UNIVERSITÉ de ROUEN

IREM
de
ROUEN

BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES

Avenue DE BROGLIE - BP 138
76821 Mt St Aignan cédex
☎. 02 35 14 61 41

groupe
STATISTIQUE
septembre 1996

BADIZÉ M.
JACQUES A.
PETITPAS M.
PICHARD J.F.

Georges Louis Leclerc Comte de
BUFFON

une activité probabiliste au Collège

LE JEU DU FRANC-CARREAU

UNIVERSITÉ de ROUEN

IREM de ROUEN

BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES

Avenue DE BROGLIE - BP 138

76821 Mt St Aignan cédex

☎. 02 35 14 61 41

groupe

STATISTIQUE

septembre 1996

BADIZÉ M.

JACQUES A.

PETITPAS M.

PICHARD J.F.

Georges Louis Leclerc Comte de

BUFFON

une activité probabiliste au Collège

LE JEU DU FRANC-CARREAU

SOMMAIRE

LE JEU DU FRANC CARREAU

INTRODUCTION

Lorsque l'on considère les programmes du secondaire de l'Education Nationale depuis maintenant un quinzaine d'années, on constate que ceux-ci introduisent une première étude des notions de théorie des probabilités au niveau de la $1^{ère}$. Il nous a semblé dommage que les élèves qui ne dépassent pas le niveau 2^{de} ne puissent avoir aussi quelques notions concernant la façon de traiter le hasard. Cette idée était déjà exprimé par P. R. de Montmort ([21], Préface, p.vii) :

« J'ai donc cru qu'il serait utile, non seulement aux Joueurs, mais aux hommes en general, de sçavoir que le hazard a des regles qui peuvent être connues, & que faute de connoître ces regles ils font tous les jours des fautes, dont les suites fâcheuses leur doivent être imputées avec plus de raison qu'au destin qu'ils accusent. »

Pourtant, les élèves sont confrontés très tôt à la notion de hasard. Dans la culture actuelle où la télévision joue un grand rôle, le hasard est souvent montré en action dans des séquences de films ou de téléfilms, et bien sûr dans des émissions totalement ou partiellement consacrées à ce genre, comme le tirage du Loto et autres jeux de même type, la "Roue de la Fortune", etc. Les élèves sont aussi acteurs dans des situations aléatoires. Par exemple, dans un jeu de billes, outre l'adresse de celui qui lance, vont intervenir, dans le résultat final, les petites inégalités du terrain qui font que la trajectoire de la bille n'est pas tout à fait celle que l'on attendait ; il en est de même dans le jeu de marelle lorsqu'on lance le palet (qui est en général un caillou). En suivant Laplace [1], on peut dire que le point d'arrivée de la bille dépend du hasard qui n'est "que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes."

D'autre part, la théorie des probabilités fait intervenir pleinement la logique et l'analyse mathématique [2] et aussi la modélisation de phénomènes physiques, avec certains modes de raisonnement spécifiques [3], ce qui rend son assimilation assez longue. C'est pourquoi, dans de nombreux pays (Angleterre, Allemagne, Espagne, Italie par exemple), une initiation à la théorie des probabilités est prévue dans les programmes dès le début de l'enseignement secondaire. Ces quelques raisons indiquent qu'il ne serait pas inutile de faire une première approche du hasard au collège, comme nous le préconisons.

---

[1]) Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, p. 32, [17]. C'est aussi l'introduction de la *Théorie Analytique des probabilités*, Oeuvres, tome 7, 1885.

[2]) Citons Montucla ([22], Part., p.380-1) : « Il y a peu de théorie en mathématiques où les ressources de l'esprit analytique éclatent davantage que dans celle de la probabilité »

[3]) Des formulations imprécises peuvent amener à des paradoxes, cf. par exemple le dossier "Le Hasard", *Pour la Science*, avril 1996.

LES OBJECTIFS

Un des buts de cette expérimentation était de faire une sensibilisation à l'aléatoire, par l'exemple, pour des élèves de collège, simultanément à l'étude des statistiques, qui sont au programme. En mathématiques, ceux-ci sont habitués à ce que les résultats qu'ils obtiennent sont soit vrais, soit faux. Ils vérifient dans l'exemple proposé ici du jeu du Franc-Carreau [4], que différents résultats peuvent être obtenus d'un lancer à l'autre, d'une série de 10 lancers à l'autre, et qu'il n'y a pas des résultats vrais et d'autres faux comme en mathématiques, mais qu'il y en a de plus ou moins possibles, ou encore, si on répète l'expérience, de plus ou moins fréquents.

En outre, comme le notait Leibniz qui prônait la pédagogie par le jeu [5],
« l'esprit humain parait mieux dans les jeux que dans les matières les plus sérieuses. »

Un autre but de l'expérimentation était de déterminer les opinions a priori des élèves concernant les notions de hasard, de chance personnelle, de chance d'un groupe par rapport à un autre, d'indépendance des lancers, de probabilité d'un événement, et de quelle façon ces opinions étaient modifiées par la répétition de l'expérience, en particulier pour savoir si les élèves arrivaient à sentir la loi des grands nombres.

Cette activité à partir du jeu du Franc-Carreau ne demande pas de connaissances préalables, sauf de savoir faire une division. Elle permet, outre une initiation à l'aléatoire, mais uniquement par expérimentation, de faire un travail sur un certain nombre de points du programme : division (quotient), troncature et arrondi, graphique par points, choix d'une échelle adaptée, notion de relation (ici, pour des quotients $a/c+b/c=1$) et statistique (dénombrement).

---

[4]) Le jeu du Franc-Carreau a été imaginé par Buffon et exposé en 1733 [4] ; voir ci-après pour une approche historique, ainsi que l'article de R. Cuculière dans "Le Hasard", *Pour la Science*, avril 1996.

[5]) Leibniz G.W., *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*.

L'ENVIRONNEMENT HISTORIQUE

Cette présentation donne un bref aperçu du développement de la théorie des probabilités jusqu'à l'époque de Buffon.

La théorie des probabilités est une partie des mathématiques qui est apparue très récemment, trois siècles et demi contre vingt cinq siècles au moins pour la géométrie. Pourtant, les outils mathématiques utilisés par les inventeurs de cette théorie sont très simples et étaient connus bien avant, dès le Moyen Age [1]. La notion d'aléatoire avait été dégagée très tôt, en particulier par Aristote [2] qui discute des opinions des Anciens et distingue les événements contingents, qui doivent nécessairement se produire ou ne pas se produire (i.e. les événements certains et impossibles), et les événements fortuits, qui peuvent ou non se produire (i.e. les événements incertains), et parmi ceux-ci il introduit une comparaison qualitative entre ceux qui arrivent rarement et ceux qui arrivent fréquemment.

Par ailleurs, des expériences aléatoires sont effectuées depuis bien longtemps déjà - la divination par tirage au sort est mentionnée dans la Bible (1er millénaire avant J.C.) ; les jeux avec des astragales, des dés, ... étaient pratiqués par exemple dans l'Egypte antique, on a retrouvé des dés bien cubiques et équilibrés dans des tombeaux [3], des dés cubiques en terre cuite du IIIe millénaire avant J.C. en Mésopotamie, un dé polyèdre en verre à 26 faces du IIe siècle à Rome [4]. Cette pratique des jeux était faite quelquefois avec fureur et opiniâtreté (Aristote dans *Ethique*, Chap. 1, condamne le jeu et indique "les voleurs au moins subissent de grands risques pour obtenir leur butin, pendant que les joueurs gagnent de l'argent sur leurs amis, auxquels ils devraient plutôt en donner" ; des lois sont édictées contre les tripots dans la Rome antique ; l'Eglise catholique et le pouvoir ont prohibé les jeux de hasard [5] ; même actuellement, les jeux de hasard avec mises d'argent sont interdits en France dans les lieux publics, sauf quand l'Etat y trouve son compte, par exemple les casinos, le PMU, le loto, etc.). Malgré ces interdictions, les lieux de jeu ne manquaient pas, par exemple la cour du Duc de Milan, citée par Cardan [6] [6], celle du Grand-Duc de Toscane pour Galilée, la cour des rois de France [7], etc. et cette ardeur au jeu n'a pas cessé depuis ; elle se serait peut-être même amplifiée avec la multiplication des lieux de jeu en France (loto et PMU dans de nombreux bars) et la publicité pour ces jeux à la TV.

Un certain nombre de termes utilisés en théorie des probabilités proviennent des jeux : *alea* est en latin « coup de dés » ; "chance" vient de *cadere*, « tomber» et de *chéance*,

---

1) Le triangle arithmétique, donnant les combinaisons de p objets pris parmi n, était connu des mathématiciens arabes du 12ème siècle (voir A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb. L'exemple d'Ibn Mun'Im*, Pub. Math. d'Orsay, 1985 ; dont des extraits sont donnés dans *Mathématiques Arabes*, IREM de Rouen, 1989).

2) Aristote : *Physique* II, 4,5,6, trad. par H. Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1926, 6e éd. 1983.

3) Musée du Caire.

4) Pour plus de détails, voir F.N. David : *Games, Gods and Gambling*, London, Ch. Griffin, 1962.

5) Voir les articles de J. Dunkley, J. Brengues et J.R. Armogathe sur les jeux de hasard et la loi dans les actes du colloque d'Aix-en -Provence, "Le jeu au XVIIIe siècle", Edisud, 1976.

6 Cardan indique quelques raisons qui ont amené l'église et la morale à condamner le jeu, mais il dit aussi qu'on jouait à Rome et à la cour du Duc de Milan et que des gens d'Eglise (même un cardinal) étaient des joueurs.

7) Voir ci-après la citation de Fontenelle [10].

« manière dont tombent les dés », XII^{e} ; "hasard" est un ancien jeu de dés, vient de l'arabe : *az-zahr* « les dés » par l'espagnol *azar* ; hasart, XII^{e} ; l'utilisation du mot "hasard" devient plus courante dès le XIV^{e} siècle, et s'écrit aussi hazard au XVII^{e}.

D'autres activités avaient aussi des résultats incertains, par exemple pour le transport maritime, les bateaux navigant sur les mers et océans n'arrivent pas toujours à bon port avec leurs cargaisons ; des Bourses avaient même été créées au 13ème et 14ème siècle pour assurer (parier sur) ce risque, d'une façon empirique. Des emprunts sous forme de rentes viagères étaient émis par des villes flamandes dès le XIII^{e} siècle ; ce type d'emprunt est un pari sur la durée de vie.

On peut alors se poser deux questions : pourquoi la théorie des probabilités a-t-elle porté d'abord sur les jeux de hasard (lancers de pièces, de dés, ...) et non sur d'autres phénomènes aléatoires, de la vie économique par exemple, et pourquoi cela est-il survenu si tardivement ?

Sur le premier point, on peut remarquer que les jeux de hasard pur sont les plus simples conceptuellement et qu'ils sont faciles à modéliser ; Pascal a écrit à ce propos que cette théorie pourrait s'appeler "Géométrie du hasard" dans son adresse de 1654 à l'Académie Parisienne.

Sur le second point, une des raisons qui a retardé la recherche et la publication d'ouvrages sur ce sujet est que le résultat d'un tirage au "sort" était dans les civilisations antiques, et est encore maintenant dans l'esprit de beaucoup de gens, l'expression de la volonté divine, et comme telle on ne doit pas calculer dessus ; ce qui peut expliquer l'interdiction des jeux de hasard faite par l'église catholique.

Les premiers textes sur le calcul des probabilités (ou plutôt des chances [8]) ont été écrits au 16ème siècle (Cardan [9]) et au début du 17ème siècle (Galilée [10]), mais ils n'ont été publié que bien plus tard, c'est pourquoi ils n'ont eu aucune influence sur le développement de cette théorie.

Un certain délai de publication s'est aussi produit pour la correspondance entre Pascal et Fermat de 1654, et pour le Traité du Triangle Arithmétique (1654) de Pascal ; ces oeuvres ont été publiés à peu près en même temps [11] que celles de Cardan et avant celles de Galilée.

On remarquera que ces premiers écrits sur un calcul des chances portent sur le jeu. En effet, Cardan était un joueur invétéré, Galilée s'est intéressé au sujet en raison d'un problème de jeu qui lui avait été posé (le fameux problème du Grand Duc de Toscane [12]) et Pascal a entamé une correspondance avec Fermat à la suite d'une question sur le jeu de passe-dix que lui avait posé le Chevalier de Méré lors d'une réunion de l'Académie Parisienne (qui faisait suite à l'académie de Mersenne) ; c'était un salon où se rencontraient des gens de lettres, de sciences et de la noblesse pour discuter sur toutes sortes de sujets [13], en particulier scientifiques, c'est le précurseur de l'Académie Royale de Paris.

Cependant, le premier traité sur la théorie des probabilités a été écrit et publié par C. Huygens, qui était à Paris en 1655 ; il fut reçu à l'Académie Parisienne et a ainsi eu

---

[8]) Pour plus de précisions, voir e.g. [11], [16], [24], [26].

[9]) Cardano, Gerolamo (en français, Jérôme Cardan) : *Liber de ludo aleae* (vers 1520) in *Opera Omnia*, vol. 1, Lyon, 1663 ; traduction anglaise dans [6].

[10]) Galileo, Galilei : *Sopra le scoperte de i dadis*, VIII 591-594 in *Opere*, 1718 ; t.XIV, p.293-296, Firenze, 1855.

[11]) Fermat, Pierre de : *Varia Opera mathematica*, Toulouse, 1679.

[12]) Pourquoi, en lançant trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que 9, bien que ces deux sommes soient obtenues chacune en six façons différentes.

[13] On peut avoir une idée de la diversité des sujets discutés dans Mersenne [19].

connaissance des discussions sur le sujet entre Pascal, Fermat, Roberval,... - même s'il n'a pas su les méthodes utilisées -, ce qui l'a incité à réfléchir sur le sujet et à écrire son traité. C'est pourquoi on peut dire que Christian Huygens est le fondateur de la théorie probabiliste.

Les historiens des sciences et les grands mathématiciens des siècles suivants ont cependant la primauté de Pascal et Fermat. On peut citer par exemple :

Montucla ([22], t. 3, p.383) : « Les premiers qui ayent frayé cette carrière sont Pascal et Fermat. L'un et l'autre de ces hommes célèbres examinoient vers le milieu du siècle passé quelques questions sur les jeux et les paris des joueurs. »

Laplace ([17], p. 197) : « Depuis longtemps on a déterminé dans les jeux les plus simples les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs [...] Mais personne, avant Pascal et Fermat, n'avaient donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul [...] C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités. »

Poisson ([25] p. 1) décrit de façon plus précise : « Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités. Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre, pour la gagner, des nombres de points inégaux. Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement; il fut ensuite résolu par Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs. »

L'analyse de la correspondance Pascal-Fermat a été faite dans de nombreuses publications auxquelles nous renvoyons, par exemple, [5], [14], [26] ...

Huygens commence son traité avec un ensemble de règles spécifiques. Il considère qu'un jeu est équitable s'il est symétrique, c'est-à-dire que les sorts sont parfaitement symétriques de sorte que chacun peut être tiré aussi "facilement que" tout autre. C'est cette symétrie qu'il prend comme notion primitive et indéfinie. Huygens se base sur le concept d'espérance mathématique. Par exemple, dans une loterie équitable il est clair que chaque parieur doit payer le même prix pour tout billet. De plus, si le lot est z alors chacun des n tickets coûtera z/n, et c'est aussi la valeur de la chance [14] du joueur qui a pris un billet. Les sorts ou chances des joueurs dans différents jeux sont alors en proportion de leurs espérances mathématiques [15].

Le mot "probabilité" n'est pas utilisé. Ce terme, ainsi que "probable", avait alors le sens de "degré de crédibilité" concernant une opinion ou un témoignage [16]. Voyons sur ce sujet le dictionnaire Hachette, Langue-Encyclopédie-Noms propres, 1980.

Probable : adj. Qui a une apparence de vérité, semble plutôt vrai que faux. *Il est probable qu'il vienne* Lat. *probabilis*, de *probare* ; *proubable*, « qu'on peut prouver », 1285; 1380.

Probabilité : n.f. ▷ *Calcul des probabilités* : science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement. - 1361.

Le sens donné à « calcul des probabilités » par le Dictionnaire Hachette est attesté aussi par cet extrait de Mersenne [19] :

---

14) Le traité de Huygens a été traduit en latin et publié par F. van Schooten en 1657. Le terme "valeur de la chance", ou droit sur les mises, a donné *expectatio* en latin, d'où *espérance* en français.

15) Une étude plus complète est faite dans l'article de D. Lanier "Huygens : L'espérance et l'infini" dans *Histoire d'infini*, actes du 9e colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Brest, 1994.

16) Pour une étude plus détaillée, voir Hacking [11].

« Question XXIV : Peut-on sçavoir au vray à quelle heure, à quel jour, en quel mois, et en quelle année le monde a commencé, et quand il finira.
Il est certain que nul ne peut sçavoir sans revelation en quelle année, ou à quelle heure Dieu a creé le monde, car les plus sçavans Chronologues avoüent ingenuëment qu'ils ne vont qu'à tastons, et qu'ils n'ont que des conjectures, ou des probabilitez, quand ils disent qu'il n'y a ceste année 1633 que 5616 ans que le monde est creé, ... ».

L'extension de sens du mot "probabilité" au cas du calcul des chances (comme rapport du nombre des cas favorables et défavorables) est faite pour la première fois en 1662 dans la *Logique* de Port-Royal [17]. Les derniers chapitres du livre IV, attribués à Arnauld, passe de la probabilité qu'on peut attribuer à une opinion ou à un témoignage à la probabilité d'une proposition sur un jeu de hasard.

« Il y a des jeux où dix personnes mettant chacun un écu, il n'y en a qu'une puisse gagne le tout, & tous les autres perdent : ainsi chacun n'est au hazard que de perdre un écu, & en peut gagner neuf. ... Ainsi chacun a pour soi neuf écus à espérer, un écu à perdre, neuf degrés de probabilité de perdre un écu, & un seul de gagner les neuf écus : ce qui met la chose dans une parfaite égalité. »

Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du 18ème siècle. Une des raisons en est peut-être que le monde mathématique en Europe était alors occupé à développer le calcul différentiel et intégral inventé par Leibniz et la méthode équivalente des fluxions et fluentes de Newton.

Cependant, quelques articles paraissent ici ou là. Le jeu était pratiqué couramment à la cour de France, comme dans les autres cours [18]. Fontenelle indique dans l'éloge de M. le Marquis de Dangeau ([10], p. 509-515) : « Les deux Reines ... le mirent de leur jeu, qui étoit alors le Reversi. ... ce fut pour lui la source d'une fortune considérable. Il avoit souverainement l'esprit du jeu. ... Quand la Bassette [19] vint à la mode, il en conçut bientôt la fin par son Algèbre naturelle : mais il conçut aussi que la véritable Algèbre étoit encore plus sûre ; et il fit calculer ce jeu par feu M. Sauveur » ; ceci se passait vers 1665. Sauveur donne un petit écrit sur la Bassette dans le *Journal des Sçavans* de 1679, jeu alors fort en vogue.

On ne sait pas ce qui a incité Jacques Bernoulli à s'intéresser à la théorie des probabilités, peut-être le mémoire précédent ou le petit traité de Huygens. Cependant la première chose qu'il fit sur ce sujet est un article constitué de deux problèmes de jeu de dés, du même genre que les problèmes de Huygens. Cet article était lancé comme défi aux autres mathématiciens dans le *Journal des Sçavans* pour 1685. La solution qu'il donne en 1690 fait intervenir des séries infinies. Un autre écrit en français, anonyme (d'après Montucla [22], p. 391) mais qui lui a été attribué et qui a été publié à la suite de son *Ars Conjectandi* [2], est intitulé *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*.

---

17) Arnauld, Antoine et Nicolle, Pierre : *La logique ou l'Art de penser*, dite La logique de Port-Royal, 1662, 2ème éd. 1664, rééd. Gallimard, coll. *Tel*, notes et postface de Charles Jourdain, 1992.

18) « les jeux ont souvent été l'apanage des princes et des rois » d'après J.C. Baudot, conservateur au musée du jouet à Canet-en-Roussillon.

19) Indiquons succinctement ce qu'était ce jeu d'après l'Encyclopédie Méthodique [8] :

« A ce jeu, comme à celui du Pharaon, le banquier tient un jeu entier composé de 52 cartes. Il les mêle, & chacun des autres joueurs qu'on nomme *pontes*, met une certaine somme sur une carte prise à volonté. Le banquier retourne ensuite le jeu, mettant le dessus dessous; en sorte qu'il voit la carte de dessous : ensuite il tire toutes ces cartes deux à deux jusqu'à la fin du jeu.
Dans chaque couple ou taille de cartes, la première est pour le banquier, la seconde pour le ponte; c'est-à-dire, que si le ponte a mis, par exemple, sur un roi, & que la première carte d'une paire soit un roi, le banquier gagne tout ce que le ponte a mis d'argent sur son roi: mais si le roi vient à la seconde carte, le ponte gagne, & le banquier est obligé de donner au ponte autant d'argent que le ponte a mis sur sa carte.
La première carte, celle que le banquier voit en retournant le jeu, est pour le banquier, comme on vient de le dire: mais il ne prend pas alors tout l'argent du ponte, il n'en prend que les 2/3. La dernière carte, qui devrait être pour le ponte, est nulle. »

Montmort, qui publia le premier ouvrage important [21] après celui de Huygens, écrit dans sa préface : "Plusieurs de mes Amis m'avoient excité, il y a déjà longtemps, à essayer si l'Algebre ne pourroit point atteindre à déterminer quel est l'avantage du Banquier dans le Jeu du Pharaon."

C'est donc à l'occasion de problèmes sur les jeux que Montmort a commencé à travailler en théorie des probabilités. D'ailleurs la première édition de son ouvrage vérifie parfaitement le titre *Essay d'analyse des jeux de hazard* qu'il lui a donné : il passe en revue dans la première partie un certain nombre de jeux de cartes en vogue, dans la seconde partie des jeux de dés et il donne dans la dernière partie des solutions aux cinq problèmes posés par Huygens et divers autres problèmes de chance.

C'est à la demande d'un Lord, membre de la Royal Society, lecteur de l'*Essay* de Montmort, certainement joueur [20], que Abraham de Moivre commença ses travaux en théorie des probabilités. Son mémoire de 1711 "De Mensura Sortis" porte aussi sur les jeux, mais de façon épurée ; c'est plutôt un traitement purement mathématique qui en est fait. A. de Moivre développe par la suite ce mémoire dans *The Doctrine of Chances*, [20], qui va rester le livre de référence en théorie des probabilités jusqu'à celui de Laplace de 1812.

En 1713 le grand traité *Ars conjectandi* de Jakob Bernoulli est enfin publié, 8 ans après sa mort, par les soins de son neveu Nicolas. Beaucoup de ses résultats avaient cependant été retrouvés et publiés par Montmort dans son *Essay* et par De Moivre dans son De Mensura Sortis. Néanmoins la quatrième partie de l'*Ars conjectandi* contient un résultat remarquable qui n'avait pu être retrouvé ni par Montmort ni par De Moivre. C'est le "théorème d'or" de J. Bernoulli, appelé "loi des grands nombres" par Poisson [25], et qui est le premier théorème limite de la théorie des probabilités. Il exprime que plus on fait d'observations d'épreuves identiques conduisant à deux issues dont le rapport des chances est dans une proportion p, plus la probabilité que la fréquence des observations s'écarte de cette valeur p d'au plus une valeur fixée devient aussi proche que l'on veut de 1.

Après la mort de Louis XIV, on assiste en France dès 1715, sous la Régence, à une libération des moeurs et à une prolifération des jeux et autres spéculations sur l'avenir qui remplacent l'investissement et l'épargne, comme l'agiotage du système financier de Law ou les Compagnies des Indes et de celle d'Occident ; on peut dire que la France de la noblesse et de la bourgeoisie devient un gigantesque casino. Un autre signe en est donné par le titre "Le jeu de l'amour et du hasard" d'une oeuvre de 1730 de Marivaux.

Le jeu du Franc-Carreau, que nous avons étudié, a été inventé par Buffon qui l'a présenté dans un mémoire à l'Académie Royale des Sciences donné en 1733, mais ce mémoire n'a pas été imprimé dans les recueils. On a cependant le rapport suivant de Clairaut et de Maupertuis sur ce premier mémoire : - « Nous avons examiné, par ordre de l'Académie, un mémoire sur le jeu du franc-carreau par M. Leclerc.

« Jusqu'ici, pour la détermination des parties dans les jeux de pur hasard, l'on n'a fait entrer que la considération des nombres, parce que, dans la plupart de ces jeux, tout se réduit à certains nombres des cas avantageux et des cas désavantageux, indépendamment de la figure des choses avec lesquelles on joue. Il n'en est pas de même du franc-carreau.

« Les problèmes de ce jeu, qui se joue ordinairement avec une pièce ronde, dépendent de la considération du diamètre de cette pièce et des dimensions des carreaux. Voilà le cas le plus simple et le premier dont M. Leclerc résout les questions. Mais lorsque la pièce qu'on jette n'est plus ronde, la difficulté est fort augmentée et cependant n'arrêtera dans aucun cas la méthode de M. Leclerc. Si c'est un carré, l'on voit que son centre peut tomber à la

---

[20]) F. Roberts a écrit un mémoire "An arithmetical Paradox concerning the Chances of Lotteries" dans les *Philosophical Transactions* de London pour 1693.

même distance de la raie, et que sa superficie se trouvera ou ne se trouvera pas dessus, selon qu'il lui présentera plus ou moins son angle ou son coté. La détermination de ces problèmes dépend de la quadrature du cercle. »

Ce texte a été inséré par Buffon dans son *Essai d'Arithmétique Morale*, publié en 1777, avec d'autres considérations concernant la théorie des probabilités, en particulier sur le problème appelé "paradoxe de Saint-Pétersbourg" [21] et des considérations sur la durée de la vie humaine.

Ce jeu est mentionné dans l'*Encyclopédie Méthodique* [8], à l'article "Carreau" écrit par D'Alembert :

> CARREAU (Franc-), sorte de jeu dont M. de Buffon a donné le calcul en 1733, avant que d'être de l'Académie des Sciences. Voici l'extrait qu'on trouve de son mémoire sur ce sujet, dans le volume de l'Académie pour cette année-là.

Montucla ne mentionne pas Buffon dans son *Histoire des Mathématiques* [22], alors que d'autres ouvrages postérieurs y sont mentionnés.

Todhunter dans [26] donne des indications concernant Buffon en plusieurs endroits. En voici une traduction qui donne les principales idées de Buffon sur ce sujet :

"354. En l'année 1733, Buffon communique à l'Académie des Sciences de Paris la solution de quelques problèmes de chances. Voir *Hist. de l'Acad....Paris* pour 1733, pages 43-45, pour un bref compte rendu. Les solutions sont donnés dans l'*Essai d'Arithmétique Morale* de Buffon, et nous en donnerons une notice en parlant de ce travail."

"642. Nous avons maintenant à examiner une contribution à notre sujet de l'illustre naturaliste Buffon dont le nom s'est déjà présenté dans l'Art. 354.

L'*Essai d'Arithmétique Morale* de Buffon est paru en 1777 dans le quatrième volume du *Supplément à l'Histoire Naturelle*, où il occupe 103 pages in quarto. Gouraud dit à sa page 54, que l'Essay fut composé vers 1760."

"643. L'essai est divisé en 35 sections.

Buffon dit qu'il y a des vérités de différentes sortes ; ainsi il y a des vérités géométriques que nous connaissons par le raisonnement, et des vérités physiques que nous connaissons par l'expérience ; et il y a des vérités auxquelles nous croyons par témoignage. ..."

L'article suivant indique les idées de Buffon sur l'appréciation des petites probabilités.

"645. Buffon s'élève fortement contre les jeux d'argent. Il dit à la fin de sa 11^{e} section :

Mais nous allons donner un puissant antidote contre le mal épidémique de la passion du jeu, et en même-temps quelques préservatifs contre l'illusion de cet art dangereux.

Il condamne tous les jeux, même ceux considérés généralement comme équitables; et bien sûr encore plus les jeux dans lesquels un avantage est assuré à une des parties. Ainsi, par exemple, sur un jeu comme le Pharaon, il dit :

> ... le banquier n'est qu'un fripon avoué, et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas se moquer.

Voir sa 12^{e} section. Il termine ainsi la section :

... je dis qu'en général le jeu est un pacte mal-entendu, un contrat désavantageux aux deux parties, dont l'effet est de rendre la perte toujours plus grande que le gain; et d'ôter au bien pour ajouter au mal. La démonstration en est aussi aisée qu'évidente."

---

21) On a donné ce nom à ce problème parce que Daniel Bernoulli en proposa une solution dans les Actes de l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg en 1731, publiés en 1738 ; cependant l'origine doit en être cherchée dans les questions que proposaient Nicolas Bernoulli à P.R. de Montmort en 1711 ; par exemple :

A joue à croix ou pile avec B selon la règle suivante : A promet à B de lui donner 1 écu s'il tire croix au premier jet, 2 écus s'il tire croix pour la première fois au deuxième jet, et ainsi de suite, c'est-à-dire A donne à B k écus s'il tire croix pour la première fois au k-ième jet ; quelle doit être la mise de B pour que le jeu soit équitable. Ensuite au lieu de prendre la progression 1, 2, ..., k, etc. on prend la progression 1, 2^2, ..., k^2, etc. Daniel Bernoulli propose la progression 1, 2, ..., 2^k, etc.

"646. La démonstration est alors indiquée à la suite dans la 13^e section.

Buffon suppose qu'il y a deux joueurs de fortune égale et que chacun mise la moitié de sa fortune. Il dit que le joueur qui gagne augmentera sa fortune d'un tiers, et le joueur qui perd diminuera la sienne de la moitié; et comme une moitié est plus grande qu'un tiers il y a plus à craindre de la perte qu'à espérer du gain. Buffon ne semble pas rendre justice à son propre argument tel qu'il l'a donné. Soient a la fortune de chaque joueur et b la somme misée. Alors le gain est estimé par Buffon par la fraction $\frac{b}{a+b}$, et la perte par $\frac{b}{a}$; mais il semblerait plus naturel d'estimer la perte par $\frac{b}{a-b}$, ce qui bien sûr augmente l'excès de la perte à craindre sur le gain à espérer.

On peut dire que la démonstration repose sur le principe que la valeur d'une somme d'argent pour une personne varie inversement à sa fortune totale."

"647. Buffon discute longuement du problème de Saint-Pétersbourg dont il dit qu'il lui a été proposé pour la première fois par Cramer à Genève en 1730. Cette discussion occupe les sections 15 à 20 inclusivement.

Buffon avance quatre considérations par lesquelles il réduit l'espérance de A d'un nombre infini de couronnes à environ cinq couronnes seulement. ...

(2) La doctrine de la valeur relative de l'argent que nous avons exposé à la fin de l'Article précédent. ..."

"648. La 18e section contient le détail d'une expérimentation faite par Buffon concernant le problème de Saint-Pétersbourg. Il dit qu'il a effectué le jeu 2084 fois en chargeant un enfant de lancer une pièce en l'air. Il dit que ces 2084 jeux ont produit 10057 couronnes. Il y eut 1061 jeux qui produisirent une couronne, 494 qui produisirent deux couronnes, et ainsi de suite."

"649. La 23ème section contient quelques nouveautés.

Buffon commence en disant que, jusqu'à présent, l'Arithmétique a été le seul instrument utilisé pour estimer les probabilités, mais il propose de montrer qu'on peut donner des exemples qui réclament l'aide de la Géométrie. En conséquence, il donne quelques problèmes simples avec leurs solutions.

Une grande surface plane est divisée en figures régulières égales, à savoir des carrés, triangles équilatéraux, ou hexagones réguliers. Une pièce ronde est lancée au hasard sur ce pavage ; il est demandé la chance qu'elle a de tomber à l'intérieur des lignes qui bornent la figure, ou de tomber sur une de ces lignes, ou sur deux d'entre elles ; et ainsi de suite.

Ces exemples nécessitent seulement de simples mensurations, et nous n'avons pas besoin de nous attarder là-dessus ; nous n'avons pas vérifié les résultats de Buffon.

Buffon a résolu ces problèmes à une date bien antérieure. Nous trouvons dans l'*Hist. de l'Acad....Paris* pour 1733 un bref compte rendu de ceux-ci ; ils furent communiqués à l'Académie en cette année ; voir l'Art. 354."

"650. Buffon en vient alors à un exemple plus difficile qui demande l'aide du calcul intégral. Une grande surface plane est réglée avec des lignes droites parallèles équidistantes ; une fine baguette est lancée dessus : on demande la probabilité que la baguette tombera sur une ligne. Buffon résout ceci correctement. Il poursuit alors en considérant un problème qui, à ce qu'il dit, peut paraître plus difficile, à savoir déterminer la probabilité quand la surface est réglée avec un second ensemble de lignes droites parallèles équidistantes, à angle droit avec les précédentes et aux mêmes distances. Il donne simplement le résultat, mais il est faux.

Laplace, sans aucune référence à Buffon, donne le problème dans la *Théorie ... des Prob.*, pages 359-362."

Todhunter donne ensuite une étude de ce dernier problème et de celui où on lance un cube au lieu d'une pièce, mais pour lequel Buffon donne un résultat incorrect.

L'apport de Buffon n'est pas très considérable en mathématiques.. Il apporte cependant deux éclairages nouveaux en théorie des probabilités et statistique : la considération d'un nombre de cas ayant la puissance du continu, et la première expérimentation statistique pour valider une hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] d'Alembert, Jean le Rond : *Opuscules Mathématiques*, vol.2, 1761 ; vol.4, 1768.

[2] Bernoulli, Jacques : *Ars Conjectandi*, traduit du latin par N. Meusnier, IREM de Rouen, 1987.

[3] Borel, Emile : *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, 2è éd. 1952.
- - - - *Le Hasard*, Ed. Alcan, 1914 ; nouvelle éd., P.U.F., 1948.

[4] Buffon, G.L. Leclerc de : *Essai d'arithmétique morale* (1777), Oeuvres complètes, tome 12, pages 154-208, Ed. Garnier frères, 1855.
- - - et aussi in *Un autre Buffon* par J.L. Binet et J. Roger, Ed. Hermann, 1977.

[5] *Cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques*, fasc. 4 : Pascal et les probabilités, CRDP-IREM de Rouen, 1993.

[6] Cardano, Gerolamo (en français, Jérôme Cardan) : *Liber de ludo aleae* (vers 1520), traduit en anglais par Oystein Ore : Cardano, *the Gambling Scholar*, Princeton Univ. Press, 1953 et repris dans Cardano, *The Book of Games of Chances*, Holt, Rinehard and Winston, 1961.

[7] Coumet, E. : La théorie du hasard est-elle née par hasard ?, *Annales Economies, Sociétés, Civilisations*, n°3, 1970.

[8] *Encyclopédie Méthodique*, Mathématiques, 1785, rééd. ACL, 1987.

[9] Fermat, Pierre de : *Oeuvres*, (tome 2, Correspondance, 1894) publiées par P. Tannery et C. Henry, Ed. Gauthier-Villars, 1891-1922.

[10] Fontenelle : *Oeuvres complètes*, tome VI, Histoire de l'Académie des Sciences, Ed. Fayard, 1994.

[11] Hacking, Ian : *The emergence of probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

[12] Huygens, Christian : *Ratiociniis in aleae ludo*, 1657, trad. française "Du calcul dans les jeux de hasard" in tome 14, *Oeuvres complètes*, 22 vol. 1888-1950, La Haye.

[13] IREM de Paris 7, coll. M.A.T.H. Mathématiques : approche par des textes historiques, n° 61, 1986.

[14] IREM de Poitiers, *Thèmes pour l'enseignement de la statistique et des probabilités*, 1994.

[15] IREM de Strasbourg, *Enseigner les probabilités en classe de première*, 1992.

[16] Kendall M.G. and Placket R.L., eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 2, C. Griffin & Co, Londres, 1977.

[17] Laplace, Pierre Simon. : *Essai philosophique sur les probabilités* (5e éd., 1825), préface de R. Thom, postface de B. Bru, Ed. Bourgois, 1986.

[18] Leibniz, G. W. : *L'estime des apparences*, trad. et notes de Parmentier M., Ed. Vrin, 1995.

[19] Mersenne, Marin : *Questions inouyes, questions harmoniques, ...* (1634), Fayard, 1985.

[20] Moivre, Abraham de : De Mensura Sortis, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, 1711.
- - - *The Doctrine of Chance*, 1718, 3e éd. 1756.

[21] Montmort, Pierre Rémond de : *Essay d'analyse des jeux de hazard*, 1708, 2e éd. 1713.

[22] Montucla, Jean François : *Histoire des mathématiques*, 4 tomes, (tome 3, p. 380-426 sur les probabilités) 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

[23] Pascal, Blaise : *Oeuvres complètes*, Ed. du Seuil, 1963.

[24] Pearson E.S. and Kendall M.G., eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 1, C. Griffin & Co, Londres, 1970.

[25] Poisson, Siméon Denis : *Recherches sur la probabilité des jugements*, Paris, 1837.

[26] Todhunter I. : *A history of the mathematical theory of probability, from the time of Pascal to that of Laplace*, 1865, rééd. Chelsea, New York, 1965.

G.L. Leclerc de BUFFON

Extrait de l'*Essai d'arithmétique morale* (1777),
Oeuvres complètes, tome 12, Ed. Garnier frères, 1853.

sible, et que l'homme prudent qui, par sa position ou son commerce, est forcé de risquer de gros fonds, doit les partager, et retrancher de ses spéculations toutes les espérances dont la probabilité est très-petite, quoique la somme à obtenir soit proportionnellement aussi grande.

XXIII. — L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour, dans la science des probabilités, pour déterminer et fixer les rapports du hasard; la géométrie paraissait peu propre à un ouvrage aussi délié; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'analyse sur la géométrie est tout à fait accidentel, et que le hasard, selon qu'il est modifié et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse: pour s'en assurer, il suffira de faire attention que les jeux et les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes; l'esprit humain, plus familier avec les nombres qu'avec les mesures de l'étendue, les a toujours préférés; les jeux en sont une preuve, car leurs lois sont une arithmétique continuelle; pour mettre donc la géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue et sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés. Le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ses conditions qui sont fort simples.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire sur un seul carreau; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire qu'il couvrira un des joints qui les séparent; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande le sort de chacun de ces joueurs.

Je cherche d'abord le sort du premier joueur et du second : pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu; le sort du premier joueur sera à celui du second comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite : cela peut se démontrer aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est partout éloignée du contour du carreau, d'une distance égale au rayon de l'écu; et, au contraire, dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement sur deux ou plusieurs carreaux, puisque alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne qui fait le reste du carreau; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde : ainsi pour rendre égal le sort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite soit égale à celle de la couronne, ou, ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.

Je me suis amusé à en faire le calcul, et j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau devait être au diamètre de l'écu, comme $1 : 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire à peu près trois et demie fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Pour jouer sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire presque six fois plus grand que le diamètre de la pièce.

Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$, c'est-à-dire presque quatre fois plus grand.

Enfin sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire presque double.

Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce que celles-ci sont les seules dont on puisse remplir un espace sans y laisser des intervalles d'autres figures; et je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, et que par conséquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois et demie fois, aux triangulaires six fois, aux losanges quatre fois, et aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Je cherche maintenant le sort du troisième joueur qui parie que l'écu se trouvera sur deux joints; et, pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, comme j'ai déjà fait; ensuite je prolonge les côtés de cette figure inscrite jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le sort du troisième joueur sera à celui de son adversaire, comme la somme des espaces compris entre le prolongement de ces lignes et les côtés du carreau est au reste de la surface du carreau. Ceci n'a besoin, pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

J'ai fait aussi le calcul de ce cas, et j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire plus grand d'un peu moins d'un tiers.

Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}$, c'est-à-dire double.

Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire plus grand d'environ deux cinquièmes.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'est-à-dire plus grand d'un demi-quart.

Maintenant le quatrième joueur parie que, sur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu se trouvera sur six joints : que sur des carreaux carrés ou en losanges, il se trouvera sur quatre joints, et sur des carreaux hexagones, il se trouvera sur trois joints; pour déterminer son sort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, et je dis que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, son sort sera à celui de son adversaire comme la moitié de la superficie de ce cercle est à celle du reste du carreau; que sur des carreaux carrés ou en losanges, son sort sera à celui de l'autre comme la superficie entière du cercle est à celle du reste du carreau; et que sur des carreaux hexagones, son sort sera à celui de son adversaire comme le double de cette superficie du cercle est au reste du carreau. En supposant donc que la circonférence du cercle est au diamètre, comme 22 sont à 7; on trouvera que pour jouer à jeu égal sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce comme $1 : \frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{22}$, c'est-à-dire plus grand d'un peu plus d'un quart.

Sur des carreaux en losanges, le sort sera le même que sur des carreaux triangulaires équilatéraux.

Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{11}}{7}$, c'est-à-dire plus grand d'environ un cinquième.

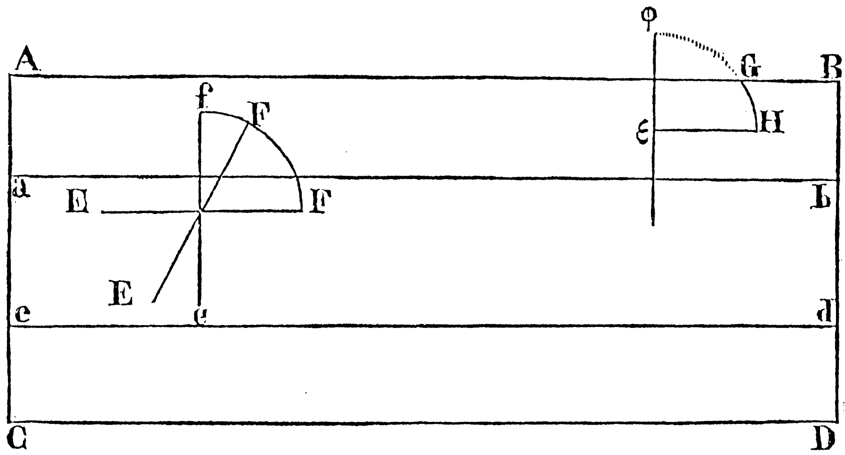
Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{12\sqrt{3}}}{44}$, c'est-à-dire plus grand d'environ un treizième.

J'omets ici la solution de plusieurs autres cas, comme lorsque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que sur un joint ou sur deux, sur trois, etc. Ils n'ont rien de plus difficile que les précédents; et d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetait une pièce d'une autre figure comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, etc., le problème demanderait un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces, comme nous allons le démontrer.

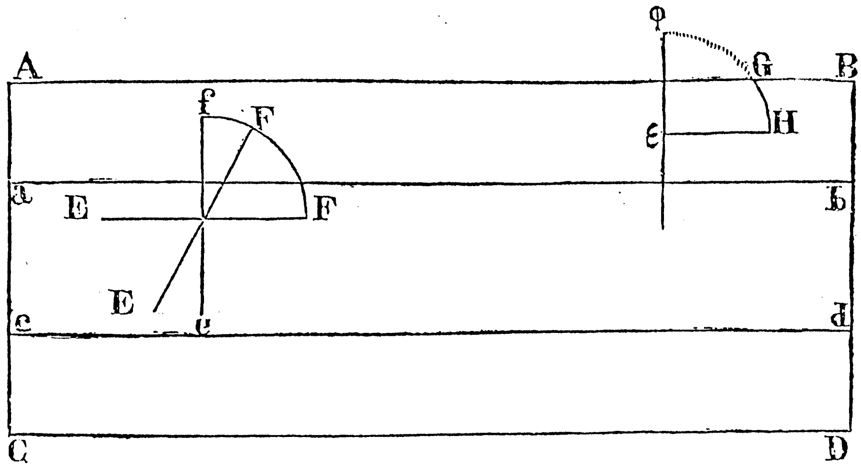
Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.*

Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles $A\ B$ et $C\ D$



du parquet, deux autres lignes parallèles $a\ b$ et $c\ d$, éloignées des premières de la moitié de la longueur de la baguette $E\ F$, et je vois évidemment que tant que le milieu de la baguette sera entre ces deux secondes parallèles, jamais elle ne pourra croiser les premières dans quelque situation $E\ F$, $e\ f$, qu'elle puisse se trouver; et comme tout ce qui peut arriver au-dessus de $a\ b$ arrive de même au-dessous de $c\ d$, il ne s'agit que de déterminer l'un ou l'autre; pour cela je remarque que toutes les situations de la baguette peuvent être représentées par le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre; appelant donc $2\ a$ la distance $C\ A$ des joints du parquet, C le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre, appelant $2\ b$ la longueur de la baguette, et f la longueur $A\ B$ des joints, j'aurai $f\ (\overline{a - b})\ c$ pour l'expression qui représente la probabilité de ne pas croiser le joint du parquet, ou ce qui est la même chose, pour l'expression de tous les cas où le milieu de la baguette tombe au-dessous de la ligne $a\ b$ et au-dessus de la ligne $c\ d$.

Mais lorsque le milieu de la baguette tombe hors de l'espace $a\ b\ d\ c$, compris entre les secondes parallèles, elle peut, suivant sa situation, croiser ou ne pas croiser le joint; de sorte que le milieu de la baguette étant, par exemple, en ε, l'arc $\varphi\ G$ représentera toutes les situations où elle croisera le joint, et l'arc $G\ H$ toutes celles où elle ne le croisera pas, et comme il en sera de même de tous les points de la ligne $\varepsilon\ \varphi$, j'appelle $d\,x$ les petites parties de cette ligne, et y les arcs de cercle $\varphi\ G$, et j'ai $f\ (s\ y\ d\ x)$ pour l'expression de tous les cas où la baguette croisera, et $f\ (\overline{b c - s\ y\ d\ x})$



pour celle des cas où elle ne croisera pas; j'ajoute cette dernière expression à celle trouvée ci-dessus $f\ (\overline{a - b})\ c$, afin d'avoir la totalité des cas où la baguette ne croisera pas, et dès lors je vois que le sort du premier joueur est à celui du second, comme $a\ c - s\ y\ d\ x : s\ y\ d\ x$.

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $a\ c = 2\ s\ y\ d\ x$ ou $a = \frac{s\ y\ d\ x}{\frac{1}{2}\ c}$, c'est-à-dire à l'aire d'une partie de cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre $2\ b$; longueur de la baguette; or, on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, donc $a = \frac{b\ b}{\frac{1}{2}\ c}$, c'est-à-dire, que la longueur de la baguette doit faire à peu près les trois quarts de la distance des joints du parquet.

La solution de ce premier cas nous conduit aisément à celle d'un autre qui d'abord aurait paru plus difficile, qui est de déterminer le sort de ces deux joueurs dans une chambre pavée de carreaux carrés, car en inscrivant dans l'un des carreaux carrés un carré éloigné partout des côtés du carreau de la longueur b, l'on aura d'abord $c\ (\overline{a - b})^2$ pour l'expression d'une partie des cas où la baguette ne croisera pas le joint; ensuite on trouvera $(\overline{2 a - b})\ s\ y\ d\ x$ pour celle de tous les cas où elle croisera, et enfin $c\ b\ (\overline{2\ a - b}) - (\overline{2\ a - b})\ s y d x$ pour le reste des cas où elle ne croisera pas; ainsi le sort du premier joueur est à celui du second, comme $c\ (\overline{a - b})^2 + c\ b\ (\overline{2\ a - b}) - (\overline{c\ a - b})\ s\ y\ d\ x : (\overline{2\ a - b})\ s\ y\ d\ x$.

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura

$$c\,(\overline{a-b})^2 + cb\,(\overline{2a-b}) = (\overline{2a-b})^2\, s\,y\,d\,x$$

ou $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b} = S\,y\,d\,x$; mais comme nous l'avons vu ci-dessus, $s\,y\,d\,x = bb$;

donc $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b} = bb$; ainsi le côté du carreau doit être à la longueur de la baguette, à peu près comme $\frac{11}{22} : 1$, c'est-à-dire pas tout à fait double. Si l'on jouait donc sur un damier avec une aiguille dont la longueur serait la moitié de la longueur du côté des carrés du damier, il y aurait de l'avantage à parier que l'aiguille croisera les joints.

On trouvera par un calcul semblable, que si l'on joue avec une pièce de monnaie carrée, la somme des sorts sera au sort du joueur qui parie pour le joint, comme $aac : 4abb\sqrt{\frac{1}{2}} - b^3 - \frac{1}{2}Ab$. A marque ici l'excès de la superficie du cercle circonscrit au carré, et b la demi-diagonale de ce carré.

Ces exemples suffisent pour donner une idée des jeux que l'on peut imaginer sur les rapports de l'étendue. L'on pourrait se proposer plusieurs autres questions de cette espèce, qui ne laisseraient pas d'être curieuses et même utiles : si l'on demandait, par exemple, combien l'on risque à passer une rivière sur une planche plus ou moins étroite; quelle doit être la peur que l'on doit avoir de la foudre ou de la chute d'une bombe, et nombre d'autres problèmes de conjecture, où l'on ne doit considérer que le rapport de l'étendue, et qui par conséquent appartiennent à la géométrie tout autant qu'à l'analyse.

XXIV. — Dès les premiers pas qu'on fait en géométrie, on trouve l'infini, et dès les temps les plus reculés les géomètres l'ont entrevu; la quadrature de la parabole et le traité *de Numero arenæ* d'Archimède, prouvent que ce grand homme avait des idées de l'infini, et même des idées telles qu'on les doit avoir; on a étendu ces idées, on les a maniées de différentes façons, enfin on a trouvé l'art d'y appliquer le calcul : mais le fond de la métaphysique de l'infini n'a point changé, et ce n'est que dans ces derniers temps que quelques géomètres nous ont donné sur l'infini des vues différentes de celles des anciens, et si éloignées de la nature des choses et de la vérité, qu'on l'a méconnue jusque dans les ouvrages de ces grands mathématiciens. De là sont venues toutes les oppositions, toutes les contradictions qu'on a fait souffrir au calcul infinitésimal; de là sont venues les disputes entre les géomètres sur la façon de prendre ce calcul, et sur les principes dont il dérive; on a été étonné des espèces de prodiges que ce calcul opérait, cet étonnement a été suivi de confusion; on a cru que l'infini produisait toutes ces merveilles; on s'est imaginé que la connaissance de cet infini avait été refusée à tous les siècles et réservée pour le nôtre;

fiche professeur

Jeu du Franc-Carreau

Présentation de l'expérimentation

Description

On utilise une feuille de papier quadrillée et une pièce de monnaie (ou un jeton).
On laisse tomber la pièce sur la feuille de papier, elle peut s'immobiliser :

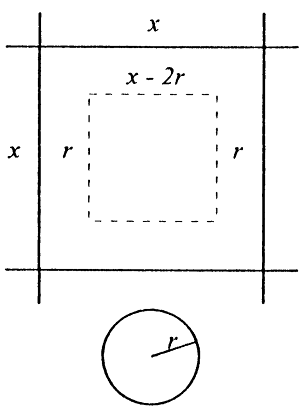
a) dans un carré sans toucher les lignes
b) touchant ou coupant au moins une ligne du quadrillage.

Matériel

Par groupe de deux élèves

* une pièce de 10 centimes
* une feuille quadrillée (par exemple, sur le papier millimétré, on peut utiliser le quadrillage 5×5 cm)
* une feuille de brouillon
* un crayon à papier
* une règle plate (au moins 30 cm)
* les feuilles avec les consignes et les tableaux de résultats
* des feuilles de papier millimétré.

Documentation



Les collègues pourront constater que, lorsque le nombre de lancers augmente :

$$\frac{a}{c} \to k$$

$$\frac{b}{c} \to 1 - k$$

où $k = \dfrac{\text{aire du carré intérieur}}{x^2}$

Remarques

Pendant la passation, noter les questions des élèves, leurs réactions
Expliquer éventuellement le mot "cumul".

Nom :

questionnaire 1

Jeu du Franc-Carreau

Règle du jeu :

On laisse tomber une pièce sur une feuille quadrillée et on regarde si elle tombe à l'intérieur d' un carré ou si elle coupe les lignes.

Matériel :

On utilise une pièce de 10 centimes et une feuille de papier millimétré quadrillée.

Questionnaire :

① Si on fait tomber la pièce un grand nombre de fois, pensez-vous que la pièce va s'arrêter le plus souvent :

a) dans un carré ☐

b) en touchant ou coupant au moins une ligne du quadrillage ☐

c) je ne sais pas ☐

② A votre avis, le résultat d'un lancer va-t-il influencer le résultat du lancer suivant ?

oui ☐

non ☐

je ne sais pas ☐

Nom :

fiche élève 1

Jeu du Franc-Carreau

Consignes

① Au crayon et à la règle, quadriller la feuille pour obtenir des carrés de 5 cm sur 5 cm.
② Effectuer 10 lancers et compter :
a) le nombre de fois où la pièce tombe à l'intérieur d'un carré
b) le nombre de fois où la pièce coupe ou touche au moins une ligne du quadrillage.
③ Remplir la 1ère colonne du tableau n°1 et recommencer pour remplir le tableau en entier.

Tableau n°1

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a										
nombre de lancers sur ligne	b										
nombre de lancers		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

④ Remplir les tableaux n°2 et n°3 à partir des résultats du tableau n°1. Pour cela, on additionnera successivement les résultats des colonnes.

Tableau n°2 : cumul des a

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a										
nombre de lancers	c	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
quotient à 0,01 près	$\frac{a}{c}$										

Tableau n°3 : cumul des b

Nombre de lancers sur ligne	b										
nombre de lancers	c	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
quotient à 0,01 près	$\frac{b}{c}$										

Faire les deux graphiques suivants sur une feuille de papier millimétré, en utilisant les mêmes axes.
⑤ Graphique relatif au tableau n°2 :

Placer des points en reportant en abscisse le nombre c de lancers et en ordonnée le nombre $\frac{a}{c}$ (en rouge).

⑥ Graphique relatif au tableau n°3 :

Refaire le même travail avec c en abscisse et $\frac{b}{c}$ en ordonnée (en bleu).

Tracer l'axe de symétrie.

nom :		questionnaire 2

Jeu du Franc-Carreau

Questions : (mettre une croix dans le carré choisi)

① Est-ce toujours la même personne qui a lancé ? oui ☐ non ☐
Pourquoi ?

② Avez-vous choisi une manière particulière de lancer ? oui ☐ non ☐
Si oui, laquelle ?

③ Vous espériez obtenir un carré ☐ une ligne ☐ l'un ou l'autre sans préférence ☐

④ Avez-vous essayé d'influencer le résultat ? oui ☐ non ☐
Si oui, comment ?

pourquoi ?

⑤ Vous avez obtenu le plus souvent un carré ☐ une ligne ☐
A votre avis, que faudrait-il modifier dans la règle du jeu pour obtenir davantage de retombées dans un carré ?

⑥ A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents si on changeait de lanceur ?
oui ☐ non ☐

pourquoi ?

⑦ A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents suivant les deux façons de faire :
- tous les lancers (1000 à 1500) ont été faits par un seul groupe
- on cumule les résultats de tous les groupes (10 à 15) ayant fait chacun 100 lancers ?
oui ☐ non ☐
Pourquoi ?

⑧ Le quotient $\frac{a}{c}$ obtenu sera-t-il très différent si l'on fait 100 lancers, 1000 ou 10 000 lancers ? oui ☐ non ☐
Pourquoi ?

Quelle relation peut-on écrire avec les quotients $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$? $\frac{a}{c} \cdots \frac{b}{c} = \cdots$

nom :

Jeu du Franc-Carreau

fiche élève 2

① Compléter le tableau n°1 bis par appel des groupes dans la classe.

Tableau n°1 bis

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a															
nombre de lancers sur ligne	b															
nombre de lancers		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

② Compléter les tableaux n°2 bis et n°3 bis à partir du tableau n°1 bis.

Tableau n°2 bis : cumul des a sur la classe

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a															
nombre de lancers	c	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
quotient à 0,01 près	$\frac{a}{c}$															

Tableau n°3 bis : cumul des b sur la classe

Nombre de lancers sur ligne	b															
nombre de lancers	c	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
quotient à 0,01 près	$\frac{b}{c}$															

③ Graphique relatif au tableau n°2 bis : Sur papier millimétré, placer des points en reportant en abscisse le nombre c de lancers et en ordonnée le nombre $\frac{a}{c}$ (en rouge) .

④ Graphique relatif au tableau n°3 bis : Refaire le même travail avec c en abscisse et $\frac{b}{c}$ en ordonnée (en bleu).

Déroulement

Avant la première séance

Pour préparer le travail, on demande aux élèves d'apporter le matériel nécessaire décrit dans la fiche professeur.

Première séance

* Pour la mise en place de l'activité, chaque groupe de 2 élèves dispose sur la table 1 feuille quadrillée préparée, 1 pièce de 10 centimes, et chacun son matériel (crayon mine, calculette et feuille de brouillon).

* On explique le principe du jeu (sans le faire exécuter) : "Si on laissait tomber la pièce au-dessus de la feuille, sans viser ni une ligne ni un carré, on pourrait observer qu'elle peut s'immobiliser

ou bien à l'intérieur d'un carré

ou bien en touchant ou en coupant au moins une ligne"

On peut présenter le jeu en évoquant le contexte historique. A la cour, au début du XVIII^{e} siècle, quand les courtisans s'ennuyaient, ils jouaient au jeu du "Franc-Carreau" avec des pièces de monnaie en les lançant sur le parquet ou le carrelage. On peut comparer avec le carrelage de la salle de classe pour faciliter la compréhension.

* On distribue et on fait remplir le "questionnaire 1" individuellement ; on peut le ramasser après environ 3 minutes.

* On distribue la "fiche élève 1". Les élèves effectuent les lancers par groupes de 2 en s'organisant pour comptabiliser les retombées dans un carré ou sur une ligne.

Chacun complète le 1er tableau sur la "fiche élève 1".

Les élèves finissent de remplir les tableaux 2 et 3 pour la séance suivante. Ils sont invités à formuler leurs observations

Remarques

Au cours des séances, nous avons été amenés à proposer des modes de notation des dénombrements (𝍸 II ou ⧄II).

De même, nous avons dû préciser que si la pièce tombait à l'extérieur de la feuille, le lancer était annulé.

- Pour certains élèves de 6ème, un arbitrage est demandé pour le cas où la pièce "touche" une ligne.
- Pour le 2ème tableau, la notion de cumul doit être expliquée plusieurs fois à quelques élèves en donnant un exemple car la notion et le mot "cumul" ne font pas partie de leur univers. Cela révèle que pour certains élèves, faire 20 lancers de suite n'équivaut pas à faire 2 fois 10 lancers.
- Selon le niveau de la classe et le moment de l'année, on peut conseiller de n'utiliser la calculette pour les divisions qu'en vérification des calculs.

- L'organisation du travail est directive ; elle répond aux objectifs que nous nous étions fixés de faire sentir aux élèves la loi des grands nombres. Une autre approche aurait consisté à obtenir simplement la fréquence de l'événement "la pièce est franc-carreau" sur 100 lancers. Dans ce cas, on laisse les élèves s'organiser comme ils l'entendent. Il faut alors prévoir au moins une séance supplémentaire pour comparer les méthodes et analyser les résultats.

Deuxième séance :

✱ Après discussion collective dans la classe, l'enseignant aide les élèves à détecter leurs erreurs en faisant la somme $a + b$ pour chaque colonne.
On procède de la même façon pour les arrondis au centième près ; la vérification se fait en calculant $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ qui doit être égal à 1 et non 0,99 pour chaque colonne. C'est l'occasion de repréciser la différence entre troncature et arrondi et d'introduire ou de revoir les propriétés d'addition des fractions : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$ car $a + b = c$.

✱ Les élèves terminent la fiche n°1 en faisant les graphiques des questions 5 et 6.
Pour ceux d'entre nous qui expérimentaient en 6ème, c'était la première approche de la représentation graphique pour les élèves. Nous avons donc précisé ou rappelé l'utilisation du vocabulaire : axe, abscisse, ordonnée.
La graduation en progression arithmétique n'a pas posé de problème pour l'axe des abscisses. Pour l'axe des ordonnées, le choix de l'échelle est moins immédiat. La confrontation des idées des groupes permet de comparer les avantages et les défauts des différentes échelles. Le choix le plus simple est de prendre 10 cm pour unité.
Le travail de graduation de cet axe au $\frac{1}{10}$e et au $\frac{1}{100}$e introduit une approche pratique de la proportionnalité.

Troisième séance :

✱ On aide les élèves à détecter certaines erreurs des graphiques relatifs à la fiche 1 en remarquant que l'axe de symétrie est la droite d'équation y = 0,5.
Beaucoup d'élèves joignent les points obtenus par analogie avec les graphiques de température vus préalablement en géographie. Ils ne donnent pas de signification particulière aux points intermédiaires.

✱ On distribue le questionnaire 2 et on le fait remplir individuellement puis on le ramasse après 5 à 7 minutes.

✱ On distribue la fiche élève 2. On fait remplir le tableau n°1 bis par appel des différents groupes de la classe
En 6e, il faut préciser les nombres a et b de la fiche 1 qui sont à reporter (dernière colonne des tableaux 2 et 3).
Tous les élèves écrivent les mêmes données, ils devraient obtenir les mêmes résultats aux tableaux 2 bis et 3 bis!... puis réaliser des graphiques équivalents aux échelles près pour les questions 3 et 4.

Quelques réponses d'élèves au questionnaire 2

Questions :

① Est-ce toujours la même personne qui a lancé ? Pourquoi ?

non, parce que cela ne serait pas juste

parce que c'est une forme de politesse

chacun son tour

nous avons travaillé en équipe

il avait autant le droit que moi de lancer

sinon le voisin aura plus de réponses

car nous étions deux.

Les quelques élèves qui ont lancé seuls la pièce, l'ont fait par obligation, leur partenaire étant absent ce jour-là. La seule réponse positive par choix dans le groupe a été pour "comparer les résultats de la fiche précédente". L'introduction d'une autre variable (le lanceur) aurait, pour les élèves modifié les règles du jeu.

Les élèves travaillant par groupes de 2 ont spontanément (?) lancé chacun leur tour et ont exprimé des idées de justice, d'esprit d'équipe, de jalousie, voire pour éviter l'ennui.

② Avez-vous choisi une manière particulière de lancer ? Si oui, laquelle ?

oui, j'ai lancé droit

en mettant la pièce au-dessus d'un carré mais ça n'a pas marché souvent

j'avais parié sur la première feuille qu'il y aurait plus de carrés que de lignes

en se mettant au-dessus d'un carré c'est plus dur à avoir

en lançant la pièce plus haut

en la faisant tourner.

non, parce que ce n'est qu'un jeu

parce que ce n'était pas un contrôle.

Les quelques réponses négatives sont motivées par l'absence d'évaluation scolaire.

Les réponses positives sont motivées par la volonté d'obtenir un carré.

③ Vous espériez obtenir un carré ☐ une ligne ☐ l'un ou l'autre sans préférence ☐

④ Avez-vous essayé d'influencer le résultat ? Si oui, comment ?

oui, en visant

je disais "carré, carré, carré", comme cela, cela pouvait peut-être influencer

parce que je tombais plus souvent sur des carrés

je voulais que ce soit le carré parce que pour le jeu du Franc-carreau, on doit mettre la pièce dans un carreau.

Les élèves qui ont voulu influencer le résultat ont essayé de "tricher" en choisissant une façon particulière de lancer, la plupart du temps en visant.

Noter la réponse d'une élève utilisant la méthode Coué, peut-être pour transmettre un fluide à la pièce!

Pourquoi ?

⑤ A votre avis, que faudrait-il modifier dans la règle du jeu pour obtenir davantage de retombées dans un carré ?

Il faudrait :

mettre 2 feuilles
moins d'espace dans la :manière de lancer
un quadrillage plus grand
ne pas lancer la pièce trop haut
lancer au-dessus du carré
tirer juste à côté d'un carré
ne pas lancer trop fort
lancer comme on veut
de plus gros carrés
agrandir les carrés (le plus souvent cité)
agrandir les carrés et faire plus de lancers
prendre une pièce plus petite
avoir le droit de viser.

Pour obtenir davantage de retombées dans un carré, la très grande majorité des élèves a bien vu qu'il fallait agrandir les carrés. Quelques uns seulement ont remarqué le rôle de la taille de la pièce.

Le poids de la pièce a été aussi cité ; l'idée persistante qu'il existe une façon particulière de lancer pour modifier les règles du jeu est aussi revenue.

⑥ A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents si on changeait de lanceur Pourquoi ?

non, parce que :

les carrés sont trop petits
ce n'est pas le lanceur qui fait les résultats, sauf s'il le fait exprès
c'est le hasard à moins qu'il n'influence la pièce
on peut influencer le lancer mais les résultats ne seraient pas très différents, la pièce peut rouler
c'est la chance
ce n'est pas nous qui décidons où la pièce va aller sauf si on influence le résultat
on lance de la même hauteur et du même endroit (à peu près)
chacun n'a pas la même manière

oui, parce que :

chacun a sa méthode pour lancer
cela dépend de la technique du lanceur
si l'on prend un lanceur plus grand, il y aurait moins de chance qu'il retombe dans le carré
s'il veut tricher, ça va certainement changer et s'il ne triche pas, alors ce sera non
un lanceur est peut-être meilleur que l'autre
il ne lance pas pareil que moi
il peut être très fort
il a plus de chance.

Pour les élèves, que le rôle du lanceur influence ou non les résultats, la chance et l'adresse du lanceur interviennent.

L'idée que le poids de la pièce intervienne est aussi apparue : les élèves ont-ils lu la question ? L'ont-ils comprise ? Ou bien y-a-t-il confusion avec la question précédente ?

⑦ A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents suivant les deux façons de faire :
- tous les lancers (1000 à 1500) ont été faits par un seul groupe
- on cumule les résultats de tous les groupes (10 à 15) ayant fait chacun 100 lancers ?
Pourquoi ?

non, parce que :

$\frac{5}{10}=\frac{50}{100}=\frac{500}{1000}=\frac{5000}{10000}=2$ *(!)*

à chaque fois, on ajoute des zéros
nous lançons différemment.
on le diviserait 1000 fois si on faisait 1000 lancers

oui, parce que :

on aura plus de chance
c'est le hasard et 100 lancers ne font pas 10000
avec plus de lancers, plus de chance
il sera plus petit

Cette question n'a pas toujours été comprise par les élèves ; peut-être la formulation est-elle en cause (notion de cumul, ou bien confusion entre 10 à 15 groupes de 100 et 1500 lancers)

Le résultat peut être compris en tant qu'effectif ou en tant que fraction.

Pour les réponses positives, les deux idées les plus courantes sont que plus on fait de lancers, plus "la réponse sera précise" ou plus le groupe "a de chance".

Pour la dernière idée, l'explication de la compréhension des élèves est une affaire d'interprétation difficile à cerner, faute de précision des réponses.

⑧ Le quotient $\frac{a}{c}$ obtenu sera-t-il très différent si l'on fait 100 lancers, 1000 ou 10 000 lancers ? Pourquoi ?

⑨ Quelle relation peut-on écrire avec les quotients $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$? $\frac{a}{c} \cdots \frac{b}{c} = \cdots$

ANALYSE DU QUESTIONNAIRE [#]

Dans les deux questionnaires que nous avons fait passer aux élèves, nous n'avons pas - intentionnellement - utilisé les termes "probabilité" et "indépendance", d'une part parce que ce n'est pas au programme de collège ; d'autre part (et plus important) parce que dans le langage courant ces termes sont utilisés dans des sens divers et ne sont peut-être pas bien connus par ces jeunes élèves ; cela aurait pu induire une mauvaise interprétation. Nous avons donc utilisé le terme "fréquence" pour probabilité et "non influence" pour l'indépendance des répétitions, ce qui correspond au sens "naïf" du terme.

Le premier questionnaire que nous avons proposé aux élèves était destiné à essayer de cerner, au préalable, ce qu'était leur avis concernant une évaluation qualitative d'une fréquence, avant toute expérience, c'est-à-dire s'ils sont capables de sentir de façon subjective ce qu'est une probabilité * , et de faire une comparaison grossière, qualitative, des probabilités de deux événements sur une même expérience (voir s'il y en a un plus probable que l'autre). Ensuite on voulait savoir si, sur ce type d'expérience, ils avaient conscience ou non de l'indépendance entre les répétitions.

Le deuxième questionnaire, posé après la réalisation de l'expérimentation, essaie de voir si celle-ci a modifié leur évaluation de la probabilité de l'événement, puis de faire le point sur la façon dont ils ressentent les différents paramètres qui peuvent intervenir sur une expérimentation aléatoire : influence ou non de la "chance personnelle" du lanceur, des différents groupes de lanceurs. On regarde ensuite s'ils ont une première approche empirique de la loi des grands nombres, après qu'ils aient fait l'étude graphique de l'évolution de la fréquence relative sur les 100 lancers qu'ils ont effectué.

Considérons d'abord ce qui concerne l'évaluation des probabilités avant l'expérience. Les résultats que les élèves ont observés sont donnés dans la question Q2_5. Dans l'estimation subjective préalable par les élèves (question Q1_1), on constate que les deux tiers de ceux-ci font une comparaison correcte entre les chances d'apparition des deux événements, avec uniquement une description de l'expérience. On remarque cependant que les réponses sont différenciées selon les classes, même s'il y a toujours une majorité d'élèves pour dire que l'événement ligne="la pièce coupe la ligne" est plus probable. Par exemple, il n'y a pas d'indécis dans la classe n°2, les trois quarts des élèves mentionnant ligne, alors que les avis sont beaucoup plus partagés dans la classe n°1.

Une autre réponse étonnante résulte de la comparaison des questions concernant l'évaluation de la probabilité, subjective puis espérée, des deux événements "carré" et "ligne". La question Q2_3 portait sur le résultat espéré et on note ici une proportion plus importante pour "carré", contrairement aux réponses aux questions Q1_1 sur ce que les élèves en pensaient a priori avant l'expérience, et à Q2_5 sur le résultat le plus fréquent qu'ils avaient

---

[#] Cette analyse a uniquement comme but la description des réponses au questionnaire, sans pouvoir s'étendre à une population plus large (ensemble des élèves de 6e et 5e des collèges où on a travaillé, des collèges de l'agglomération de Rouen, etc.). En effet, n'ayant pas été obtenu par un tirage aléatoire ni par un choix raisonné (méthode des quotas, par exemple) dans une population plus large, l'échantillon étudié ici n'a aucune raison d'être représentatif de celle-ci.

* Ici il s'agit d'une probabilité aléatoire, caractéristique physique de l'expérience.

observé. Si les élèves avaient eu une opinion cohérente dans le temps, avant et après expérimentation, le tableau croisé des questions Q1_1 et Q2_3 aurait dû être diagonal. L'étude globale de l'ensemble des variables montre que celles ayant la plus grande variabilité par rapport aux autres sont la classe et la question Q2_3. Dans la classe n°2 les réponses sont semblables pour ces questions. Par contre pour les autres classes, on note un renversement d'opinion couplé avec une augmentation du nombre d'indifférents, en particulier dans la classe n°3. Il faudrait faire ici une étude plus fine, "psychologique". La divergence constatée vient peut-être de cet adage "on espère toujours ce qu'on n'a pas" !

Les questions concernant l'indépendance des lancers présente aussi des résultats contrastés. Lorsqu'on leur pose, au début, la question si un lancer va influencer le suivant (Q1_2), ils répondent non dans une grande proportion ; mais il n'en reste qu'un peu plus de la moitié environ lorsque l'on fait intervenir des lanceurs ou des groupes de lanceurs différents (Q2_6 et Q2_7), c'est-à-dire lorsqu'il y a possibilité de "chance personnelle" autre que la sienne. Pour cette dernière question Q2_7, il y a peut-être eu une mauvaise compréhension du texte ou cela provenait de la difficulté supplémentaire liée à la notion de stabilisation de la fréquence dans une longue série de répétitions de l'expérience.

On voit d'ailleurs par la question Q2_8 que cette première approche de la loi des grands nombres n'est pas appréhendée par un peu plus de la moitié des élèves. Cela va à l'encontre de l'idée que se faisait Jacques Bernoulli :

> « tout être des plus stupides, par je ne sais quel instinct naturel, par lui-même et sans le guide d'aucun enseignement (chose absolument admirable) tient pour évident que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but. »

Peut-être est-ce l'enseignement de la vie qui apporte cette connaissance empirique, mais les élèves ne l'ont pas.

Voir ci-après les tableaux donnant les tris à plat sur les différentes variables et quelques uns des tableaux croisés.

TRI A PLAT

classe

modalité	1	2	3	4	total
effectif	26	32	23	25	106

Q1_1 : arrêt de la pièce

modalité	carré	ligne	sépa	total
effectif	23	67	16	106
fréq en %	21.7	63.2	15.1	100

Q1_2 : indépendance

modalité	non	oui	sépa	total
effectif	78	14	14	106
fréq en %	73.6	13.2	13.2	100

Q2_1 : même lanceur ?

modalité	non	oui	total
effectif	100	6	106
fréq en %	94.3	5.7	100

Q2_2 : choix d'une manière de lancer

modalité	non	oui	0rép	total
effectif	73	31	2	106
fréq en %	68.9	29.2	1.9	100

Q2_3 : résultat espéré

modalité	carré	ligne	1dif	total
effectif	42	30	34	106
fréq en %	39.6	28.3	32.1	100

Q2_4 : résultat influencé

modalité	non	oui	0rép	total
effectif	95	10	1	106
fréq en %	89.6	9.4	0.9	100

Q2_5 : résultat le plus fréquent

modalité	carré	ligne	0rép	total
effectif	18	86	2	106
fréq en %	17.0	81.1	1.9	100

Q2_6 : résultat diff par lanceur ?

modalité	non	oui	sépa	total
effectif	61	43	2	106
fréq en %	57.5	40.6	1.9	100

Q2_7 : résultat diff par cumul ?

modalité	non	oui	0rép	total
effectif	55	35	16	106
fréq en %	51.9	33.0	15.1	100

Q2_8 : fréquences diff ?

modalité	non	oui	0rép	total
effectif	41	51	14	106
fréq en %	38.7	48.1	13.2	100

TRI CROISE

Q2_3 classe	carré	ligne	1dif	fréq
1	57.7	7.7	34.6	24.5
2	21.9	68.8	9.4	30.2
3	39.1	4.3	56.5	21.7
4	44.0	20.0	36.0	23.6
fréq	39.6	28.3	32.1	100.0

Q2_3 Q1_1	carré	ligne	1dif	fréq
carré	60.9	8.7	30.4	21.7
ligne	26.9	41.8	31.3	63.2
Sépa	62.5	0.0	37.5	15.1
fréq	39.6	28.3	32.1	100.0

Q2_3 Q2_5	carré	ligne	1dif	fréq
carré	50.0	5.6	44.4	17.0
ligne	36.0	33.7	30.2	81.1
Sépa	100.0	0.0	0.0	1.9
fréq	39.6	28.3	32.1	100.0

Ces tableaux croisés sont donnés sous forme de profil-lignes, c'est-à-dire que chaque ligne indique la distribution conditionnelle de la modalité. Par exemple pour le premier tableau, dans la classe n°1, 57.7% ont répondu carré, 7.7% ligne et 34.6 étaient indifférents (1dif) pour la question Q2_3 ; la dernière colonne indique la répartition suivant les modalités de la variable en colonne (ici la classe) et la dernière ligne donne la distribution suivant la variable ligne (ici Q2_3). Les profil-lignes permettent de comparer (chercher les ressemblances ou les dissimilarités) les réponses à une question par rapport aux différentes réponses de l'autre question.

Nom : [illegible]

fiche élève

1

Jeu du Franc-Carreau

Consignes

① Au crayon et à la règle, quadriller la feuille pour obtenir des carrés de 5 cm sur 5 cm.
② Effectuer 10 lancers et compter :
  a) le nombre de fois où la pièce tombe à l'intérieur d'un carré
  b) le nombre de fois où la pièce coupe ou touche au moins une ligne du quadrillage.
③ Remplir la 1ère colonne du tableau n°1 et recommencer pour remplir le tableau en entier.

Tableau n°1

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a	3	6	4	3	4	4	4	5	4	6
nombre de lancers sur ligne	b	7	4	6	7	6	6	6	5	6	4
nombre de lancers		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

④ Remplir les tableaux n°2 et n°3 à partir des résultats du tableau n°1. Pour cela, on additionnera successivement les résultats des colonnes.

Tableau n°2 : cumul des a

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a	3	9	13	16	20	24	28	33	37	43
nombre de lancers	c	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
quotient à 0,01 près	$\frac{a}{c}$	0,3	0,9	1,3	1,6	2	2,4	2,8	3,3	3,7	4,3

Tableau n°3 : cumul des b

Nombre de lancers sur ligne	b	7	11	17	24	30	36	42	47	53	57
nombre de lancers	c	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
quotient à 0,01 près	$\frac{b}{c}$	0,7	1,1	1,7	2,4	3	3,6	4,2	4,7	5,3	5,7

Faire les deux graphiques suivants sur une feuille de papier millimétré, en utilisant les mêmes axes.
⑤ Graphique relatif au tableau n°2 :

Placer des points en reportant en abscisse le nombre c de lancers et en ordonnée le nombre $\frac{a}{c}$ (en rouge).

⑥ Graphique relatif au tableau n°3 :

Refaire le même travail avec c en abscisse et $\frac{b}{c}$ en ordonnée (en bleu).

Tracer l'axe de symétrie.

nom : [illegible]

questionnaire 2

Jeu du Franc-Carreau

Questions : (mettre une croix dans le carré choisi)

Est-ce toujours la même personne qui a lancé ? oui ☐ non ☒
Pourquoi ? Pour qu'on en passe un peu toutes les deux

Avez-vous choisi une manière particulière de lancer ? oui ☐ non ☒
Si oui, laquelle ?

Espériez-vous obtenir un carré ☒ une ligne ☐ l'un ou l'autre sans préférence ☐ ?
Avez-vous essayé d'influencer le résultat ? oui ☒ non ☐
Si oui, comment ? en essayant de viser.

pourquoi ? Parce-que j'espérerai obtenir un résultat dans un carré.

Avez-vous obtenu le plus souvent un carré ☐ une ligne ☒ ?
A votre avis, que faudrait-il modifier dans la règle du jeu pour obtenir davantage de retombées dans un carré ? prendre une pièce peut-être, plus petite.

A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents si on changeait de lanceur ?
oui ☐ non ☒
Pourquoi ? tout le monde à la même façon de lancer la pièce.

A votre avis, obtiendrait-on des résultats très différents suivant les deux façons de faire :
- tous les lancers (1000 à 1500) ont été faits par un seul groupe
- on cumule les résultats de tous les groupes (10 à 15) ayant fait chacun 100 lancers ?

~~oui~~ non ☒

Pourquoi ? Parce-que il y aura toujours les mêmes chiffres mais avec des zéros en plus.

Le quotient $\frac{a}{c}$ obtenu sera-t-il très différent si l'on fait 100 lancers, 1000 ou 10 000 lancers ?
oui ☐ non ☒
Pourquoi ?

Quelle relation peut-on écrire avec les quotients $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$? $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$

nom : MARAIS Sébastien

fiche élève

2

Jeu du Franc-Carreau

① Compléter le tableau n°1 bis par appel des groupes dans la classe.

Tableau n°1 bis

Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a	34	43	33	43	32	35	35	35	46	41	41	43	27	52	42	42
nombre de lancers sur ligne	b	66	57	67	57	68	65	65	65	54	59	59	57	73	48	58	58
nombre de lancers		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

② Compléter les tableaux n°2 bis et n°3 bis à partir du tableau n°1 bis.

Tableau n°2 bis : cumul des a sur la classe

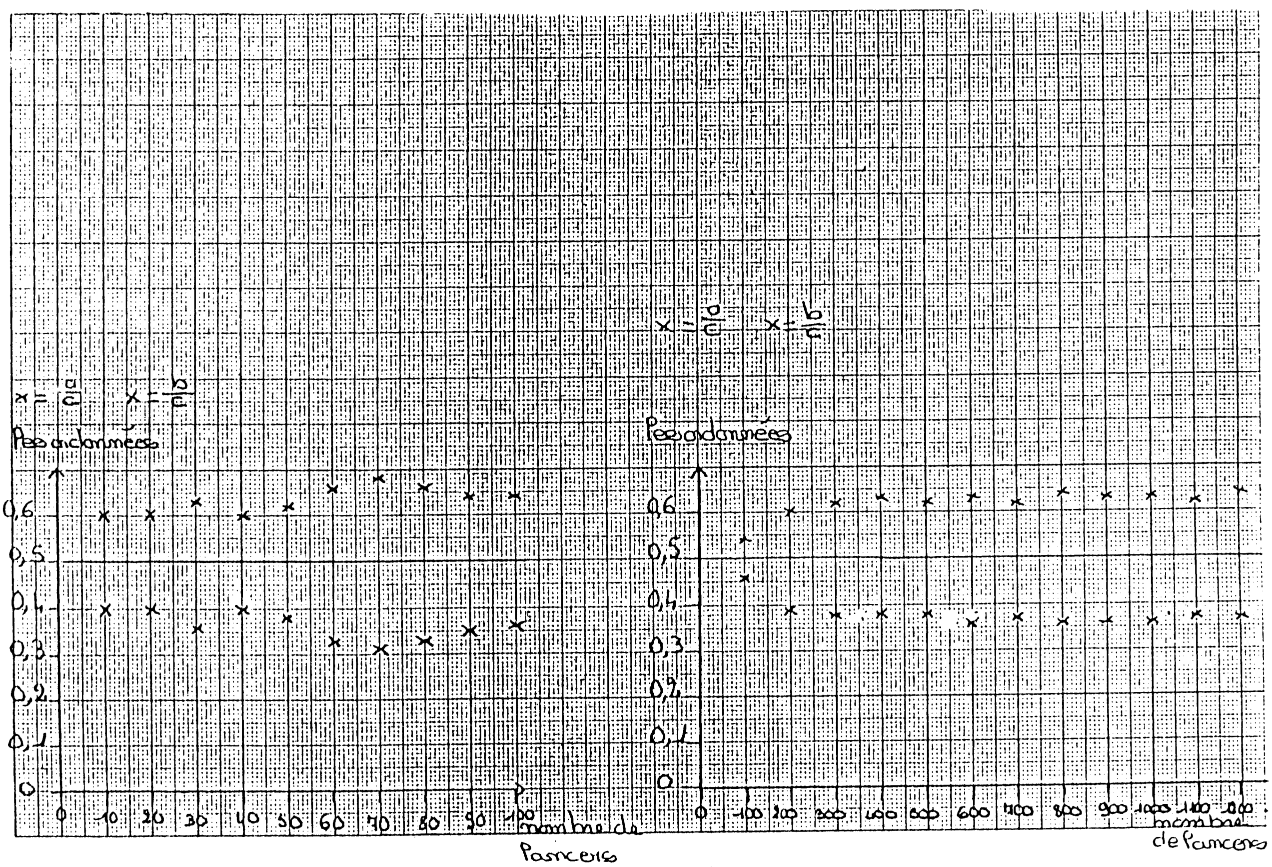
Nombre de lancers à l'intérieur d'un carré	a	34	77	110	153	185	220	255	290	336	377	418	461	488	540	582	624
nombre de lancers	c	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
quotient à 0,01 près	$\frac{a}{c}$	0,34	0,39	0,37	0,38	0,37	0,37	0,36	0,36	0,37	0,38	0,38	0,38	0,38	0,39	0,39	0,39

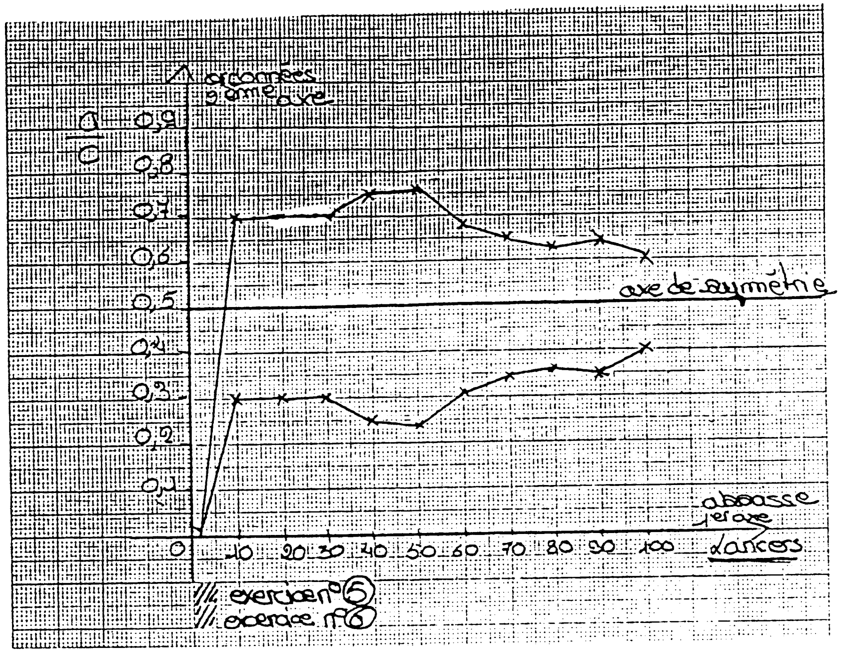
Tableau n°3 bis : cumul des b sur la classe

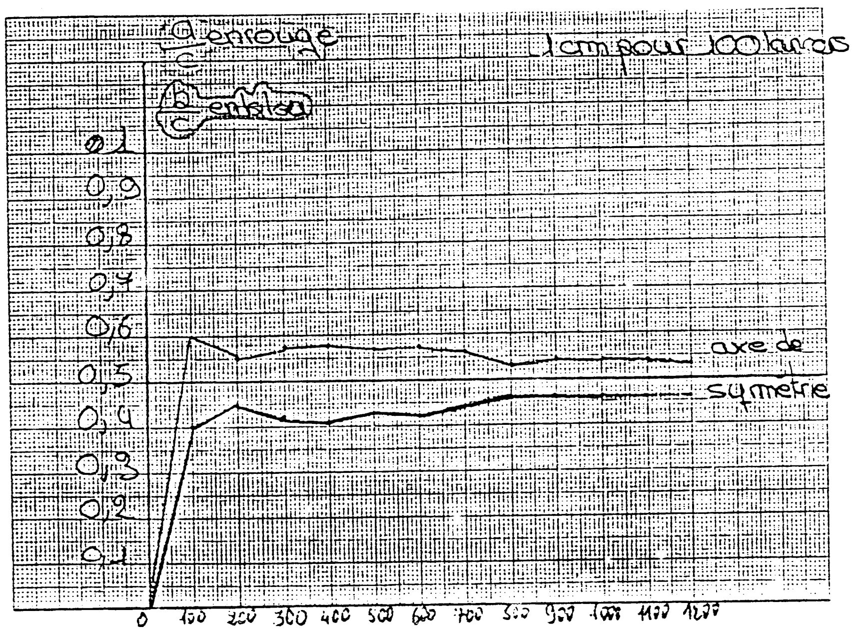
Nombre de lancers sur ligne	b	66	123	190	247	315	380	445	510	564	623	682	739	812	860	918	976
nombre de lancers	c	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
quotient à 0,01 près	$\frac{b}{c}$	0,66	0,62	0,63	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	0,63	0,62	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61

③ Graphique relatif au tableau n°2 bis : Sur papier millimétré, placer des points en reportant en abscisse le nombre c de lancers et en ordonnée le nombre $\frac{a}{c}$ (en rouge).

④ Graphique relatif au tableau n°3 bis : Refaire le même travail avec c en abscisse et $\frac{b}{c}$ en ordonnée (en bleu).







Choteau Célia 5e4

On fait 5 lancers chacun, à chaque fois

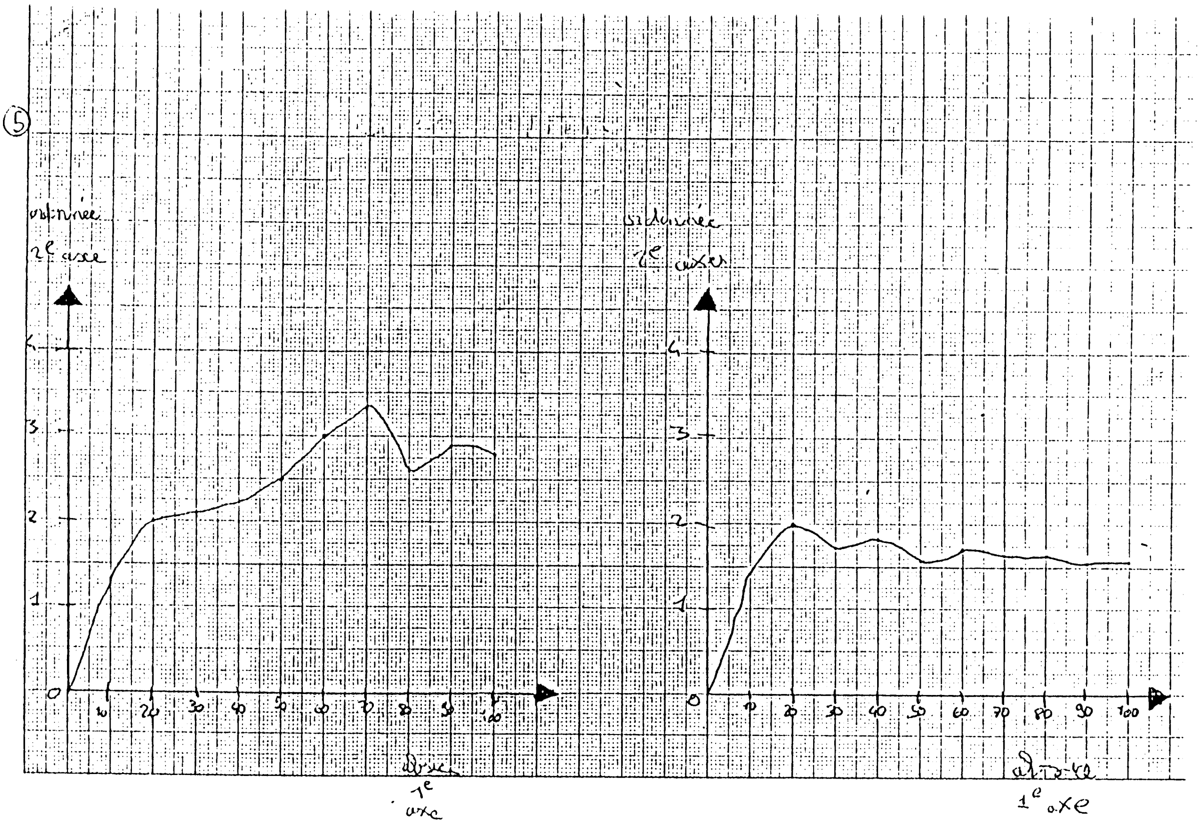
	a	b
1erefois	IIII	IIIIII
2eme	IIII	IIIIII
3eme	III	IIIIIII
4eme	IIIII	IIIII
5eme	III	IIIIIII
6eme	I	IIIIIIIII
7eme	II	IIIIIIII
8eme	IIIII	IIIII
9eme	IIIII	IIIII
10eme	IIII	IIIIII

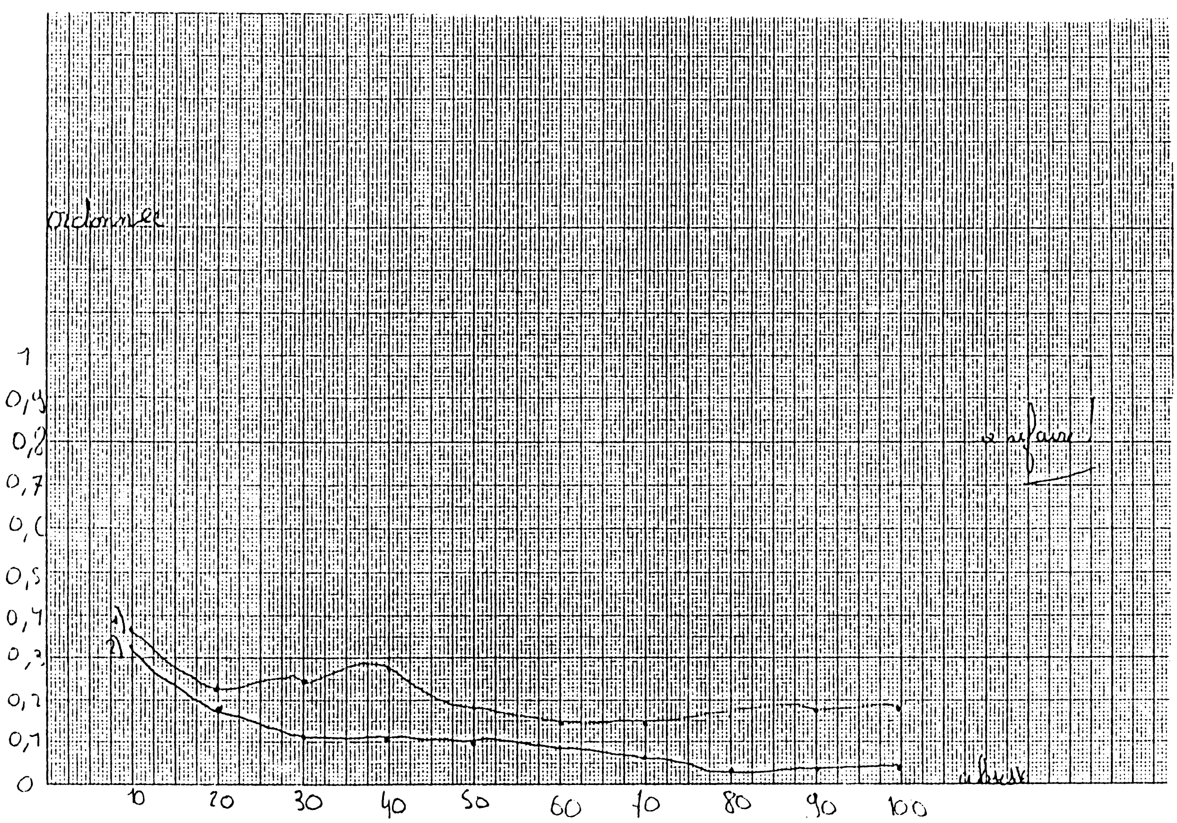
Remarque :

1. quand on ajoute le nombre a + b cela donne le nombre qui est en dessous

2. quand on

5


ordonnée
2e axe
0
1
2
3
4
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
abscisse
1e axe
ordonnée
2e axe
0
1
2
3
4
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
abscisse
1e axe


ordonnée
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
abscisse
à refaire!

Ref : 111

TITRE : *UNE ACTIVITE PROBABILISTE AU COLLEGE*
LE JEU DE FRANC- CARREAU

AUTEURS : GROUPE STATISTIQUE

BADIZE Marcel, JACQUES Annick, PETITPAS micheline,
PICHARD Jean-Francois.

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de Collège et de lycée.

RESUME : Compte rendu et analyse d'une expérimentation dont le but est d'initier les éléves de collège à l'aléatoire.
Nous avons utilisé pour cela le jeu de Franc-Carreau, étudié par Buffon au 18ème siècle, que nous replaçons dans son contexte historique.

MOTS CLES : Probabilité
Statistique
Buffon
Jeu de Franc-Carreau
Histoire des probabilités.

DATE : Septembre 1996
NB DE PAGES :38 pages.
N° D'ISBN : 2-86239-069-0
PUBLICATION : IREM de Rouen, BP 153, 76135 Mont-Saint-Aignan, France.

****

BON DE COMMANDE

M. , Mme, Mlle : ______________________________
Adresse : ______________________________

Libellé ACTIVITE PROBA. AU COL. JEU DE FRANC- CARREAU	Prix	Quantité	Total
[R.111]	30 F	....	....
Frais d'envoi : 15 F pour le 1er livre et 10 F par livre supplémentaire (France)			....
Frais réels pour l'étranger			....
			SOMME

DUE :

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :
L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN
Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 138 - 76821 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 02 535.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

****

DATE : SIGNATURE :