme et le produit font $uv\frac{a^2}{2}$ et $-w$, donc les racines de l'équation $Z^2 + wZ + uv\frac{a^2}{2} = 0$. Quand le discriminant est positif on trouve deux points solutions M et M' .

On dira que la droite (d) est tangente à l'hyperbole, si et seulement si le discriminant s'annule.

Dans ce cas la racine double² de l'équation, $\frac{-w}{2}$, donne un unique point d'intersection $X = \frac{-w}{2u}$, $Y = \frac{-w}{2v}$.

De plus si la droite (d) contient *a priori* un point M_0 de Γ , le discriminant précédent δ , qui vaut $w^2 - 2uv a^2$, peut s'annuler (plus exactement, une direction étant donnée, donc u et v étant choisis, $\delta > 0 \Leftrightarrow |w| > \sqrt{2uv a}$).

$$\delta=0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv X_0 Y_0 = \frac{w^2}{4} \\ uX_0 + vY_0 = -w \end{cases}$$

On est de nouveau ramené à rechercher, w , X_0 et Y_0 étant donnés, la somme et le produit des deux réels uX_0 et vY_0 , donc à résoudre l'équation $Z^2 + wZ + \frac{w^2}{4} = (Z + \frac{w}{2})^2 = 0$. L'hyperbole possède donc des tangentes en tout point.

Si l'on remarque que la droite (d) rencontre les asymptotes en deux points L et L' de coordonnées $(\frac{-w}{u}, 0)$ et $(0, \frac{-w}{v})$ et que les coordonnées $(\frac{-w}{2u}, \frac{-w}{2v})$ du milieu de $[MM']$ se lisent directement sur l'équation, de plus les segments $[MM']$ et $[LL']$ ont même milieu.

Si nous notons α et β les racines de l'équation $Z^2 + wZ + uv\frac{a^2}{2} = 0$, les coordonnées du point M seront par exemple $(\frac{\alpha}{u}, \frac{\beta}{v})$ et les vecteurs \vec{LM} et $\vec{L'M}$ auront pour coordonnées respectives

$$(\frac{\alpha+w}{u}, \frac{\beta}{v}) \text{ et } (\frac{\alpha}{u}, \frac{\beta+w}{v})$$

on a donc $\vec{LM} \cdot \vec{L'M} = \vec{LM} \cdot \vec{L'M} = \frac{\alpha^2 + \alpha w}{u^2} + \frac{\beta^2 + \beta w}{v^2} = -uv\frac{a^2}{2}(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}) = \rho$ un réel qui ne dépend que de la direction de la sécante choisie.

On peut remarquer de plus qu'une droite de direction fixe est sécante à la conique Γ si et seulement si $w^2 - 2uv a > 0$, donc si et seulement si $LL'^2 = w^2(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}) > -4\rho$.

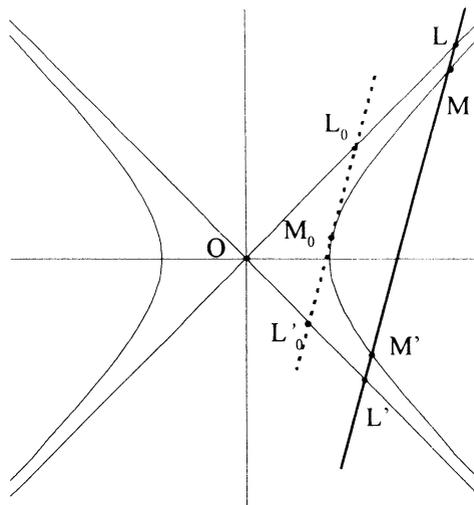
On peut énoncer la proposition suivante:

² Si $u=0$ ou $v=0$, le discriminant s'annule si et seulement si $w=0$. On pourra donc dire par extension que les deux asymptotes, axes du repère sont les deux tangentes à la courbe Γ , en deux points à l'infini.

Proposition:

Pour toute corde (MM') de l'hyperbole Γ , coupant les asymptotes en L et L' , alors les segments $[MM']$ et $[LL']$ ont même milieu. De plus si la corde garde une direction constante alors le réel $\overline{LM} \cdot \overline{L'M}$ est constant.

L'hyperbole Γ possède des tangentes en tout point. Si la tangente en un point M_0 à Γ rencontre les asymptotes en deux points L_0 et L'_0 , alors M_0 est le milieu de $[L_0 L'_0]$.



Corollaire:

Soit Γ une hyperbole équilatère d'asymptotes Δ et Δ' . La tangente au point C coupe l'une des asymptotes en T . A tout point M du plan on associe L (resp L') son image par la projection sur Δ (resp Δ') parallèlement à (CT) .

Alors pour tout point M on a $M \in \Gamma \Leftrightarrow (*) \overline{LM} \cdot \overline{L'M} = -CT^2$.

Démonstration: Le sens direct n'est qu'une répétition de la proposition précédente. Pour prouver le sens réciproque on choisit un point M_0 du plan qui vérifie la condition $(*)$ de projection L_0 et L'_0 . La droite $(L_0 L'_0)$ est sécante à Γ si et seulement si

$$L_0 L'_0{}^2 > 4CT^2.$$

Or les nombres $\overline{L_0 M_0}$ et $\overline{M_0 L'_0}$ sont solutions réelles du système symétrique

$$\begin{cases} \overline{LM_0} + \overline{M_0 L'_0} = L_0 L'_0 \\ \overline{LM_0} - \overline{M_0 L'_0} = CT^2 \end{cases}$$

on a donc $L_0 L'_0{}^2 > 4CT^2$ et la droite $(L_0 L'_0)$ coupe donc la conique en deux points qui vérifient $\overline{LM} \cdot \overline{L'M} = -CT^2$, et qui coïncident avec le point M_0 et son symétrique par rapport au milieu de $[L_0, L'_0]$.

Exercice: montrer que le produit des longueurs des segments $[O,L]$ et $[O,L']$ découpés par une tangente sur les asymptotes est constant.

2. Transformation de l'équation d'Apollonius par une affinité orthogonale.

Définition: Soient A et B deux points distincts, O le milieu de $[AB]$, δ la direction orthogonale à (AB) et λ un réel non nul. Pour tout point M du plan on note H la projection de M sur (AB) parallèlement à δ .

On appelle conique de centre O et de diamètre $[AB]$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \lambda \overline{HA} \cdot \overline{HB}.$$

Si l'on appelle α l'affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$, M' l'antécédent du point M , et ε le signe de λ , on a $MH^2 = |\lambda| M'H^2$ et donc

$$MH^2 = \lambda \overline{HA} \cdot \overline{HB} \Leftrightarrow M'H^2 = \varepsilon \overline{HA} \cdot \overline{HB}$$

On peut donc énoncer:

Proposition: Toute conique à centre de diamètre $[AB]$ est l'image du cercle de diamètre $[AB]$ ou de l'hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$ par une affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $(\sqrt{|\lambda|})^{-1}$.

Toute conique affine du cercle de diamètre $[AB]$ est bornée, et est appelée ellipse.

Toute conique affine de l'hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$ n'est pas bornée (elle possède deux asymptotes) et est appelée hyperbole.

1 Etude des ellipses.

On suppose donc $\lambda < 0$ et $\lambda \neq -1$; on appelle Γ l'ellipse définie, selon la méthode précédente, par ce réel λ et son diamètre $[AB]$ à partir du cercle γ de diamètre $[AB]$.

Appelons $[cd]$ le diamètre du cercle, orthogonal à $[AB]$, et $[CD]$ son image par l'affinité α .

Il est facile de montrer que Γ possède deux axes de symétrie (AB) et (CD) et donc un centre de symétrie O .

Si $\lambda < -1$, $CD > AB$, le diamètre $[CD]$ est le grand axe de l'ellipse et le cercle γ s'appelle le cercle secondaire de l'ellipse. Si $\lambda > -1$, $CD < AB$, le diamètre $[AB]$ est le grand axe de l'ellipse et le cercle γ s'appelle le cercle principal de l'ellipse.

Comme la composée de l'affinité orthogonale α de base $[AB]$ et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$ et de l'affinité orthogonale α' de base $[CD]$ et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$

on peut écrire (si γ' désigne le cercle de diamètre $[CD]$)

$$\alpha' \circ \alpha(\gamma) = \gamma'$$

ou encore

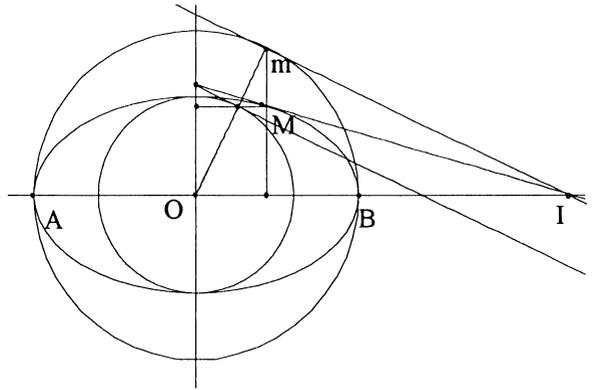
$$\Gamma = \alpha'^{-1}(\gamma')$$

L'ellipse Γ peut donc être obtenue à partir du diamètre $[CD]$ en utilisant une affinité orthogonale dont l'axe est perpendiculaire à celui de α et le rapport est l'inverse de celui de α .

Toute ellipse possède donc un cercle principal de rayon a et un cercle secondaire de rayon b dont elle peut se déduire par deux affinités orthogonales d'axes perpendiculaires et de rapports positifs inverses.

Exercice: trouver l'aire du domaine délimité par une ellipse d'axes $[AB]$ et $[CD]$.

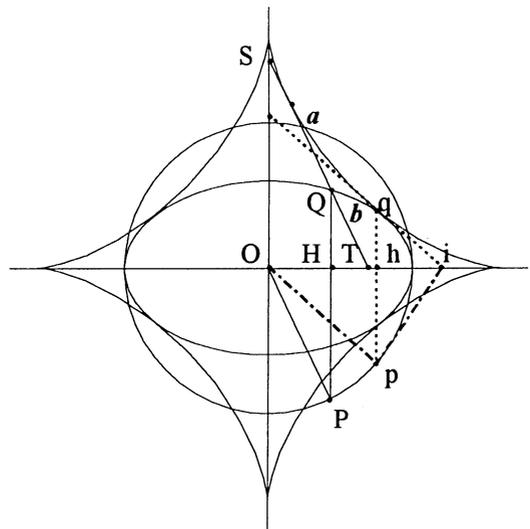
Application1: Toute ellipse de diamètre $[AB]$ possède des tangentes en tout point. Pour construire la tangente en un point M fixé, on construit l'image m de M par α . La perpendiculaire à (Om) passant par O , coupe (AB) en I qui est fixe par α . La tangente recherchée est donc la droite (IM) (on peut aussi utiliser le cercle secondaire *cf* figure ci-contre).



Application2 (construction de l'ellipse par la méthode dite « de la bande de papier »):

Si les deux points S et T sont assujettis à décrire deux droites orthogonales Δ et Δ' (sécantes en O), alors tout point fixé Q sur $]ST[$ (avec $SQ = a$ et $QT = b$) décrit une ellipse d'axes Δ et Δ' et de paramètres a et b .

En effet le point P , troisième sommet du parallélogramme $SQPO$ décrit le cercle de centre O et de rayon SQ . De plus si H est la projection de Q sur Δ , on a $\frac{HP}{HQ} = \frac{PO}{QT} = \frac{SQ}{QT} = \frac{a}{b}$. Le point Q est donc bien l'image de P par l'affinité orthogonale de base Δ et de rapport $\frac{b}{a}$.



Exercice: Si l'on dessine l'enveloppe de la famille des droites (ST) (dans les conditions précédentes), c'est-à-dire une courbe qui en tout point possède une tangente qui est l'une des droites de la famille, sans en oublier aucune, on obtient la courbe dessinée sur la figure précédente et appelée *astroïde*. Montrer que l'ellipse obtenue par la méthode de la bande de papier est tangente en un unique point du premier quadrant à cette astroïde. (On pourra montrer que le problème revient à trouver dans le quatrième quadrant un point p du cercle de centre O et de rayon OP , vérifiant les données précédentes tel que le triangle Opi soit rectangle en p).

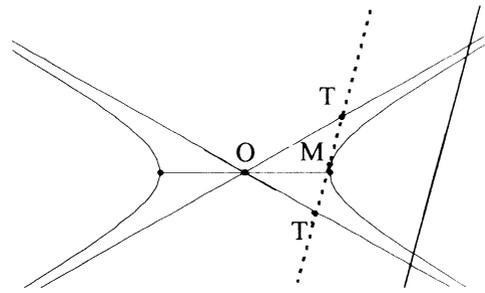
2 Etude des hyperboles.

On suppose donc $\lambda > 0$; on appelle Γ l'hyperbole définie, selon la méthode précédente, par ce réel λ et son diamètre $[AB]$ à partir de l'hyperbole équilatère γ de diamètre $[AB]$.

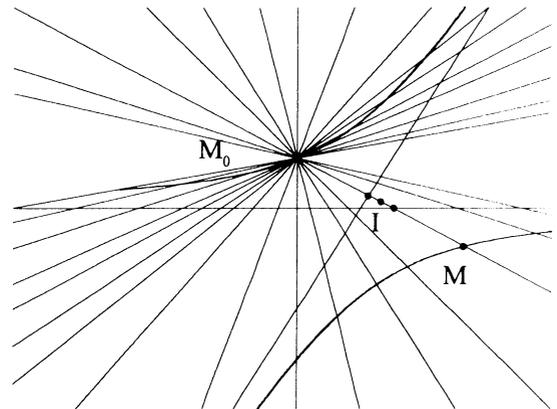
Il est facile de montrer que Γ possède deux axes de symétrie (AB) et (CD) et donc un centre de symétrie O .

L'hyperbole Γ possède deux asymptotes, images des deux droites passant par le milieu de $[AB]$ et de pentes 1 et -1 par l'affinité α^1 .

Application1: Toute hyperbole de diamètre $[AB]$ possède des tangentes en tout point. Le point de contact M d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment déterminé par cette tangente sur ses asymptotes. Le faisceau de droites déterminé par tout diamètre (OM) la tangente (T) en M et les deux asymptotes est donc un faisceau harmonique. Mieux, dans le cas de l'hyperbole équilatère, les deux asymptotes sont les bissectrices du couple $((OM), (T))$, et l'on obtient la direction de la tangente est M par symétrie par rapport à l'une quelconque des asymptotes.



Application2 Pour toute corde (MM') de l'hyperbole Γ , coupant les asymptotes en L et L' , alors les segments $[M, M']$ et $[L, L']$ ont même milieu. Cette propriété donne une méthode de construction rapide de l'hyperbole dont on connaît un point M_0 et les deux asymptotes. On fait tourner autour du point M_0 une droite variable qui rencontre les asymptotes en L et L' . On obtient un nouveau point de l'hyperbole en construisant le symétrique de M_0 par rapport au milieu de $[L, L']$.



3. Exercice: étude de la parabole.

Définition: Soient A et B deux points distincts. Pour tout point M du plan on note H la projection orthogonale de M sur (AB) .

On appelle parabole de sommet A l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \overline{AH}.$$

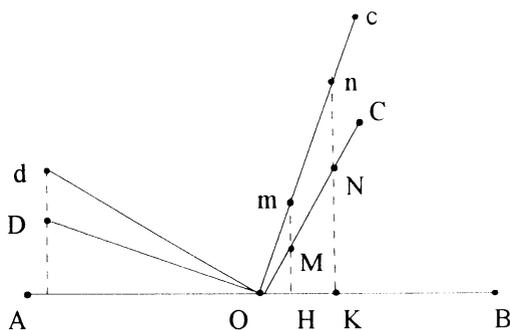
- a) Chercher les symétries éventuelles de la courbe, son allure, et tracer la tangente en A .
- b) Etant donné un réel λ non nul, on considère l'ensemble Γ_λ des points M tels que $MH^2 = \lambda \overline{AH}$ (avec les mêmes notations). Montrer que Γ_λ est l'image de Γ_1 par une homothétie h .

B. Extension de la définition.

1. Une propriété de l'affinité orthogonale.

Par une affinité orthogonale α d'axe (AB) et de rapport k le point c est transformé en C . La pente de la droite (OC) est donc la pente de la droite (Oc) multipliée par k .

Pour tout couple de points m et n pris sur (Oc) d'images M et N , le rapport $\frac{MN}{mn}$ est constant.



Exercice: Montrer que si l'on appelle θ l'angle $((AB), (Oc))$ (à π près) le rapport précédent vaut $\sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}$.

Si maintenant c et d sont pris sur un cercle de centre O , on aura pour tout couple de points m et n pris sur (Oc) d'images M et N , $k_1 = \frac{MN}{mn} = \frac{OC}{Oc}$, et pour tout couple de points m' et n' pris sur (Od) d'images M' et N' , le rapport $k_2 = \frac{M'N'}{m'n'} = \frac{OD}{Od}$. Le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ est donc égal à $\frac{OC}{OD}$.

2. Application à l'ellipse.

Soit Γ une ellipse de grand axe $[AB]$. Cette ellipse est l'image par l'affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a}$, α , du cercle γ de diamètre $[AB]$. Soit $[CD]$ un diamètre quelconque fixé de Γ non perpendiculaire à $[AB]$.

Les points C et D ont pour antécédents c et d par α . Un point M du plan quelconque a pour antécédent par α , m qui se projette orthogonalement en h sur $[cd]$.

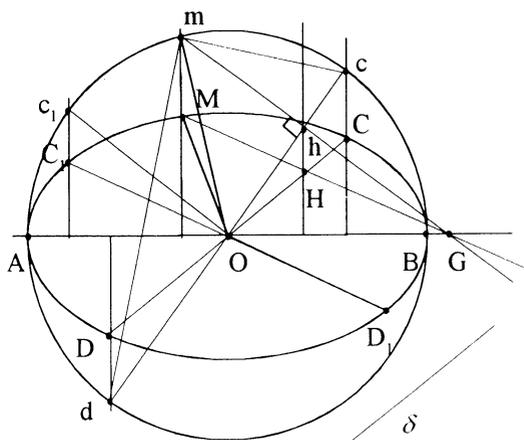
Soit δ_0 la direction orthogonale à $[cd]$ et δ l'image de cette direction par l'affinité vectorielle associée à α .

Le cercle γ est aussi le lieu des points m de projection orthogonale h sur $[cd]$ tels que

$$mh^2 = -hc \cdot hd$$

La droite (hm) qui ne peut être parallèle à (AB) , coupe (AB) en G . Par l'affinité α la droite (Gm) a pour image (GM) et la droite (cd) , (CD) . Le point h intersection de (Gm) et (cd) a donc pour image H intersection de (GM) et (CD) .

On a en appliquant le résultat du paragraphe précédent à la droite (hm) ,



$$HM = k_2 hm$$

et de même dans la direction orthogonale

$$HD = k_1 hd \text{ et } HC = k_1 hc$$

Finalement

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow m \in \gamma \\ &\Leftrightarrow mh^2 = -\overline{hc} \cdot \overline{hd} \\ &\Leftrightarrow k_1^2 HM^2 = -k_2^2 \overline{HC} \cdot \overline{HD} \\ &\Leftrightarrow HM^2 = -\lambda \overline{HC} \cdot \overline{HD} \end{aligned}$$

avec λ un réel strictement positif qui vaut d'après la remarque du paragraphe précédent

$$\lambda = \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{OC_1^2}{OC^2}$$

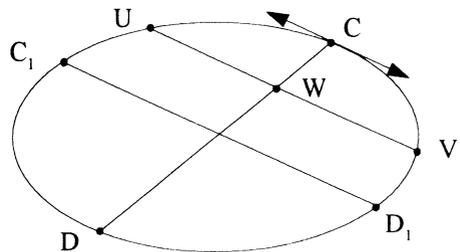
Proposition: Etant donnée une ellipse Γ fixée; pour tout diamètre $[CD]$ de Γ il existe une direction δ et un réel strictement positif λ qui font de Γ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ , on a

$$HM^2 = -\lambda \overline{HC} \cdot \overline{HD}$$

La direction δ associée au diamètre $[CD]$ est définie grâce à l'affinité α de façon unique. De plus la direction associée au diamètre $[C_1D_1]$ (avec (C_1D_1) de direction δ) est l'image par α de la direction orthogonale à $[\alpha^{-1}(C_1), \alpha^{-1}(D_1)]$, c'est-à-dire la direction de (CD) . On peut donc parler de directions **conjuguées** ou encore de diamètres **conjugués**.

On peut donc énoncer les propriétés suivantes qui sont obtenues grâce à l'affinité en lisant des relations évidentes dans le cercle γ .

Proposition: Soit (T) une droite contenant C extrémité du diamètre $[CD]$ un point d'une ellipse Γ . La droite (T) est tangente à l'ellipse, si et seulement si elle est parallèle au diamètre conjugué



Proposition: Etant donné un diamètre $[CD]$ d'une ellipse Γ . Une direction δ est conjuguée à ce diamètre si et seulement si on a la propriété suivante. Si une droite de direction δ est sécante à l'ellipse en U et V et sécante à (CD) en W alors W est le milieu de $[UV]$.

Si on choisit un repère centré au milieu du diamètre $[CD]$ et comme direction des axes les deux directions conjuguées, (CD) et (C_1D_1) on aura en appelant $\mathbf{a}' = OC$ et $\mathbf{b}' = OC_1$,

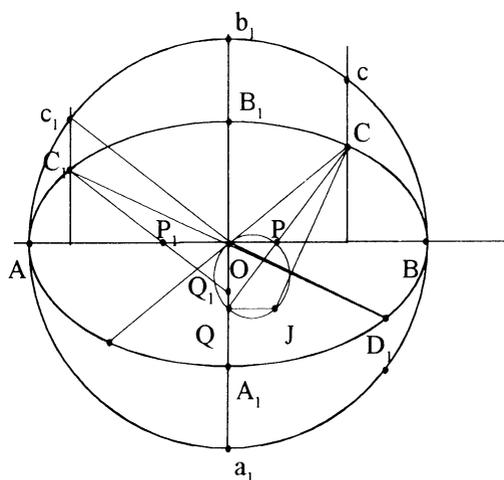
puisque $\lambda = \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{OC_1^2}{OC^2} = \frac{\mathbf{b}'^2}{\mathbf{a}'^2}$

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \Gamma &\Leftrightarrow HM^2 = -\lambda \overline{HC} \cdot \overline{HD} \\
&\Leftrightarrow y^2 = -\lambda (x - a')(x + a') \\
&\Leftrightarrow y^2 = -\frac{b'^2}{a'^2} (x - a')(x + a') \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1
\end{aligned}$$

Problème: Comment retrouver les directions conjuguées orthogonales, à partir d'un couple de diamètres conjugués quelconques?

Tout en conservant les notations du paragraphe précédent on construit la parallèle à (Oc) passant par C qui rencontre les axes principaux en P et Q . Le quadrilatère $OcCCQ$ est ainsi un parallélogramme. On note J le point dont les projections sur les axes sont P et Q . De la même façon on construit les points P_1 et Q_1 intersections avec les axes de la parallèle à (Oc_1) passant par C_1 .

Les points Q et C sont transformés par la translation t de vecteur \overrightarrow{QO} en O et c , qui par le quart de tour direct de centre O , r , deviennent O et c_1 . La translation t' de vecteur $\overrightarrow{OQ_1}$ envoie finalement ces deux points sur Q_1 et C_1 .



On a $QC = a$ et puisque les droites (PC) et (Oc) sont parallèles le rapport $\frac{PC}{Oc}$ est le même que celui de l'affinité. On a donc $PC = b$. On démontrerait de la même façon que $Q_1 C_1 = a$ et $P_1 C_1 = b$.

Le point P est le barycentre du système de points pondérés (C, b) $(Q, a - b)$. Son image par notre isométrie est donc barycentre du système (C_1, b) $(Q_1, a - b)$, c'est-à-dire le point P_1 . Le point J est à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par Q et de la perpendiculaire à (AB) passant par P , son image sera à l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par Q_1 et de la parallèle à (AB) passant par P_1 , O .

Finalement le vecteur $\overrightarrow{OC_1}$ est l'image du vecteur \overrightarrow{JC} par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, si l'on connaît les diamètres conjugués, $[CD]$ et $[C_1 D_1]$ on construira le point J tel que \overrightarrow{JC} soit obtenu à partir de $\overrightarrow{OC_1}$ par la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Appelons ω Le milieu de $[OJ]$, les intersections du cercle de diamètre $[OJ]$ avec (ωC) sont (si J est différent de O , c'est-à-dire si les diamètres conjugués ne sont pas perpendiculaires) deux points P et Q , et les axes de l'ellipse sont (OP) et (OQ) .

Théorème: Etant donnés deux points distincts C et D , un réel λ strictement positif et δ une direction distincte de celle de (CD) on note $\Gamma(C,D,\delta)$ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ , on a

$$HM^2 = -\lambda \overline{HC} \cdot \overline{HD} *$$

Alors l'ensemble des courbes $\Gamma(C,D,\delta)$ coïncide avec l'ensemble des ellipses.

Démonstration: le sens direct correspond une proposition déjà vue.

Considérons maintenant la courbe $\Gamma(C,D,\delta)$ définie par la relation *. Dans le repère centré au milieu de $[CD]$, défini par les directions (CD) et δ , une équation de $\Gamma(C,D,\delta)$ est, en appelant $a' = OC$ et $b' = OC$, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$. On peut construire par la méthode précédente une ellipse de centre O dont les directions conjuguées sont celles de (CD) et δ . D'après notre analyse cette ellipse aura, dans le même repère la même équation, et coïncidera donc avec $\Gamma(C,D,\delta)$.

2. Le cas de l'hyperbole.

Théorème: Etant donnée une hyperbole Γ équilatère de centre O et de diamètre $[AB]$, Δ et Δ' ses asymptotes, et $[CD]$ un diamètre quelconque, il existe une direction δ qui permet d'énoncer la propriété suivante:

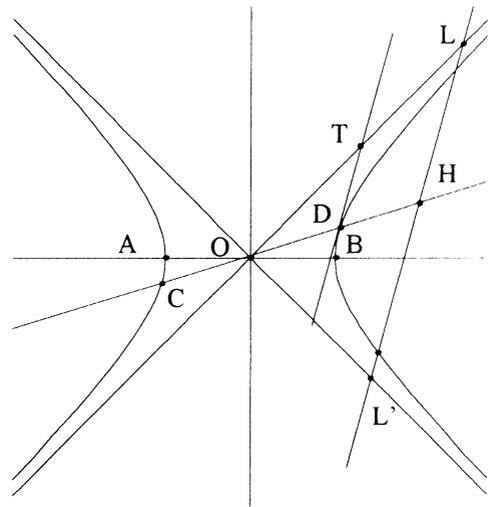
Γ est le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ , on a

$$HM^2 = HC \cdot HD$$

Démonstration: Soit δ la direction de la tangente en D à Γ qui coupe Δ en T . Par tout point M du plan on construit la parallèle à δ passant par M qui coupe les asymptotes en L et L' .

Nous avons vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de Γ est

$$(*) \quad \overline{LM} \cdot \overline{L'M} = -DT^2.$$



Nous savons que si H désigne le milieu de $[L,L']$

$$(*) \Leftrightarrow (\overline{LH} + \overline{HM})(\overline{L'H} + \overline{HM}) = -DT^2.$$

$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = HL^2 - DT^2.$$

$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = HO^2 - DO^2.$$

(car les triangles OTD et OHL sont isocèles puisque δ a été choisie symétrique du diamètre par rapport à Δ cf A 3 Application 1)

Finalement

$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = (\overline{HO} + \overline{OC})(\overline{HO} + \overline{OD})$$

$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = \overline{HC} \cdot \overline{HD}$$

Puisque les hyperboles ont été définies comme image par affinité de l'hyperbole équilatère, on a, en adaptant la démonstration déjà donnée pour les ellipses, la proposition suivante:

Proposition: Etant donnée une hyperbole Γ fixée; pour tout diamètre $[CD]$ de Γ il existe une direction δ et un réel strictement positif λ qui font de Γ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ , on a

$$HM^2 = \lambda HC \cdot HD$$

La direction δ associée au diamètre $[CD]$ est définie grâce à l'affinité α de façon unique. On appellera pour l'hyperbole équilatère, diamètre conjugué d'un diamètre $[CD]$, le segment obtenu par symétrie par rapport à l'une des asymptotes. On étendra ensuite cette définition à toutes les hyperboles en utilisant l'affinité α .

Remarque: pour tout couple de demi-diamètres conjugués $[OC]$ $[OC']$ le milieu du segment $[CC']$ appartient à l'une des asymptotes de l'hyperbole.

Mais contrairement au cas de l'ellipse, les deux diamètres conjugués ne jouent pas des rôles symétriques. En inversant leurs rôles on obtient deux hyperboles que l'on appelle conjuguées.

Exercice: énoncer et démontrer pour les hyperboles, des propriétés des diamètres conjugués semblables à celles énoncées pour les ellipses. Montrer que dans un repère convenable, l'équation cartésienne de toute hyperbole est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

Il est beaucoup plus simple de retrouver les directions conjuguées orthogonales, à partir d'un couple de diamètres conjugués quelconques dans le cas de l'hyperbole. On construit d'abord les asymptotes, puisqu'elles contiennent les milieux des segments qui joignent les sommets des demi-diamètres conjugués. Les axes recherchés sont alors les bissectrices des asymptotes.

Cette construction permet d'obtenir, comme pour les ellipses, la proposition réciproque de la proposition précédente, et donc d'énoncer le théorème suivant:

Théorème: Etant donnés deux points distincts C et D , un réel λ strictement positif et δ une direction distincte de celle de (CD) on note $\Gamma(C,D,\delta,\lambda)$ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ , on a

$$HM^2 = \lambda HC \cdot HD *$$

Alors l'ensemble des courbes $\Gamma(C,D,\delta)$ coïncide avec l'ensemble des hyperboles.

Corollaire: L'image d'une hyperbole ou d'une ellipse par une affinité de direction quelconque et de rapport k est une conique du même type.

1 Mouvement d'un repère mobile dans un repère fixe en dimension 3

Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}_1 les espaces rapportés aux repères orthonormés directs $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fixe, et $R_t = (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, mobile. On désigne par $(\Omega(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t))$ la position de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E} à l'instant t . On supposera que les fonctions $\vec{O\Omega}(t)$, $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ sont au moins de classe C^1 sur un intervalle de \mathbb{R} .

Dans le mouvement de \mathcal{E}_1 par rapport à \mathcal{E} , la position de Ω étant connue (et donc \vec{V}_Ω), déterminons, à chaque instant, *le champ des vecteurs vitesses* de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E} .

$$\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M} \text{ et donc}$$

$$(*) \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \frac{d\vec{\Omega M}}{dt}$$

Posons $\vec{\Omega M} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

M étant un point donné dans \mathcal{E}_1 , comme par exemple lié à un solide, ses coordonnées x , y et z sont des constantes dans R_t . (*) devient :

$$(*) \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + x \frac{d\vec{u}}{dt} + y \frac{d\vec{v}}{dt} + z \frac{d\vec{w}}{dt}$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale donc $\vec{u}^2 = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}$ et donc il existe deux

réels a et b tels que $\frac{d\vec{u}}{dt} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

De même, en considérant les vecteurs \vec{v} et \vec{w} , il existe des constantes réelles c , d , e et f telles que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = c\vec{u} + d\vec{w} \text{ et } \frac{d\vec{w}}{dt} = e\vec{u} + f\vec{v}$$

Or, les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont liés par la relation $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ d'où :

$$\frac{d\vec{u} \wedge \vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$ie \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$ie (a\vec{v} + b\vec{w}) \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge (c\vec{u} + d\vec{w}) = (e\vec{u} + f\vec{v})$$

$$ie -b\vec{u} - d\vec{v} = e\vec{u} + f\vec{v}$$

¹ Si on imagine le mouvement de \vec{u} comme celui d'un point U sur la sphère unité, on "voit" bien que sa vitesse est dans le plan tangent à cette sphère en U , donc orthogonale à \vec{u} . ie se décompose de façon unique sur \vec{v} et \vec{w} .

$$\text{et donc } \begin{cases} e = -b \\ f = -d \end{cases}$$

De même, si on utilise, $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$, on obtient, en plus, $a = -c$ et (*) devient :

$$\begin{aligned} (*) \vec{V}_M &= \vec{V}_\Omega + x(a\vec{v} + b\vec{w}) + y(-a\vec{u} + d\vec{w}) + z(-b\vec{u} - d\vec{v}) \\ (*) \vec{V}_M &= \vec{V}_\Omega + \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -d \\ b & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Or, toute application antisymétrique φ de \mathbb{R}^3 est associée à un vecteur unique \vec{r} tel que :
pour tout vecteur \vec{V} de \mathcal{E} , $\varphi(\vec{V}) = \vec{r} \wedge \vec{V}$

$$\text{Si } \vec{r} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{r} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } (*) \text{ devient :}$$

$$(*) \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \vec{r} \wedge \vec{\Omega M} \quad \text{où } \vec{r} = \begin{pmatrix} d \\ -b \\ a \end{pmatrix} \text{ par identification}$$

On retrouve, qu'à chaque instant, le champ des vitesses est *un torseur*, appelé *torseur cinématique* à l'instant t .

La résultante $\vec{r}(t)$ du torseur est appelée le *vecteur rotation instantanée* du mouvement à l'instant t et $\vec{r} \wedge \vec{\Omega M}$ peut apparaître comme une rotation autour de "l'axe" \vec{r} .

2. Mouvement plan sur plan

Supposons que le mouvement de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E} soit tel qu'il existe un plan (Π_1) de \mathcal{E}_1 qui reste constamment en coïncidence avec un plan (Π) de \mathcal{E} .

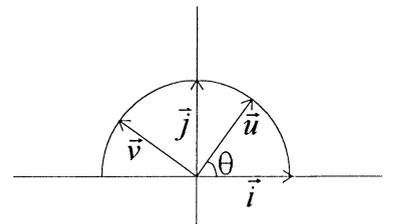
Choisissons le plan (Π_1) de repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ coïncidant avec (Π) de repère (O, \vec{i}, \vec{j}) tels que l'on ait constamment $\vec{w} = \vec{k}$. On a donc, dans le mouvement de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E} , $\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{0}$ d'où $e = f = 0$.

$$\text{et finalement } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

En considérant $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta$, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})}{dt} = \theta'(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \theta'\vec{v} \quad \text{donc } a = \theta'$$

$$(*) \text{ devient } \vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \vec{r} \wedge \vec{\Omega M} = \vec{V}_\Omega + \theta' \cdot \vec{k} \wedge \vec{\Omega M}$$



Si $\theta'(t) = 0$, le mouvement de (Π_1) sur (Π) est, à l'instant t , un mouvement de translation de vecteur vitesse orthogonal à \vec{k} .

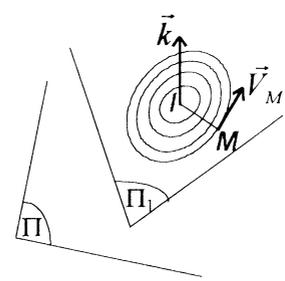
Si $\theta'(t) \neq 0$, recherchons les éventuels points où la vitesse s'annule :

$$\begin{aligned} \vec{V}_M = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{\Omega M} = -\frac{1}{\theta'} \vec{V}_\Omega \\ &\Leftrightarrow \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{\Omega M}) = -\frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega \\ &\Leftrightarrow (\vec{k} \cdot \vec{\Omega M}) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{\Omega M} = -\frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega \end{aligned}$$

Or $\vec{k} \cdot \vec{\Omega M} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ d'où $\vec{V}_M = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{\Omega M} = -\frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega$

soit :
$$\boxed{\vec{\Omega M} = \frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega}$$

On détermine ainsi un point et un seul, que nous noterons désormais $I(t)$; il s'agit, par définition du *centre instantané de rotation* (c.i.r.) à l'instant t du mouvement de (Π_1) sur (Π) .



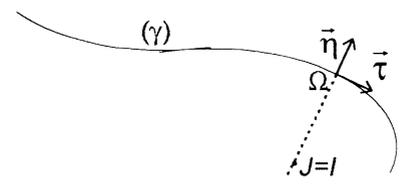
Nous avons $\vec{V}_I = \vec{0} = \vec{V}_\Omega + \theta' \cdot \vec{k} \wedge \vec{\Omega I}$ et $\vec{V}_M = \vec{V}_\Omega + \theta' \cdot \vec{k} \wedge \vec{\Omega M}$ d'où, par soustraction, (*) devient

$$(*) \vec{V}_M = \theta' \cdot \vec{k} \wedge \vec{IM}$$

Remarque 1 : Dans le cas où $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est le repère de Frenet $(\Omega, \vec{\tau}, \vec{\eta})$ d'une courbe plane (γ) , le c.i.r. est le centre de courbure au point Ω .

En effet, soit J le centre de courbure en Ω .

On a $\vec{\Omega J} = \frac{1}{\rho} \vec{\eta}$ où ρ est le rayon de courbure.



Posons $(\vec{i}, \vec{\tau}) = \theta$, on a dans ce cas $\frac{d\theta}{ds} = \theta' \frac{dt}{ds}$ où s est l'abscisse curviligne sur l'arc (γ) et

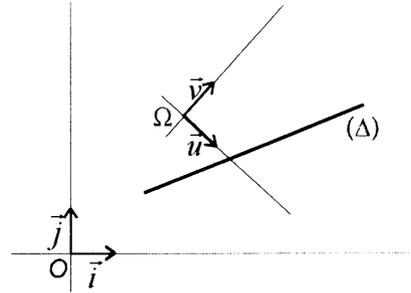
$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{O\Omega'}(t)\| dt = \int_{t_0}^t \|\vec{V}_\Omega(t)\| dt.$$

Donc $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}_\Omega(t)\|$ et $\rho = \frac{\theta'}{V_\Omega}$ nous donnent finalement : $\vec{\Omega J} = \frac{V_\Omega}{\theta'} \vec{\eta}$.

Or, si I est le c.i.r. du mouvement de $(\Omega, \vec{\tau}, \vec{\eta})$ sur (O, \vec{i}, \vec{j}) alors $\vec{V}_\Omega = \theta' \cdot \vec{k} \wedge \vec{I}\Omega \Rightarrow \vec{I}\Omega = \frac{1}{\theta'} \cdot \vec{V}_\Omega \wedge \vec{k}$
 $\Rightarrow \vec{\Omega}I = \frac{1}{\theta'} \cdot \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega = \frac{1}{\theta'} \cdot \vec{k} \wedge (V_\Omega \vec{\tau}) = \frac{V_\Omega}{\theta'} \vec{\eta}$

Donc $I = J$

Remarque 2 : Lorsqu'une droite (Δ) est liée à $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ et dans le cas du mouvement de $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut être amené à déterminer la courbe enveloppe de la famille des droites (Δ) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Soit alors une enveloppe (γ) et $M(t_0) \in (\gamma) \cap \Delta(t_0)$

La vitesse du point de contact M - que l'on peut voir comme un point de la droite $\Delta(t_0)$ et de l'enveloppe (γ) - a pour direction la droite $(\Delta(t_0))$ et le c.i.r. se trouve sur la normale à $(\Delta(t_0))$.

Dans le cas particulier où la droite enveloppe un point, le c.i.r. $I(t_0)$ est sur la normale à $(\Delta(t_0))$ passant par ce point.

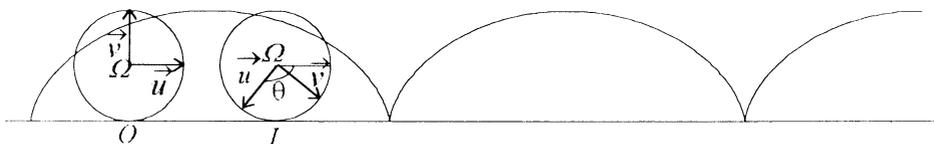
Remarque 3 : L'ensemble des positions dans le plan (Π) de $I(t_0)$ est la base du mouvement de (Π_1) sur (Π) (ou trajectoire dans le repère fixe) ; l'ensemble des positions dans (Π_1) de $I(t_0)$ est la roulante (ou trajectoire dans le repère mobile).

Dans le cas où $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est le repère de Frenet, la base est la développée et la roulante une partie de la droite (Ω, \vec{v}) .

Application : étude cinématique de la cycloïde.

On appelle *cycloïde* d'un plan (Π) toute courbe décrite par un point d'un cercle (C) qui reste constamment dans le plan (Π) et qui roule sans glisser sur une droite (Ox) .

Nous supposons ce cercle de rayon 1 et de centre Ω .



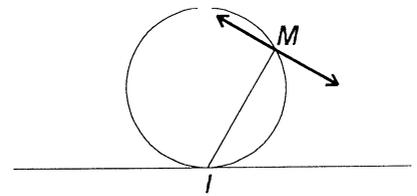
Après un temps t de roulement sans glissement, si $(\vec{u}, \vec{i}) = \theta$ alors $\Omega(-\theta, 1)$ (car θ est la longueur de l'arc du cercle de rayon 1) et $\theta = \theta' \cdot t$ où θ' est une constante.

Dans ce cas, le c.i.r. est le point I , le point de contact car :

$$\vec{\Omega}I = \frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \vec{V}_\Omega = \frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge \frac{d\vec{O}\Omega}{dt} = \frac{1}{\theta'} \vec{k} \wedge (-\theta' \vec{i}) = -\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{j}$$

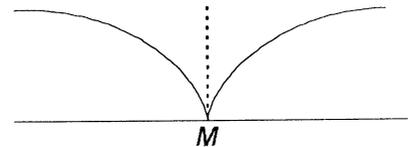
Conséquence :

La connaissance du c.i.r. nous permet d'obtenir le tracé des tangentes à la trajectoire en un point M , c'est la perpendiculaire à (IM) passant par I .



Remarques :

- 1) Lorsque M se trouve sur l'axe (Ox) , dans ce cas la vitesse s'annule et la tangente est verticale. Le point est un point de rebroussement.
- 2) $I \in (Ox)$ dans (Π) donc (Ox) est la base du mouvement.
- $I \in (C)$ dans (Π) donc (C) est la roulante.

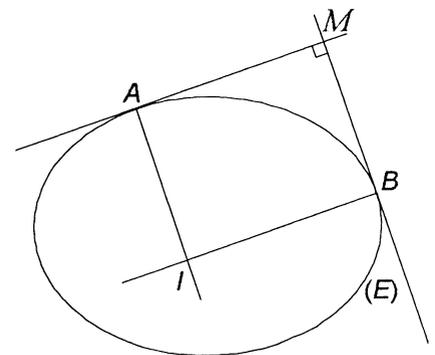


3. Exercices

a. Reprenons l'exercice qui consiste à déterminer le cercle orthoptique de l'ellipse :

(E) est une ellipse.

Deux tangentes en A et B à (E) se coupent orthogonalement en M .



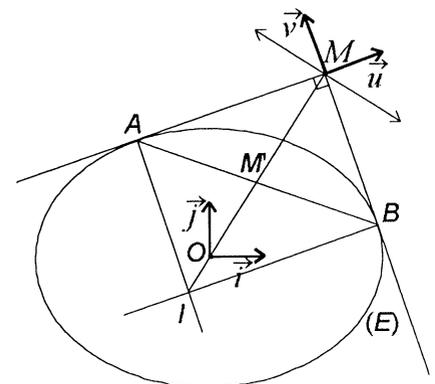
Par construction (AM) a pour enveloppe l'ellipse, le c.i.r. I du mouvement de (M, \vec{u}, \vec{v}) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) se trouve sur la normale en A à (AM) . De même, I se trouve sur la normale en B à (BM) .

Montrons que $O \in (IM)$

Soit M' le conjugué de M par rapport à l'ellipse alors O, M et M' sont alignés.

Comme $AIBM$ est un rectangle alors M' est le milieu de $[IM]$.

$\Rightarrow O, M, M'$ et I sont alignés.

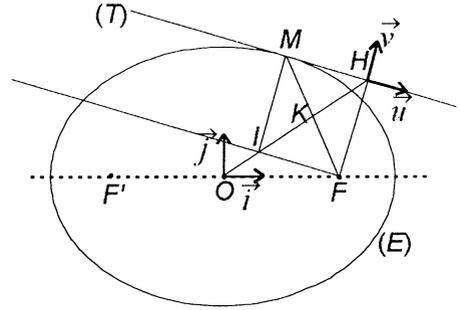


$$O \in (IM) \Rightarrow \vec{V}_M \perp \vec{OM} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} \cdot \vec{OM} = 0 \Rightarrow \frac{d(OM)^2}{dt} = 0 \Rightarrow OM = c^{ste} \text{ et } M \text{ se trouve sur un cercle de centre } O.$$

b. Podaire

On cherche le lieu des points H , projetés d'un foyer F sur les tangentes (T) à une ellipse définie comme au 1.

Les droites (HM) enveloppent (E) donc le c.i.r. I du mouvement de (H, \vec{u}, \vec{v}) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) se trouve sur la normale à (HM) passant par M . Les normales à (HM) contiennent le point F' (ou enveloppent le point F') donc le c.i.r. I se trouve sur la normale à (HF) passant par F (cf remarque 2).



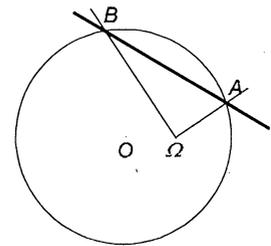
Comme la normale en M à (E) est la bissectrice intérieure de l'angle (\vec{MF}, \vec{MF}') où F et F' sont les foyers de (E) alors $\widehat{IMF} = \widehat{IMF}'$.

De plus $IFHM$ est un rectangle donc $\widehat{IMF} = \widehat{IHF}$ donc la droite contenant les points I, K et H est parallèle à (MF') .

Dans le triangle $MI'F'$, comme K est le milieu de $[MI']$ (centre du rectangle $II'HM$) alors (HK) qui est parallèle à (MF') coupe $[FF']$ en son milieu. Les points O, I, K et H sont alignés.

De nouveau, $O \in (IH)$ et H se trouve sur un cercle de centre O (qui est le cercle principal de (E)).

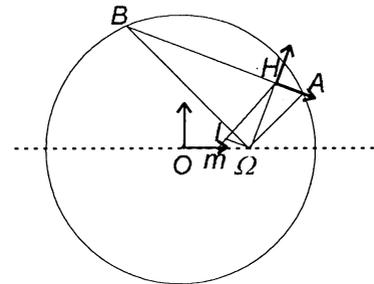
c. Soit (C) un cercle que nous supposons de rayon 1 et Ω un point intérieur à (C) tel que $O\Omega = \alpha$. Soit A et B deux points de (C) tels que $(\Omega A) \perp (\Omega B)$. On cherche l'enveloppe des droites (AB) .



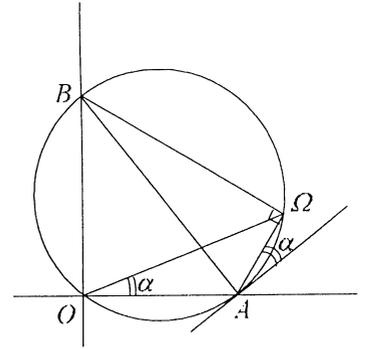
On sait que le pied de la hauteur H issue de Ω dans le triangle ΩAB se trouve sur un cercle de centre m , milieu de $[O\Omega]$.

Comme H décrit un cercle de centre m , le c.i.r. I du mouvement de (H, \vec{u}, \vec{v}) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) se trouve sur (Hm) .

H se trouve sur $(H\Omega)$, le c.i.r. se trouve donc sur la perpendiculaire à $(H\Omega)$ passant par Ω .



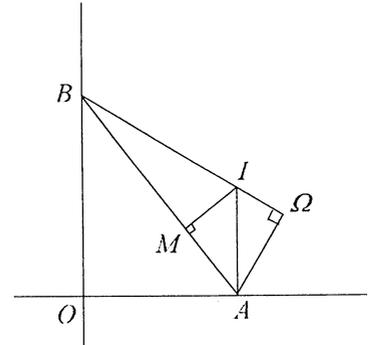
A parcourt (Δ) , donc à tout instant le c.i.r. I du mouvement de (A, \vec{u}, \vec{v}) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) est sur la normale à (Δ) passant par A .
 Observons par ailleurs que $O A \Omega B$ sont sur le cercle (C) de diamètre $[AB]$ en conséquence de quoi les angles $(\vec{u}, \vec{A\Omega})$ et $(\vec{OA}, \vec{O\Omega})$ sont égaux à π près (angles inscrits dans (C) interceptant le même arc $\widehat{A\Omega}$).



Or $(\vec{OA}, \vec{O\Omega}) \equiv \alpha[2\pi]$ où α est une constante.

On en déduit que la droite $(A\Omega)$ est fixe dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) et que le c.i.r. I est sur la normale à $(A\Omega)$ en Ω .

I est ainsi à l'intersection de (ΩB) et de la perpendiculaire à (Δ) en A .
 Le point I nous permet de construire le point caractéristique M de l'enveloppe de (AB) à l'instant considéré, projeté orthogonal de I sur (AB) .



Montrons alors que le point M décrit une certaine parabole de foyer Ω . Pour cela, on peut considérer la similitude s de centre B qui envoie I sur M , posons $s(A) = H$.

s est d'angle $-\alpha$ ou $-\alpha + \pi$

$$\text{car } (\vec{BA}, \vec{B\Omega}) = (\vec{OA}, \vec{O\Omega}) \equiv \alpha[\pi]$$

M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ car IMB est rectangle en M

$$I \rightarrow M$$

$$B \rightarrow B$$

$$A \rightarrow H$$

Donc AHB est rectangle en M

On en déduit $(\vec{OA}, \vec{OH}) \equiv -\alpha[\pi]$ (par le théorème des angles inscrits dans (C))

$s(A) = H$ donc la droite (OA) a pour image par s une droite passant par H et faisant un angle de $-\alpha[\pi]$ avec (OA) : il s'agit précisément de (OH) .

On a ainsi obtenu : $s : (OA) \rightarrow (OH)$
 $(IA) \rightarrow (MH)$

$(OA) \perp (IA)$ d'après la construction de I donc $(OH) \perp (MH)$ ie H est le projeté orthogonal de M sur (OH) .

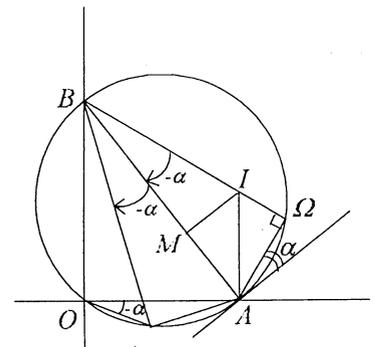
Vérifions enfin que $MH = M\Omega$ Cela résulte du fait que (BA) est "axe de symétrie" (par sa bissectrice) intérieure de $(\vec{B\Omega}, \vec{BH})$ et M est sur (AB) , H et Ω sur (C) .

Conclusion :

- La droite (OH) est fixe puisque faisant un angle $(-\alpha)$ avec (Δ) .

- Ω est fixe par hypothèse.

$MH = M\Omega$ avec H projeté orthogonal de M sur $(OH) = \delta$ signifie que M est sur la parabole de foyer Ω et de directrice δ .



CORDIC = ' **C**oordinate **R**otation **D**igital **C**omputer' : cet algorithme permet un calcul 'rapide' des sinus et cosinus (Volder, 1959) .

Le texte qui suit est l'énoncé d'un devoir maison proposé en classe de 1^{ères} permettant aux élèves de découvrir cet algorithme tout en manipulant les formules de trigonométrie: ce texte peut être amélioré (certaines questions trop vagues font l'objet d'une note en bas de page).

Où l'on découvrira comment procède la calculatrice pour calculer un sinus.

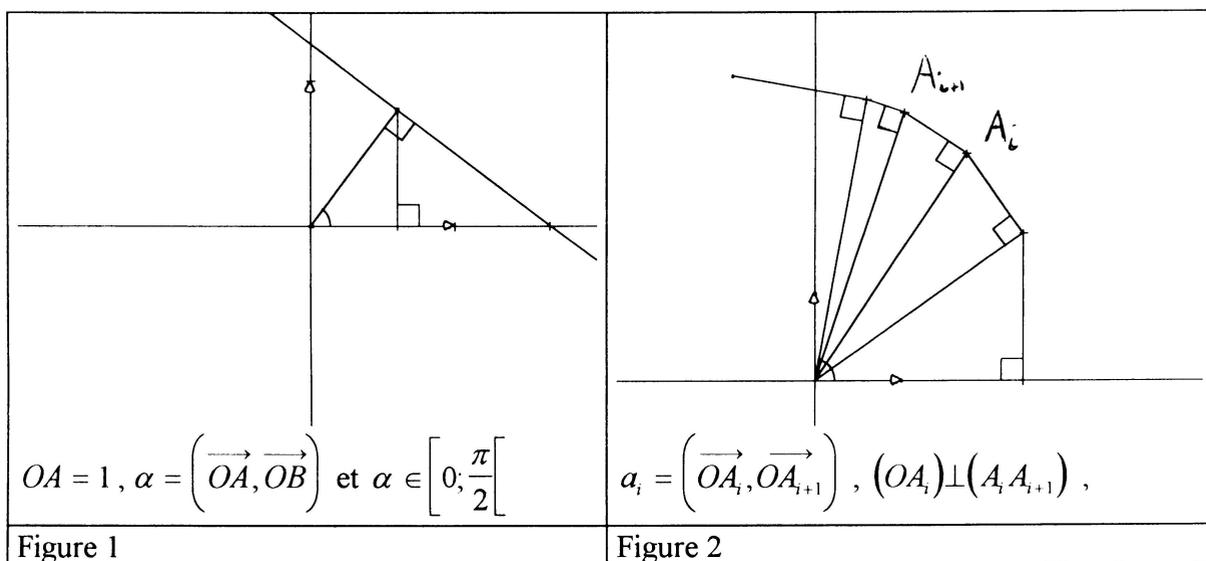
1)a) Sur la figure 1, calculer la longueur de l'arc AB et la longueur du segment [AB]. En déduire

l'inégalité: $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$

b) Sur la même figure, calculer l'aire du secteur angulaire OAB et l'aire du triangle OBK. En déduire l'inégalité : $\sin \alpha \cos \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$

c) Etablir alors les encadrements : $\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1$ et $-\frac{\alpha^2}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \leq 0$

d) Que peut-on en déduire pour \sin lorsque $0 \leq \alpha \leq 10^{-5}$?¹



2) On considère la figure 2 :

On pose : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, A_i(x_i, y_i), \tan a_i = \omega_i, OA_i = R_i$ et $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

a) Exprimer $\cos a, \sin a$ et $\tan a$ en fonction de x_n, y_n et R_n .

b) Etablir les relations: $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \begin{cases} x_{i+1} = x_i - \omega_i y_i \\ y_{i+1} = \omega_i x_i + y_i \\ R_{i+1} = R_i \sqrt{1 + \omega_i^2} \end{cases}$

c) En déduire qu'il suffit de connaître x_1, y_1 et R_1 et la suite des ω_i pour pouvoir calculer x_n, y_n et R_n puis $\cos a$ et $\sin a$.

¹La question était mal posée car trop "ouverte". Il s'agit en fait d'établir ici que : $\alpha - 0,5 \times 10^{-15} \leq \sin \alpha \leq \alpha$.

3) On considère les angles α_i (en radians), dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\tan \alpha_i = 10^{-i}$.

a) Calculer α_5, α_6 . Généraliser le résultat à α_i pour $i \geq 5$ en utilisant la question 1)d.²

b) A l'aide de la calculatrice calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à 10^{-9} près. Donner la valeur exacte de α_0 puis sa valeur approchée à 10^{-9} près.

4) L'algorithme CORDIC consiste à décomposer un angle a en somme d'angles α_i (en répétant éventuellement plusieurs fois le même angle α_i) puis à calculer son cosinus et son sinus suivant la méthode définie à la question 2.

Pour décomposer un angle on commence par lui soustraire autant de fois que possible α_0 , puis au reste ainsi obtenu on soustrait autant de fois que possible α_1 , et ainsi de suite jusqu'à obtention d'un reste strictement inférieur à 10^{-10} .

Application:

Décomposer l'angle $a = 1$ radian puis calculer son sinus et son cosinus à 10^{-9} près à l'aide de la méthode précédente (donc sans utiliser les touches sinus et cosinus de sa calculatrice.)

Solution (rédigée pour la classe)

1)a) Soit I le milieu de [AB] (cf. figure 1), OAB est isocèle donc la médiane (OI) est aussi hauteur, médiatrice, et bissectrice ; dans le triangle OAI rectangle en I, on a :

$$\frac{IA}{OA} = \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow IA = OA \sin \frac{\alpha}{2} \text{ or } OA = 1 \text{ donc } AB = 2 IA = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Une mesure de l'arc AB est $OA \alpha$ et cette mesure est inférieure ou égale à la longueur du segment [AB], donc $2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq \alpha \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$

b) L'aire du secteur angulaire OAB est : $A_1 = \frac{1}{2} OA^2 \alpha = \frac{1}{2} \alpha$

L'aire du triangle OBK rectangle en B est $A_2 = \frac{1}{2} OB \cdot BK$ et $\frac{BK}{OB} = \tan \alpha$ donc :

$$A_2 = \frac{1}{2} OB^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

On a : $A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha \leq \frac{1}{2} \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \tan \alpha$

L'aire du triangle OHB rectangle en H est : $A_3 = \frac{1}{2} OH \cdot BH$ et $\frac{BH}{OB} = \cos \alpha, \frac{OH}{OB} = \sin \alpha$, donc

$$A_3 = \frac{1}{2} OB^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha$$

Or $A_3 \leq A_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha \sin \alpha \leq \alpha$

Conclusion :

$$\forall \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos \alpha \sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$$

c) On considère $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. $\cos \alpha \sin \alpha \leq \alpha \Rightarrow \cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ car $\alpha > 0$

²Il s'agit d'établir que : $\forall i \geq 5, 0 \leq \tan \alpha_i - \alpha_i \leq 10^{-14}$ et d'en déduire : $\tan \alpha_i = \alpha_i$ à 10^{-14} près.

D'après a), on a : $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \leq \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$ car $\cos \frac{\alpha}{2} \geq 0$, or $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$
 donc $\sin \alpha \leq \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$, comme $\alpha > 0$, alors : $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1$

Conclusion :

$$\forall \alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, \cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1$$

Alors $\cos \alpha - 1 \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \leq 0$

Or : $0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$ et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, donc

$$0 \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq -\frac{\alpha^2}{2} \text{ d'où } \forall \alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, -\frac{\alpha^2}{2} \leq -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \leq 0$$

d) $0 \leq \alpha \leq 10^{-5} \Rightarrow -0,5 \times 10^{-10} \leq -\frac{\alpha^2}{2} \leq 0$ car la fonction $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$,

d'où : $-0,5 \times 10^{-10} \leq -\frac{\alpha^2}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \leq 0 \Rightarrow -0,5 \times 10^{-10} \alpha \leq \sin \alpha - \alpha \leq 0$ car $\alpha > 0$

Comme $\alpha \leq 10^{-5}$ alors $-0,5 \times 10^{-10} \alpha \geq -0,5 \times 10^{-15}$, on en déduit :

$$-0,5 \times 10^{-15} \leq -0,5 \times 10^{-10} \alpha \leq \sin \alpha - \alpha \leq 0$$

c'est-à-dire : $\alpha - 0,5 \times 10^{-15} \leq \sin \alpha \leq \alpha$

α est donc une valeur approchée de $\sin \alpha$ à $0,5 \times 10^{-15}$ près par excès lorsque $0 \leq \alpha \leq 10^{-5}$

2) a) On a $A_n(x_n; y_n)$, soit le point I_n tel que : $\vec{OI}_n = \frac{1}{\|\vec{OA}_n\|} \vec{OA}_n$, alors $\|\vec{OI}_n\| = 1$ donc I_n est un

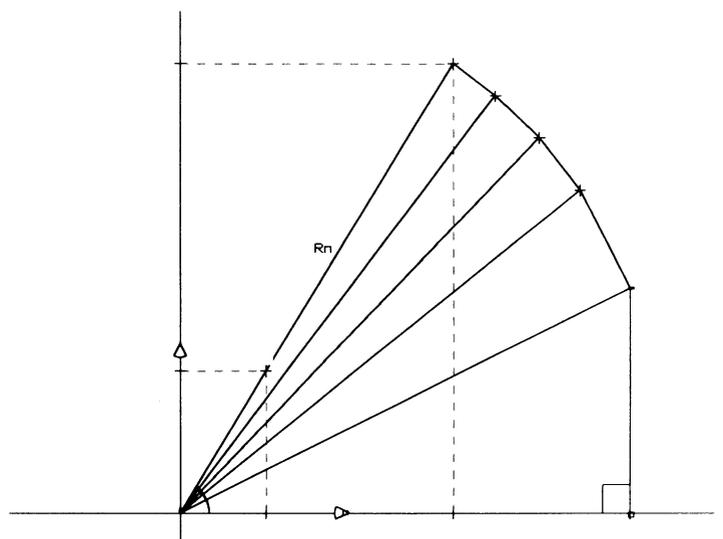
point du cercle trigonométrique, de plus

$(\vec{i}, \vec{OI}_n) = (\vec{i}, \vec{OA}_n) = a$, on peut alors

écrire $I_n(\cos a; \sin a)$ d'où

$$\vec{OI}_n \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\vec{OA}_n\|} \vec{OA}_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ R_n \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} \cos a = \frac{x_n}{R_n} \\ \sin a = \frac{y_n}{R_n} \\ \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{y_n}{x_n} \end{cases}$$



b) Cette formule est facile à établir avec les nombres complexes... mais nous sommes en 1^{ère}S, donc il faut procéder autrement

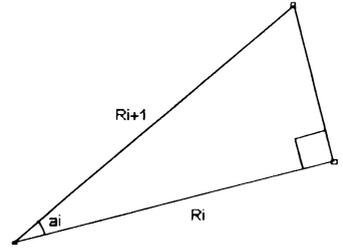
$$\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_{i+1} = x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} = \|\vec{OA}_i\| \|\vec{OA}_{i+1}\| \cos a_i = R_i R_{i+1} \cos a_i$$

$$\det(\vec{OA}_i, \vec{OA}_{i+1}) = x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1} = \|\vec{OA}_i\| \|\vec{OA}_{i+1}\| \sin \alpha_i = R_i R_{i+1} \sin \alpha_i$$

Or $\frac{R_i}{R_{i+1}} = \cos \alpha_i \Rightarrow R_i R_{i+1} = \frac{R_i^2}{\cos \alpha_i}$, on a donc le système:

$$\begin{cases} x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} = R_i^2 & L_1 \leftarrow y_i L_1 + x_i L_2 \\ -y_i x_{i+1} + x_i y_{i+1} = R_i^2 \tan \alpha_i & L_2 \leftarrow x_i L_1 - y_i L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{i+1} = x_i - \omega_i y_i \\ y_{i+1} = y_i + \omega_i x_i \end{cases} \text{ où } \omega_i = \tan \alpha_i$$



$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\cos \alpha_i} \Rightarrow R_{i+1}^2 = \frac{R_i^2}{\cos^2 \alpha_i} = R_i^2 \frac{\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} = R_i^2 (1 + \tan^2 \alpha_i)$$

$$\text{d'où } R_{i+1} = R_i \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i} = R_i \sqrt{1 + \omega_i^2}$$

c) Si on connaît x_1, y_1, R_1 alors grâce aux formules précédentes, on peut calculer x_2, y_2, R_2 , et ainsi de suite (on pourrait formaliser ici un raisonnement par récurrence, mais est-ce utile?) jusqu'à l'obtention de x_n, y_n, R_n ; on en déduit alors $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ en utilisant les formules du

2) a)

3) a) Soit tel que : $0 \leq \alpha \leq 10^{-5}$ alors on sait que :

$$0 \leq \sin \alpha \leq \alpha \leq 10^{-5} \Rightarrow 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 10^{-10} \Rightarrow 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha \geq 1 - 10^{-10}, \text{ d'où}$$

$$1 \geq \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \geq \sqrt{1 - 10^{-10}} \geq 1 - 10^{-10} \quad (\sqrt{x} \geq x \text{ lorsque } 0 \leq x \leq 1), \text{ alors}$$

$$1 \leq \frac{1}{\cos \alpha} \leq \frac{1}{1 - 10^{-10}}$$

En multipliant membre à membre les deux inégalités : $0 \leq \sin \alpha \leq \alpha$ et $1 \leq \frac{1}{\cos \alpha} \leq \frac{1}{1 - 10^{-10}}$, on

obtient : $0 \leq \tan \alpha \leq \frac{\alpha}{1 - 10^{-10}}$ d'où

$$0 \leq \tan \alpha - \alpha \leq \left(\frac{1}{1 - 10^{-10}} - 1 \right) \alpha = \frac{10^{-10}}{1 - 10^{-10}} \alpha \leq 10^{-9} \alpha \leq 10^{-14} \text{ car } \frac{10^{-10}}{1 - 10^{-10}} \leq 10^{-9} \text{ et } \alpha \leq 10^{-5}$$

donc : $0 \leq \tan \alpha - \alpha \leq 10^{-14} \Leftrightarrow \alpha \leq \tan \alpha \leq \alpha + 10^{-14}$; on peut donc affirmer que

α est une valeur approchée de $\tan \alpha$ à 10^{-14} près par défaut lorsque $0 \leq \alpha \leq 10^{-5}$

On a : $0 \leq \tan \alpha - \alpha \leq 10^{-14} \Leftrightarrow \tan \alpha - 10^{-14} \leq \alpha \leq \tan \alpha$ alors

pour tout entier i supérieur ou égal à 5 : $\tan \alpha_i = 10^{-i} \Rightarrow 10^{-i} - 10^{-14} \leq \alpha_i \leq 10^{-i}$ c'est-à-dire :

Pour tout entier $i \geq 5$, 10^{-i} est une valeur approchée de α_i à 10^{-14} près par excès.

b) On obtient les valeurs approchées suivantes à 10^{-9} près :

$$\alpha_1 = 0,099668652 \quad \alpha_2 = 0,009999667 \quad \alpha_3 = 0,000100000 \quad \alpha_4 = 0,000010000$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} \text{ d'où } \alpha_0 = 0,785398163 \text{ à } 10^{-9} \text{ près.}$$

Pour décomposer un angle et calculer ensuite son sinus et son cosinus, on peut effectuer le programme proposé à la page suivante.

On obtient ainsi :

$$\text{- par Cordic :} \quad \sin 1 = 0,841470984, \quad \cos 1 = 0,540302307$$

$$\text{- par les fonctions de Turbo-Pascal :} \quad \sin 1 = 0,841470985, \quad \cos 1 = 0,540302306$$

ALGORITHME CORDIC	PROGRAMME EN PASCAL	PROGRAMME Casio fx 7800G
<p>DEBUT Afficher('Donner un angle') Lire(t);</p> <p>Pour p de 0 à 10 faire $Arctan(10^{-p}) \rightarrow a[p]$</p> <p>1 \rightarrow x 0 \rightarrow y 1 \rightarrow r 0 \rightarrow p</p> <p>Tant que $t \geq 10^{-9}$ faire début Tant que $t \geq a[p]$ faire début $t - a[p] \rightarrow t$ $x - 10^{-p} y \rightarrow z$ $y + 10^{-p} x \rightarrow y$ $z \rightarrow x$ $r \sqrt{1 + 10^{-2p}} \rightarrow r$ fin $p + 1 \rightarrow p$ fin afficher ('sinus',y/r) afficher ('cosinus',x/r) FIN</p>	<pre>PROGRAM CORDIC; CONST max=10; TYPE Base=array[0..max] of real; VAR a,d:base; x,y,r,z,t:real; i,j,p:integer; BEGIN Writeln('Angle?'); readln(t); writeln(' Calcul par TP de sinus ',t:0:2,' : ',sin(t):0:10); write(' Calcul par CORDIC de sinus ',t:0:2,' : '); a[0]:=Pi/4; a[1]:=0.099668652; a[2]:=0.009999667; a[3]:=1e-3; for p:=4 to max do a[p]:=a[p-1]*0.1; d[0]:=1; for p:=1 to max do d[p]:=d[p-1]*0.1; x:=1; y:=0; r:=1; p:=0; while t>=1e-9 do BEGIN While (t>=a[p]) do BEGIN t:=t-a[p]; z:=x-d[p]*y; y:=y+d[p]*x; x:=z; r:=r*sqrt(1+sqr(d[p])); END; inc(p); END; writeln(y/r:0:10); Readln; END.</pre>	<p>"ANGLE"?\rightarrowT</p> <p>$\pi/4 \rightarrow A[1]$ 0.099668652$\rightarrow A[1]$ 0.009999667$\rightarrow A[2]$ 3\rightarrowP Lbl1 10 x^y -P$\rightarrow A[P]$ Isz P P<10\RightarrowGoto 1</p> <p>1\rightarrowX 0\rightarrowY 1\rightarrowR 0\rightarrowP Lbl2 $t \geq a[p] \Rightarrow$Goto 3 P+1\rightarrowP Goto 2 Lbl3 T-A[P]\rightarrowT X-(10 x^y -P)Y\rightarrowZ Y+(10x^y -P)X\rightarrowY Z\rightarrowX R$\sqrt{(1+10x^y -2P)} \rightarrow$R T $\geq 10^{-9} \Rightarrow$Goto 2 "SINUS" Y/R\angle "COSINUS" X/R</p>

Référence bibliographique :

- Dimathème, 1ère S, édition Didier 1983
- The C Users Journal, Novembre 1982

Lors de la première journée¹ de stage, Yves Suprin nous a présenté un problème qu'il a proposé à ses élèves sur l'algorithme CORDIC . A cette occasion, il a précisé que cette technique est utilisée par des calculatrices pour fournir les valeurs des fonctions trigonométriques.

Ceci m'a donné l'idée de voir comment ces fonctions sont calculées par un programme d'ordinateur : j'ai choisi un programme construit par le Turbo Pascal de Borland.

1- Observations sur la compilation

La question est : que se cache t'il derrière le programme :

```
var a :real ;  
begin  
  a :=cos(2.3) ;  
end.
```

Certainement beaucoup de choses puisque une fois compilé sur disque, le fichier construit a une taille de 4879 octets. A raison de 2 à 3 octets de moyenne par instruction en langage machine, ceci fait de l'ordre de 2000 instructions !

En fait, le programme suivant fait déjà 2916 octets

```
begin  
end.
```

l'ouverture et la fermeture de tout programme nécessite de nombreux contrôles.

De plus, tout programme contenant un calcul contient dans sa version compilée tous les outils de calcul de l'unité Standard.

Remarques à propos du coprocesseur.

Pour espérer « voir » des algorithmes, il ne faut pas utiliser un coprocesseur qui est une boîte noire au même titre qu'une calculatrice. Tout ce qui est dit ici n'en fait pas usage.

Dans la pratique il faut pas s'en passer comme le montrent les données suivant :

r=cos(2.3) avec ou sans le coprocesseur

Sans : -6.6627602128E-01

Avec : -6.66276021279824E-0001

Temps en centièmes de secondes pour une boucle exécutant 10000 fois le calculs (avec un pentium 100)

Sans : 26

Avec : 8

¹ François Couloigner, 27 rue de la libération, 76440 Forges les Eaux, tél : 02 35 90 46 70
Adr. élec. : Francois.Couloigner@wanadoo.fr

2- Les réels du Pascal

Ils sont décrits dans la partie « Programmation avancée » du « Guide du programmeur » du Turbo Pascal.

Quand il rencontre la déclaration *var r :real* ; le compilateur fait en sorte que le programme obtenu réserve 6 octets (48 chiffres binaires) en mémoire pour stocker la valeur de r.

Le signe sg	La mantisse m	L'exposant e
1 chiffre binaire	39 chiffres binaires	8 chiffres binaires(1 octet)

Ce qui donne : $r = (-1)^{sg} \cdot (1 + m \cdot 2^{-39}) \cdot 2^{e-129}$ (r=0 si e=0)

Exemple : $\sqrt{5} = 2,236.0679775... = 1.11803398875... \cdot 2^1$.

sg=0	m = 64889871552 $\approx 0,118... \cdot 2^{39}$	e=130
------	---	-------

En hexadécimal : 0F1BBCDCC082

Précision des calculs

A quelle condition ε est-il négligeable par rapport à r ? (ε et r positifs)

Pour $2^q \leq r < 2^{q+1}$, il faut $\varepsilon < 2^{-39} \cdot 2^q$ soit $\frac{\varepsilon}{r} < 2^{-39}$

3- Algorithmes de calcul des fonctions de référence.

Ils utilisent l'approximation polynomiale la plus simple : le développement limité au voisinage de 0 (dl).

Pour conserver un maximum de précision, on se ramène par changement de variable au calcul de fonctions équivalentes à x et si possible impaires (la moitié des coefficients du dl sont nuls).

Dans la pratique, pour caculer les valeurs d'une telle fonction, on peut négliger $\varepsilon(x)$ dès que

$$\frac{\varepsilon(x)}{|x|} < 2^{-39}$$

Le calcul d'un cosinus est assez banal : on se ramène au calcul du sinus d'un nombre de l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Celui d'un logarithme est plus intéressant : son dl n'a pas la réputation de converger très vite et n'est pas impair. C'est lui que j'ai choisi de décrire.

Le dl de $l(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ est simple, sa partie impaire est $\frac{1}{2}[l(x)-l(-x)] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

C'est l'idée de départ de ce qui suit.

4- Une activité pour des élèves

Ce sujet décrit une méthode utilisée par des programmes d'ordinateur (par exemple Turbo Pascal) pour calculer le logarithme népérien d'un réel strictement positif r.

1- Une fonction logarithme f qui se prête bien à l'approche par un polynôme.

Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

a- Pour x dans l'intervalle $]-1;1[$, établissez l'égalité :
$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}$$

b- Trouvez 2 réels a et b tels que pour tout x de $]-1;1[$, on ait :
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$$

b- Calculez la primitive $f(x)$ de $\frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0.

c- Pour x dans l'intervalle $]-1;1[$, établissez l'inégalité :
$$\int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

d- $E_n(x)$ désignant le membre de droite de l'inégalité précédente, explicitez un polynôme $P_n(x)$ tel que pour tout x de l'intervalle $]-1;1[$ on ait :
$$P_n(x) - E_n(x) \leq f(x) \leq P_n(x) + E_n(x)$$

Pour n assez grand, on peut négliger $E_n(x)$ dans un calcul numérique si $|x|$ s'éloigne peu de 0.

2- Pour calculer $\ln(r)$, il est possible de se restreindre au cas d'un nombre y compris entre 1 et 2.

a- Montrez qu'il existe un couple (y, q) , y réel de l'intervalle $[1 ; 2[$ et q entier relatif tel que : $r = y \cdot 2^q$.

b- Pourquoi la seule connaissance de la constante $\ln 2$ permet-elle de ramener le calcul du logarithme de r à celui de y ?

3- Comment se ramener au calcul de $f(x)$ « pour de petites valeurs de x »

On fait le changement de variable $y = k \cdot \frac{1+x}{1-x}$ où k est une constante strictement positive.

a- Montrez que pour k fixé, cette égalité définit une bijection $\varphi: y \mapsto x$ sur l'intervalle $[1; 2[$.
Dressez le tableau de variation de φ .

b- Etudiez les variations et représentez les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par $u(k) = \left| \frac{1-k}{1+k} \right|$ et

$$v(k) = \left| \frac{2-k}{2+k} \right|.$$

c- Quelle valeur faut-il donner à k pour que $x = \varphi(y)$ s'éloigne le moins possible de 0 quand y parcourt l'intervalle $[1; 2[$? Précisez l'image de l'intervalle $[1 ; 2[$ par φ .

On note $\lambda = 3 - 2\sqrt{2}$ et I l'intervalle de rayon λ centré sur 0.

4- Utilisation de $f(x)$ pour calculer $\ln(r)$ avec une précision donnée .

Pour un calculateur qui opère avec 39 chiffres binaires de précision, $E_n(x)$ est négligeable si

$$\frac{E_n(x)}{|x|} < 2^{-39}.$$

a- Montrez que pour tout réel x de I , on a :
$$\frac{E_n(x)}{|x|} \leq \frac{E_n(\lambda)}{\lambda}$$

b- Trouvez, en utilisant une calculatrice, le plus petit entier n tel que $\frac{E_n(\lambda)}{\lambda} < 2^{-39}$

c- Pour un calculateur qui opère avec 39 chiffres binaires de précision, justifiez la formule :

$\ln(y \cdot 2^n) \approx q \ln 2 + \ln \sqrt{2} + 2P \left(\frac{y - \sqrt{2}}{y + \sqrt{2}} \right)$	$P(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13}$
---	--

Quelques commentaires et éléments de réponse

1- On introduit la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)$ où $R_n(x) \leq$

$$\frac{1}{1-x^2} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

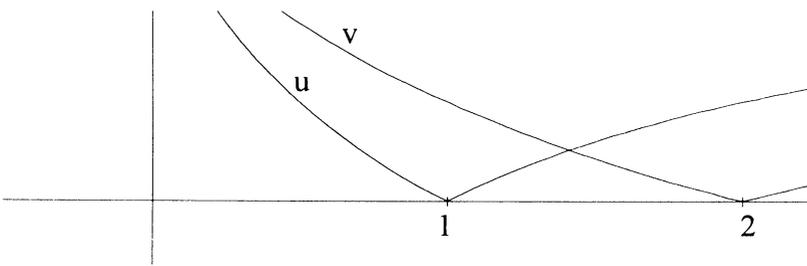
2- $\ln r = \ln y + 2 \ln 2$ ($y \in [1 ; 2[$)

3- Le changement de variable $y = k \cdot \frac{1+x}{1-x}$ donne $\ln y = \ln k + 2f(x)$. Il est souhaité d'atteindre

tout l'intervalle $[1 ; 2[$ pour y avec un intervalle qui s'éloigne le moins possible de 0. Or quand y varie dans $[1 ; 2[$, x varie dans

$\left[\frac{1-k}{1+k}, \frac{2-k}{2+k} \right]$. Pour que cet intervalle s'éloigne le moins possible de 0, il est nécessaire que $u(k)$

et $v(k)$ aient simultanément la plus petite valeur possible



C'est quand $u(k)=v(k)$ que $x=\varphi(y)$ s'éloigne le moins de 0. Soit pour $k = \sqrt{2}$

Avec ce choix pour k , x varie dans l'intervalle $[-\lambda; \lambda[$ où $\lambda = 3-2\sqrt{2}$

$\frac{E_n(\lambda)}{\lambda}$ avec Excel :	$\lambda = 0,171572875$	n	λ^{2n}	$\lambda^{2n}/((1-\lambda^2)(2n+1))$
	$\lambda^2 = 0,029437252$	1	0,029437252	0,010110029
	$1-\lambda^2 = 0,970562748$	2	0,000866552	0,000178567
	$2^{-39} = 1,81899E-12$	3	2,55089E-05	3,75466E-06
		4	7,50912E-07	8,59652E-08
		5	2,21048E-08	2,07047E-09
		6	6,50704E-10	5,15723E-11
		7	1,91549E-11	1,31573E-12
		8	5,63869E-13	3,41748E-14

C'est à partir de $n=7$ qu'on peut négliger $\frac{E_n(\lambda)}{\lambda}$

5- Le programme mis à nu

Un désassembler tel que DEBUG (et du temps) permet de vérifier que la formule obtenue ici est utilisée par le programme présenté au début et dont voici la version commentée en assembleur.

Debug prov.exe

```

-u
18BE:0000 9A0000C618 CALL18C6:0000
18BE:0005 55 PUSHBP
18BE:0006 89E5 MOV BP,SP
18BE:0008 31C0 XOR AX,AX
18BE:000A 9A7C02C618 CALL18C6:027C
...
18BE:0041 B88233 MOV AX,3382
18BE:0044 BB3333 MOV BX,3333
18BE:0047 BA3313 MOV DX,1333 133333333382 = 2.3
18BE:004A 9AA509C618 CALL18C6:09A5
18BE:004F A34400 MOV [0044],AX
18BE:0052 891E4600 MOV [0046],BX
18BE:0056 89164800 MOV [0048],DX
-g 4A
-t
-u 09A5 0A29 Pour les calculs, on utilise 2 registres A et B.
18C6:09A5 0AC0 OR AL,AL
18C6:09A7 7405 JZ 09AE
18C6:09A9 F6C680 TESTDH,80
18C6:09AC 7406 JZ 09B4
18C6:09AE B8CF00 MOV AX,00CF
18C6:09B1 E92EF7 JMP 00E2 en cas d'erreur
18C6:09B4 B181 MOV CL,81 transforme r en y → A
18C6:09B6 2AC1 SUB AL,CL
18C6:09B8 50 PUSHAX sauvegarde q dans la pile
18C6:09B9 8AC1 MOV AL,CL
18C6:09BB B980FB MOV CX,FB80
18C6:09BE BE33F3 MOV SI,F333
18C6:09C1 BF0435 MOV DI,3504 3504F33FB80=√2/2 → B
18C6:09C4 E813FC CALL05DA multiplication A*B → A
18C6:09C7 8BC8 MOV CX,AX
18C6:09C9 8BF3 MOV SI,BX
18C6:09CB 8BFA MOV DI,DX
18C6:09CD B88100 MOV AX,0081
18C6:09D0 33DB XOR BX,BX
18C6:09D2 33D2 XOR DX,DX
18C6:09D4 E844FE CALL081B ajoute 1 A+1 → B
18C6:09D7 52 PUSHDX
18C6:09D8 53 PUSHBX
18C6:09D9 50 PUSHAX
18C6:09DA B88100 MOV AX,0081
18C6:09DD 33DB XOR BX,BX
18C6:09DF BA0080 MOV DX,8000
18C6:09E2 E832FB CALL0517 ajoute -1 A-1 → A
18C6:09E5 59 POP CX
18C6:09E6 5E POP SI
18C6:09E7 5F POP DI
18C6:09E8 E8F4FC CALL06DF division: on obtient x A/B → A
18C6:09EB BF2A0A MOV DI,0A2A
18C6:09EE B90600 MOV CX,0006
18C6:09F1 E83202 CALL0C26 calcule de P(x) → A
18C6:09F4 FEC0 INC AL multiplication par 2 → A
18C6:09F6 B97FD2 MOV CX,D27F
18C6:09F9 BEF717 MOV SI,17F7
18C6:09FC BF7231 MOV DI,3172
18C6:09FF E815FB CALL0517 ajoute ln(√2) → A
18C6:0A02 59 POP CX rappelle q
18C6:0A03 52 PUSHDX
18C6:0A04 53 PUSHBX
18C6:0A05 50 PUSHAX empile A
18C6:0A06 8AC1 MOV AL,CL
18C6:0A08 98 CBW
18C6:0A09 99 CWD
18C6:0A0A E873FD CALL0780 transforme ah(exposant) en réel → A
18C6:0A0D B980D2 MOV CX,D280
18C6:0A10 BEF717 MOV SI,17F7
18C6:0A13 BF7231 MOV DI,3172
18C6:0A16 E8C1FB CALL05DA multiplie par ln2 → A
18C6:0A19 59 POP CX
18C6:0A1A 5E POP SI
18C6:0A1B 5F POP DI dépile B

```

```

18C6:0A1C E8F8FA      CALL0517      addition      A+B      → A
18C6:0A1F 3C67      CMP AL,67
18C6:0A21 7306      JNB 0A29
18C6:0A23 33C0      XOR AX,AX
18C6:0A25 33DB      XOR BX,BX
18C6:0A27 33D2      XOR DX,DX
18C6:0A29 CB      RETF

```

-d cs:a2a a4d

```

18C6:0A2A 7D 8A 9D D8 89 1D      1/13
18C6:0A30 7D E9 A2 8B 2E 3A      1/11
18C6:0A36 7D 8E E3 38 8E 63      1/9
18C6:0A3C 7E 49 92 24 49 12      1/7
18C6:0A42 7E CD CC CC CC 4C      1/5
18C6:0A38 7F AB AA AA AA 2A      1/3

```

-u C26:C8D

```

18C6:0C26 52      PUSH      DX
18C6:0C27 53      PUSHBX
18C6:0C28 50      PUSHAX
18C6:0C29 51      PUSHCX
18C6:0C2A 57      PUSHDI      di : adresse des coeffs
18C6:0C2B 8BC8      MOV CX,AX
18C6:0C2D 8BF3      MOV SI,BX
18C6:0C2F 8BFA      MOV DI,DX
18C6:0C31 E8A6F9      CALL05DA      calcule x²
18C6:0C34 5F      POP DI
18C6:0C35 59      POP CX
18C6:0C36 E80600      CALL0C3F      appelle le calcul polynomial
18C6:0C39 59      POP CX
18C6:0C3A 5E      POP SI
18C6:0C3B 5F      POP DI
18C6:0C3C E99BF9      JMP 05DA      multiplie par x et s'en va
18C6:0C3F 55      PUSHBP
18C6:0C40 8BEC      MOV BP,SP
18C6:0C42 83EC06      SUB SP,+06
18C6:0C45 8946FA      MOV [BP-06],AX      garde trace de x²
18C6:0C48 895EFC      MOV [BP-04],BX
18C6:0C4B 8956FE      MOV [BP-02],DX
18C6:0C4E 2E      CS:
18C6:0C4F 8B05      MOV AX,[DI]      prend un coefficient
18C6:0C51 2E      CS:
18C6:0C52 8B5D02      MOV BX,[DI+02]
18C6:0C55 2E      CS:
18C6:0C56 8B5504      MOV DX,[DI+04]
18C6:0C59 51      PUSHCX
18C6:0C5A 57      PUSHDI
18C6:0C5B EB10      JMP 0C6D
18C6:0C5D 51      PUSHCX
18C6:0C5E 57      PUSHDI
18C6:0C5F 2E      CS:
18C6:0C60 8B0D      MOV CX,[DI]
18C6:0C62 2E      CS:
18C6:0C63 8B7502      MOV SI,[DI+02]
18C6:0C66 2E      CS:
18C6:0C67 8B7D04      MOV DI,[DI+04]
18C6:0C6A E8AAF8      CALL0517      ajoute un coefficient
18C6:0C6D 8B4EFA      MOV CX,[BP-06]
18C6:0C70 8B76FC      MOV SI,[BP-04]
18C6:0C73 8B7EFE      MOV DI,[BP-02]
18C6:0C76 E861F9      CALL05DA      multiplie par x²
18C6:0C79 5F      POP DI
18C6:0C7A 59      POP CX
18C6:0C7B 83C706      ADD DI,+06
18C6:0C7E E2DD      LOOP0C5D      diminue cx ou passe si cx=0
18C6:0C80 B98100      MOV CX,0081
18C6:0C83 33F6      XOR SI,SI
18C6:0C85 33FF      XOR DI,DI
18C6:0C87 E88DF8      CALL0517      ajoute 1
18C6:0C8A 8BE5      MOV SP,BP
18C6:0C8C 5D      POP BP
18C6:0C8D C3      RET

```

PROBABILITES A BÂTON ... ROMPU

On considère les problèmes (classiques ?) suivants :

On brise une allumette en deux endroits et on cherche la probabilité de pouvoir construire un triangle (événement \mathcal{E}) avec les trois morceaux obtenus dans les deux cas suivants :

Problème 1 : Les deux cassures sont totalement aléatoires et indépendantes l'une de l'autre.

Problème 2 : Après avoir brisé, de manière aléatoire, l'allumette en deux, on brise, toujours aléatoirement, le plus grand des deux morceaux obtenus, en deux.

Dans une première partie nous allons présenter une (ou plusieurs) solution(s) à ces problèmes dans le cas continu, et dans une seconde partie nous discrétiserons ces mêmes problèmes pour retrouver, en passant à la limite, les solutions de la première partie.

Toutes les solutions proposées sont pratiquement adaptables à un niveau de terminale (pas nécessairement S) des lycées d'enseignement général.

Notations

L'allumette est figurée par un segment $[AB]$ de longueur 1. K et K' indiquent les points de brisure.

$$\begin{array}{ccccccc} A & & K & & & & K' & & & & B \\ \hline & & \cdot & & & & \cdot & & & & \end{array}$$

On note $AK = X$ et $AK' = Y$ avec $(X, Y) \in [0; 1]^2$.

On pose $a = \inf(X, Y)$, $b = |Y - X|$ et $c = 1 - \sup(X, Y)$.

Les nombres a , b et c représentent les longueurs des côtés du triangle et ce dernier est constructible si et seulement si :

$$|a - b| \leq c \leq a + b \quad (1)$$

Figure de référence : " le papillon "

Pour $(X, Y) \in [0; 1]^2$, on schématise dans le plan muni d'un repère orthonormal l'ensemble des points $M(X, Y)$ dont les coordonnées vérifient la relation (1), soit :

$$|\inf(X, Y) - |Y - X|| \leq 1 - \sup(X, Y) \leq \inf(X, Y) + |Y - X|$$

1^{er} cas : $0 \leq X \leq Y \leq 1$

(1) équivaut alors à $|X - (Y - X)| \leq 1 - Y \leq X + (Y - X)$ soit $|2X - Y| \leq 1 - Y \leq Y$

On a alors $2X - Y \geq 0$ et (1) $\Leftrightarrow 2X - Y \leq 1 - Y \leq Y$ soit

$$\begin{cases} X \leq \frac{1}{2} \\ Y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ou $2X - Y < 0$ et (1) $\Leftrightarrow Y - 2X \leq 1 - Y \leq Y$ soit

$$\begin{cases} Y \leq X + \frac{1}{2} \\ Y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En conclusion, on obtient les domaines de relations: $R_1 \begin{cases} 0 \leq X \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq Y \leq 1 \\ Y \leq 2X \end{cases}$ ou $R_2 \begin{cases} \frac{1}{2} \leq Y \leq 1 \\ Y \leq X + \frac{1}{2} \\ Y \geq 2X \end{cases}$

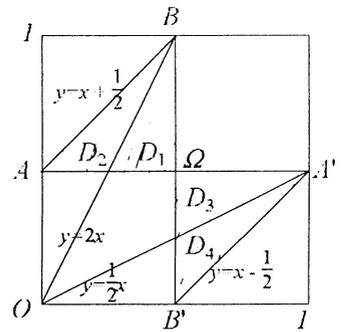
2^{ème} cas : $0 \leq Y \leq X \leq 1$

(1) équivaut alors à $|2Y - X| \leq 1 - X \leq X$

On obtient les domaines : $R_3 \begin{cases} 0 \leq Y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \\ Y \geq \frac{1}{2} X \end{cases}$ ou $R_4 \begin{cases} Y \geq X - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \\ Y \leq \frac{1}{2} X \end{cases}$

Le " papillon " grisé $AB\Omega B'A'$ correspond aux points du plan dont les coordonnées (X, Y) vérifient les relations R_1 ou R_2 ou R_3 ou R_4 et qui permettent de construire un triangle de côtés a, b, c avec $a + b + c = 1$.

On notera que Ω est un centre de symétrie pour le " papillon " .



1^{ère} PARTIE : CAS CONTINU

Problème n° 1

Comme les "brisures" sont indépendantes et aléatoires, on peut considérer que X et Y sont des variables aléatoires continues suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

A. Solution analytico-géométrique

La probabilité de pouvoir construire le triangle, notée $p(\mathcal{E})$, conduit à considérer le rapport des surfaces du " papillon " et du carré unité.

On obtient

$$p(\mathcal{E}) = \frac{1}{4}$$

B. Utilisation d'un diagramme triangulaire

Le diagramme triangulaire est utilisé en statistiques pour représenter des séries triples (x, y, z) avec $x + y + z = c^{ste}$.

En économie, (x, y, z) sont généralement des pourcentages relatifs aux secteurs primaire, secondaire et tertiaire.

M a pour coordonnées (x_M, y_M, z_M) et $x_M + y_M + z_M = 1$.

Les régions I, II, III caractérisent respectivement la dominance de x, y et z .

Dans le problème que nous traitons, nous avons : $a + b + c = 1$.

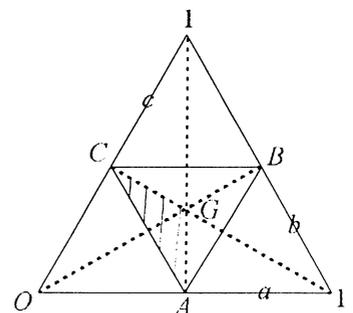
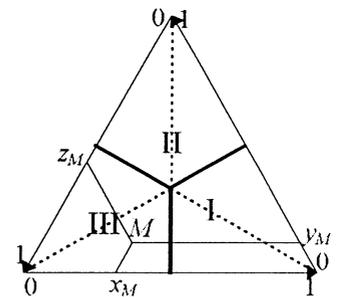
Soit $M(a, b, c)$ et $\sup(a, b, c) = c$ d'où $M \in OAGC$.

Le triangle est constructible si et seulement si

$$a + b \geq c \text{ soit } a + b \geq 1 - a - b,$$

$$\text{c'est-à-dire } b \geq -a + \frac{1}{2}.$$

L'équation $b = -a + \frac{1}{2}$ engendre le segment $[AC]$.



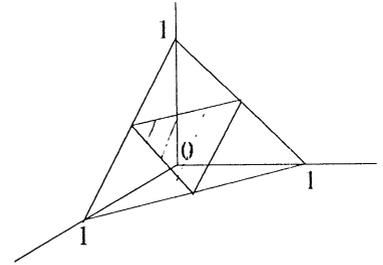
L'ensemble des points satisfaisant à la condition est le triangle grisé AGC et par permutation circulaire, le triangle est constructible pour tout point de ABC .

D'où $p(\xi) = \frac{1}{4}$.

Remarque :

Si on pose $x = a, y = b$ et $z = c$, on travaille dans le cube unité et en particulier dans le plan d'équation $x + y + z = 1$.

La condition (1) permet de retrouver le diagramme circulaire.



C. Utilisation du barycentre

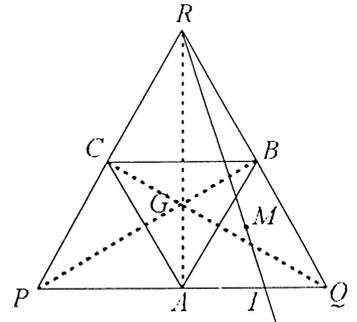
Soit PQR un triangle équilatéral de centre G dont les milieux des côtés sont notés A, B et C .

Soit M un point intérieur au triangle PQR . Cela signifie que M est le barycentre de $(P,a), (Q,b)$ et (R,c) avec a, b et c positifs de somme 1.

Si $a \leq b \leq c : M \in GBR$ (voir B)

Si $c = \sup(a,b,c) : M \in BRCG$ (voir B)

$(RM) \cap (PQ) = \{I\}$ barycentre de (P,a) et (Q,b) donc M est le barycentre de $(I, a+b)$ et (R,c) .



(BC) coupe $[RI]$ en son milieu donc $a + b \geq c$ et cela signifie que M est situé en dessous de (BC) , c'est-à-dire que $M \in PQBC$.

Finalement, $c = \sup(a,b,c)$ et $a + b \geq c$ signifient que $M \in BCG$.

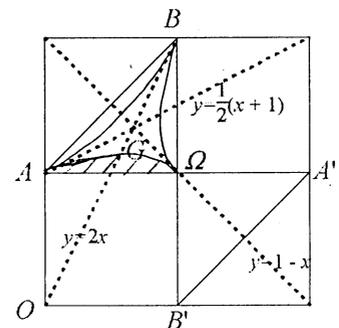
Par permutation circulaire, le triangle est constructible si et seulement si $M \in ABC$ et on retrouve $p(\xi) = \frac{1}{4}$.

D. Question annexe : Probabilité que le triangle possède un angle obtus sachant qu'il est constructible, notée $p(\text{Ob}/\xi)$

On se place dans $AG\Omega$ où l'on a $a \leq b \leq c$ ou $b \leq a \leq c$.

Le triangle admet un angle obtus si et seulement si $c^2 \geq a^2 + b^2$, soit $(1 - Y)^2 \geq X^2 + (Y - X)^2$ qui conduit à $Y \leq X + 1 + \frac{1}{2(X - 1)}$.

Le triangle est constructible et admet un angle obtus si $M(X,Y)$ appartient à la surface grisée limitée par $[A\Omega]$ et l'arc de courbe $\widehat{A\Omega}$.



D'où l'aire grisée = $\int_0^1 (X + 1 + \frac{1}{2(X - 1)} - \frac{1}{2}) dX = \left[\frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \ln(1 - X) \right]_0^1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln 2$

En se plaçant dans GAB ou $GB\Omega$, on obtiendrait le même résultat car a, b, c permutent compte tenu que X et Y sont indépendantes.

Donc $p(\text{Triangle avec angle obtus}) = 2 \times 3 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{9}{4} - 3 \ln 2$ et $p(\text{Ob}/\xi) = \frac{9}{4} - 3 \ln 2 \approx 0,682$.

Remarque : On peut présenter le calcul autrement :

Par exemple, on se place dans ΩGB où l'on a : $b \leq c \leq a$ où $c \leq b \leq a$.

Le triangle possède un angle obtus si et seulement si $a^2 \geq b^2 + c^2$ qui conduit à la relation

$$Y - 1 + \frac{1}{2Y} \leq X$$

Soit $E_2 = \{M(X,Y) / \frac{1}{2} \leq Y \leq 1 ; Y - 1 + \frac{1}{2Y} \leq X \leq \frac{1}{2}\}$ alors $p(\text{Ob}/\mathcal{E}) = \frac{\text{Aire } E_2}{\frac{1}{4}}$.

Or aire $E_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{Y-1+\frac{1}{2Y}}^{\frac{1}{2}} dX \right) dY = \dots = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln 2$

Problème n° 2

On peut considérer que la première "brisure" est une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ mais par contre la seconde brisure est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;X]$ si $X \geq \frac{1}{2}$ ou sur $[X;1]$ qui équivaut à $[0;1 - X]$ par translation si $X \leq \frac{1}{2}$.

X et Y ne sont plus indépendantes.

A. Solution intuitive

La condition de constructibilité du triangle (1) nous conduit toujours à travailler dans le "papillon". La symétrie centrale par rapport à Ω permet de supposer $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$ et de travailler dans $A\Omega B$.

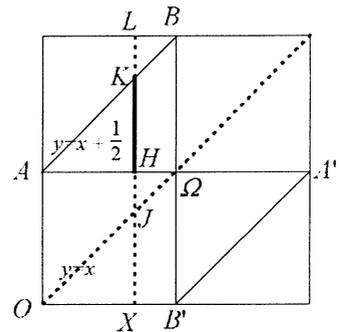
Pour X fixé, la probabilité de construire le triangle est égale au rapport des longueurs Kh et IJ ,

soit $\frac{X}{1 - X} \cdot \left(\frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} \right)$

Comme X suit la loi uniforme sur $[0;1]$, on peut intégrer sur

$[0; \frac{1}{2}]$, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{X}{1 - X} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 - X} \right) dx = [-X - \ln(1 - X)]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 2$

En conclusion, on a donc $p(\mathcal{E}) = 2(-\frac{1}{2} + \ln 2) = 2\ln 2 - 1$



B. Mise en œuvre d'une solution plus probabiliste¹

On note $f_{(X,Y)}$ la densité du couple (X,Y)

f_X la densité de X

$f_{Y|X=x}$ la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

$1_{[a,b]}$ la fonction caractéristique définie sur $[a,b]$

$T_1 = \{(x,y) / 0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{2}\} = A\Omega B$.

\mathcal{E}_1 : "le triangle est constructible avec $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$ "

¹ Il est manifeste que les paragraphes B et C ne concernent pas les élèves de terminale !

$$\begin{aligned}
 p(\xi_1) &= \int_{T_1} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = \int_{T_1} f_X(x) \cdot f_{Y/X=x}(y) dx dy = \int_{T_1} 1_{[0;1]}(x) \frac{1}{1-x} 1_{[x;1]}(y) dx dy \\
 &= \int_{T_1} 1_{[0;\frac{1}{2}]}(x) 1_{[\frac{1}{2};x+\frac{1}{2}]}(y) 1_{[0;1]}(x) \frac{1}{1-x} 1_{[x;1]}(y) dx dy
 \end{aligned}$$

Comme $1_{[0;\frac{1}{2}]}(x) \cdot 1_{[0;1]}(x) = 1_{[0;\frac{1}{2}] \cap [0;1]}(x) = 1_{[0;\frac{1}{2}]}(x)$ et de même avec y , on obtient :

$$p(\xi_1) = \int_{T_1} \frac{1}{1-x} 1_{[0;\frac{1}{2}]}(x) 1_{[\frac{1}{2};x+\frac{1}{2}]}(y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dy \right] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Compte tenu de la symétrie par rapport à Ω , on retrouve $p(\xi) = 2 p(\xi_1) = 2\ln 2 - 1$ ce qui confirme le résultat obtenu au A.

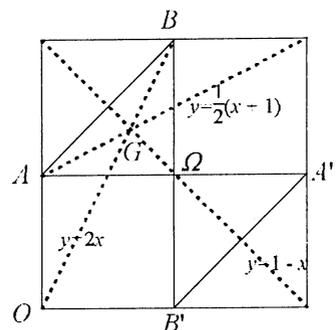
C. Question annexe : calcul de $p(\text{Ob}/\xi)$

On considère les domaines suivants :

$$E_1 = \left\{ (x,y) / 0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \leq y \leq x + 1 + \frac{1}{2(x-1)} \right\} = \text{domaine grisé.}$$

$$E_2 = \left\{ (x,y) / 0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \frac{1}{2(x-1)} \leq y \leq x + \frac{1}{2} \right\} = \text{domaine limité par } [AB] \text{ et } \widehat{AB}.$$

$$E_3 = \left\{ (x,y) / \frac{1}{2} \leq y \leq 1 ; y - 1 + \frac{1}{2y} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} = \text{domaine limité par } [B\Omega] \text{ et } \widehat{B\Omega}.$$



En procédant comme au B précédent, on a :

$$p(E_1) = \int_{E_1} 1_{[0;1]}(x) \frac{1}{1-x} 1_{[x;1]}(y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{x+1+\frac{1}{2(x-1)}} dy \right] dx = \dots = \frac{3}{2} \ln 2 - 1$$

Le calcul de $p(E_2)$ conduit également à $\frac{3}{2} \ln 2 - 1$.

Remarque : Ce résultat était prévisible car :

Pour E_1 : le plus grand côté est $c = 1 - Y$

Pour E_2 : le plus grand côté est $b = Y - X$

Lorsque $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$, Y suit la loi uniforme sur $[X;1]$ et par conséquent b et c jouent des rôles symétriques. Donc $p(E_1) = p(E_2)$.

Le calcul de $p(E_3)$ se ramène à $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{y-1+\frac{1}{2y}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx \right] dy$ soit $p(E_3) = \dots = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir un triangle avec un angle obtus est

$$2(2p(E_1) + p(E_3)) = 2\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4\ln 2 - 5 \approx 0,266$$

On déduit alors que $p(\text{Ob}/\xi) = \frac{2(2p(E_1) + p(E_3))}{2\ln 2 - 1} \approx 0,687$

2^{ème} PARTIE : DISCRETISATION

Problème n° 1

On dispose d'une urne² contenant $(n + 1)$ boules numérotées de 0 à n ($n \in \mathbb{N}$).

On tire, avec remise, deux boules et on note X et Y les numéros tirés.

On pose : $a = \inf(X, Y)$; $b = |Y - X|$ et $c = n - \sup(X, Y)$.

Calculer la probabilité $p_n(\mathcal{E})$ de construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c .

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\mathcal{E})$.

Il y a équiprobabilité pour les tirages de X et Y . Le nombre de cas possibles est $(n + 1)^2$, nombre de points à coordonnées entières situées dans le carré de côté n .

le nombre de cas favorables est le nombre de points à coordonnées entières situés dans les triangles $A\Omega B$ et $A'\Omega B$ (cf le "papillon").

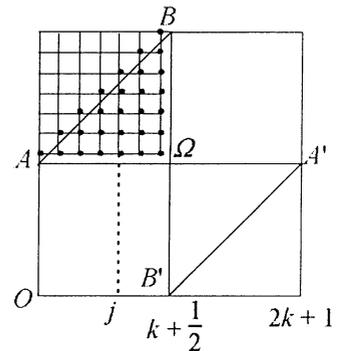
A cause de la symétrie centrale de centre Ω , on travaille dans $A\Omega B$ et on envisage deux cas selon la parité de n . (En fait, on peut supposer que n est pair ou impair car ce qui nous intéresse est le passage à la limite !).

Si $n = 2k + 1$, on a $\Omega(k + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$.

Dans $A\Omega B$, en sommant par ligne ou par colonne, on dénombre :

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2} \text{ points à coordonnées entières.}$$

$$\text{Donc } p_{2k+1}(\mathcal{E}) = \frac{2 \frac{k(k + 1)}{2}}{(2k + 2)^2} \text{ soit } p_{2k+1}(\mathcal{E}) = \frac{k}{4(k + 1)}$$



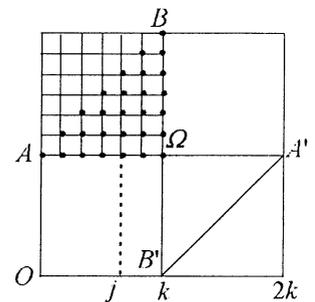
Le lecteur vérifiera aisément que si $n = 2k$, on trouve :

$$p_{2k}(\mathcal{E}) = \frac{k^2 + 3k + 1}{(2k + 1)^2}$$

(Il faut faire attention de ne pas compter $\Omega(k, k)$ deux fois !)

Le passage à la limite permet de retrouver le résultat de la 1^{ère} partie puisque :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k}(\mathcal{E}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1}(\mathcal{E}) = \frac{1}{4}$$



Problème n° 2

On dispose toujours de l'urne précédente contenant $(n + 1)$ boules numérotées de 0 à n ($n \in \mathbb{N}$). On tire une boule au hasard (équiprobabilité) et on note X son numéro.

- Si $0 \leq X \leq \frac{n}{2}$, on enlève toutes les boules numérotées de 0 à X et on tire une boule au hasard (équiprobabilité) dans les boules restantes. On note Y son numéro.

² En fait il s'agit d'une "corne d'abondance" compte tenu du nombre de boules !

- Si $\frac{n}{2} \leq X \leq n$, on enlève toutes les boules numérotées de X à n et on tire au hasard parmi les restantes. On note Y son numéro.
On pose : $a = \inf(X, Y)$; $b = |Y - X|$ et $c = n - \sup(X, Y)$.
Calculer la probabilité $p_n(\xi)$ de construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c .
Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\xi)$.

A. Solution intuitive

Comme il y a équiprobabilité pour X ($\forall j \in \{1, \dots, n\}, p(X = j) = \frac{1}{n+1}$), on va calculer la moyenne arithmétique des probabilités conditionnelles $p_n(\xi/X = j)$.

On travaille dans le triangle $A\Omega B$ et pour j fixé ($0 \leq j \leq \frac{n}{2}$) on a :

- Le nombre de cas possibles correspond au nombre de points à coordonnées entières situés sur la droite d'équation $x = j$ et strictement au-dessus de la droites d'équation $y = x$ dans le carré de côté n .

- Le nombre de cas favorables est le nombre de points à coordonnées entières situés sur l'intersection de la droite d'équation $x = j$ et du triangle $A\Omega B$ frontières incluses.

Comme précédemment, on traite le cas $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on obtient :

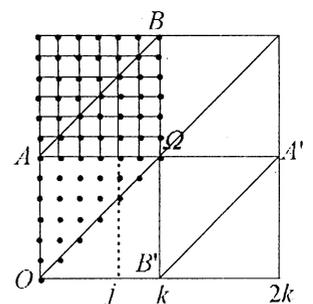
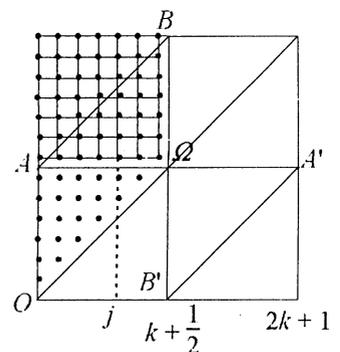
$$p_{2k+1}(\xi) = \frac{1}{2k+2} \times 2 \times \left(\frac{0}{2k+1} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{k}{k+1} \right)$$

soit

$$p_{2k+1}(\xi) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{j}{2k+1-j}$$

De même, on pourra vérifier en s'appuyant sur la figure ci-contre que :

$$p_{2k}(\xi) = \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^k \frac{j}{2k+1-j} + \frac{1}{2k+1}$$



B. Mise en œuvre d'une solution plus probabiliste

On traite le cas $n = 2k$ et, d'après le "papillon" :

$$p_{2k}(\xi) = p(0 \leq X \leq k \text{ et } k \leq Y \leq X+k) + p(k \leq X \leq 2k \text{ et } x-k \leq Y \leq k)$$

Calcul de $p' = p(0 \leq X \leq k \text{ et } k \leq Y \leq X+k)$

On sait que : 1. Pour $0 \leq i \leq k$, $p(X = i) = \frac{1}{2k+1}$

2. a. $p(Y = k/X = k) = 0$

b. Pour $0 \leq i \leq k$ et $k \leq j \leq 2k$, sauf $(i, j) = (k, k)$

$$p(Y = j/X = i) = \frac{1}{2k+1 - (i+1)} = \frac{1}{2k-i}$$

Avec la formule des probabilités totales, on obtient :

$$p' = p(X = 0 \text{ et } k \leq Y \leq X+k) + p(X = 1 \text{ et } k \leq Y \leq X+k) + \dots + p(X = k \text{ et } k \leq Y \leq X+k)$$

Comme $p(X = i \text{ et } k \leq Y \leq X + k) = p(X = i) \times p(k \leq Y \leq X + k / X = i)$

$$= \frac{1}{2k+1} \times p(k \leq Y \leq X + k / X = i)$$

Donc $p' = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=0}^k p(k \leq Y \leq X + k / X = i)$

La probabilité $p(k \leq Y \leq X + k / X = i)$ vaut :

- pour $i = 0, p(Y = k / X = 0) = \frac{1}{2k}$
- pour $i = 1, p(Y = k / X = 1) + p(Y = k + 1 / X = 1) = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = \frac{2}{2k-1}$
- pour $i = k - 1, p(Y = k / X = k - 1) + p(Y = k + 1 / X = k - 1) + \dots + p(Y = 2k - 1 / X = k - 1)$
 $= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$
- pour $i = k, p(Y = k / X = k) + p(Y = k + 1 / X = k) + \dots + p(Y = 2k - 1 / X = k)$
 $= 0 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = \frac{k}{k} = 1$

Par conséquent, $p' = \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2k} + \frac{2}{2k-1} + \dots + \frac{k}{k+1} + \frac{k}{k} \right)$

Soit $p' = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=1}^k \frac{j}{2k+1-j} + \frac{1}{2k+1}$

Pour le calcul de $p'' = p(k \leq X \leq 2k \text{ et } X - k \leq Y \leq k)$, on procède de manière analogue mais le terme $\frac{1}{2k+1}$ n'apparaît pas car on commence à $X = k + 1$.

On trouve $p'' = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=1}^k \frac{j}{2k+1-j}$

Finalement : $p_{2k}(\mathcal{E}) = p' + p'' = \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^k \frac{j}{2k+1-j} + \frac{1}{2k+1}$

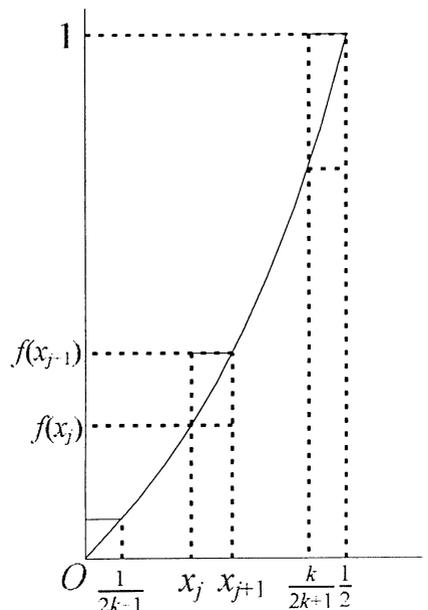
C. Calcul de la limite quand $n \rightarrow +\infty$

En préalable, nous allons considérer la fonction $f(x) = \frac{x}{1-x}$ définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ et son intégrale au sens de Riemann.

f est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ et par conséquent intégrable sur $[0; \frac{1}{2}]$.

On a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$ (cf 1^{ère} partie, Problème 2, A.)

On considère la subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ de $[0; \frac{1}{2}]$ définie par :



$$x_j = \frac{j}{2k+1} \text{ pour } j = 0, \dots, k \text{ et } x_{k+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On a donc } f(x_j) = \frac{j}{2k+1-j} \text{ pour } j = 0, \dots, k \text{ et } f(x_{k+1}) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

En travaillant sur $[x_j; x_{j+1}]$ pour $j = 0, \dots, k-1$ et $[\frac{k}{2k+1}; \frac{1}{2}]$ on obtient, en prenant respectivement $\inf f$ et $\sup f$ sur chaque intervalle :

$$\Sigma_1(k) = \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) + \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} \right) = \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{j=0}^k \frac{j}{2k+1-j} - \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} \right)$$

$$\Sigma_2(k) = \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(x_{j+1}) + \frac{1}{2} \times 1 \right) = \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{j=1}^k \frac{j}{2k+1-j} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{On a alors : } \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_2(k) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Le calcul de $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1}(\varepsilon)$ conduit à faire apparaître $\Sigma_1(k)$:

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(\varepsilon) &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{j}{2k+1-j} = \frac{2k+1}{k+1} \left[\frac{1}{2k+1} \left(\sum_{j=0}^k \frac{j}{2k+1-j} - \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} \right) \right] \\ &= \frac{2k+1}{k+1} \left[\Sigma_1(k) + \frac{k}{2(2k+1)(k+1)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k+1}(\varepsilon) = 2(\ln 2 - \frac{1}{2} + 0) = 2\ln 2 - 1.$$

Dans le cas où $n = 2k$, le lecteur vérifiera que $p_{2k}(\varepsilon) = 2\Sigma_2(k)$.

Remarque : L'intégrale au sens de Riemann est hors programme de terminale mais il est évident que l'on parvient au résultat avec les encadrements d'intégrale.

Avant de conclure ...

On notera que les problèmes invoqués peuvent faire l'objet d'une simulation avec les calculatrices usuelles. Les résultats statistiques obtenus permettent alors, auprès des élèves, de pressentir ou de corroborer les calculs des probabilités.

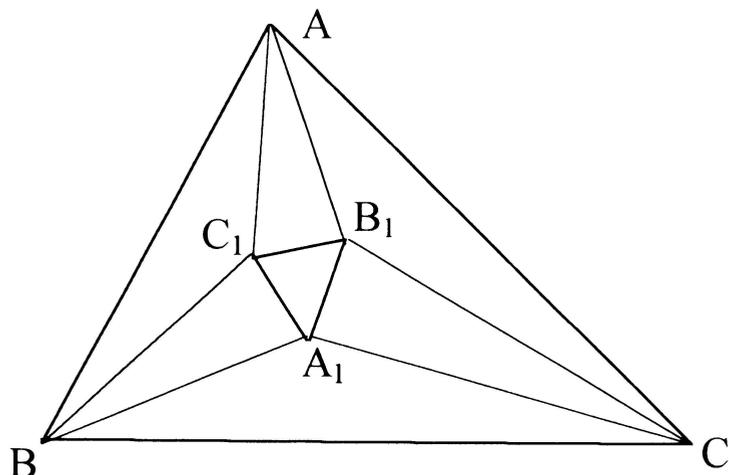
Et pour conclure ...

Dans le cadre du lycée, la notion de probabilité liée à un rapport de surfaces est facilement admise. Cette "extension" du programme permet alors de traiter, comme dans notre exposé, le cas continu et de le discrétiser. Les techniques employées devraient conduire l'élève à prendre conscience que les probabilités ne sont pas une partie "à part" du programme de mathématiques mais qu'elles peuvent faire appel à de nombreuses notions qui ont été vues en analyse, géométrie, ...

Puisse ce modeste exposé vous en convaincre et vous donner l'idée de quelque problème ...

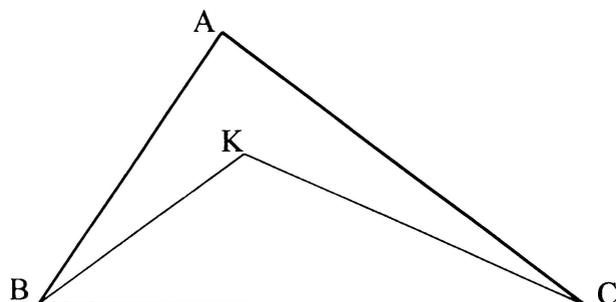
THEOREME DE MORLEY

Il s'agit de démontrer que dans la configuration suivante, où AB_1 et AC_1 sont les trisectrices du secteur BAC , BC_1 et BA_1 celles de ABC et CA_1 et CB_1 celles de ACB , le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral.



Plusieurs démonstrations existent de ce théorème. Celle choisie ici utilise une démonstration par analyse et synthèse. Commençons par l'énoncé de deux propositions qui permettront d'alléger la démonstration du théorème.

Proposition 1 Soit $k \in]0; 1[$. Dans la configuration suivante, où $\widehat{KBC} = k \widehat{ABC}$ et $\widehat{KCB} = k \widehat{ACB}$, alors $\widehat{BKC} = k \widehat{BAC} + (1-k) \pi$.

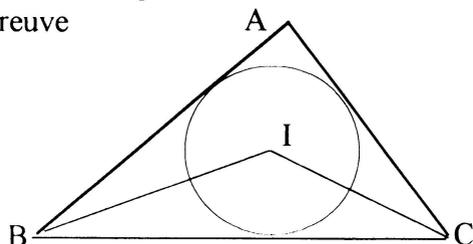


En effet,

$$\begin{aligned} \widehat{BKC} &= \pi - (\widehat{KBC} + \widehat{KCB}) \\ &= \pi - k (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= \pi - k (\pi - \widehat{BAC}) \\ &= k \widehat{BAC} + (1-k) \pi \end{aligned}$$

Proposition 2 Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC . Alors $\widehat{BIC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} + \frac{\pi}{2}$. Réciproquement, il existe un seul point I intérieur au triangle ABC , situé sur la bissectrice de \widehat{BAC} et vérifiant cette égalité, et ce point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .

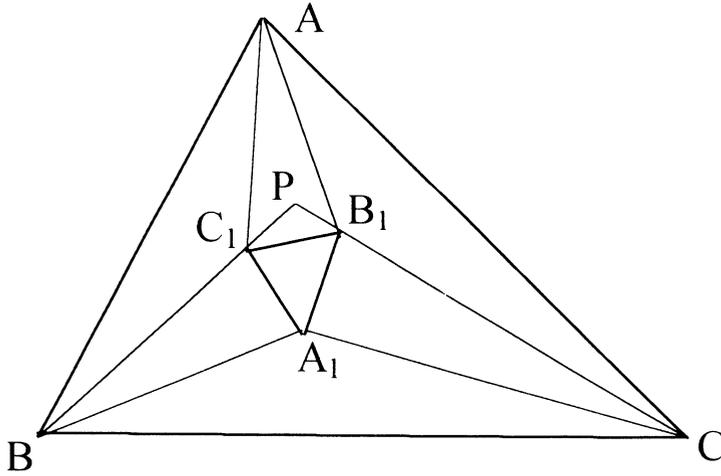
Preuve



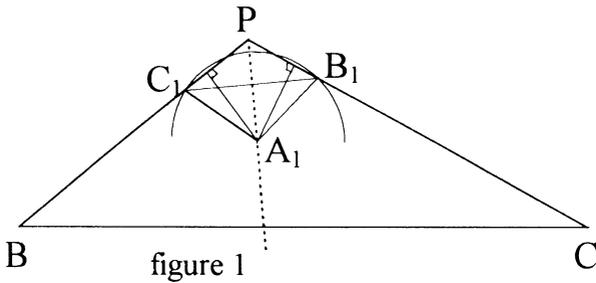
On applique la proposition 1 avec $k = \frac{1}{2}$, et en remplaçant K par I .

Réciproquement, l'ensemble des points intérieurs au triangle et vérifiant cette égalité est l'arc capable passant par le centre du cercle inscrit, et limité par les points B et C . Cet arc est coupé en un seul point par la bissectrice de \widehat{BAC} , ce qui achève la démonstration.

Analyse



Supposons que, dans certaines configurations, le triangle $A_1B_1C_1$ soit équilatéral. Dans le triangle BPC , BA_1 et CA_1 sont des bissectrices, donc A_1 est le centre du cercle inscrit. A_1 est alors équidistant des côtés PB et PC , et par ailleurs $A_1B_1 = A_1C_1$, ce qui donne deux possibilités représentées par les figures 1 et 2.



Sur la figure 1, B_1 et C_1 sont symétriques par rapport à PA_1 , et par conséquent PA_1 est la médiatrice du segment B_1C_1 . En particulier le triangle PB_1C_1 est isocèle de sommet P .

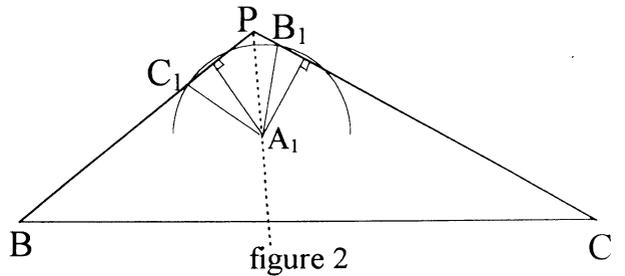
Sur la figure 2,
$$\widehat{B_1A_1C_1} = \pi - \widehat{C_1PB_1}$$

$$= \pi - \widehat{BPC}$$

Or, d'après la proposition 1 appliquée à $k = \frac{2}{3}$,

$$\widehat{BPC} = \frac{2}{3}\widehat{BAC} + \frac{\pi}{3}$$

Donc
$$\widehat{B_1A_1C_1} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\widehat{BAC}$$



Mais le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral, ce qui implique que $\widehat{B_1A_1C_1} = \frac{\pi}{3}$, d'où

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\widehat{BAC}, \quad \text{soit} \quad \frac{2}{3}\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \quad \text{et enfin} \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi la configuration de la figure 2, si elle existe, ne peut être qu'exceptionnelle et limitée au cas où le triangle ABC est rectangle. On va donc s'intéresser au cas général représenté par la figure 1, que l'on va compléter avec les points Q et R comme indiqué sur la figure 3.

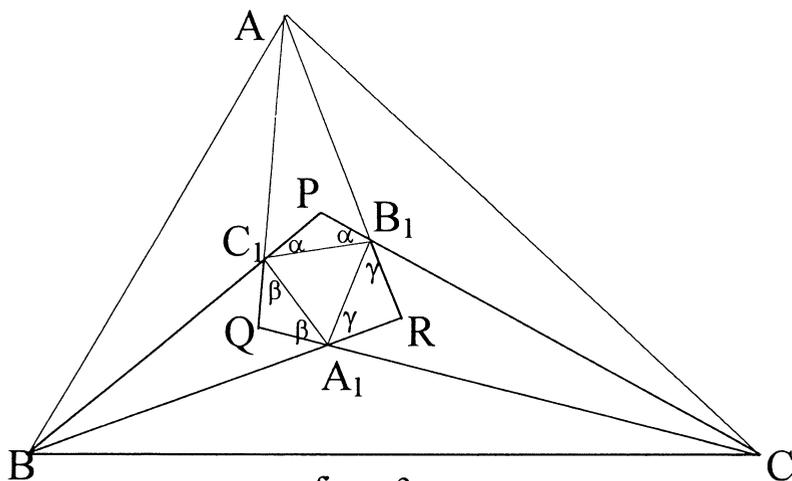


figure 3

Dans le triangle isocèle C_1PB_1 , $2\alpha + \widehat{C_1PB_1} = \pi$ Or $\widehat{C_1PB_1} = \frac{2}{3}\widehat{BAC} + \frac{\pi}{3}$

Donc
$$2\alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\widehat{BAC}$$

et enfin
$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{BAC}$$

De même,
$$\beta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{ACB}$$

et
$$\gamma = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{ABC}$$

En sommant les trois dernières égalités, $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{1}{3}\pi$

c'est-à-dire
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

On remarquera enfin, d'après l'égalité $\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{BAC}$, que $\alpha \in]0; \frac{\pi}{3}[$, et de même pour β et γ .

Synthèse Soit un triangle ABC. Reprenons les notations précédentes, soit

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{BAC}, \quad \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{ABC}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\widehat{ACB}$$

On construit alors un triangle équilatéral quelconque $a_1b_1c_1$ puis, comme l'indique la figure 4, les points p, q et r à l'extérieur de ce triangle et tels que $\widehat{pb_1c_1} = \widehat{pc_1b_1} = \alpha$, $\widehat{qa_1c_1} = \widehat{qc_1a_1} = \beta$ et $\widehat{rb_1a_1} = \widehat{ra_1b_1} = \gamma$

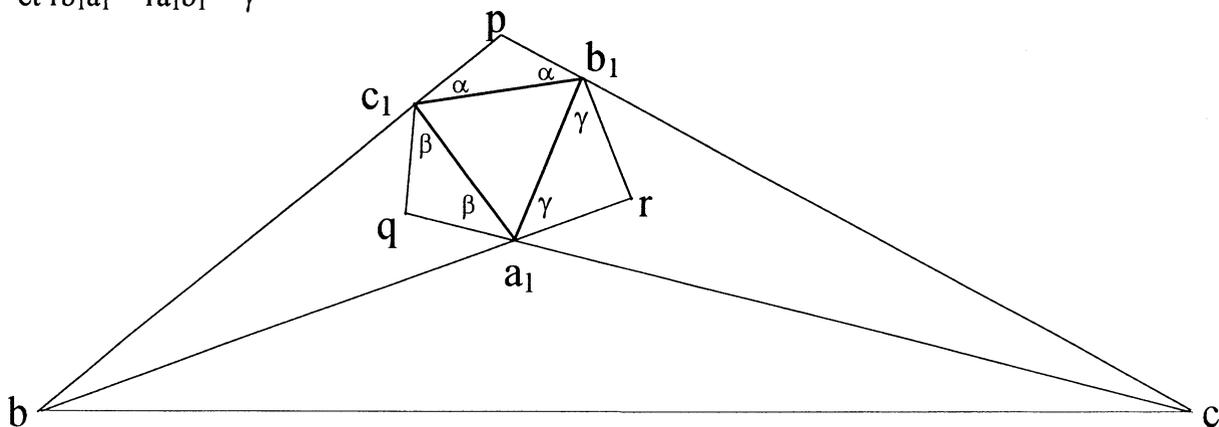


figure 4

Montrons que les droites pb_1 et qa_1 sont sécantes.

$$\begin{aligned} \widehat{pb_1a_1} + \widehat{b_1a_1q} &= (\alpha + \frac{\pi}{3}) + (\frac{\pi}{3} + \beta) \\ &= \frac{2\pi}{3} + (\alpha + \beta) \\ &= \frac{2\pi}{3} + (\frac{2\pi}{3} - \gamma) \quad \text{car } \alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \gamma > \pi \quad \text{car } \gamma \in]0; \frac{\pi}{3}[\end{aligned}$$

Ainsi les droites pb_1 et qa_1 sont sécantes en un point c comme l'indique la figure 4. De même, les droites pc_1 et ra_1 sont sécantes en un point b , et les droites rb_1 et qc_1 en un point a (non représenté).

Il s'agit de montrer que le triangle abc , ainsi construit, est semblable au triangle de départ ABC , et qu'il vérifie le théorème de Morley. On aura ainsi prouvé le théorème de Morley pour le triangle ABC . Or, par construction, le triangle $a_1b_1c_1$ est équilatéral. Il reste à démontrer que $\widehat{acb} = \widehat{ACB}$, et que ca_1 et cb_1 sont les trisectrices de \widehat{acb} . Il suffira même de démontrer que la droite ca_1 est la bissectrice de \widehat{pcb} , et que $\widehat{a_1cb_1} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$.

$$\begin{aligned} \text{Dans le triangle } c_1pb_1, \widehat{bpc} &= \pi - 2\alpha \quad \widehat{ba_1c} = \widehat{qa_1r} \\ &= \frac{\pi}{3} + (\beta + \gamma) \\ &= \frac{\pi}{3} + (\frac{2\pi}{3} - \alpha) \\ &= \pi - \alpha \\ &= \frac{1}{2} \widehat{bpc} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la droite pa_1 est la médiatrice de $[b_1c_1]$, donc la bissectrice de \widehat{bpc} . Enfin, a_1 est intérieur au triangle bpc , donc d'après la proposition 2, a_1 est le centre du cercle inscrit dans le triangle bpc , ce qui prouve que la droite ca_1 est bissectrice de \widehat{pcb} .

Reste à démontrer que $\widehat{a_1cb_1} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$.

$$\begin{aligned} \widehat{cb_1r} \text{ est tel que } \widehat{pb_1c_1} + \widehat{c_1b_1a_1} + \widehat{a_1b_1r} + \widehat{rb_1c} &= \pi \\ \alpha + \frac{\pi}{3} + \gamma + \widehat{rb_1c} &= \pi \end{aligned}$$

$$\text{donc } \widehat{rb_1c} = \frac{2\pi}{3} - (\alpha + \gamma) = \beta$$

$$\text{De même, } \widehat{ra_1c} = \alpha$$

$$\text{Dans le triangle } b_1ca_1, \widehat{b_1ca_1} = \pi - (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \frac{\pi}{3} - \gamma$$

$$\text{Compte tenu de } \gamma = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \widehat{ACB},$$

$$\text{on trouve } \widehat{a_1cb_1} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}, \quad \text{ce qui achève la démonstration.}$$

PERIODE D'UN PENDULE

I Petites oscillations

Les angles seront comptés à partir de la verticale descendante.

Pour un pendule simple sans frottement, l'équation du mouvement s'écrit

$$m l \theta'' = - m g \sin \theta$$

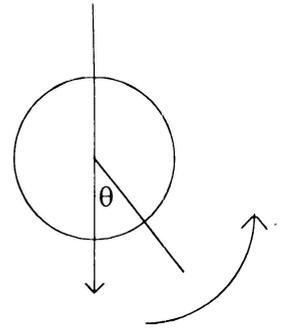
Or, pour de petites oscillations, $\sin \theta \approx \theta$

L'équation devient donc $l \theta'' = - g \theta$

$$\theta'' + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ d'où

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



II Quelques outils

- $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

- Par définition, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

Ex: On montrera que $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \binom{n-\frac{1}{2}}{n}$

- Pour $|x| < 1$ $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

- Soit $W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$ Une intégration par parties montre que, pour $n \geq 1$,

$$2n W_{2n} = (2n-1) W_{2n-2} \quad \text{d'où l'on déduit que}$$

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} W_0 = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots \frac{1}{2}}{n!} W_0 = \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{\pi}{2}$$

III Expression de la période

On suppose que le pendule a été lâché sans vitesse initiale à partir d'un angle $\alpha \in]-\pi; \pi[$, de sorte que $|\sin \frac{\alpha}{2}| < 1$. Le changement de α en $-\alpha$ ne change pas la période, donc en posant

$T = f(\alpha)$, on déduit que f est une fonction paire. En particulier, le développement limité à l'ordre 2 de f nous indique que $T \approx T_0 (1 + \frac{f''(0)}{2} \alpha^2)$

Ecrivons l'équation du mouvement :

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$$2\theta' \theta'' = -2\frac{g}{l}\theta' \sin \theta$$

On intègre cette équation pour θ variant de 0 à $\alpha > 0$, de sorte que $\theta' \geq 0$

$$\theta'^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \alpha)$$

$$\theta'^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\theta' = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$dt = \frac{d\theta}{\theta'}$ et, compte tenu des symétries, $T = 4 \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\theta'}$, d'où une première expression de la période

T :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad \text{et, compte tenu de la relation } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

On va maintenant transformer cette intégrale pour en donner un développement en série entière.

$\sin \frac{\theta}{2}$ décrit $[0; \sin \frac{\alpha}{2}]$, donc $\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ décrit $[0; 1]$

On fait alors le changement de variable $\sin u = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, u décrivant $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$\cos u \, du = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \times \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos u \, du$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} \cos u$$

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \, du$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}, \quad \text{avec } k = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad \text{avec } k = \sin \frac{\alpha}{2}$$

IV Expression de T en fonction de α

$|k^2 \sin^2 u| < 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}$ est développable en série entière

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = (1-k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} (k^2 \sin^2 u)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} (k^2 \sin^2 u)^n \quad \text{la série étant normalement convergente, on peut l'intégrer terme à terme.}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} du + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u du \right]$$

$$= \frac{2T_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \frac{\pi}{2} \right]$$

$$T = T_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \right]$$

V Formule de Borda

Pour terminer, cherchons pour la période T un développement limité à l'ordre 2 en α , c'est-à-dire en se limitant à $n = 1$.

$$\binom{1-\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4} + \alpha^2 \varepsilon(\alpha), \quad \text{d'où la formule}$$

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE π AVEC LA FORMULE DE VIÈTE

Le but de ce problème proposé en devoir en classe de TS, est de calculer une valeur approchée de π à l'aide de la formule de Viète et de découvrir que le résultat obtenu à l'aide d'un programme sur la calculatrice n'est pas nécessairement correct

Où l'on retrouvera les suites numériques et la trigonométrie

Le but du problème est de calculer une valeur approchée de π , on s'interdira donc d'utiliser la valeur approchée fournie par la calculatrice

On rappelle que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \leq x \leq \tan x$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $v_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ pour $n \geq 1$

1) Montrer que : a) $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

b) $\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$ avec n-1 chiffres 2 sous le premier radical.

2)a) Etablir l'égalité : $\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{1-u_n^2}$

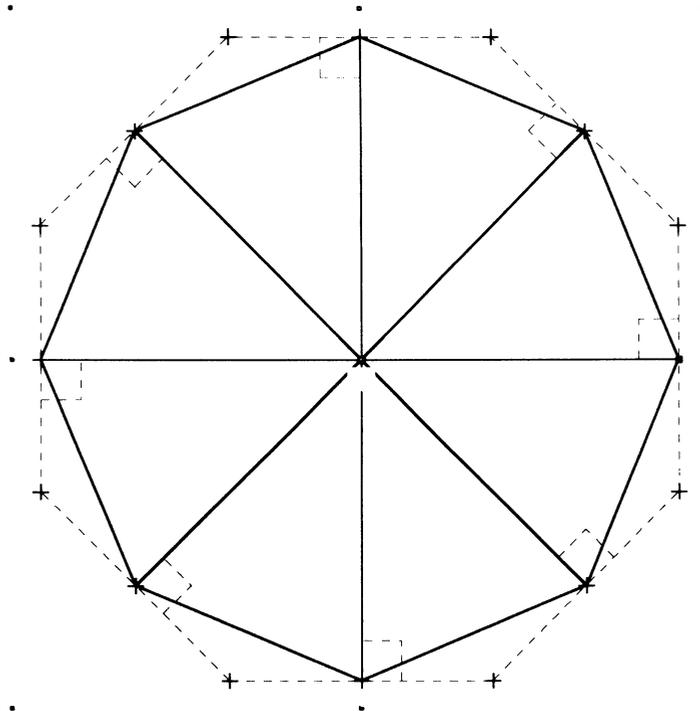
b) Démontrer la relation de récurrence : $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{v_n}{u_{n+1}}$

3) Montrer que : $\forall n \geq 2, v_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$ avec n-1 chiffres 2 sous le premier radical.

4)a) Etablir l'encadrement : $2^n v_n \leq \pi \leq 2^n \frac{v_n}{u_n}$ pour $n \geq 2$

b) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \frac{v_n}{u_n}$

c) On considère le polygone régulier à p côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et de centre O $A_1 A_2 \dots A_p$. Les tangentes au cercle en A_1, A_2, \dots, A_p ont deux à deux dans cet ordre pour points d'intersection B_1, B_2, \dots, B_p



Montrer que $B_1 B_2 \dots B_p$ est un polygone régulier à p côtés.

Exprimer le périmètre de chacun de ces polygones en fonction de p .

Interpréter géométriquement les résultats obtenus au 4)a) et au 4)b).

5)a) En utilisant la relation de récurrence établie au 1)a) et l'égalité établie au 2)a), programmer ces deux suites encadrant π et donner les encadrements obtenus pour $1 \leq n \leq 25$

Que constate-t-on?

b) Programmer à nouveau ces deux suites en utilisant la relation définie au 2)b), donner les encadrements obtenus pour $1 \leq n \leq 25$ puis pour $325 \leq n \leq 335$. Que constate-t-on ?

6) Dédurre du 4)b) *la formule de Viète* :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}$$

avec n chiffres 2 sous le premier radical.

7) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = \sqrt{2} \text{ et } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

$$y_0 = 2 \text{ et } y_{n+1} = \frac{2y_n}{x_n}$$

a) Montrer que (y_n) est la suite utilisée dans la formule de Viète.

b) Programmer les suites (x_n) et (y_n) et donner les valeurs de y_n pour $1 \leq n \leq 25$ puis pour $n = 100, n = 200, \dots, n = 1000$. Que constate-t-on ?

[R.118]

AIMER FAIRE DES MATHS AU LYCEE 4

AUTEURS : Francois COULOIGNER, Bertrand FORT, Thierry HAMEL, Jean-Claude JOVET, Dominique POMMIER, Luc SINEGRE, Yves SUPRIN.

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de lycée, collèges, Post-Bac.

RESUME : Actes du stage P.A.F. "Aimer faire des maths".

MOTS CLES : Conique – Appolonius
Mécanique centre instantané de rotation
Algorithme Cordic – Morley – Pendule
probabilité.

DATE : JUIN 1997

NB DE PAGES : 53 pages

EDITEUR : I.R.E.M de ROUEN

PUBLICATION : ISBN-2-86239-073-9
Dépôt légal : 3ème trimestre 1997.

Bon de commande

M. , Mme, Mlle : _____

Adresse : _____

	Prix	Quantité	Total
[R118] AIMER FAIRE DES MATHS 4	40 F		
Frais d'envoi : 15 F pour le 1 ^{er} livre et 10 F par livre supplémentaire (France)			
Frais réels pour l'étranger	
	SOMME DUE :

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. – B.P. 138 – 76821 MONT SAINT AIGNAN

Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02.35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00003000118 84

DATE : _____ SIGNATURE :