UNIVERSITÉ DE ROUEN

I.R.E.M. DE ROUEN

LA DROITE DES REELS EN SECONDE :

POINT D'APPUI DISPONIBLE OU ENJEU CLANDESTIN ?

Corine Castela (Irem et Iufm de Rouen, Equipe Didirem Paris)

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE ROUEN

BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES, AV. DE BROGLIE

B.P. 138, 76821 MONT SAINT AIGNAN *TÉL. FAX. 35-14-61-41*

INTRODUCTION

Ce texte présente une réflexion sur l'enseignement des nombres réels en seconde.

La première partie est centrée sur l'analyse des programmes en vigueur (en 1996). Après une étude succincte de la place accordée aux nombres de l'école primaire à la fin du collège, on mettra en évidence l'ambiguïté du programme de seconde : l'ensemble des réels est absent du texte mais il appartient à l'environnement implicite de plusieurs rubriques. Accéder à **R** n'est pas un objectif explicite dans cette classe et pourtant, une certaine intuition de la continuité de l'ensemble des nombres y est requise aussi bien pour la géométrie vectorielle ou analytique que pour les fonctions.

Pour surmonter cette difficulté, on compte en général sur la représentation géométrique des nombres, la correspondance nombres $\leftrightarrow$ points via la notion d'abscisse permettant d'identifier l'ensemble des nombres à une droite, la "droite des réels". On espère ainsi importer dans le champ numérique des propriétés intuitivement attribuées aux objets géométriques.

Une telle stratégie repose sur deux présupposés concernant les connaissances des élèves:

* l'association nombre $\leftrightarrow$ point ne pose pas problème,
* la droite est bien munie des propriétés attendues, par exemple continuité et densité.

Ces hypothèses sont-elles légitimes ? Des questionnaires ont été élaborés pour obtenir des éléments de réponse à cette interrogation. Ils ont été soumis aux élèves de trois classes de seconde en fin de premier trimestre ; la deuxième partie de cette brochure est donc consacrée à l'analyse des réponses obtenues.

L'approche adoptée est qualitative, l'objectif est d'interpréter la plupart des réactions rencontrées, sans nécessairement se restreindre aux plus fréquentes. En fait, les réponses analysées sont sélectionnées pour la fécondité des réflexions que leur présence aura suscitées, sur un plan didactique ou pédagogique comme on peut s'y attendre, mais aussi sur les plans mathématique et épistémologique.

L'essentiel des analyses portera sur deux points : la correspondance entre les nombres et les points d'un axe d'une part, la densité de l'ordre dans les cadres numérique et géométrique d'autre part. On verra qu'à leur propos les présupposés usuels méritent d'être nuancés. En marge de cet axe principal, on s'autorisera une certaine liberté dans le développement de la réflexion en explorant à l'occasion quelques voies imprévues.

PREMIERE PARTIE :

ANALYSE DES PROGRAMMES EN VIGUEUR

I. Les réels avant la seconde (programmes scolaires en vigueur en 96).

Il s'agit dans cette partie de présenter une réflexion rapide sur les programmes des classes qui précèdent la seconde. On y verra notamment comment, sur les deux sujets essentiels que sont les fractions et les racines carrées, le découpage des programmes laisse craindre que des questions majeures soient passées sous silence, à l'occasion du changement de cycle ou de classe[1].

1. A l'école primaire

Programmes et instructions (BO n° 21, 23 Mai 1985), Cours moyen :

Ces programmes furent en vigueur jusqu'à la rentrée 95 ; ce sont donc ceux qu'ont connus tous les élèves fréquentant le collège ou le lycée en 95-96.

Arithmétique	*Ecriture, nom et comparaison des entiers naturels. Nécessité d'introduire de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres s'écrivant sous forme de fractions simples.* *Ecriture et nom des nombres décimaux.* *Désignation d'un nombre décimal par l'addition, la multiplication, la soustraction et la fraction ; passage d'une écriture à une autre.* *Comparaison des nombres décimaux (intercalation, encadrement).* *Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché (ordre de grandeur et encadrements).*

[1]Dans la mesure où il s'agit également ici de rendre rapidement accessible une vue d'ensemble sur l'enseignement des nombres, j'ai choisi de ne pas reporter les extraits de programmes en annexe, considérant qu'il est plus facile à qui trouvera cette lecture indigeste de sauter quelques lignes qu'à celui qui est intéressé de se reporter à tout instant aux pages finales.

Arithmétique (fin)	*Reconnaissance et utilisation des fonctions numériques : $n \rightarrow n+a$ et $n \rightarrow n \times a$, et leurs réciproques, définies dans l'ensemble des nombres décimaux. Problèmes relevant de ces fonctions et plus particulièrement de la proportionnalité (exemple de la règle de trois).* *Application des procédures de calcul mental dans l'ensemble des décimaux, en utilisant des techniques opératoires, et les propriétés des fonctions numériques étudiées.*
Mesure de quelques grandeurs	*Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée, utilisation des systèmes de mesure : expression, par un nombre ou par encadrement, du résultat d'un mesurage* *.......* *Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de poids.* *Utilisation des instruments de mesure....*

Un nouveau programme est en vigueur depuis Septembre 95 :

Programmes de l'école primaire (BO n°5, 9 Mars 1995), *Cycle des approfondissements*

Nombres et calcul	*Nombres naturels* *-numération décimale (interprétation de l'écriture chiffrée d'un nombre) ;* *-ordre sur les naturels (utilisation des signes < et >) ;* *-relations arithmétiques entre les nombres (double, moitié, tiers...pour des nombres simples ; multiples de 2, 5 et 10) ;* *-techniques opératoires de la soustraction, de la multiplication, de la division euclidienne ;* *-pratique du calcul exact ou approché en utilisant :* *. les techniques opératoires,* *. le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit),* *. la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,* *. l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée)* *-problèmes relevant de l'addition, la soustraction, la multiplication, la division euclidienne.* *Fractions simples* *Ecriture, comparaison de fractions de même dénominateur.* *Nombres décimaux* *-écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à une autre ;* *-ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement) ;* *-pratique du calcul exact ou approché en utilisant :* *. les techniques opératoires (addition, soustraction ;* ***multiplication et division d'un décimal par un entier****),* *. le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit),* *. la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,* *. l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée) ;* *-problèmes relevant de l'addition et de la soustraction,* ***de la multiplication et de la division d'un décimal par un entier****, de la division décimale de deux entiers.*
Nombres et calcul	*Première approche de la proportionnalité :* *-reconnaissance de situations de proportionnalité dans des cas simples (échelles, pourcentages) ;* *-utilisation de tableaux, diagrammes, graphiques.*

En résumé, dans l'ancien et le nouveau programme, un élève doit à la fin de l'école primaire connaître les nombres décimaux, leurs écritures sous forme fractionnaire et décimale, la comparaison, l'addition et la soustraction des décimaux ainsi que la multiplication et la division d'un décimal par un entier. Il a également rencontré la division à quotient décimal d'un entier par un autre. **La multiplication des décimaux, présente dans le programme de 85, a par contre disparu dans celui qui sera désormais en vigueur.**

Quant aux fractions, on peut noter qu'elles sont finalement très peu évoquées ; on ne parle même plus dans le nouveau programme de la nécessité d'introduire de nouveaux nombres. L'examen des manuels montre que, dans le cadre des instructions de 85, le travail effectué pour introduire la notion de fraction peut être approfondi et relativement diversifié, prenant en compte les recherches didactiques bien développées sur ce thème (voir par exemple Hatier Objectif Calcul dernière édition). Mais on constate aussi que ce n'est pas nécessairement le cas, les chapitres sur les fractions constituant souvent un rapide intermédiaire vers les nombres décimaux ; les contraintes de temps sont sans doute pour beaucoup dans une telle orientation.

Un point est à noter pour le rôle qu'il joue dans la liaison CM2-Sixième : il n'est nulle part mentionné dans les programmes que la fraction $\frac{a}{b}$ a un rapport avec la division euclidienne de a par b. Les élèves arrivant au collège ont donc nécessairement rencontré des objets appelés fractions ; mais, ceux-ci ne leur auront peut-être jamais été présentés comme quotient du numérateur a par le dénominateur b. Si l'on se réfère, comme c'est souvent le cas, à un processus de fractionnement d'une collection finie, c'est la totalité fractionnée qui est l'objet d'un partage, son nombre d'éléments qui est divisé par b, pas a.

2. Au collège

Pour le collège, les programmes en vigueur en 95-96 ont été publiés au BO n°44 du 12 Décembre 1985. A la rentrée 96, un nouveau programme entrera en vigueur en sixième.

2.1. En sixième

Travaux numériques	*En dehors du paragraphe 7, les nombres utilisés sont positifs.* *1. Techniques opératoires (mentales ou écrites) sur les nombres entiers et décimaux. Procédé de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat.* *2. Ecriture fractionnaire de décimaux et opérations +,– ,×,÷ . Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9.* *3. Quotient de décimaux, écriture $\frac{a}{b}$; approximations de ce quotient.* *Multiplication d'un décimal par $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers (b≠0).* *4. Initiation aux écritures littérales (ex. : formules d'aires).* *5. Rangement de nombres.* *6. Equations du type :* $23 \times \square = 471,5$ *ou* $\frac{2,05}{\square}.5 = 8,2$ *7. Exemples introduisant les nombres relatifs à partir de problèmes variés.* *Somme et différence de deux entiers relatifs simples. Exercices concernant le repérage d'un point sur une droite orientée munie d'une origine et régulièrement graduée.* *Coordonnées d'un point, en repère orthogonal.*
Organisation et gestion de données. Fonctions	*Exemples issus d'activités :* *1. A base numérique : Application d'un pourcentage à une valeur ; relevés statistiques ; opérateurs et, en particulier, usage des opérateurs constants d'une calculatrice.* *2. A base géométrique : Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallélépipède rectangle, de la longueur d'un cercle.* *On se servira de ces exemples, selon les cas, pour : décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques ; reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité;* *déterminer une quatrième proportionnelle ; effectuer un changement d'unité.*

On remarquera que le programme introduit la notation fractionnaire d'un quotient de nombres décimaux sans faire aucune référence aux utilisations de ce même symbolisme que les élèves ont pu rencontrer en primaire.
Or, comme nous l'avons signalé plus haut, la fraction n'a en général pas été vue comme division de a par b. Il est donc indispensable de veiller à l'unification des différents objets désignés de la même façon (processus de fractionnement, effet de ce processus sur un tout donné discret ou continu, abscisse d'un point sur une droite graduée, mesure d'un segment et finalement solution du problème $b\times\square = a$). Ceci n'apparaît pas dans les

instructions et pourtant ce n'est pas une mince affaire ; analyser ce qui est en jeu ne va pas de soi et il n'est pas du tout évident que tous les enseignants aient conscience du problème puisqu'en tant que mathématiciens, ils ont depuis longtemps identifié (au sens "reconnu comme identiques", "confondu") les différents aspects de l'objet mathématique désigné par une fraction. Par ailleurs, on sait bien que la prise en compte par les professeurs du collège des connaissances enseignées dans l'élémentaire ne se fait pas sans problème.

Le nouveau programme de sixième fait d'ailleurs clairement apparaître les manques du précédent en développant des commentaires qui attirent l'attention des enseignants sur un certain nombre de points délicats. C'est particulièrement le cas pour la rubrique consacrée aux fractions que nous reproduisons donc intégralement ci-dessous. Pour le reste, nous signalerons seulement dans la rubrique "1. Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations.", la nouveauté que constitue désormais en sixième la multiplication des nombres décimaux tant du point de vue du sens que de la technique.

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Ecriture fractionnaire	*Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples.* *Savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division*	*A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage.* *Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :* *- le quotient* $\frac{a}{b}$ *est un nombre,* *- le produit de* $\frac{a}{b}$ *par b est égal à a.* *Ceci permet de considérer un nombre tel que* $\frac{4}{3}$ *comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.* *Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités : repérage (placement sur une droite graduée), mesure, calcul (possibilité d'utiliser un quotient* $\frac{a}{b}$ *dans un calcul, sans effectuer nécessairement la division de a par b).*
	Reconnaître, dans des cas simples, que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.	*On dégagera et on utilisera le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre. A l'occasion de simplifications, on pourra faire intervenir des critères de divisibilité, sans nécessairement les justifier.*

Extension aux nombres décimaux		*On étendra le travail fait sur des entiers à des égalités telles que $\frac{5,24}{2,1}=\frac{524}{210}$, par exemple en utilisant la calculatrice ou en ayant recours à des changements d'unités. Cette extension permettra d'élargir la division à des cas où le diviseur est décimal. Aucune compétence n'est exigible à ce sujet.*

2.2. En cinquième

Travaux numériques	*1 Nombres positifs :* *- Sur les nombres entiers et décimaux, conventions et priorités opératoires ; étude de k(a+b) et k(a-b).* *- Comparaison et addition de deux nombres en écriture fractionnaire.* *2. Nombres relatifs en écriture décimale :* *- Comparaison et rangement ;* *- Addition et soustraction ;* *- Réduction de sommes algébriques.* *3. Equations numériques du type $a+x = b$ ou $ax = b$ ($a\neq 0$).*
Organisation et gestion de données. Fonctions	*Exemples de fonctions avec :* *- Description, traduction en tableaux ou par des représentations graphiques ;* *- Reconnaissance, s'il y a lieu d'une proportionnalité.* *Ces exemples seront notamment issus d'activités :* *1. A base numérique : calcul d'un pourcentage, d'une vitesse moyenne ; relevés statistiques; activités proposées en §2, ci-dessus* *2. A base géométrique :* *-Echelles ;* *- Calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire d'un disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.*

2.3. En quatrième

Travaux numériques	*1. Nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire :* *-Multiplication ; règle des signes* *- Division ; approximations décimales d'un quotient ;* *- Addition en écriture fractionnaire ;* *- Puissances entières d'exposant positif ou négatif ;* *- Ecriture des nombres en écriture scientifique et en notation ingénieur ; ordre de grandeur d'un résultat.* *Conventions et priorités opératoires.* *2. Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des écritures littérales.* *Développement d'expressions du style (a+b)(c+d)* *Exemples simples de factorisation. Réduction des sommes algébriques.* *3. Ordre :* *Comparaison de nombres relatifs en écritures décimale ou fractionnaire ;* *Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.* *4. Résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du premier degré à une inconnue.*

Organisation de données. Fonctions	*1. Applications linéaires et proportionnalité :* *Représentation graphique d'une application linéaire ;* *Notion de coefficient directeur, de pente.* *2. Exploitation de données statistiques :* *Fréquences relatives et leur expression en "pour cent" ;* *Effectifs cumulés, fréquences cumulés.* *3. Application aux pourcentages et aux indices (base 100 pour...)* *Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit...)*
Travaux géométriques	*1...cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale (savoir utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle et les longueurs des côtés adjacents, utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné, de l'angle aigu de cosinus donné)* *....* *3. Propriété de Pythagore et sa réciproque (calculer, en faisant éventuellement usage de la touche √de la calculatrice, un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres côtés)* *NB les textes entre parenthèses donnés ci-dessus sont issus des compléments au programme)*

Les classes de cinquième et de quatrième amènent donc en principe les élèves à pratiquer les différentes opérations algébriques et à mener des activités de comparaison et d'encadrement sur les nombres définis comme quotients de décimaux, positifs ou négatifs, à partir d'une écriture fractionnaire.

Le programme de quatrième prévoit l'usage de la touche √ de la calculatrice pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle. C'est donc normalement dans cette classe que devrait prendre place une réflexion sur l'existence et la nature des racines carrées pour les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, le cadre géométrique étant précisément une bonne entrée pour justifier cette existence. Des travaux pourraient faire apparaître le caractère approché de la réponse fournie par la calculatrice. C'est effectivement le cas dans le manuel de la collection Mistral chez Istra. Mais un tel travail n'apparaît absolument pas dans tous les livres ; il est ainsi absent du manuel de la collection Hachette Collège, pourtant fort intéressant (l'expression "racine carrée" ne figure pas dans l'index). On peut avancer l'hypothèse suivante : la racine carrée n'est pas un objet sensible en quatrième, elle ne figure pas parmi les objectifs majeurs de cette classe qui sont l'apprentissage de la démonstration, le développement des opérations sur les fractions et la mise en place du calcul algébrique. De plus, le chapitre géométrique dans lequel elle est introduite n'incline pas l'enseignant à une activité numérique. Ainsi la racine carrée peut se trouver introduite sans formalités et banalisée par un usage fréquent grâce à la calculatrice. Elle "fait désormais partie des meubles".

De même, réfléchir à la nature des cosinus en tant que nombres n'est pas du tout un objectif du programme. Au collège, les élèves travailleront soit avec les valeurs décimales approchées des fonctions trigonométriques d'un angle, soit avec leur expression comme quotient de longueurs données par hypothèse ou calculées, lesquelles seront souvent des décimaux ou des racines carrées.

2.4. En troisième

Travaux numériques	*1. Ecritures littérales :* *Factorisation d'expression de la forme : a^2- b^2 ; a^2+ 2ab+ b^2 ; a^2-2ab+ b^2* *(a et b désignent des formes simples de nombres exprimés dans les différentes écritures déjà rencontrées).* *2. Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) :* *Produit et quotient de deux radicaux ; puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.* *(Savoir que, si a désigne un nombre positif, a estlen nombre positif dont le carré vaut a.* *Savoir déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que x^2 = a)* *3. Equations et inéquations du premier degré :* *Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques ;* *Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques ;* *Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.*
Organisation et gestion de données. Fonctions	*1. Applications affines : représentation graphique d'une application affine.* *2. Exploitation de données statistiques : moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.* *3. Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs -quotients ou sur des grandeurs-produits.* *4. Résolution d'équations par essais et corrections successifs.* *5. Analyse (et construction) d'algorithmes comme une suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur.*
Travaux géométriques	*1. Enoncé de Thalès relatif au triangle (Des activités de construction sur droites graduées contribueront à éclairer la correspondance entre nombres et points, construire les 9/7 d'un segment, placer le point d'abscisse -2/3...)* .... *2. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus et tangente)* .... *5.. Distance de deux points en repère orthonormal ; équation d'une droite.........*

En troisième, la racine carrée devient un objet explicite d'enseignement. Mais il n'est absolument pas fait référence à la question de l'existence de ce nombre positif dont le carré vaut a. Ce problème fait donc l'objet d'une impasse totale au niveau des instructions explicites. Qui des enseignants de quatrième et de troisième a la responsabilité de l'aborder? Pas de réponse officielle.

Ainsi, il se peut qu'à la faveur (sic) du changement de classe et de professeur, ce point reste non traité. Il peut également être abordé en activité d'introduction par des travaux sur la résolution d'une équation x^2 = a par essais et corrections successifs (par ex. Pythagore édition 93 chez Hatier). Cependant la grande affaire en troisième est la manipulation opératoire des radicaux qui, avec la résolution des équations x^2 = a, est LE sujet des exercices concernant les racines carrées, en particulier au Brevet. En résumé, on peut comprendre qu'un élève sorte de troisième avec des connaissances erronées sur la définition et la nature des racines carrées.

Notons enfin que le programme de géométrie, avec le théorème de Thalès, fournit un outil théorique pour justifier la possibilité de diviser un segment quelconque en b parties égales et donc d'associer à toute fraction $\frac{a}{b}$ un point sur un axe gradué.

En résumé, on peut dire que les élèves terminent le collège en ayant rencontré différentes sortes de nombres réels, entiers naturels et relatifs, décimaux, rationnels (mais le terme n'est pas connu), racines carrées et .... π. Ces nombres ont été manipulés dans des activités de calcul ($+$, $-$, $\times$, $\div$) et d'approximations.
Aucune notation n'aura été introduite pour désigner l'un quelconque des ensembles de nombres rencontrés, les mots "rationnel", "réel" ne figurent pas au programme. Ne figurent pas non plus les notions de valeur absolue et d'intervalle.

II. Les réels en seconde

1. Absents des textes

Contrairement à ce qui se passait auparavant, c'est à peine si on parle encore de l'ensemble des réels dans le programme actuel de Seconde (BO n°20, 17 Mai 1990). Deux alinéas seulement y font explicitement allusion. Ils sont tous deux situés dans la partie I consacrée aux généralités et intitulée "Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme":

* dans la partie I.2. "Problèmes numériques et algorithmiques", apparaît l'expression "fonction numérique de la **variable réelle**", expression qui a par ailleurs totalement disparu du chapitre III "Fonctions" (il s'agit dans ce paragraphe de l'aspect algorithmique du calcul des valeurs d'une fonction) ;

* dans la partie I.6. "Vocabulaire et notations", on mentionne l'introduction des notations **N**, **Z**, **Q** et **R**, alors même que le reste du programme ne fait aucune référence à un travail explicite sur les réels, aucune allusion non plus aux notions de rationnels et d'irrationnels.

2. Quels sont les nombres en jeu dans les travaux numériques et algébriques ?

Le programme introduit la valeur absolue d'un nombre ainsi que la notion d'intervalle (mais on ne parle pas d'intervalle de **R**).

Du point de vue strictement numérique, les objectifs s'ordonnent autour de deux axes :

a) Pratique des opérations portant sur des nombres (puissances, fractions, radicaux...)

b) Valeur exacte, valeurs approchées d'un nombre ;
Pratique sur des exemples numériques du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre ; exemples d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements.

Ces travaux sur les nombres donnent lieu à des activités spécifiques mais ils apparaissent aussi comme une constante dans les chapitres consacrés à l'algèbre et à l'étude des fonctions (comme coefficients des expressions littérales et finalement solutions des équations ou inéquations ; valeurs attribuées à la variable dans les tableaux de valeurs).

Il s'agit en fait de travailler dans $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}; \pi)$, c'est-à-dire avec les nombres obtenus par opérations algébriques à partir des nombres introduits lors de la scolarité antérieure et de renforcer les connaissances et les compétences que les élèves ont à leur propos. L'introduction des différents ensembles de nombres fournit l'occasion de différencier les rationnels des autres nombres connus ; suivant les manuels, l'irrationnalité de certaines racines carrées est prouvée (par ex., en exercice dans "Déclic") ou seulement admise ("Pythagore" par ex.). L'ensemble des nombres réels n'est pas seulement absent du texte de la partie II "Problèmes numériques et algébriques", il est au fond absent des objets mathématiques qui y sont en jeu, y compris implicitement (à une exception près cependant sur laquelle nous reviendrons, l'allusion dans le préambule de ce II. à la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions).

On peut se demander s'il est vraiment légitime de considérer le corps de nombres engendrés par **Q**, π et les racines carrées d'entiers, tant la liste des nombres sur lesquels les élèves sont amenés à travailler est limitée ("toute virtuosité technique est exclue"), particulièrement dès qu'il s'agit d'algèbre ou de fonctions.
Nous verrons plus loin (cf. Deuxième partie II.3.) qu'effectivement, pour certains élèves, les expressions obtenues en opérant avec des radicaux n'ont pas, en début de seconde, statut de nombre. Je ferai l'hypothèse suivante : par delà les travaux numériques proprement dits, les exercices algébriques, en développant les compétences opératoires avec les symboles littéraux, contribuent aux apprentissages dans le champ numérique. Ils habituent par exemple les élèves à se détacher des spécificités des différentes catégories de nombres pour voir leurs propriétés opératoires communes. Ils les entraînent à écrire, à manipuler des combinaisons algébriques beaucoup plus complexes que celles qu'on rencontre usuellement avec des nombres. Ainsi on ne trouvera pas dans le chapitre sur le calcul numérique une quantité du type $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$ alors que la réduction de l'expression $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$ est un exercice algébrique envisageable.
Autrement dit, en introduisant un certain recul par rapport à ces objets souvent traumatisants et finalement très abstraits que sont par exemple les racines carrées, le calcul littéral, favorise peut-être l'extension et l'unification de l'ensemble des nombres envisageables par des élèves de seconde, à condition bien évidemment que ceux-ci développent une certaine aisance dans le cadre algébrique, ce qui n'est pas le cas de tous.

Retombées possibles de l'algébrique vers le numérique donc ; inversement, on peut penser que l'intervention d'expressions ax+b à coefficients légèrement "exotiques" (avec racines carrées ou valeurs absolues) dans les équations, inéquations ou études de signe constitue une préparation à l'introduction de paramètres. Ils obligent en effet les élèves à distinguer inconnue et coefficients, à manipuler des coefficients qui sont eux-mêmes des expressions complexes non simplifiables, premier pas sur la voie d'un apprentissage qui a aujourd'hui quasiment disparu des programmes.

Ces remarques étant faites, voyons ce qu'on peut dire du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}},\mathbf{n}\in\mathbf{N};\pi)$ qui nous est apparu comme le seul en jeu dans la partie "Problèmes numériques et algébriques". Cet ensemble est certes différent de **R**, beaucoup plus petit en un certain sens puisqu'il est dénombrable et qu'il n'est pas complet. Cependant, sur plusieurs points, tant que la continuité n'est pas en jeu, il est aussi très proche de **R**. C'est un corps ordonné. Contenant **D** et **Q**, il est dense dans **R** et son ordre est dense ce qui le différencie nettement de **Z** du point de vue topologique : on ne peut plus parler du successeur d'un nombre, un intervalle ouvert non vide n'y est pas identifiable à un fermé et contient une infinité d'éléments, même s'il est borné. C'est dire qu'on peut, dans ce cadre, aborder correctement des questions qui posent problème aux élèves (nous le vérifierons dans la partie III) : différenciation de > et ⩾, de]a,b] et [a,b]....
$\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}},\mathbf{n}\in\mathbf{N};\pi)$ contient un échantillonnage tout à fait représentatif des différents types de nombres réels (à l'exception des nombres non calculables) : entiers, décimaux, rationnels non décimaux, irrationnels (algébriques ou non). Ceci est amplement suffisant pour alimenter les travaux sur la nature des nombres, sur la notion de valeur exacte, sur la recherche d'approximations de plus en plus fines, autrement dit aller vers les idées de suites de nombres et de convergence.

En résumé, on constate que cet ensemble $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}},\mathbf{n}\in\mathbf{N};\pi)$ est un excellent cadre pour traiter de nombreux points du programme de seconde. La question que nous devons maintenant envisager est la suivante : a-t'on besoin, à ce niveau, de passer à l'ensemble des réels ? autrement dit, la continuité (ou la complétude), principale propriété topologique de **R** que ne possède pas $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}},\mathbf{n}\in\mathbf{N};\pi)$ est-elle en jeu à un moment ou à un autre ?

3. Un ensemble continu de nombres, l'environnement implicite des fonctions et de la géométrie plane.

Concernant les fonctions, le programme fixe deux objectifs :

* Familiariser les élèves avec la description **de phénomènes continus à l'aide de fonctions**.
* Acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles.

Le premier point, qui nous intéresse particulièrement ici, renvoie à l'objectif d'"une meilleure maîtrise de l'emploi de variables" déjà mentionné en introduction à la partie II "Problèmes numériques et algébriques". Il s'agit donc clairement de disposer d'un outil numérique capable de modéliser des variations continues, à commencer par celles de la variable x qui, du coup, doit nécessairement se déployer dans **R**.

L'idée de continuité est donc ici tout à fait explicite. Mais en fait, elle est sous-jacente à plusieurs autres endroits du programme, chaque fois qu'on décrit une droite ou une courbe comme un ensemble de points repérés par un ou plusieurs paramètres numériques. Prenons l'exemple de la caractérisation vectorielle d'une droite qui est une nouveauté en seconde. Dire qu'on obtient exactement la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ en prenant tous les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit égal au vecteur k. $\vec{u}$, k étant un nombre, suppose que l'ensemble décrit par k possède la propriété de continuité que l'on attribue spontanément aux lignes droites.
On retrouve ce même présupposé dans tout ce qui met en jeu repère et coordonnées, donc aussi bien en géométrie analytique (équations de droites) qu'en analyse (représentations graphiques de fonctions : voir particulièrement le travail portant sur la résolution graphique d'équations f(x) = m qui est un précurseur du théorème des valeurs intermédiaires). Notons qu'un certain nombre de travaux de ce domaine sont déjà abordés au collège où l'on admet, par exemple, que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

En résumé, il ressort de ces analyses que le programme de seconde à maintes reprises fait intervenir un ensemble de nombres muni de la propriété de continuité.
$\mathbf{Q}(\sqrt{n}, n \in \mathbf{N}; \pi)$ n'est donc pas suffisant. Pour passer à **R**, on va généralement s'appuyer sur l'extension à tous les points d'un axe de la "correspondance one to one" (Déclic, p.10 Hachette) point $\leftrightarrow$ abscisse : "Les réels sont les abscisses des points d'une droite munie d'un repère" (Pythagore, p. 317 Hatier). On parle alors usuellement de la droite des réels.

La question à propos de laquelle nous allons maintenant essayer d'apporter quelques éléments de réponses est la suivante :

L'identification, via la notion d'abscisse, de l'ensemble des nombres à une droite est-elle en début de seconde une idée qui va de soi ?

DEUXIEME PARTIE :

A PROPOS DES RELATIONS ENTRE NOMBRES, POINTS ET DROITE, QUELQUES ELEMENTS DE REFLEXION

Les analyses développées ci-dessous s'appuient sur les réponses apportées par des élèves de seconde à deux questionnaires qui seront présentés un peu plus loin. Comme il l'a déjà été dit, nous nous attacherons avant tout à essayer de comprendre, d'interpréter des réponses réellement rencontrées, choisies pour ce qu'elles nous apprennent, pour les phénomènes qu'elles révèlent. Le critère de sélection n'aura donc pas nécessairement été la fréquence d'apparition, certaines réponses relativement rares pouvant être tout à fait instructives. Nous ne nous étendrons donc pas sur les aspects statistiques, le but poursuivi est pour l'instant de soulever des questions, de rendre perceptible une complexité couramment sous-estimée.

I. Les questionnaires

1. Questionnaire A

Ce premier questionnaire a été conçu pour obtenir des informations sur les points suivants:

* qu'est-ce que les élèves reconnaissent comme des nombres ?
* la correspondance nombre $\leftrightarrow$ point d'un axe est-elle établi dans les deux sens?
* quelle conception les élèves ont-ils de la droite et des points de cette droite ?
* l'ensemble des nombres et l'ensemble des points d'une droite sont-ils denses ?

Il a été soumis à 58 élèves de seconde issus de 3 classes, à la fin du premier trimestre de l'année 95-96.

A1. Dans la liste suivante, barre ce qui n'est pas un nombre :

$0{,}05$; $\frac{1}{\pi+1}$; -4 ; 0 ; e ; 10^3 ; $2\sqrt{7}$; $\frac{3}{13}$; vingt-huit ; $\pi^2\sqrt{17}$;

$0{,}2323....$; x ; $|1-\sqrt{2}|$; $8{,}5\ 10^{-27}$; $\overrightarrow{AM}$; $\frac{5}{4}$

A2. Sur une droite on choisit un point O.

Y a-t'il un point M de cette droite tel que la distance OM, en centimètres, est exactement égale à :

	11,7	0,05	2,47821	10/3	$\sqrt{2}$	π
Réponse						

Explique tes réponses :

A3. Sur une droite, on choisit deux points A et B distants de 6 centimètres. On considère tous les points de la droite situés entre A et B et **différents de A et de B**.

Parmi eux, y en a-t'il un qui est plus près de B que tous les autres ? Attention, tu ne peux pas répondre B puisque l'on parle des points différents de B ! Explique ta réponse :

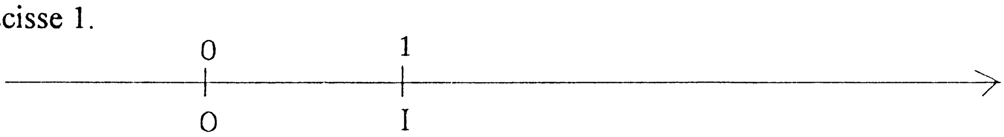
Si tu penses qu'il y en a un, on l'appelle C. Qu'y a-t'il entre C et B ?

A4. Es-tu d'accord avec la phrase suivante :

Un segment est formé d'une infinité de points alignés.

Explique ta réponse.

A5. Voici une droite graduée où on a placé le point O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1.



Coche les cases qui correspondent le mieux à ton opinion.

¤ si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point sur cette droite.

¤ il y a des nombres auxquels ne correspond aucun point de la droite.

Explique pourquoi et donne des exemples :

¤ si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre.

¤ il y a des points de la droite auxquels ne correspond aucun nombre.

Explique pourquoi et donne des exemples :

A6. Un point M se déplace sur une droite en partant d'un point A. Il parcourt une distance de 10 cm. Est-ce que pendant ce mouvement la distance AM (en cm) est passée par la valeur 7/3 ? Explique ta réponse :

A7. On considère tous les nombres réels compris **strictement** entre 0 et 8 (**ces nombres sont tous différents de 0 et de 8**). Y en a-t'il un parmi eux qui est plus grand que tous les autres ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?

Un plus petit que tous les autres ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?

2. Questionnaire B

Le second questionnaire a été conçu comme première partie d'une activité de début d'année sur les nombres réels. Il avait pour but de faire émerger un certain nombre de points délicats concernant les différents nombres, de façon à alimenter un débat de classe autour de ces questions. Cette séquence de deux heures expérimentée en Octobre doit faire l'objet de modifications. Beaucoup trop dense, elle n'a pas permis que les élèves soient vraiment moteur dans la phase de mise en commun et de débat ; la progression a été menée au forceps par l'enseignante ce qui ne correspond pas aux objectifs visés.
Par contre, les réponses apportées par les 34 élèves de la classe aux différentes questions sont une source très intéressante d'informations à propos de l'état des connaissances sur les nombres à l'entrée en seconde.

"A bas les idées toutes faites ! Exercice pour réfléchir"

Soit une demi-droite (D) d'origine O. On exprime la distance de deux points de (D) en cm.

1. Existe-t-il un point A de (D) tel que la distance de O à A soit exactement égale à 7,419 ?
Entourez votre choix : Oui Non Je ne sais pas. Justifiez votre choix.

2. Existe-t-il un point B de (D) tel que sept fois la distance de O à B soit exactement égale à 16 ?
Entourez votre choix : Oui Non Je ne sais pas. Justifiez votre choix.

3. Existe-t-il un point C de (D) tel que le carré de la distance de O à C soit exactement égal à 13?
Entourez votre choix : Oui Non Je ne sais pas. Justifiez votre choix.

4. Existe-t-il un point M de (D) tel que la distance de O à A soit exactement égale à π ?
Entourez votre choix : Oui Non Je ne sais pas. Justifiez votre choix.

II. Quels sont les objets identifiés comme des nombres ?

Nous nous appuierons ici avant tout sur la première question du questionnaire A. La liste des propositions est conçue de façon à faire figurer des représentants des différents ensembles de nombres connus à l'entrée en seconde en faisant varier les registres de représentation (décimale, fractionnaire, scientifique, langage courant). Y apparaissent également des objets qui ne devraient pas être considérés comme des nombres (un vecteur, e, x).

Dans cette partie II, nous analyserons les erreurs les plus fréquentes sans prendre en compte toutes les combinaisons possibles. Certaines réponses erronées recevront plusieurs interprétations. L'examen de l'ensemble des choix d'un élève donné pourrait permettre d'affiner le diagnostic, encore faudrait-il avancer avec prudence et ne pas trop faire dire à une seule tâche de reconnaissance.

Rationnels et racines carrées ont fait l'objet d'erreurs peu fréquentes dans cette question A1 : sur les 58 élèves de seconde interrogés, 3 seulement barrent $8{,}5\ 10^{-27}$, $2\sqrt{7}$ et $\frac{3}{13}$ (sur les 3, 2 rayent $\frac{5}{4}$), aucune autre réponse ne raye l'un de ces trois nombres. La situation est nettement plus problématique dans les questions mettant en jeu une correspondance géométrique (A2, B), nous reviendrons donc sur les racines lors de l'analyse des réponses portant sur la correspondance point-nombre (cf. III.3.[2]). A cette occasion, le problème posé par la définition de nombres au moyen de développements illimités sera abordée, ce qui permettra de traiter le cas de 0,2323..., rayé par 10 élèves dont 3 pour lesquels c'est le seul item rejeté à mauvais escient[3].

Concernant les fractions qui ont ceci de particulier par rapport aux radicaux qu'elles sont construites pour lever une difficulté liée à la structure algébrique (comme les relatifs), une analyse succincte des problèmes posés par leur nature particulière est donnée en annexe. Par contre, nous ne dirons rien dans ce texte des nombres qui n'ont donné lieu à aucune erreur (0,05 : nombre compris entre 0 et 1 ; -4 : entier relatif ; 0 ; 10^3 : entier écrit sous forme exponentielle) ; ceci ne signifie pas qu'il n'y a pas problème à leur sujet plus tôt dans la scolarité (voir bibliographie conseillée).

Pour une très large majorité d'élèves (environ 60%), les seuls items problématiques sont e, x, et vingt-huit. Nous commencerons donc par examiner leur cas.

---

[2] Chaque fois que nous renverrons à une partie du texte, celle-ci appartiendra à la deuxième partie, nous ne l'expliciterons donc plus, la numérotation donnée sera celle de la deuxième partie.

[3] On pourra également se reporter à l'article de M.Alphonse (1995) pour une étude des difficultés manifestées par des élèves de seconde dans des tâches combinant des calculs et des conversions entre les registres d'écriture fractionnaire, décimal et scientifique.

1. Vingt-huit : où il est question du symbolisme en mathématique et de la formulation de la question.

Sur les trois classes interrogées en Décembre 95 (effectif total : 58), 23 réponses rejettent "vingt-huit".

"vingt-huit n'est pas un nombre", essayer de comprendre cette réponse avec laquelle a priori je suis en désaccord m'a conduite à réfléchir à la formulation de la consigne, celle qui figure dans le questionnaire étant la forme initiale spontanée. S'il est en effet totalement clair que l'expression "vingt-huit" **désigne** bien un nombre, est-il légitime d'affirmer que vingt-huit **est** un nombre ? Il me semble en tout cas que l'usage courant le permet : on dira qu'Henry IV fut un roi de France, en comprenant que l'affirmation porte sur la personne réelle et non sur le nom propre qui la désigne. C'est une première raison pour conserver la formulation "Barre ce qui n'est pas un nombre".

Ceci étant, allons plus loin dans la réflexion. Un élève qui raye l'item "vingt-huit" (NB il n'y a pas de guillemets dans l'énoncé, ce qui renvoie au fait qu'on ne s'interroge pas sur le mot mais sur ce qu'il représente) se situe vraisemblablement sur le plan des signifiants, ce sont les signes écrits sur sa feuille qu'il identifie ou non comme nombre. On peut donc penser que pour lui, un nombre est un objet tout à fait matériel, un mot qui se distingue des autres par les symboles utilisés pour l'écrire. Il est clair qu'il y a là une méprise sur la nature des objets mathématiques qui, nombres ou autres, sont des abstractions et ne peuvent donc qu'être représentés, désignés, dans le monde matériel. Cependant, au fond de nous, il y a bien une différence entre "28" et "vingt-huit" ou "XXVIII". C'est qu'en réalité toutes les représentations symboliques n'entretiennent pas les mêmes rapports avec les abstractions qu'elles désignent. Si Magritte peut dire "Ceci n'est pas une pipe" du dessin d'une pipe, c'est qu'avec cette représentation, rien n'est **faisable** de ce qui définit une pipe, si "vingt-huit" n'est pas un nombre, c'est qu'on ne peut guère **faire** avec ce signe de ce qui met en jeu un nombre. Au contraire, avec "28", il est possible de **calculer** c'est-à-dire par une suite d'**actions matérielles**, limitant au maximum le recours à l'abstraction, obtenir le résultat d'opérations abstraites.

Ceci dépasse largement le domaine numérique ; une partie fondamentale du travail mathématique consiste ainsi à élaborer des systèmes de représentations symboliques capables de condenser matériellement les propriétés, le fonctionnement des abstractions qui forment le réel mathématique. **Le symbole s'identifie partiellement à l'objet qu'il représente** et contribue de manière décisive à l'exploration de ses caractéristiques, à son développement. Ainsi le travail mathématique peut se situer pour une part dans le monde matériel. J'appelle, pour ma part, **représentations fiduciaires** de telles représentations, par analogie avec la monnaie papier, représentation de la valeur produite, qui s'y substitue totalement dans la vie courante, tant qu'il n'y a pas crise, crise objective (non correspondance entre l'argent en circulation et les biens) ou subjective (perte de confiance du public). Toute représentation n'est pas fiduciaire, une représentation fiduciaire dans un domaine ou à une époque peut ne pas l'être dans un autre (par ex : "vingt-huit" n'est pas fiduciaire, "XXVIII" ne l'est pas aujourd'hui mais a pu l'être ; un dessin n'est pas fiduciaire en géométrie en ce sens qu'on ne peut rien en faire qui concerne les objets abstraits de la géométrie, on ne peut rien en déduire sans preuve supplémentaire, mais il peut être fiduciaire en dessin technique).

Cette notion épistémologique me semble également intéressante du point de vue didactique. La dimension subjective évoquée par le mot "fiduciaire" (vient de fiducia : confiance) rappelle que, si le rapport particulier du symbole à l'objet désigné est le fruit d'une construction sociale, il sera aussi l'objet d'une reconstruction individuelle pour chaque apprenant, où le développement des capacités opératoires jouera un rôle essentiel.

De ces considérations découlent une deuxième incitation à conserver la consigne sous sa forme initiale, en acceptant le risque d'une certaine indécision sur le sort de vingt-huit : en ce qui me concerne, je conçois qu'on puisse faire une différence entre "0,05" et "vingt-huit", et considérer que, si les deux **désignent** des nombres, seul le premier **est** un nombre..

2. x est-il un nombre ?

14 élèves sur 58 conservent x. e est considéré comme un nombre 7 fois et dans chaque cas, il en est de même pour x. Ceci s'interprète assez facilement. Le nombre e n'est pas défini en seconde, il n'apparaît pas sur les touches de la calculatrice. Par contre, la lettre e peut quelquefois être utilisée pour désigner une inconnue dans un système d'équations. On peut donc penser que certains élèves traitent e et x de la même façon.

Ceci met en lumière un fait que nos habitudes de matheux nous ont (peut-être) rendu invisible, insensible : le rôle joué par les lettres dans le symbolisme mathématique varie d'une lettre à l'autre, selon un code passablement arbitraire qui est le résultat d'une élaboration historique et doit être appris et intériorisé par chacun. Ainsi "e" est, pour moi comme pour vous certainement, la représentation fiduciaire d'un nombre bien particulier, parfaitement déterminé ; cela me fera affirmer sans hésitation : e est un nombre, exactement de la même façon que 28 en est un. L'usage que nous faisons de la lettre x est bien différent : x symbolise le concept de nombre réel universel, possédant toutes les propriétés communes à tous les réels (au moins en début de seconde, les propriétés liées au classement et aux opérations algébriques) et aucune des particularités de l'un ou de l'autre. Dans la mesure où le symbolisme littéral, par sa syntaxe, représente de manière fiduciaire le calcul algébrique sur les nombres indéterminés, je dirai finalement que **x**, non seulement désigne, mais **EST le nombre universel**. Et c'est bien parce qu'il est cet objet générique-là qu'il peut à la demande **représenter** (presqu'au sens diplomatique du terme : se faire l'ambassadeur de) n'importe quelle quantité inconnue, arbitraire ou variable.

Revenons, pour finir sur ce point, aux élèves qui ne rayent pas x c'est-à-dire qui considèrent que "x est un nombre". On peut penser que leur réponse réfère notamment aux situations de modélisation algébrique conduisant à des équations dans lesquelles x est utilisé pour désigner un nombre bien déterminé mais encore inconnu : "*Soit x le nombre d'années.... Donc x = 5.*". Cette position me paraît être l'indice d'une conception du calcul littéral encore très peu émancipée du champ numérique.

Pour ce qui concerne les nombres, notons la confusion que peut induire (ou traduire) la similarité des deux affirmations "e est un nombre" et "x est un nombre". Ainsi, pour e ou π comme pour x, utiliser une lettre pour désigner un nombre pourrait signifier que celui-ci est inconnu, voire pas bien déterminé : "*π est, pour l'instant, un nombre indéterminé ; on ne connaît pas sa véritable valeur*" écrit une élève en réponse à la question A2. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la partie III.

3. { $\frac{1}{\pi+1}$; $\pi^2\sqrt{17}$; $|1-\sqrt{2}|$} : la stabilité de l'ensemble des nombres par les opérations ne va pas de soi.

Nous nous intéresserons maintenant aux items qui sont (désignent) bien des nombres. Parmi ceux-ci, $\frac{1}{\pi+1}$, $\pi^2\sqrt{17}$, $|1-\sqrt{2}|$ et 0,2323... sont les plus souvent rayés. Nous reviendrons plus loin sur 0,2323..., réfléchissant ici au cas des trois premiers. Chacun d'entre eux est barré dans 13 questionnaires sur 58. On retrouve ici les 3 élèves qui rejettent 8,5 10^{-27}, $2\sqrt{7}$ et 3/13 mais, en dehors de ces trois cas, les élèves concernés sont différents d'un nombre à l'autre. S'il y a quasiment cohérence pour $\frac{1}{\pi+1}$ et $\pi^2\sqrt{17}$, on peut observer une certaine diversité dans les réponses concernant $|1-\sqrt{2}|$ d'une part et les deux expressions en π d'autre part avec des comportements sensiblement différents suivant la classe. Nous ne nous étendrons pas sur ce point dans la mesure où nous ne possédons pas d'informations suffisamment précises pour essayer d'avancer des interprétations.

On peut noter que parmi les élèves concernés, 10 reconnaissent $2\sqrt{7}$ comme nombre mais rejettent $|1-\sqrt{2}|$. Pour ce qui concerne $\frac{1}{\pi+1}$ et $\pi^2\sqrt{17}$, ce questionnaire ne permet pas de connaître la position des élèves par rapport au statut de π mais le dépouillement d'une version antérieure dans laquelle π figurait explicitement au sein de la liste des nombres avait montré que certaines réponses pouvaient conserver π et rayer l'une ou l'autre des deux autres expressions, plus particulièrement $\frac{1}{\pi+1}$. Il est donc possible de rencontrer des élèves qui reconnaissent comme nombres les éléments d'une certaine liste sans pour autant étendre le même statut aux objets obtenus par opérations. C'est ce que nous allons essayer d'analyser ici, le problème du statut de π et des racines carrées étant abordé dans la partie suivante.

Une première interprétation possible est la suivante : **les opérations ne sont pas étendues aux irrationnels** ou, avec plus de précautions, certaines opérations ne sont pas définies pour certains des nombres reconnus comme tels. Essayons de confronter une telle hypothèse avec les raisons que peut avoir un élève de considérer une racine carrée et π comme des nombres.

*** π, $\sqrt{2}$ sont des décimaux** , $\pi = 3{,}14$, une racine est donnée par la calculatrice.

Ce point de vue est tout à fait vraisemblable, du moins en début de seconde ainsi que le prouve un certain nombre de réponses au questionnaire B. Il paraît peu compatible avec l'interprétation avancée de non extension des opérations, sauf peut-être pour $\frac{1}{\pi+1}$, cas sur lequel nous reviendrons.

*** π, $\sqrt{2}$ sont des nombres par contrat,** parce que l'enseignant l'a dit.

Cette façon de voir les choses, choquante à première vue pour qui est attaché à la prise de sens dans l'enseignement, n'est certainement pas marginale ; elle est peut-être parfois nécessaire, l'enfant devant accepter de ne pas tout comprendre sur l'instant. Cependant, une telle situation a clairement ses limites en ce qu'elle ne donne aucune autonomie à l'élève. Ainsi, on ne voit pas sur quoi pourrait se fonder le sens des opérations auxquelles doit donc s'étendre l'effet de contrat ; la reconnaissance va alors dépendre exclusivement des exercices usuellement pratiqués : pour cette raison, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ pourrait poser moins de problème que $\frac{1}{\pi+1}$ ou même $\pi+1$.

*** π , $\sqrt{2}$ sont des nombres parce que ce sont des mesures de longueur**.

Il s'agit là d'une conception qui pourrait être construite à l'issue du collège puisque chacun de ces nombres est au fond introduit à l'occasion d'un calcul de longueur (l'examen des réponses au questionnaire B et à la question A2 nous amènera à pondérer la vraisemblance d'une telle position cf III.3.). Le problème est que **les opérations ne sont pas nécessairement reliées avec ce point de vue "mesure des grandeurs"**.

Le cas des radicaux est particulièrement éclairant. Dans les deux manuels examinés (Pythagore-Hatier, Magnard), la somme ne fait l'objet d'aucune définition, elle est considérée comme allant de soi. Le produit est étendu en liaison avec la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b}$ mise en évidence sur des cas particuliers décimaux ; on ne sait d'ailleurs pas très bien si le produit de deux racines est défini par cette formule ou si, comme la somme, il a été implicitement étendu sans qu'on sache comment. Quoiqu'il en soit, le lien de l'addition et de la multiplication avec des calculs de périmètre et d'aire n'est pas développé dans la phase d'introduction des opérations, phase de définition qui ne s'annonce d'ailleurs guère comme telle. Des exercices, fréquents au BEPC, reviennent sur l'emploi des racines dans des exercices à environnement géométrique ; il n'est pas certain que cela suffise à donner un sens à des opérations introduites plutôt subrepticement.

Il serait totalement illégitime de prétendre que l'enseignement des racines carrées en troisième adopte nécessairement la stratégie présentée plus haut. Nous savons que d'autres voies sont empruntées : voir par exemple, les propositions d'activités du Suivi Scientifique Troisième de la commission InterIrem. Mais, compte tenu de ce que présentent certains manuels, on peut penser que les opérations font rarement l'objet d'un travail introductif explicite mettant en jeu le cadre géométrique des mesures.

*** π, $\sqrt{2}$ sont des nombres parce qu'ils ont des développements décimaux illimités.**

Même si cette conception ne peut qu'être très confuse (cf III.3.), on ne peut pas l'exclure dans la mesure où elle établit un lien entre les nouveaux nombres et les nombres familiers que sont les décimaux et donc avec l'écriture au moyen de chiffres qui peut être un attribut caractéristique du statut de nombre. On peut facilement imaginer la difficulté que représente l'extension des opérations aux développements infinis. En fait, il n'est pas prévu au collège d'opérer sur des approximations, ceci relève du programme de seconde où le chapitre sur les approximations est certainement un moment essentiel de travail sur la notion de nombre et sur le prolongement des opérations.

En résumé, l'hypothèse d'une non extension de certaines opérations aux "nouveaux nombres" paraît crédible sauf dans le cas où tous les nombres sont assimilés à des décimaux.

Nous avancerons également une deuxième interprétation qui semble d'autant plus compatible avec la conception assez primitive "nombre = décimal" qu'elle est elle-même très proche d'une démarche arithmétique : **une expression comportant des signes d'opérations est lue comme une procédure à effectuer[4], seul son résultat serait un nombre et, par définition, un résultat ne comporte aucun signe d'opération**. En fait, le signe d'opération représente encore pour certains élèves exclusivement la procédure qu'ils doivent engager pour trouver le résultat. Une expression comme 2,1+3,5 n'est pas lue comme le nombre somme mais comme l'injonction d'effectuer l'addition, une injonction ressentie comme péremptoire.
Ainsi, pourrait-on comprendre que $\pi^2\sqrt{17}$ par exemple soit rejeté par des élèves qui pensent que π et $\sqrt{17}$ sont des décimaux. De même, $|1-\sqrt{2}|$ peut être problématique du fait qu'on peut encore prolonger le calcul et simplifier en $\sqrt{2}-1$.

[4] Ce genre de conception peut se retrouver en algèbre ou même en géométrie à propos de la notion de transformation et susciter des difficultés.

On peut se demander comment de tels élèves pourraient donner sens aux opérations entre irrationnels dans la mesure où, précisément, le résultat ne leur est pas accessible par des procédures. Autrement dit, il est fort possible que cette seconde interprétation coexiste chez certains avec la précédente : les opérations entre irrationnels ne sont pas définies parce qu'on ne peut pas donner de procédure pour trouver le résultat.

Proposons pour finir deux interprétations spécifiques au cas de $\frac{1}{\pi+1}$, envisageables y compris si π est connu comme décimal:

* la division "ne se termine pas", donc on est face à un processus infini qui ne peut pas définir un nombre (voir III.3.) ;

* le trait de fraction ne renvoie pas à un nombre, le rapprochement avec une division n'est pas établi, ceci pouvant être réservé aux quotients d'irrationnels (faute de travail spécifique) ou vrai également pour des quotients d'entiers (voir annexe consacrée au fractions).

En résumé, pour un nombre non négligeable d'élèves, accéder à l'ensemble $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}\ ;\ \pi)$ ne va pas de soi, même dans le cas où les rationnels, toutes les racines et π séparément sont reconnus comme nombres.

III. A propos de la correspondance entre les nombres et les points d'un axe gradué.

Nous pouvons nous appuyer dans cette partie sur les 58 réponses au questionnaire A (3 classes) et sur 34 réponses pour le questionnaire B (une des 3 classes précédentes).

Dans le questionnaire A, les questions concernées sont les suivantes :

A2 Sur une droite on choisit un point O. Y a-t'il un point M de cette droite tel que la distance OM, en centimètres, est exactement égale à :

$$11{,}7 \quad 0{,}05 \quad 2{,}47821 \quad \frac{10}{3} \quad \sqrt{2} \quad \pi$$

A5 Voici une droite graduée où on a placé le point O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1.
Coche les cases qui correspondent le mieux à ton opinion.
¤ si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point sur cette droite.
¤ il y a des nombres auxquels ne correspond aucun point de la droite.
Explique pourquoi et donne des exemples.
¤ si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre.
¤. il y a des points de la droite auxquels ne correspond aucun nombre.
Explique pourquoi et donne des exemples.

A6 Un point M se déplace sur une droite en partant d'un point A. Il parcourt une distance de 10 cm. Est-ce que pendant ce mouvement la distance AM (en cm) est passée par la valeur 7/3 ?

Avant d'entrer dans le détail de l'analyse, voici quelques résultats quantitatifs concernant A2 (effectif 58) :

Nombre de réponses NON : pour 11,7 $\rightarrow$ 1 ; pour 0,05 $\rightarrow$ 4 ;
pour 2,47821 $\rightarrow$ 14 ;
pour $\frac{10}{3} \rightarrow$ 21 ; pour $\sqrt{2} \rightarrow$ 26 ; pour $\pi \rightarrow$ 29

7 élèves répondent NON pour les 4 derniers nombres ; 12 OUI aux trois premiers et NON aux autres ; 26 OUI dans tous les cas.
Les autres correspondent souvent à des réponses intermédiaires entre les deux derniers types.

1. Une interprétation très pragmatique des termes de la question.

"Sur une droite on choisit un point O. Y a-t'il un point M de cette droite tel que la distance OM, en centimètres, est exactement égal à... ?"

La question que nous voulions poser était celle de **l'existence** du point M, les termes ont donc été soigneusement choisis pour éliminer toute allusion à une **construction** ; ainsi, ont été évités les mots pouvant être lus par l'élève comme une incitation à l'action : par exemple, "Peut-on <u>trouver</u> M tel que OM <u>mesure</u>...". La seule concession à un environnement pratique est le choix d'une unité explicite égale au centimètre, on ne peut pas nier que ce seul fait a certainement joué pour certains le rôle d'un appel aux instruments familiers. Cette référence a été cependant maintenue dans le souci de ne pas tomber dans une généralité trop abstraite. On verra un peu plus loin qu'elle permet de différencier des positions qui, avec une unité de mesure arbitraire, auraient pu être confondues (cf. III.2.). Le questionnaire B a adopté les mêmes formulations.

Toutes ces précautions étant prises, nous avons pu constater qu'un nombre tout à fait important d'élèves d'une part reformulait le problème en terme de construction et d'autre part quittait le plan théorique pour se placer dans le domaine de la réalisation matérielle.

*** Problème de longueur de droite.**

On ne s'étendra pas ici sur les quelques uns qui, pour le questionnaire B, refusent de placer des points nommés A, B, C si l'on n'a pas OA>OB>OC. Par contre, l'évidence de la correspondance nombre-point prend déjà un premier coup à la lecture des affirmations suivantes :

Question B1 : (OA mesure 7,419 cm)

*" Oui ; **ne sachant pas la longueur de la demi-droite**, il est possible qu'un point A soit à la distance 7,419 cm de O"*

Ceci renvoie à certaines justifications apportées à l'affirmation "Il existe des nombres auxquels ne correspond aucun point de la droite" lors de la question A5 (rappel : cette question très générale est accompagnée d'un dessin avec cet énoncé: "Voici une droite graduée où on a placé le point O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1"; remarque: OI mesure environ 3cm)

*"Le chiffre 5 ne se trouve pas sur la droite, **à moins de rallonger celle-ci.**"*

*"Il y a des nombres qui ne correspondent pas à la droite (ex : 1.000.000) car **la droite est trop petite** mais **si** la droite **irait** jusqu'à l'infini, alors on pourrait mettre tous les points."*

Ceci met en évidence un premier quiproquo : le professeur parle de la droite mathématique, l'élève croit qu'on lui parle du dessin forcément limité qu'il a sur sa feuille. Cette position est apparue très rarement, le moins que l'on puisse dire est que nous ne l'attendions pas à ce niveau. Elle attire l'attention sur le nombre élevé de justifications du type "la réponse est oui parce que la droite est infinie". Peut-être les élèves insistent-ils là sur un point qui a été problématique pour eux et qui focalise leur attention : l'infini des nombres (ou des entiers?) n'empêche pas la correspondance avec les points **parce que la droite est infinie**.
Le problème est que ce même argument sert à justifier des réponses OUI pour 10/3, $\sqrt{2}$ ou π

" Une droite est infinie donc tout point M de cette droite pourra être placé n'importe où sur la droite."

L'élève citée ne pense pas qu'un segment est formé d'une infinité de points alignés *"car un segment est délimité."* ; elle considère que le point le plus près d'un point donné est situé à 0,01 cm de ce point et que 7,9 est le nombre le plus proche de 8 qui lui est inférieur.
On est assez perplexe devant un tel cas qui introduit des doutes sur le niveau d'élaboration atteint par les élèves répondant positivement pour les six nombres de la question A2. Il n'est pas impossible que quelques uns, ayant (péniblement?) surmonté l'obstacle de la finitude du dessin (non franchi par certains qui discutent sur la longueur des droites), ne perçoivent pas encore le problème posé par les développements décimaux illimités.

*** Problème de précision des instruments de mesure.**

7 élèves n'ont répondu positivement que pour 11,7 et éventuellement 0,05 ; un élève résume parfaitement l'angle sous lequel ils ont envisagé le problème :

"Pour 11,7, je pense Oui car je peux mesurer ce chiffre en centimètres et tous les autres Non car je pense qu'on ne peut pas mesurer exactement leur distance en cm."

On voit ici clairement comment, malgré toutes les précautions prises, la question a été transformée ; on est passé de l'existence théorique à la construction effective sur une feuille de dessin : est-ce qu'on peut reporter exactement tel ou tel nombre de centimètres de façon à tracer le point M cherché ? Et dans ce cas, on ne peut dépasser une décimale après la virgule puisque, comme on peut le lire dans une copie, " *un décimètre ne contient que des centimètres et des millimètres, et c'est tout"*. Pour 0,05, cela dépend du matériel !!

On est donc là en présence d'une conception très pragmatique, très réaliste de la notion de mesure sur laquelle, en principe, s'appuie la correspondance nombre-point. **Seuls certains décimaux ont un point associé, le nombre de chiffres après la virgule est très limité**. Cela concerne donc des ensembles discrets, on n'est pas très loin de **Z**. Notons que ces 7 élèves, sur les 14 qui ont répondu négativement pour 2,47821, paraissent attachés à une construction effective mais ne pensent pas aux constructions à la règle et au compas des fractions et des racines carrées qu'ils devraient avoir vues au collège. De meilleurs souvenirs ont peut-être inspiré les 7 élèves restants (5 répondent Oui pour 10/3, 3 pour $\sqrt{2}$).

*** Une conception "pince à linge" des points de la droite.**

Que des élèves aient converti une question d'existence en une tâche de construction ne doit pas nous étonner. Envisager que la preuve de l'existence d'une solution puisse être administrée sans résolution explicite du problème posé demande certainement tout un apprentissage. Et plus encore sans doute, définir et utiliser un objet nouveau à partir d'un théorème d'existence, alors qu'aucun processus de construction n'est accessible : vieux débat constamment réactualisé dans l'histoire des mathématiques. La réflexion sur les racines carrées nous y ramènera.

Nous voulons ici proposer une interprétation plus spécifique du problème posé, liée à la conception que certains élèves semblent avoir de la notion de points d'une droite : **les points ne sont pas des éléments de la droite, ce sont des objets éventuellement ajoutés sur la droite, selon le contexte**. La droite et ses points : un fil à linge et ses épingles. Cette proposition, qui peut étonner, s'appuient sur certaines justifications rencontrées à l'occasion de diverses questions :

Question A3 (résumée) : "....On considère tous les points de la droite situés entre A et B et différents de A et B. Y en a-t'il un plus près de B que tous les autres ?"

Réponse : "Non, car tous les points peuvent être confondus"

Question : "Es-tu d'accord avec la phrase suivante : Une droite est formée d'une infinité de points alignés ?"

Réponse (même élève que ci-dessus) : "Pas forcément vrai, ***il peut y avoir un nombre de points défini****, mais la droite est illimitée et alors cela peut être vrai."*

Question : "Imagine que tu possèdes un compas dont la pointe sèche est extrêmement fine, plus fine que tout ce que l'on peut imaginer. Tu poses cette pointe très soigneusement sur une droite de façon à ne pas pointer en dehors de la droite (on imagine que tu es capable de faire cela). Est-ce que tu piques forcément sur un point de la droite ?"

Réponse (élève différent) : "Pas forcément, ***cela dépend où sont placés les points sur la droite****, et oui,* ***si*** *la droite a des points partout."*

Avec une telle conception qui prend au mot la rituelle formule d'introduction des exercices de géométrie "Soit une droite (D) et soit un point O **sur** cette droite....", la question de l'existence d'un point n'a pas de sens en soi, tout dépend de la figure. **Un point ne peut exister que si on l'a construit.**

2. Représenter tous les décimaux : déjà une vue de l'esprit.

Sur les 58 élèves interrogés, 7 relèvent du groupe des pragmatiques dont nous venons de parler, 12 donnent une réponse positive pour les trois décimaux et négative pour les autres. Ils ne diffèrent donc des précédents que par leur position sur 2,47821. Cependant cela nous semble être l'indice d'un changement tout à fait net de point de vue : la construction du point M tel que OM mesure 2,74821 cm ne peut en aucun cas être réalisée, il faut **concevoir mentalement** des agrandissements donnant successivement accès aux différentes décimales ainsi que le font couramment les manuels de l'école primaire pour présenter les fractions décimales. On n'est plus sur le plan de l'action effective sur un dessin matériel, il y a intériorisation de l'action et nécessairement une certaine abstraction de la droite et de la correspondance nombre-point.

Il est clair que cette position est très liée au système métrique, à l'existence sociale des sous-unités du mètre. Ainsi, dans une première mouture du questionnaire A, il était demandé aux élèves si prendre 1 carreau comme unité de mesure au lieu d'1 cm dans la question A2 aurait changé leurs réponses. Sur 41 élèves ayant apporté une réponse positive pour OM = 2,47821 cm, 20 modifiaient leur choix avec le changement d'unité.

Néanmoins, travailler à la possibilité de représenter sur un axe gradué en cm tous les décimaux nous paraît une bonne chose, du moins pour faire progresser les élèves qui en sont encore à identifier mesure et double-décimètre. On en vient ainsi à **intérioriser l'idée de construction** ("je peux le faire dans mon esprit") et donc à **abstraire les objets géométriques**. De plus, l'ensemble des décimaux est déjà un très bon point d'appui pour faire comprendre certaines notions problématiques comme celle d'intervalle ouvert par exemple.

3. $\frac{10}{3}$, $\sqrt{2}$, π : des nombres indéfinis

Abordons maintenant le cas des trois nombres non décimaux présents dans la question A2.
Nous avons vu en début de cette partie III. que 14 élèves sur 58 ont répondu négativement pour 10/3, 21 pour $\sqrt{2}$ et 29 pour π. Rappelons également que 0,2323... s'est vu dénié le statut de nombre par 10 élèves, ce qui en fait l'item le plus problématique parmi ceux qui ne comportent aucun signe d'opération.

En résumé, dans une proportion non négligeable, les élèves interrogés considèrent que, pour l'un ou l'autre des trois nombres non décimaux proposés, il n'existe pas de point associé sur un axe gradué en cm, et ce, en dépit du fait que les nombres en question appartiennent à des catégories dont les programmes lient l'introduction à la nécessité de mesurer certaines longueurs.

*** L'interprétation géométrique n'est pas mobilisée pour figurer fractions et racines.**

Il apparaît à la lecture des arguments fournis pour justifier les réponses en A2 que les élèves répondent non à l'un ou l'autre des non-décimaux à partir d'une démarche de construction par mesure (éventuellement intériorisée). Donc, pour environ un quart de l'effectif total, la construction à la règle et au compas possible pour $\frac{10}{3}$ et $\sqrt{2}$ n'est pas évoquée par le problème posé. Bien sûr, le fait d'avoir d'abord envisagé la question pour des décimaux peut influencer le comportement pour les non-décimaux et rendre plus difficile l'utilisation de connaissances géométriques ; néanmoins, il ne semble pas excessif de penser que l'association de ces nombres avec la mesure de segments apparus dans des figures géométriques est fragile, du moins quand il s'agit de mobiliser le cadre géométrique pour résoudre un problème concernant le numérique, y compris s'il est question de représentation sur un axe.

Ceci n'est guère étonnant : les fractions sont supposées construites depuis longtemps, on ne revient pas sur la question de leur existence à l'occasion du théorème de Thalès; l'ambiguïté du programme de quatrième concernant l'introduction de la racine carrée (cf. Première partie I.2.3.) conduit à envisager que certains élèves n'auront été mis en situation de réfléchir sur les conséquences au plan numérique du théorème de Pythagore ni en quatrième ni en troisième, la question étant restée perdue dans le no man's land qui sépare les deux classes.

A supposer même que la naissance de nouveaux nombres soit mise en lumière, notamment dans une activité introductrice telle qu'en proposent les manuels, il suffit de regarder les exercices de fin de chapitres pour constater qu'**on utilise peu le cadre géométrique pour aborder <u>explicitement</u> le sens des nombres,** l'attention (des enseignants et surtout des élèves) est concentrée sur **l'emploi des nombres au service de la géométrie**, en particulier, calculs de longueurs à partir des théorèmes de Thalès et Pythagore.

On peut penser que ce style d'exercices, récurrents au BEPC, aurait été mieux réussi par les élèves interrogés. Cependant, les réponses au questionnaire B (soumis à une Seconde en Octobre) montrent que l'usage fréquent de racines carrées dans le cadre d'un calcul basé sur le théorème de Pythagore ne remet pas pas nécessairement en cause certaines idées en place dans le cadre numérique. En effet, ainsi que nous l'avons déjà signalé, 10 élèves sur un effectif de 32 disent qu'il n'existe pas de point C tel que le carré de OC soit égal à 13 parce qu'"*aucun carré ne peut être égal à 13*[5]". Bien qu'ayant obligatoirement résolu maints problèmes se concluant sur un enchaînement du type "$OC^2=13$ donc $OC = \sqrt{13}$", ces 10 élèves n'ont pas perçu ces conclusions comme l'affirmation d'une existence dans le domaine numérique : il existe bien un nombre OC dont le carré vaut 13. On peut d'ailleurs noter qu'aucun d'entre eux n'écrit l'équation $OC^2 = 13$ qui aurait peut-être déclenché l'apparition de la racine. Ceci pourrait signifier que l'emploi des radicaux pour exprimer la mesure de segments serait pour certains très lié à un contexte spécifique (comprenant en particulier des triangles rectangles), **cet emploi <u>ritualisé</u> dans le champ géométrique ne provoquant pas de remise en question dans le cadre numérique**.

Rappelons, pour finir sur le cas de $\sqrt{13}$, que le programme de troisième comprend, dans le chapitre "Racines carrées" une rubrique "Equations $x^2 = a$" ; les exercices s'y rattachant n'auront donc pas eu plus d'efficacité sur nos 10 élèves. Sans

[5]cf. Bronner pour une étude systématique de comportements d'élèves confrontés à la fois à l'existence de diverses racines, à la résolution d'équations $x^2 = a$ et au problème du carré d'aire 13. On y trouvera confirmation de la prégnance de la conception "carrés parfaits". Cf également Assude 1989.

doute peut-on voir là une manifestation d'un traitement mécanique, formel, sans compréhension du problème posé (et résolu).

*** Le développement décimal illimité, un obstacle à la représentation géométrique.**

Revenons à la question A2. Puisqu'ils ne pensent pas à une construction géométrique, les élèves qui lient leur réponse à la possibilité de placer le point correspondant à un nombre donné se rabattent sur la mesure ; tout se joue donc autour de l'expression décimale du nombre en question :

"On ne peut pas savoir leur valeur exacte donc on ne peut pas les placer."
"Ce sont des valeurs qu'on n'a pas déterminées précisément." "Ils ne tombent pas juste."
"$\frac{10}{3}$ et π ne représentent pas une valeur exacte (le nombre de chiffres est illimité)."
"Ces nombres sont des valeurs approchées." "Ce ne sont pas des nombres précis."
"Ce n'est pas un nombre défini." "Ce sont des nombres indéfinis."
"Quant à π on ne connaît pas sa véritable valeur, c'est pour l'instant un nombre indéterminé. Mais le connaissant on pourrait trouver M tel que OM = π."

On voit clairement que ces élèves n'ont à l'esprit, pour résoudre cette question, aucune façon de définir les nombres concernés indépendante du développement décimal (définir = énoncer une propriété qui caractérise, détermine le nombre). Puisque celui-ci est infini, il n'est pas possible de construire, même mentalement le point correspondant de manière exacte. En fait, il faudrait concevoir une suite de points correspondant à des valeurs décimales successives et passer à la limite ; il est clair qu'il y a là un saut que des élèves de seconde peuvent difficilement franchir.

*** Difficulté d'une construction par passage à la limite.**

Il apparaît d'ailleurs dans les arguments présentés plus haut que le même problème existe dans le champ numérique à propos des nombres non-décimaux eux-mêmes. Souvenons-nous que très peu d'élèves ont dans la question A1 dénié le statut de nombres aux rationnels et à $2\sqrt{7}$. Cependant, ces nombres sont d'une nature particulière ; ils sont ressentis comme mal définis, indéterminés. Une telle difficulté n'a rien d'étonnant : il s'agit d'**accepter de définir un objet à partir d'un processus infini,** ce qui est bien plus délicat que de comprendre la notion de convergence vers un objet déjà existant. On constate que cette difficulté se pose même dans le cas d'une fraction comme $\frac{10}{3}$, au développement décimal parfaitement déterminé grâce à la division, ainsi que dans le cas d'un développement périodique (cas de 0,2323... dans A1). A plus forte raison peut-on s'attendre à rencontrer cet obstacle dans le cas de π pour lesquels les élèves ignorent en général comment on peut calculer algorithmiquement les décimales successives.

Pour les racines carrées, cet obstacle du passage à la limite peut conduire à l'hypothèse suivante : une recherche d'encadrements de plus en plus précis par essais-erreurs d'une solution de l'équation $x^2 = 13$ n'est pas suffisante pour convaincre qu'est ainsi défini et donc qu'existe un nombre dont le carré vaut 13, y compris si le caractère algorithmique du procédé est mis en évidence (cf. le cas de $\frac{10}{3}$ et de 0,2323...). Il me semble que devrait être effectué en premier lieu **un travail visant à donner, aux yeux des élèves, une existence préalable au nombre dont on obtient un développement décimal.** Dans le cas des racines, deux points d'appui paraissent disponibles pour fonder l'existence : **le cadre géométrique** avec Pythagore, à condition d'y avoir recours avec **une finalité numérique explicite et insistante** ; **l'intuition de l'idée de continuité lorsqu'il est question de variations de grandeurs**, dans le cas présent de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté. Ce second aspect peut être étayée par une représentation graphique, le théorème des valeurs intermédiaires ayant une version graphique "naturelle" appuyée sur une vision synthétique des courbes (cf. IV.).

Convoquer l'ensemble de ces points de vue pour jouer à la fois du numérique et du géométrique, de l'existence et de la construction, du fini et de l'infini, me semble nécessaire aux vues des difficultés que nous avons relevées précédemment

Pourquoi proposer de recourir à la variation de l'aire ? Cette suggestion s'appuie sur l'histoire du concept de fonction qui s'est développé à partir d'une double source : étude des mouvements et des variations, étude des courbes. Mais elle est également inspirée par les réponses apportées à la question A6[6]:

*** une idée intuitive de la continuité dans le mouvement d'un point sur une droite.**

14 élèves ont répondu non pour 10/3 à la question A2. Il n'en reste qu'un pour répondre non à la question A6 (car $\frac{7}{3}$ est irrationnel), 8 ne répondent pas (il s'agit parfois d'une mauvaise compréhension de la question : ils pensent que l'on se demande si le point M

[6] A6 Un point M se déplace sur une droite en partant d'un point A. Il parcourt une distance de 10 cm. Est-ce que pendant ce mouvement la distance AM (en cm) est passée par la valeur 7/3 ?

passe ou non par l'abscisse $\frac{7}{3}$ tout dépend alors de la position de A), enfin 49 répondent positivement avec des arguments très éclairants :

"Il y a bien un moment où il va y passer, il a fait toutes les valeurs entre 0 et 10."
"Pour passer de 0 à 10, on passe forcément par 2,333... ."
"Oui, même si la valeur de $\frac{7}{3}$ n'est pas représentable exactement, on sait que $0 < \frac{7}{3} < 10$."
"Oui malgré que la fraction $\frac{7}{3}$ est égale à 2,333...., le point est bien passé par cette valeur."

Ces réponses amènent à ne pas trop désespérer des résultats de la question A2. Elles font apparaître un point d'appui possible pour justifier l'existence de nombres nouveaux comme pour travailler la correspondance entre l'ensemble des nombres et la droite graduée. Ce point de vue "théorème des valeurs intermédiaires" présente deux avantages par rapport à la construction à la règle et au compas : d'une part, il n'est pas limité à une catégorie particulière de nombres ; d'autre part, il fait travailler une propriété topologique étroitement liée à la complétude de **R**, on quitte vraiment l'algèbre.

4. La correspondance nombres-points, une idée rien moins que limpide !!

Reprenons les principaux points mis en évidence jusqu'à maintenant.

Nous voulions tester sur des nombres "de base" la disponibilité de l'idée suivante : tout nombre réel est la mesure en cm d'un segment [O,M]. Nous avons constaté que 26 élèves sur 58 considèrent cet énoncé comme vrai pour tous les nombres proposés mais aussi que, pour environ un quart des élèves interrogés,

* cet énoncé est considéré comme faux pour les non-décimaux proposés,
* les réponses sont justifiées par l'impossibilité de construire le point M, existence et construction apparaissant comme inséparables,
* les constructions géométriques de fractions et de racines carrées liées aux théorèmes de Thalès et de Pythagore ne sont pas mobilisées,
* bien que fractions et racines carrées aient été massivement identifiées comme des nombres dans la question A1, il semble que l'existence d'un développement décimal illimité introduise une incertitude quant à la détermination précise de ces entités dont la définition géométrique n'est pas présente.

Parmi les élèves qui répondent ainsi négativement pour les non-décimaux, un nombre non négligeable (7) ont une vision très pragmatique du problème posé qui les conduit à nier l'existence d'un point M dès qu'il y plus de 2 décimales. Inversement, certains ont accédé à une conception intériorisée de la mesure qui leur permet de représenter tous les décimaux.

Ces constatations montrent clairement que l'idée de la correspondance bijective entre les nombres et les points d'un axe est loin d'être une évidence limpide. Et le dépouillement de la question A5[7] réserve encore des surprises.

*** Des points vers les nombres**

47 élèves (sur 58) choisissent l'affirmation "si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre".
4 considèrent qu'"il y a des points de la droite auxquels ne correspond aucun nombre". Il est intéressant de connaître leurs justifications :

- *Certains points correspondent à des fractions.*
  (cet élève a reconnu les fractions comme nombres dans la question A1)
- *Non car 0 et 1 font 3 cm, ce ne sera pas précis pour si l'on prend un nombre.*
  (problème posé par le choix d'une unité arbitraire)
- *Etant donné qu'une droite est illimitée, il serait impossible de donner un nombre pour l'infini.*
- une élève renvoie à l'axe sur lequel elle a marqué un point, légèrement à gauche de I

Il n'y aurait donc pratiquement pas de difficultés sur ce point ; en réalité, c'est cette quasi unanimité qui fait problème et conduit à s'interroger sur la signification de ces réponses. Comment comprendre, par exemple, que, sur les 7 élèves répondant négativement pour tous les nombres à partir de 2,47821 dans la question A2, 6 affirment qu'à chaque point correspond un nombre ? N'est-ce pas qu'il y a fort peu de points sur leur droite, pas plus

---

[7]A5 Voici une droite graduée où on a placé le point O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1.

Coche les cases qui correspondent le mieux à ton opinion.

¤ si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point sur cette droite.

¤ il y a des nombres auxquels ne correspond aucun point de la droite.

Explique pourquoi et donne des exemples.

¤ si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre.

¤. il y a des points de la droite auxquels ne correspond aucun nombre.
Explique pourquoi et donne des exemples.

que de graduations? Ceci met en cause la conception que les élèves ont de la droite et de ses points ; nous en avons déjà dit quelques mots en parlant de "conception pince à linge" (cf. III.1.), nous y reviendrons dans la partie IV.

*** Des nombres vers les points**

36 élèves choisissent l'affirmation "si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point sur cette droite" (réponse que nous appellerons R1 dans le tableau ci-dessous), 17 adoptent la seconde proposition "il y a des nombres auxquels ne correspondent aucun point de la droite" (notée R2)[8].

	Effectif total	R1	R2
Ensemble	58	36	17
Groupe des élèves ayant répondu Oui dans tous les cas en A2	26	17	*6
Groupe des élèves ayant répondu Non à partir de 2, 47821	7	*3	3
Autres	25	*16	8

Ne figurent pas ici les 3 non réponses et les 2 réponses multiples (2 cases cochées).

* signale un résultat intéressant

1) Ces résultats confirment que **la possibilité d'associer un point à chaque nombre est contestée par une proportion importante d'élèves** (30%).

2) Il y a plus d'élèves qui sont sûrs que cette correspondance existe que d'élèves qui ont répondu positivement pour tous les nombres en A2. Autrement dit, considérer qu'il n'y a pas de point tel que OM mesure $\frac{10}{3}$ cm (par exemple) n'est pas incompatible avec la réponse R1 (19 élèves présentent ce comportement).

Ceci est assez difficile à interpréter. On peut penser que certains élèves se sentent ici **dégager de l'obligation de construire:**

[8]Je n'ai pas trouvé de solution plus efficace pour résumer les résultats que de donner ce tableau que d'aucuns trouveront sans doute indigeste. Le problème est le suivant : arrivé en fin d'analyse, il devient nécessaire de croiser les réponses pour estimer la stabilité des comportements. D'où un dépouillement croisé moins facile à restituer. On retrouvera le même obstacle à une lecture agréable dans la dernière partie.

"Une droite est constituée d'une infinité de points, alors même si ce nombre est très imprécis, il aura quand même un point sur cette droite" écrit une élève qui a répondu non en A2 *"aux nombres trop précis"* c'est-à-dire à partir de 2,47821.
"*Il y a des nombres qu'on ne peut placer sur une droite que dans notre esprit.*"

Il est possible qu'intervienne ici **l'intuition de continuité dans le mouvement** mise en évidence par la question A6:
"Une droite est pleine à l'infini, il n'y a pas de trous" d'un élève qui dit en A2 *"on ne peut placer que les nombres entiers, décimaux à 0,1 près et les fractions".*

Inversement, se manifeste peut-être dans cette question qui n'est plus directement une tâche de reconnaissance du type A1 **une vision très restrictive de ce qu'est un nombre, n'envisageant alors même pas tous les décimaux** . En tout cas, les 3 élèves qui dénient à $\frac{3}{13}$ et $2\sqrt{7}$ le statut de nombre ont choisi la réponse R1.

3) Il y a mobilité en sens inverse : sur les 26 élèves ayant répondu positivement pour tous les nombres en A2, 6 choisissent R2. Les nombres sans correspondant cités par ces élèves sont : les nombres trop grands, 0, les nombres à décimales infinies.

Cette étude fait apparaître une situation complexe concernant la bijection entre R et un axe gradué.

*** D'une part, un nombre important d'élèves conteste son existence.**

*** D'autre part, les conceptions qui fondent sa reconnaissance sont diverses (le rapport avec la mesure n'est pas clair) et incertaines au point qu'on puisse parfois interpréter une réponse positive dans le sens d'une vision très frustre des nombres, (restreints à certains décimaux) et de la droite (graduée par ses points).**

*** De plus, la position de certains élèves apparaît changeante, variant suivant la tâche.**

IV. Ordre dense ou discret ?

Nous nous intéressons dans cette partie aux réponses apportées aux questions concernant la densité de l'ordre pour la droite (A3 et A4) et pour l'ensemble des nombres (A7) :

***A3** (résumée) : Parmi tous les points d'une droite situés entre deux points A et B et distincts de A et de B, y en a-t'il un plus près de B que tous les autres ? Si tu penses qu'il y en a un, qu'y a-t'il entre ce point et B ?

***A4** : Es-tu d'accord avec la phrase suivante : "Un segment est formé d'une infinité de points alignés" ?

* **A7** (résumée) : On considère tous les nombres réels compris strictement entre 0 et 8. Y en a-t'il un plus grand que tous les autres ? Un plus petit que tous les autres ?

1. Résultats

Réponses aux questions A3 et A7 :

	Non en A7	**Pas de réponse en A7**	**Oui en A7**	**Total**
Non en A3	17	1	2	20
Pas de réponse en A3	1	1	1	3
Oui en A3	4	1	30	35
Total	22	3	33	58

Remarque : nous ne distinguerons pas les cas de 8 et 0 pour A7 dans la mesure où les réponses ne sont qu'exceptionnellement différentes.

Réponses à la question A4 :

Oui : 29 **Non :** 28 **Non réponse :** 1

Sur les 20 élèves répondant Non en A3,
13 répondent Oui en A4
7 " Non

Sur les 35 élèves répondant Oui en A3,
16 répondent Oui en A4
18 " Non
1 ne répond pas

Les 3 élèves qui ne répondent pas en A3 répondent Non pour A4.

Signalons qu'on n'observe aucun comportement spécifique notable des élèves suivant le type de réponses apportées à la question A2 concernant la correspondance nombre-point; chacun des regroupements qui avaient pu être constitués à l'occasion du dépouillement de cette question se divise pour les questions 3, 4 et 7.

Ces résultats mettent clairement en évidence que pour environ **la moitié des élèves interrogés,**

*** la notion de successeur est encore valide pour les points tout autant que pour les nombres ;**

*** un segment ne peut comporter qu'un nombre fini de points.**

2. Densité des décimaux, densité des réels, deux niveaux de complexité.

33 élèves sur 58 considèrent qu'il existe un nombre strictement inférieur à 8 et plus près de 8 que tous les autres.

* Pour 20 d'entre eux, la justification consiste à donner ce prédécesseur :

- 8 fois un décimal (7, 7,9 ou 7,99)
- 12 fois un nombre donné par un développement décimal infini (7,9999..)

Ces élèves acceptent 7,999... comme nombre mais évidemment aucun d'entre eux n'envisage que 7,999... pourrait être égal à 8, égalité dont on sait qu'elle est très difficile à accepter, y compris pour des étudiants de mathématiques.

* D'autres ne franchissent pas l'obstacle du passage à l'infini et manifestent une certaine gêne vis à vis de ce nombre plus près de 8 que tous les autres :

"Oui, mais je ne peux pas dire lequel car il y a des infinités de décimales après ce chiffre donc on ne peut que l'imaginer."

* Enfin quelques uns se contentent de parler *"du nombre juste avant 8"*, recourant souvent à un vocabulaire géométrique de position (proche, éloigné et même *"Oui, il y en a un qui est collé au point de valeur 8"*).

Inversement, 22 élèves nient l'existence d'un nombre plus près de 8. Pour justifier cette réponse,

* certains se contentent d'affirmer qu'*"il y aura toujours plus grand"* ;

* d'autres invoquent l'existence d'une infinité de nombres ;

* enfin, 10 argumentent autour des écritures décimales.

Les justifications de ces derniers sont grossièrement de trois formes également présentes :

- une suite d'inégalités mettant en jeu seulement des décimaux :

$7 < 7,9 < 7,99 < 7,999....$

- une allusion positive à l'existence d'une infinité de décimales,

- des explications embarrassées autour du développement décimal infini :

"Non. On sait que ce nombre sera supérieur à 7 mais les chiffres qui se trouvent après la virgule seront imprécis car ils vont jusqu'à l'infini. On ne peut donc pas savoir s'il existe un nombre plus grand que tous les autres."

Mais aussi : *"Non, car 7,999... n'est pas un nombre réel."*

L'analyse de ces différentes positions conduit à différencier deux problèmes :

* d'une part, **la densité de l'ordre dans l'ensemble des décimaux** qui ne met donc en jeu que des écritures décimales finies mais suppose néanmoins d'envisager la possibilité d'une suite infinie de décimaux,

* d'autre part, le passage à **R** avec l'acceptation des développements décimaux infinis puis (?), ce qui est nécessairement le plus difficile, la densité de **D** dans **R** avec l'idée fondamentale qu'**il n'est pas possible de trouver deux réels distincts (8 et 7,999...) entre lesquels il n'y aurait pas de décimaux.**

On peut dire, au vu des réponses aux différents items des questionnaires, que l'enjeu pour certains élèves de seconde est encore de dépasser la vision discrète des décimaux de la vie courante pour saisir toutes les possibilités offertes par l'ensemble **D**.

Pour d'autres, il s'agit de concevoir la définition de nombres par passage à la limite ; remarquons qu'un progrès sur ce point peut provoquer une régression sur la question du successeur (cf. 7,99...).

Reste enfin (si on peut dire) la question fondamentale : deux nombres réels distincts ne peuvent pas être infiniment proches, les réels strictement positifs ne sont pas minorés par un "infiniment petit" non nul. Il est clair que sur ce dernier point, qui est au coeur de l'analyse sur **R**, l'apprentissage commence à peine en seconde.

3. La densité des points ne se conçoit pas nécessairement mieux que celle des nombres.

On peut penser que le cadre géométrique permet un accès plus aisé à la densité de l'ordre en prenant appui sur l'intuition d'une continuité de la droite : deux points délimiteront toujours un segment non vide.

Les questions A3 et A7 ont donc été posées pour tester cette hypothèse dont la validité serait confortée si on pouvait mettre en évidence une plus forte reconnaissance de la densité pour les points que pour les nombres. Or l'examen des réponses fait apparaître une grande homogénéité des comportements : au niveau global, il y a quasi identité de la répartition dans les trois catégories Non (Juste), Oui (Faux), Non-réponse ; au niveau individuel, près de 4/5 des élèves répondent de la même manière pour les points et les nombres.

Deux positions cohérentes émergent donc : l'une occupée par 30 élèves (quasiment la moitié) a conservé l'idée de successeur pour les points comme pour les nombres, l'autre adoptée par 17 élèves (un peu plus du quart) l'a abandonnée dans les deux cadres.

Il n'apparaît donc pas de différence notable au niveau quantitatif. Voyons ce que les justifications peuvent nous apprendre.
20 élèves concluent à l'inexistence d'un point C plus proche de B. Leurs arguments sont de plusieurs types :

*** Du numérique vers le géométrique**

8 élèves invoquent le cadre numérique en identifiant les points à des nombres ou en considérant la distance à B :
"Non, car le point le plus proche serait : 5,9999999... à l'infini et ne serait pas représentable sur un segment, 5,9<5,99<5,999<5,9999<5,99999...." (justification donnée pour A3)

Il semble donc que, pour certains élèves, **le cadre numérique constitue l'environnement le plus favorable pour concevoir la densité de l'ordre, cette propriété étant transférée aux points de la droite grâce à la correspondance avec les nombres. Le jeu de cadres s'appuierait dans ce cas sur une avance dans le domaine numérique** et non pas l'inverse comme on a peut-être un peu trop tendance à le croire quand il s'agit des propriétés caractéristiques de **R**.

On retrouve également trace de l'influence des références numériques dans la question A4, y compris chez un élève qui n'utilise pas ce type d'argument pour justifier sa réponse en A3 :
"Oui, sur un segment, il y a une infinité de chiffres et ceci peuvent être représentés par des points."

*** Entre les points, d'autres points : une idée plus présente qu'on ne pourrait le croire**

Dans le cadre ponctuel, l'argument le plus fréquent, évoqué par 7 élèves pour justifier qu'il n'y a pas de plus proche voisin de B, repose sur une idée déjà utilisée pour les nombres à la question A7, **l'existence d'une infinité de points** :

"Non, il n'en existe pas car les points sur une droite sont infinis donc, si l'on trouve un point très près, il y en aura toujours un autre encore plus près."

Enfin, un second argument apparaît explicitement 2 fois (dont une chez un élève qui pour la question A7 sur les nombres répond "Je ne sais pas") et sous-tend peut-être d'autres justifications plus laconiques (*"Il y a toujours plus près"*) :

*"Non il n'y a pas de point plus près de B, car **il y a toujours un espace entre 2 points,** c'est infini."*

On peut estimer qu'il s'agit de la propriété de la droite que nous avions évoquée plus haut pour fonder l'hypothèse d'une plus grande accessibilité de la densité pour dans le cadre géométrique. Elle est donc très peu invoquée. Peut-être est-elle implicitement à l'oeuvre dans l'affirmation de l'existence d'une infinité de points (voir le dernier élève cité) ; la lecture des explications données pour la question 4 n'apporte aucun élément probant sur ce point.

Par contre, de manière totalement inattendue, il est possible que cette idée soit présente, chez des élèves qui ont affirmé l'existence d'un point C plus proche de B que les autres. En effet, sur 33 réponses de ce type, nous trouvons 12 fois l'affirmation suivante :

"Entre C et B, il y a d'autres points."

L'explication plus complète apportée par une élève peut nous éclairer sur cette position pour le moins étonnante :

"Il peut y avoir un "morceau" de la droite AB ou encore une infinité d'autres points."

Ne retrouve-t'on pas là une manifestation de la conception "Pinces à linge" introduite précédemment (cf. III.1.) ? Pour certains élèves, **parler des points d'une droite serait référer à une figure donnée, à une répartition discrète des points séparés par des segments ("des morceaux"). Mais, cette disposition n'est qu'un état parmi d'autres et il est toujours possible de placer d'autres points.**

Cette hypothèse permet par exemple d'interpréter la position des 16 élèves qui sont d'accord avec la proposition "Un segment est formé d'une infinité de points alignés" et en même temps affirment qu'il existe un point C.

En fait, une telle façon d'envisager la droite offre des perspectives tout à fait intéressantes à condition de changer le statut des points : ceux-ci doivent cesser d'être vus comme des accessoires associés de manière variable à la droite pour devenir des composants permanents, intrinsèques dont quelques uns seulement sont activés, vus, dans une figure donnée ; quelque soit le pouvoir de grossissement adopté, on verra des points reliés par des segments. Il est clair que nous glissons là complètement sur le terrain des images mentales mais peut-on s'en passer ?

*** Il y a un point plus près de B que tous les autres, c'est évident !!**

Sur 33 élèves pour lesquels C existe, 12 disent qu'entre C et B, il y a d'autres points ; quelle est l'opinion des autres :

* *"Il n'y a rien parce qu'ils sont collés"*

* *"Rien, du vide", "un espace"*

"une distance microscopique", "pratiquement rien" "un nombre infiniment petit"

(la question est ici interprétée dans le sens "Quelle distance y a-t'il entre C et B?")

Se dessine là une vision atomiste de la droite (pour reprendre la terminologie utilisée par J.Robinet) totalement décomposée en une suite de points, contigus ou non. Pour certains de ces élèves, le nombre de points est infini, pour les autres, il est grand mais fini. Mais, dans les deux cas, **l'effet de la réduction analytique poussée à son terme de la droite en ses éléments est la disparition inévitable de l'idée de continuité** ; les points déployés dans une direction s'ordonnent en une succession et chacun a nécessairement un voisin!

Nous sommes là devant une difficulté inévitable : dans la mesure où il est indispensable que les élèves perçoivent droites et courbes comme formées de points (deux exemples : représentations paramétriques d'une droite, théorème des valeurs intermédiaires dans les cadres numérique et graphique), un axe majeur du travail est de développer le point de vue analytique sur les objets géométriques ; mais risque ainsi de se dissoudre la propriété de la droite que nous voulions importer dans le champ numérique pour construire **R**, à savoir la continuité. Celle-ci ne peut être sauvegardée sans le maintien d'un regard synthétique qui s'obstinera à toujours apercevoir des segments entre les points.

4. Le fini de la mesure opposé à l'infini du nombre.

La question A4 a précisément pour particularité d'interroger les élèves à la fois sur un segment et sur ses points, c'est-à-dire qu'elle impose une confrontation des points de vue synthétique (grand angle) et analytique (zoom) sur la droite.

La moitié des élèves répondent par la négative ; leurs arguments sont très homogènes et tout à fait attendus :
"Un segment a une mesure précise donc un segment est formé d'un certain nombre de points alignés."
"Non car un segment est délimité donc il y a énormément de points mais on ne peut pas dire qu'ils soient infinis."

On voit clairement comment **le sentiment de finitude né du regard global, synthétique sur le segment (la mesure finie, les limites) rend inacceptable l'émergence de l'infini analytique (nombre de points).**

La force de cet interdit est bien mise en évidence par l'existence de 7 élèves qui réfutent l'affirmation proposée tout en répondant correctement aux questions 3 et 7 portant sur la densité, ce qui est contradictoire d'un point de vue logique. Ainsi plusieurs disent qu'étant donné un point C, il y aura toujours un point plus près de B que C, certainement sans percevoir que leur justification exprime l'existence d'une suite infinie de points. Le second élève cité plus haut justifie l'inexistence d'un prédécesseur de B en disant : *"Non, car entre A et B, il y a* ***une infinité de points****..."* , il se contredit donc explicitement d'une ligne à l'autre.

Parmi les 13 élèves qui acceptent l'existence d'une infinité de points dans un segment et répondent correctement pour la densité des points, deux cheminements semblent possibles. Dans l'un, les deux réponses du cadre ponctuel découleraient d'un passage par le cadre numérique. Dans l'autre, les deux propriétés seraient liées dans un même processus ne référant pas aux nombres ; l'acceptation de l'infini dans le segment pourrait précéder plus fréquemment l'abandon de l'ordre discret que l'inverse, en témoignent les arguments fournis à l'appui d'une réponse négative en A3 mais aussi la présence d'un fort groupe de 16 élèves répondant Oui (Juste) en A4 et Oui (Faux) en A3. Cette voie reste la plus opaque, peut-être parce que, plus intuitive, plus graphique, elle ne se laisse pas bien exprimer, en particulier par des mots du langage mathématique. Ainsi rien de clair n'émerge sur ce qui fait accéder à l'existence d'une infinité de points (lorsqu'il n'y a pas évocation des nombres).

V. Quelques éléments de conclusion

a) Concernant la reconnaissance des nombres, le point le plus problématique concerne les expressions contenant des signes d'opérations ; l'ensemble des nombres n'est pas nécessairement reconnu comme stable par les opérations.

b) L'idée d'une correspondance point-nombre est assez largement acceptée lorsqu'on l'évoque de manière globale. Par contre, l'existence de points d'un axe gradué associés à des nombres donnés pose problème, lorsqu'il s'agit de non-décimaux, mais aussi, pour une proportion non négligeable d'élèves, dans le cas d'un décimal à 5 chiffres après la virgule.
Une idée intuitive de la continuité des variations de grandeurs, largement présente, fonde peut-être l'existence de la correspondance.
Mais on peut également supputer que certains élèves considèrent les points comme les marques d'une graduation sur la droite et se restreignent aux décimaux de la vie quotidienne.

c) Enfin, une majorité a encore une conception discrète de l'ordre tant pour les nombres que pour les points. Il apparaît que le jeu entre les cadres numérique et géométrique ne se fait pas chez tous les élèves dans le sens d'un transfert aux nombres d'une propriété de densité d'abord construite à propos des points. Au contraire, le travail sur la correspondance point-nombre peut se traduire par un progrès concernant le statut des points au sein des objets géométriques.

d) Mais le développement d'une vision analytique de la droite risque de provoquer la perte de l'intuition de continuité favorisée par un regard synthétique et donc empêcher son transfert à l'ensemble des nombres.

Concevoir **R** sans axiomatique, en s'appuyant sur le cadre géométrique, suppose donc de faire cohabiter deux points de vue sur la droite (et donc sur l'ensemble des nombres) en cherchant notamment à mettre sur pied plusieurs images mentales complémentaires.

La notion de nombre est donc encore extrêmement problématique à l'entrée en seconde :

Un gros travail est nécessaire à ce niveau pour stabiliser les connaissances des élèves sur les éléments de l'ensemble $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{n}},\mathbf{n}\in\mathbf{N};\pi)$.

Quant à **R**, le passage à un ensemble continu de nombres est un apprentissage complexe pour lequel la correspondance points-nombres ne constitue pas le point d'appui évident sur lequel de nombreux manuels semblent compter.

Au contraire, on peut considérer l'accès à la notion de droite des réels comme un des enjeux de la classe de seconde. Cet objectif n'est pas explicité par le programme mais il est présent dans différents chapitres de géométrie et d'analyse ; les travaux effectués à ces occasions suffisent-ils à déclencher chez les élèves une évolution de leur conception des nombres ?

R peut-il sans dommage rester un passager clandestin de la seconde : cette question est pour l'instant ouverte.

Bibliographie

Bibliographie (Racines carrées, Réels)

ALPHONSE M. (1995) *Problèmes didactiques liés aux écritures des nombres.* Recherches en didactique des mathématiques Vol 15-2 p.31-62.

ASSUDE T. (1989) *Racines carrées : conceptions et mises en situation d'élèves de quatrième et de troisième.* Petit X n°20 p.5-33

ASSUDE T. (1993-94) *Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum.* Petit X n°35 p. 43-58

BERGUE D. et Al. (1995) *Une approche de la racine carrée* p. 64-77 in "Autour de la notion d'activité" Irem de Rouen

BESSOT A. et LE THI HOAI A. (1993-94) *Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée.* Petit X n°36 p. 36-60

BRONNER A. (1991-92) *Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée.* Petit X n°28 p. 19-55

DOUADY R. (1980) *Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, enfants de 6 à 11 ans.* Recherches en didactique des mathématiques Vol. 1-1 p. 77-111

JACQUIER I. (1995-96) *Quelles conceptions des nombres chez les élèves de troisième ?* Petit X n°41 p. 27-50

MARGOLINAS C. (1988) *Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels* Petit X n° 16 p. 51-66

ROBINET J. (1986) *Les réels : quels modèles en ont les élèves ?"* Educational Studies in Mathematics Vol. 17 n°4 p.359-386

Manuels examinés

Le Nouvel Objectif Calcul Cycle des approfondissements (1995-1996) Hatier
Mistral 4e Istra (1988)
Hachette Collèges 4e (1992)
Pythagore 3e (1993) Hatier
Magnard 3e
Suivi Scientifique Classe de 3e (1988-1989) Bulletin Inter-Irem Premier Cycle
Declic Seconde (1994) Hachette
Pythagore Seconde (1994) Hatier

Bibliographie annexe sur les relatifs, les décimaux et les rationnels

BROUSSEAU G. (1981) *Problèmes de didactique des décimaux* Recherches en didactique des mathématiques Vol. 2-1 p. 37-127

BROUSSEAU N. et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire : comptes rendus d'observation de situations et de processus didactiques à l'école J.Michelet de Talence.* Irem de Bordeaux

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) *Liaison Ecole-Collège. Nombres décimaux.* Irem Paris-sud.

DUROUX A. (1983) *La valeur absolue ; difficultés majeures pour une notion mineure.* Petit X n°3 p. 43-67

GLAESER G. (1981) *Epistémologie des nombres relatifs.* Recherches en didactique des mathématiques Vol. 2-3 p. 303-346

PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège* Petit X n°10 p.5-29

VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Editions Peter Lang

Annexe : Mais qu'est-ce donc qu'une fraction ?

Nous tâcherons donc de donner ici une idée "des phénomènes quelque peu hétéroclites, impossible à organiser globalement, qui conduisent aux fractions" (selon les termes utilisés par N.Rouche dans son exposé intitulé "Des grandeurs aux nombres rationnels" au colloque inter-IREM de géométrie de Limoges en Juin 92), en essayant de montrer comment cette nature multiforme rend inévitablement complexe l'apprentissage des fractions et des notions (égalité, opérations) qui les mettent en jeu.

* Fraction : opérateur lié au fractionnement

Les fractions sont en général introduites à l'école primaire dans le cadre de situations de partages en parts égales. Ce choix n'est imposé par aucun texte, d'autres stratégies sont possibles : ainsi, l'équipe de l'école Michelet de Talence, expérimente depuis plusieurs années avec un succès avéré un processus d'enseignement mis au point par G.Brousseau[9] dont le point de départ est l'élaboration, à partir de situations concrètes, d'une relation d'équivalence entre couples d'entiers. Cependant, le lien avec le fractionnement est très difficile à éviter puisqu'il est inévitablement évoqué dès que l'on désigne les fractions simples par leur nom en français.

Dans ce contexte, $\frac{2}{3}$ est un code qui ne s'emploiera qu'inséré dans des expressions du type "Prendre $\frac{2}{3}$ de..." ou "Etre $\frac{2}{3}$ de...", lues "Prendre deux tiers de." ou "Etre deux tiers de". Plus généralement, le signe $\frac{a}{b}$ (dans ce qui suit a et b désigneront des entiers naturels) est employé pour évoquer un **processus** ou une **relation** de fractionnement (fractionnement est à prendre dans un sens élargi de façon à intégrer les cas où a>b). Pour ma part, il me suffit de considérer un pourcentage pour me trouver dans la position d'un élève qui n'aurait pas dépassé cette étape : pour lui, $\frac{2}{3}$ n'est pas plus un nombre que 10% ne l'est pour moi, c'est un opérateur.

Ainsi que la transcription en langue naturelle de toutes les fractions le laisse entendre, le processus de fractionnement codé $\frac{a}{b}$, appliqué à un objet X, consiste à séparer X en b parties égales puis à prendre a bièmes. Lorsqu'il s'agit de collections discrètes, un problème de division est donc posé : diviser N, le cardinal de X, par b. Ceci est possible seulement si N est divisible par b ; par conséquent, **le fractionnement $\frac{a}{b}$ possède un ensemble de définition spécifique qui ne contient pas tous les ensembles finis**. Nous sommes là devant une réalité qui peut faire difficulté au moment de définir

9 cf Brousseau N. et G. (1987)

l'égalité de deux fractions : est-il légitime de dire que $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égales alors que la procédure "Prendre 4 sixièmes" ne peut être appliquée à une collection de 9 objets ? On peut bien sûr argumenter en recourant par exemple à un partage imaginaire des éléments de la collection, habilement "recollés" grâce au numérateur, mais il est clair que toute une construction intellectuelle est nécessaire ; elle est le plus souvent à la charge de l'élève. Peut-être ce problème est-il atténué, sinon réglé, par l'application du fractionnement à des grandeurs continues puisque le partage est toujours défini mais nous verrons un peu plus loin que le travail effectué est loin de toujours insister sur cette possibilité.

Par delà cette question de l'ensemble de définition, l'association fraction-procédure crée en elle-même un obstacle à la compréhension de l'idée d'égalité. Pour accepter d'identifier $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$, il faut **se détacher des aspects procéduraux concrets pour ne plus s'occuper que des effets** ; en termes mathématiques, il faut que la fraction devienne une fonction (caractérisée, on le sait, par son graphe lequel peut être produit par des formules différentes du point de vue des opérations effectuées). Les élèves doivent prendre du recul par rapport à la réalité matérielle des partages : on peut douter que cela soit vraiment favorisé par l'évocation répétée des parts de tartes (il suffit d'avoir découpé quelques gâteaux d'anniversaire pour savoir que deux petits huitièmes, ce n'est vraiment pas la même chose qu'un quart entier!!).

*** Fraction : mesure de longueur, abscisse d'un point sur un axe.**

$\frac{a}{b}$ est donc pour l'instant utilisé pour désigner un opérateur, très lié à des situations familières. Nous allons adopter provisoirement la notation fonctionnelle usuelle $\frac{a}{b}(X)$ pour représenter l'image de l'ensemble X par l'opérateur $\frac{a}{b}$.

A ce stade, une fraction est encore loin d'être un nombre. Pour avancer sur ce point, mais aussi pour favoriser un certain détachement des contextes concrets, on va utiliser le même symbole $\frac{a}{b}$ dans des emplois qui jusque là étaient uniquement occupés par les nombres connus des élèves (les entiers naturels) : mesure de longueurs dans une unité donnée u, repérage de points marqués sur un axe gradué.

On peut ainsi faire apparaître que, sauf dans certains cas (a multiple de b), la longueur du segment $\frac{a}{b}(u)$ ne peut pas s'exprimer comme un multiple entier de u, ce qui justifie la nécessité d'introduire un nouveau nombre que l'on va désigner par a/b (remarque : pour alléger les notations, nous confondons segment et longueur). **Encore faut-il, pour que le problème se pose, que u puisse être partagée en b parties égales.**

Pour traiter cette question, les élèves ne disposent pas du théorème de Thalès. Mais, il est possible de leur faire produire des partages de segments arbitraires à l'aide d'un dispositif matériel très simple, assez connu dans le primaire, baptisé suivant les publications "Guide-âne" ou "Machine à partager" (cf. par ex. Le nouvel objectif calcul, CM1, Hatier p. 132) : il s'agit tout simplement d'une feuille munie d'un jeu de parallèles équidistantes (pour un écart de 1 cm, un segment de longueur L cm peut être partagé en b parties égales pour tout b inférieur ou égal à L).

Malheureusement, l'analyse de manuels montre que cette mise en évidence explicite de la possibilité de construire tout fractionnement pour tout segment se trouve relativement marginalisée dans l'ensemble des exercices proposés. Nombreux au contraire sont les énoncés où **le fractionnement d'une grandeur continue X est ramené à un partage de collection discrète** grâce à une sous-unité X' dont X est un multiple nX', n étant divisible par le dénominateur de la fraction en jeu : ainsi, lorsqu'il s'agit de fractionner un disque, on prendra de préférence des fractions dont le dénominateur divise 60 (recours au partage du cadran de la montre), sinon, un pavage préalable sera donné dans l'énoncé. Inversement, s'il s'agit de représenter $\frac{1}{3}$ sur un axe, l'unité sera de 3 carreaux ou 3 cm....

On peut imaginer que des raisons de gestion de classe par exemple encouragent la pratique consistant à choisir une unité "adaptée" aux fractions à représenter. Mais ceci risque de conduire les élèves à considérer comme impossibles les fractionnements qui ne peuvent se ramener à un problème discret (la question de l'ensemble de définition soulevée plus haut persiste). Ainsi se trouverait considérablement réduit l'intérêt des fractions pour exprimer des mesures puisque $\frac{a}{b}(u)$, lorsqu'il est défini, s'exprimerait comme un multiple entiers d'une sous-unité ; on n'est pas très loin de ne s'intéresser qu'aux décimaux qui d'ailleurs monopolisent assez vite l'attention en primaire. Enfin, **on ne voit guère comment toutes les fractions pourraient s'intercaler parmi les entiers sur un axe unique d'unité donnée**.

Ces doutes trouvent en tout cas largement de quoi être renforcés dans les réponses apportés par les élèves de seconde qui ont rempli les questionnaires A et B :

* Question A2 : 21 élèves sur 58 répondent qu'il n'y a pas de point M tel que OM mesure exactement $\frac{10}{3}$ cm ;

* Question B2 : 20 élèves sur 34 répondent qu'il n'existe pas de point B tel que sept fois la distance de O à B soit exactement égale à 16.

*** Lien avec le quotient de a par b**

Sur le plan mathématique, $\frac{a}{b}$ est le nombre solution de l'équation b.x = a ; autrement dit, selon la formulation du programme de sixième, $\frac{a}{b}$ désigne le quotient de a par b. Voyons pourquoi introduire cette idée de la fraction ne peut pas être une simple formalité si l'on se place dans la continuité de la démarche d'enseignement décrite jusqu'à maintenant.

En premier lieu, **la question de l'existence de ce nombre** se pose à chaque fois que le quotient n'est pas un décimal : si l'élève pose la division de a par b, il va constater qu'il n'obtient jamais le reste 0 et conclure qu'il n'existe pas de solution à ce problème. Il est très aventureux à ce niveau de définir un objet par un développement décimal infini (cf. III.3. pour un aperçu des difficultés posées par le passage à la limite pour des élèves de seconde). L'existence du quotient ne peut être légitimée en restant dans un contexte de division d'entiers, c'est-à-dire en travaillant sur des collections discrètes ; il faut passer au partage de grandeurs continues, notamment de longueurs. La question de l'existence du partage en b parties égales d'une unité u réapparaît donc ici comme un élément central.

Supposons maintenant que toute l'attention nécessaire ait été prêtée aux divers fractionnements de l'unité u ; le rapprochement de l'opérateur $\frac{a}{b}$ ou plutôt de la longueur $\frac{a}{b}$ avec le quotient de a par b demande encore du travail. En effet, ces deux objets interviennent dans des problèmes différents, résolus par des procédures distinctes. La longueur $\frac{a}{b}(u)$ n'est pas initialement solution d'un problème de partage puisqu'elle naît du report de $\frac{1}{b}(u)$ (nous suivons ici la procédure énoncée par la langue française). Le quotient de a par b intervient lui par exemple s'il s'agit de séparer au en b parties égales ; il s'agit donc d'appliquer $\frac{1}{b}$ au segment au. Pour concevoir que $\frac{1}{b}(au)$ est égal à $\frac{a}{b}(u)$, on peut vérifier que $\frac{a}{b}(u)$ reporté b fois donne au ou appliquer le partage 1/b à chacune des a copies de u présentes dans au puis réunir les a segments $\frac{1}{b}(u)$ obtenus ce qui donne bien a-bièmes de u.

Il est donc évidemment possible de faire apparaître $\frac{a}{b}(u)$ comme solution du problème de division de au par b mais on peut douter que ce travail soit accompli par les élèves livrés à eux-mêmes, d'autant qu'il faudra accepter d'identifier des résultats obtenus par des procédures notablement différentes. Or l'interprétation des fractions en terme de quotient n'est pas explicitement au programme du primaire ; par contre, c'est le point de vue adopté d'emblée en sixième : on peut craindre que le travail à effectuer pour rapprocher les différentes pratiques recourant aux fractions ne fasse les frais des liaisons insuffisantes entre primaire et secondaire, n'étant finalement pris en charge par aucun des niveaux d'enseignement.

*** Complexité de la mise en place des opérations : l'exemple de la multiplication.**

Nous venons de voir qu'une fraction est tout à la fois :

* un opérateur scalaire agissant sur des ensembles finis ou continus, sur des entiers et des grandeurs,

* la mesure du segment $\frac{a}{b}(u)$ dans l'unité u, l'abscisse d'un point sur un axe gradué,

* la solution de l'équation $b.x = a$, c'est-à-dire le quotient de a par b.

Nous avons constaté que la mise en cohérence de ces différents aspects nécessitait une véritable construction. Il en est nécessairement de même lorsqu'il s'agit d'étendre à ces objets nouveaux les opérations en place pour les entiers, extension qui devrait conforter, assurer le statut de nombre des fractions.

Sans entrer dans une analyse exhaustive, essayons d'entrevoir par exemple comment la multiplicité des phénomènes modélisés par une fraction rejaillit sur la multiplication.

A quoi correspond $\frac{a}{b} . \frac{c}{d}$?

* **au quotient de $\frac{a}{b}.c$ par d** (par analogie avec ce qui est vrai pour les entiers)

* **à l'effet de l'opérateur $\frac{a}{b}$ sur la longueur $\frac{c}{d}(u)$** : $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a}{b}(\frac{c}{d}(u))$; il s'agit ici d'étendre le sens de la multiplication dans le cas où $\frac{a}{b}$ est un entier, cette interprétation n'est pas a priori commutative puisque $\frac{a}{b}$ est un scalaire alors que $\frac{c}{d}$ est une longueur ; le produit est une longueur (multiplication externe).

* **à la composition de deux fractionnements successifs** : $\frac{a}{b} . \frac{c}{d}$ est le fractionnement obtenu en composant successivement les fractionnements $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$ (l'ordre choisi a l'intérêt de faciliter la vérification de la compatibilité avec la définition précédente mais on n'évitera pas, pour la commutativité, d'avoir à vérifier que le résultat est

indifférent à l'ordre). Dans ce cas, les deux fractions ainsi que leur produit sont des scalaires (multiplication interne dans l'ensemble des scalaires).

*** à la mesure de l'aire d'un rectangle de côtés $\frac{a}{b}$(u) et $\frac{c}{d}$(u) dans l'unité u^2 .**

Ici, les deux fractions correspondent à des longueurs, le produit est une aire ; c'est ce qui se rapproche le plus de la multiplication interne dans l'ensemble des longueurs.

En fait, la dualité opérateur-longueur des fractions nous ramène à la multiplicité des structures algébriques de **Q** où la multiplication est tout à la fois opération interne de la structure de corps et opération externe de la structure d'espace vectoriel sur lui-même. Notons que, concernant ce dernier point, nous avons seulement évoqué le cas où l'opérateur est de dimension 0, ce qui est loin d'être le cas le plus fréquent dans les situations de proportionnalité dont le coefficient est le plus souvent une grandeur quotient non scalaire.

On conçoit bien qu'à la multiplicité des sens, des emplois, correspond nécessairement un apprentissage complexe et donc un enseignement multiforme qui, à côté des compétences techniques basées sur des formules, organise la prise en compte des divers points de vue possibles. Ainsi une égalité du genre $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ doit pouvoir faire sens et être acceptée pour les différentes interprétations possibles.

Cette analyse rapide n'épuise pas le sujet des fractions, elle permet néanmoins d'entrevoir pourquoi certains élèves de seconde peuvent encore dénier à $\frac{3}{13}$ et même à $\frac{5}{4}$ le statut de nombre, pourquoi l'intervention de fractions dans quelqu'exercice que ce soit produit si souvent une chute des réussites, pourquoi les difficultés sont particulièrement sérieuses quand il s'agit de modéliser.

SOMMAIRE

REF : R-108

LA DROITE DES REELS EN SECONDE :
POINT D'APPUI DISPONIBLE OU ENJEU CLANDESTIN ?

Auteur : Corine CASTELA

Public concerné : Professeurs de collège et de lycée

Niveau : Classes de 4 ème, 3 ème et seconde

Résumé : Après avoir étudié la place accordée aux différents nombres par les programmes de l'école primaire et du collège, nous montrerons que l'ensemble des réels ne figure pas parmi les objectifs explicites de la classe de seconde alors qu'il constitue l'environnement implicite de plusieurs chapitres nécessitant un ensemble continu de nombres. Pour surmonter cette difficulté, l'enseignant s'appuie sur l'identification de l'ensemble des nombres à une droite. En prenant appui sur un questionnaire posé en début de seconde, nous montrerons que cette idée est loin d'être une évidence pour nombre d'élèves. Nous verrons également que la droite géométrique n'est pas l'objet limpide que l'on croit, doté nécessairement des propriétés qu'on aimerait transférer à **R**.

Mots clefs : Fraction, Racine carrée, Nombre réel, Droite, Densité, Continuité, Représentation géométrique, Jeux de cadre

Date : Juin 1996
Nb de pages : 56 pages
N° ISBN : 2-86239-067-4

Prix : 45 F
Format : A4
Dépot légal : 3ème trimestre 1996

Publication : IREM de ROUEN
Avenue de Broglie
BP 138
76821 Mont-Saint-Aignan

****

***

Bon de Commande

M, Mme, Melle :
Adresse :

Libellé : La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin ?

Prix :	Quantité :	Total
45 F	....	....

Frais d'envoi : 15 F pour le 1er livre et 5 F par livre supplémentaire (France) ....

Frais réel pour l'étranger ....

Somme due ....

Les chèques de règlement sont à libeller à l'ordre de :
L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN
Et adressés directement à l'IREM- BP 138- 76130 MONT-SAINT-AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tel : 35-14-61-41
RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 0004400405681

****

Date : Signature :