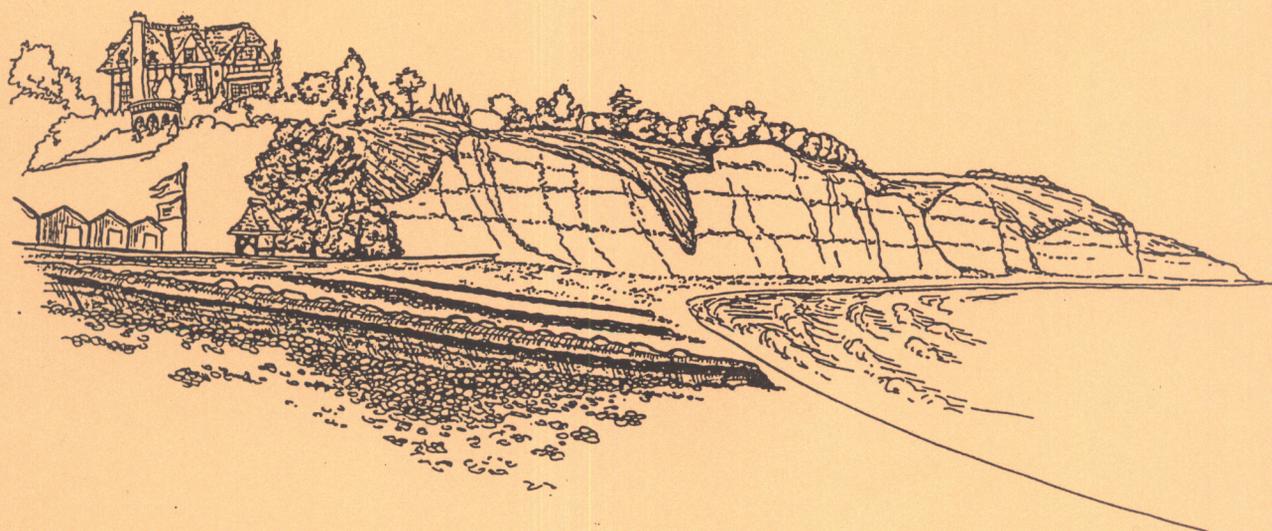


UNIVERSITÉ DE ROUEN
I.R.E.M. DE ROUEN



Pourville
96

AIMER
FAIRE DES MATHS
AU LYCEE 3

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE ROUEN

BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES, AV. DE BROGLIE
B.P. 138 , 76821 MONT SAINT AIGNAN

TÉL, FAX, 35-14-61-41

Introduction

Pour la troisième édition du stage *Aimer Faire des Maths*, une décentralisation s'imposait! Dieppe et les personnels du Lycée Ango nous ont donc très gentiment accueillis. Est-ce à cause de l'orientation géographique, de la teneur en iode, voire de la gastronomie que tant de gens aiment encore là faire des maths?

Comme le prouvent ces actes, la troisième édition proposait un programme varié et captivant. Rappelons qu'il s'agit de proposer aux stagiaires des interventions qui ensuite deviendront des articles. Le point de départ peut être une présentation originale d'un thème vu en cours, les développements d'un exercice ou d'un devoir, ou encore un complément de formation sur un concept dépassant le cadre du Lycée (à condition de le présenter à l'aide d'un matériel simple et de ne pas plagier les manuels canoniques).

Cette année, l'analyse (cf. les diverses sommations de la **série harmonique alternée**), avec des prolongements numériques (cf. **Newton**), la théorie des nombres (cf. **Moëbius**), l'algèbre (cf. les **nombres hypercomplexes**), les probabilités (cf. le **paradoxe du prisonnier**), et enfin la géométrie (version cinématique quand on fait tourner une **équerre**, projective -cf. autour de la **perspective-**, ou enfin algébrique -cf. la **polarité-**, furent de la fête.

J'espère que le lecteur retrouvera en parcourant ces articles une partie du plaisir éprouvé par tous ceux qui ont aidé à élaborer ce document.

Luc Sinègre.

SOMMAIRE

page

- 1** *Nombres complexes généralisés.*
Luc Sinègre (Rouen).
- 12** *L'équerre tournante: le cas du cercle.*
Thierry Hamel (Evreux).
- 21** *Etude de la série harmonique alternée. Changement de l'ordre des termes.*
Yves Suprin (Rouen-APM).
- 23** *Le paradoxe du prisonnier..*
Yves Suprin (Rouen-APM).
- 31** *Du point fixe à la méthode de Newton.*
Dominique Pommier et François Prévost (Dieppe).
- 38** *Autour de la perspective..*
Bertrand Fort (Dieppe).
- 44** *Polarité et polarité réciproque.*
Thierry Hamel (Evreux).
- 61** *Des racines d'un polynôme à la fonction de Moëbius.*
Bertrand Fort (Dieppe).

NOMBRES COMPLEXES GENERALISES.

L'an dernier, pendant ce même stage, un collègue nous a proposé d'introduire le cours sur les nombres complexes en ajoutant au corps à trois éléments une racine carrée de 2.

Il est possible de montrer aux élèves, en exercice, comment un léger changement sur la relation fondamentale, transformer $i^2=-1$ en $i^2=1$ ou 0, bouleverse certaines propriétés du corps des complexes et en préserve d'autres.

Le but de cet exposé est de présenter les structures de nombres complexes généralisés et quelques unes des propriétés géométriques des nombres duaux.

1. Introduction

L'ensemble des nombres complexes généralisés est l'ensemble des nombres qui sont de la forme $a+bE$, a et b étant deux nombres réels et E un symbole tel que $E^2=-1$ dans le cas des nombres complexes, $E^2=1$ dans le cas des nombres doubles, $E^2=0$ dans celui des nombres duaux. D'une façon plus générale E vérifie une équation du second degré à coefficients réels. Dans la suite nous prendrons $E=i$, quand il s'agira de nombres complexes, $E=e$ de nombres doubles et $E=f$ de nombres duaux.

Les nombres doubles ont été introduits au siècle dernier par le brillant mathématicien anglais William Clifford. Clifford (1845-1879) n'a d'ailleurs pas cherché une généralisation des nombres complexes, mais il a prolongé la découverte de Hamilton (le corps des quaternions) pour trouver des nombres qui puissent interpréter les isométries vectorielles (comme les quaternions), mais aussi les isométries affines. Le père des nombres doubles est le mathématicien allemand Eugène Study (1862-1930).

L'addition des nombres complexes généralisés est évidente. Pour la multiplication on obtient dans chaque cas, a, b, c, d désignant quatre réels quelconques:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + i(ad+bc) \\ (a+be)(c+de) &= (ac+bd) + e(ad+bc) \\ (a+bf)(c+df) &= ac + f(ad+bc)\end{aligned}$$

On vérifie facilement que cette multiplication définit une loi de composition interne sur l'ensemble correspondant, qui est commutative associative et que dans chaque cas 1 est élément neutre.

L'application $\varphi: (a + Eb) \longrightarrow (a - Eb)$ est bijective car involutive.

Pour tout couple de nombres complexes généralisés z et z' on a $\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z')$ et $\varphi(z \cdot z') = \varphi(z) \cdot \varphi(z')$.

Démonstration: posons $z=a+bE$ et $z'=c+dE$. Dans chacun des cas E^2 est un réel α et

$$\begin{aligned}\varphi(z \cdot z') &= \varphi[(a+bE)(c+dE)] = \varphi[(ac + \alpha bd) + E(ad+bc)] = (ac + \alpha bd) - E(ad+bc) \\ \varphi(z) \varphi(z') &= \varphi(a+bE) \varphi(c+dE) = (a-bE)(c-dE) = (ac + \alpha bd) - E(ad+bc)\end{aligned}$$

On a aussi, comme avec les complexes ordinaires, que z est réel si et seulement si $z = \bar{z} = \varphi(z)$.

2. Le module et l'argument.

Soit z un nombre g -complexe. On définit le module en choisissant judicieusement la bonne racine carrée définie par l'égalité $|z|^2 = |z \cdot \bar{z}|$. Avec cette définition on a évidemment $|z \cdot z'|^2 = |z|^2 |z'|^2$

Dans le cas des nombres doubles $|z \cdot \bar{z}| = |a^2 - b^2|$ en choisissant la racine carrée qui coïncide avec le plus grand, en valeur absolue, des deux nombres a et b . Attention ce module peut donc être négatif!

Exemple $|-5 + 3e| = -4$.

La propriété de morphisme du module est encore difficile à atteindre avec notre définition.

Dans le cas des nombres duaux $|z \cdot \bar{z}| = |a^2|$ on choisit la racine carrée a . Le module peut donc encore être négatif!

Exemple $|-5 + 3f| = -5$.

Dans ce cas c'est l'égalité

$$(a+bf)(c+df) = ac + f(ad+bc)$$

qui indique la propriété de morphisme du module.

On peut écrire une propriété supplémentaire;

$$\text{pour tout couple de nombre duaux } z \text{ et } z' \text{ on a } |z-z'| = ||z| - |z'|| = |z| - |z'|$$

Remarque: pour les nombres doubles et duaux le module d'un réel est le réel lui-même.

Théorème: Un nombre g -complexe est inversible si et seulement si son module est différent de zéro.

Démonstration. Supposons z inversible et appelons z' son inverse. L'égalité

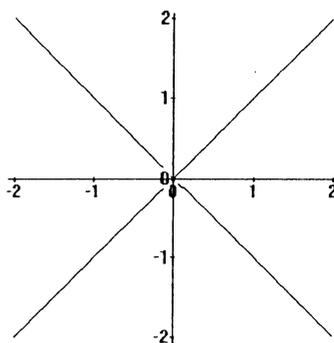
$$1 = |1| = |z \cdot z'|^2 = |z|^2 |z'|^2$$

prouve que le module de z ne doit pas être nul.

Supposons maintenant le module de z non nul. Appelons z' le g -complexe $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

On a $z \cdot z' = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$ ou -1 et donc quitte à changer le signe de z' nous avons bien trouvé un inverse pour z .

Si l'on introduit la représentation géométrique des nombres g -complexes de façon ordinaire, l'ensemble des nombres doubles non inversibles correspond aux droites d'équation $x^2 - y^2 = 0$. L'ensemble des nombres duaux non inversibles correspond à l'axe des imaginaires purs.



L'ensemble des nombres doubles ou duaux est donc muni d'une structure d'anneau non intègre (et même d'algèbre) commutatif. Ces ensembles possèdent des diviseurs de zéro $(1-e)(1+e)=0$ par exemple ou encore $f \cdot f=0$.

Remarque: Il est commode de compléter l'ensemble des nombres duaux par deux symboles: on note ω l'inverse de f et ∞ l'inverse de 0.

Soit $z=a+bf$ un nombre dual, non imaginaire pur, c'est-à-dire de module non nul.

$$z=a(1+\frac{b}{a}f)=|z|(1+f\arg(z))$$

On définit donc $\arg(z)=\frac{b}{a}$.

Pour deux nombres duaux de modules non nuls on a

$$zz'=aa'(1+\frac{b}{a}f)(1+\frac{b'}{a'}f)=aa'(1+(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'})f) \text{ et donc } \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$$

Pour arriver à l'argument d'un nombre double, il faut se fatiguer un peu plus:

Proposition: Etant donnés deux nombres réels a et b (avec a positif) tels que $a^2-b^2=1$, il existe un réel et un seul t tel que $a=\text{ch}(t)$ et $b=\text{sh}(t)$.

Démonstration: La fonction sh est continue et strictement monotone sur \mathbf{R} donc (après étude simple des limites) on peut dire qu'elle réalise une bijection de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Il existe donc un t unique tel que $b=\text{sh}(t)$. On a donc $a^2=1+\text{sh}^2(t)=\text{ch}^2(t)$. Comme a est positif on trouve $a=\text{ch}(t)$.

Soit z un nombre double de module non nul. Supposons que sa partie réelle soit en valeur absolue plus grande que l'imaginaire¹ et en particulier non nulle. Si l'on pose $\varepsilon_a=\frac{|a|}{a}$ on peut écrire

$$z=a+be=|z|\left(\frac{|a|}{\sqrt{|a^2-b^2|}}+\frac{b}{\varepsilon_a\sqrt{|a^2-b^2|}}e\right)=|z|(A+Be)$$

Puisque A et B sont deux réels qui vérifient les hypothèses de la proposition précédente, nous sommes sûr qu'il existe un réel unique t tel que $z=|z|(\text{ch}(t)+\text{sh}(t)e)$.

Si la partie réelle n'est pas en valeur absolue plus grande que l'imaginaire on peut écrire

$$z=e(b+ae)=ez'=e\frac{\varepsilon_b}{\sqrt{|b^2-a^2|}}(\text{ch}(t)+\text{sh}(t)e)=\frac{\varepsilon_b}{\sqrt{|b^2-a^2|}}(\text{sh}(t)+\text{ch}(t)e)=|z|(\text{sh}(t)+\text{ch}(t)e)$$

La décomposition « trigonométrique » d'un nombre double inversible est donc unique.

Application: Le module du produit de deux nombres doubles inversibles est le produit des modules, l'argument est la somme des arguments.

Démonstration:

Supposons z et z' ayant la décomposition du premier type.

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\text{ch}(t)+\text{sh}(t)e)(\text{ch}(t')+\text{sh}(t')e) \\ &= |z||z'|(\text{ch}(t)\text{ch}(t')+\text{sh}(t)\text{sh}(t')+e(\text{ch}(t)\text{sh}(t')+\text{ch}(t')\text{sh}(t))) \\ &= |z||z'|(\text{ch}(t+t')+\text{sh}(t+t')e) \end{aligned}$$

¹ Interpréter directement cette hypothèse sur la représentation graphique précédente.

Si z et z' ont une décomposition différente

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'| (ch(t) + sh(t)e)(sh(t') + ch(t')e) \\ &= |z||z'| (ch(t)sh(t') + ch(t')sh(t) + e(ch(t)ch(t') + sh(t)sh(t'))) \\ &= |z||z'| (sh(t+t') + e ch(t+t')) \end{aligned}$$

Dans le cas des deuxièmes formes

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'| (sh(t) + ch(t)e)(sh(t') + ch(t')e) \\ &= |z||z'| (ch(t+t') + e sh(t+t')) \end{aligned}$$

3. Classification des complexes généralisés.

Pour tout couple de nombres réels p et q , on considère l'équation $X^2 = pX + q$ associée au symbole E qui définit les complexes généralisés.

Si le discriminant $p^2 + 4q$ de cette équation est positif on appelle δ une racine carrée, s'il est strictement négatif on appelle δ une racine de $-p^2 - 4q$.

l'application² $\Phi: a + bE \longrightarrow (a + \frac{b}{p}) + \frac{b\delta}{2}E$ permet de définir une bijection (c'est facile à vérifier) de l'ensemble des g -complexes vers l'ensemble des complexes lorsque $\varepsilon = i$, des nombres doubles lorsque $\varepsilon = e$ et des nombres duaux lorsque $\varepsilon = f$. Cette application définit un homomorphisme additif et; ce qui est plus difficile à vérifier, un homomorphisme multiplicatif. Je donne sous MAPLE la vérification formelle obtenue.

Proposition: L'algèbre des nombres g -complexes est isomorphe (selon le signe du discriminant de l'équation qui la définit) au corps des complexes, ou aux algèbres des nombres doubles ou duaux.

Définition de la multiplication entre deux complexes, doubles, ou duaux z et t .

```
mult := proc(z, t, symb)
local a, b, c, d, T;
  a := z[1];  b := z[2];  c := t[1];  d := t[2];
  if symb = i then T := [a*c - b*d, a*d + b*c]
  elif symb = e then T := [a*c + b*d, a*d + b*c]
  else T := [a*c, a*d + b*c]
  fi;
  T
end
```

² Pour comprendre comment cette application est formée, il suffit de considérer le cas $\Delta < 0$ et d'écrire explicitement en fonction de i une des racines de l'équation.

Définition de la multiplication de deux nombres hypercomplexes (p, q supposés donnés globalement).

```

muld := proc(z, t)
local a, b, c, d;
  a := z[1];  b := z[2];
  c := t[1];  d := t[2];
  [a*c + b*d*q, a*d + b*c + b*d*p]
end

```

Définition de l'isomorphisme qui associe à un nombre hypercomplexe un nombre complexe, double, ou dual (c'est le paramètre *symb* qui règle l'ensemble d'arrivée).

```

phi := proc(z, symb)
local a, b, A, B, d;
  a := z[1];  b := z[2];
  A := a + 1/2*b*p;
  d := p^2 + 4*q;
  if symb = f then B := b
  elif symb = e then B := 1/2*b*sqrt(d)
  else B := 1/2*b*sqrt(-d)
  fi;
  [A, B]
end

```

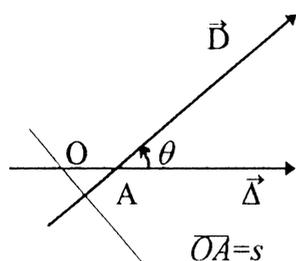
Vérification de la propriété de morphisme

```

z := [a, b]:t := [c, d]:
for symb in {e, f, i} do
  (simplify(phi(muld(z, t), symb) - mult(phi(z, symb), phi(t, symb), symb))): od;
  [0,0] [0,0] [0,0]

```

4. Interprétation géométrique des nombres duaux.



On considère \vec{D} une droite orientée du plan, que l'on peut décrire, grâce à un pôle O et un axe polaire $\vec{\Delta}$ par un couple de réels (θ, s) si elle n'est pas parallèle ou antiparallèle³ à l'axe polaire. Le réel s représente la mesure algébrique \overline{OA} du pôle au point A d'intersection de la droite $\vec{\Delta}$ avec l'axe polaire.

Le réel θ appartient à $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et représente la mesure de l'angle orienté $(\vec{\Delta}, \vec{D})$.

On associe ainsi à \vec{D} le nombre dual $z = \tan \frac{\theta}{2} (1 + fs)$ dont le module est $\tan \frac{\theta}{2}$ et d'argument s . Réciproquement, à tout nombre dual de module non nul $u + fv = u(1 + \frac{v}{u}f)$ on associe la droite qui passe par le point d'abscisse $\frac{v}{u} = \text{Arg}(u + fv)$ de l'axe polaire et qui fait un angle $\theta = 2\text{Arctan}(u)$ avec lui.

La distance de l'origine à une de ces droites est en valeur absolue⁴

$$d = s \sin(\theta) = s \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2v}{1 + |z|^2}$$

On associe donc (en faisant tendre le module de z vers 0) aux droites horizontales d'équation cartésienne $y = -d$ (orientées directement par rapport à l'axe polaire) le nombre dual $\frac{d\varepsilon}{2}$.

En associant aux antiparallèles d'équation $y = -d$ le nombre $-\frac{2\omega}{d}$ et à l'anti-axe polaire le symbole ∞ le paramétrage de l'ensemble des droites orientées du plan est terminé.

Dans la suite, pour des raisons pratiques on confondra la droite orientée avec le nombre dual qui lui est associé, on notera ainsi (z, z') pour l'angle orienté qu'elles forment.

angles de deux droites

$$\text{on a } (z, z') = (z, 0) + (0, z') = (0, z') - (0, z) = \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z) = \text{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)$$

³ Deux droites orientées sont anti-parallèles lorsqu'elles ont le même support mais des orientations différentes.

⁴ Nous obtenons ce résultat sans valeur absolue, à condition de prendre une orientation rétrograde pour la normale. Dans ce cas une équation paramétrique de cet axe est $x = \rho \sin \theta$ et $y = -\rho \cos \theta$ et comme l'équation normale de la première droite est $x \sin \theta - y \cos \theta - s \sin \theta = 0$ on trouve pour ρ , qui mesure la distance orientée de O à la droite la valeur $s \sin \theta$.

5. Etude du groupe circulaire.

Les transformations ponctuelles du plan affine euclidien ont des représentations complexes. Les élèves de terminale savent que toute similitude directe (ie la composée d'un déplacement et d'une homothétie) possède une représentation de la forme $z \rightarrow a z + b$ (avec a un complexe non nul). D'une façon plus générale, on démontre que toutes les applications complexes de la forme $z \rightarrow \frac{a z + b}{c z + d}$ avec le déterminant $ad - bc \neq 0$ forment un groupe qu'on appelle le groupe circulaire. On démontre assez facilement que toute application circulaire est le produit d'un déplacement, d'une homothétie et d'une inversion singulière. On peut alors se demander à quoi correspond le groupe circulaire de l'ensemble des nombres réels. Pour répondre à cette question il faut détailler quelques applications géométriques particulières opérant sur les droites.

Quelques transformations

La transformation qui à un axe z associe l'axe antiparallèle de même support z' induit le calcul suivant:

$$z' = \tan \frac{\theta + \pi}{2} (1 + jf) = -\cotan \frac{\theta}{2} (1 + jf) = \frac{-1}{\tan \frac{\theta}{2} (1 - jf)}$$

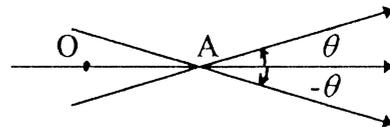
$$\text{Donc } z' = \frac{-1}{z}$$

C'est d'ailleurs grâce à ce calcul que l'on a pu trouver quoi associer aux antiparallèles horizontales.

Transformer un axe z en l'axe $-z$, correspond à associer à z le nombre

$$z' = -\tan \frac{\theta}{2} (1 + jf) = \tan \frac{-\theta}{2} (1 + jf)$$

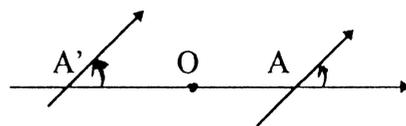
donc à effectuer la symétrie par rapport à l'axe polaire.



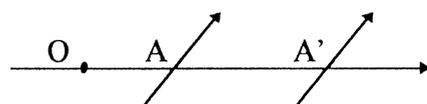
On montre facilement que l'application

$$z \rightarrow \bar{z}$$

correspond à la symétrie par rapport au pôle.



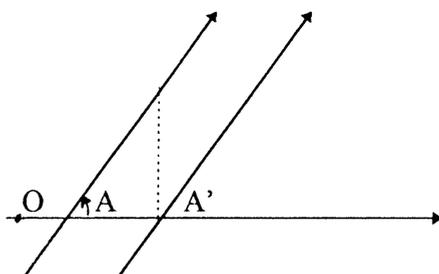
Une translation de vecteur d'abscisse t sur l'axe polaire associe à la droite z la droite z' telle que



$$z' = \tan \frac{\theta}{2} (1 + (s+t)f) = z (1 + tf)$$

Une translation de vecteur d'abscisse t' sur l'axe perpendiculaire à l'axe polaire correspond à une translation de $t' \cotan \theta$ sur l'axe polaire et transforme donc la droite z en la droite z' telle que:

$$z' = z (1 + t' \cotan \theta f)$$



$$\text{Or } f \cotan \theta = f \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \tan \frac{\theta}{2}} = f \frac{1 - z \bar{z}}{2z} = \frac{(1 - z \bar{z})f}{2z} = \frac{f}{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) \quad \text{car } zf = \bar{z}f$$

Donc

$$z' = z (1 + t' \cotan \theta f) = z + \frac{ft'}{2} - \frac{ft'z^2}{2} = \left(z + \frac{ft'}{2} \right) \left(1 - \frac{zf t'}{2} \right) = \frac{\left(z + \frac{ft'}{2} \right)}{\left(1 + \frac{zf t'}{2} \right)}$$

Donc le cas d'une translation générale de vecteur de coordonnées (t, t') correspond à la transformation complexe

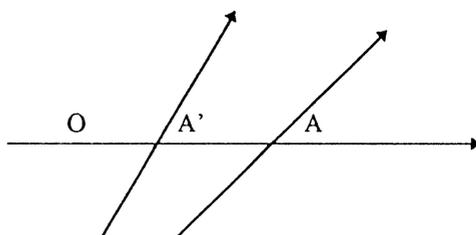
$$z' = (1 + tf) \frac{\left(z + \frac{ft'}{2} \right)}{\left(1 + \frac{zf t'}{2} \right)} = \frac{\left((1 + tf)z + \frac{ft'}{2} \right)}{\left(1 + \frac{zf t'}{2} \right)} = \frac{(1 + tf)z + \frac{ft'}{2}}{\left(1 + \frac{zf t'}{2} \right)} = \frac{p^2 z + qp}{qpz + p\bar{p}} = \frac{pz + q}{-\bar{q}z + \bar{p}}$$

en posant $p = 1 + \frac{ft}{2}$ et $q = \frac{ft'}{2}$

Effet d'une rotation de centre O et d'angle

α .

L'axe z faisant avec l'axe polaire un angle θ est transformé en un axe z' qui fait avec l'axe polaire un angle $\theta + \alpha$.



$$\text{On a } |z'| = \tan \frac{\theta + \alpha}{2} = \frac{\tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}$$

Donc (en utilisant la propriété de linéarité du module pour les nombres duaux) on a :

$$|z'| = \frac{|z| + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - |z| \tan \frac{\alpha}{2}} = \left| \frac{z + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - z \tan \frac{\alpha}{2}} \right|$$

Ceci nous incite à calculer l'argument de ce nombre dual

$$\begin{aligned} \text{Arg} \frac{z + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - z \tan \frac{\alpha}{2}} &= \text{Arg} (z + \tan \frac{\alpha}{2}) - \text{Arg} (1 - z \tan \frac{\alpha}{2}) \\ &= \text{Arg} (\tan \frac{\theta}{2} (1 + fs + \tan \frac{\alpha}{2})) - \text{Arg} (1 - \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\alpha}{2} (1 + fs)) \\ &= \frac{\tan \frac{\theta}{2} s}{\tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}} - \frac{s \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{s \tan \frac{\theta}{2} (1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2})}{(\tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2})(1 - \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{s \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\theta + \alpha}{2}} = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \end{aligned}$$

Or par la rotation, on remarque que $d = s \sin \theta = s' \sin \theta'$

$$\text{donc } \text{Arg } z' = s' = s \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = s \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)}$$

$$\text{On vient de démontrer que } z' = \frac{z + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - z \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{z + q_1}{1 - \bar{q}_1 z} \quad (\text{avec } \text{Arg } q_1 = 0).$$

La forme générale d'un déplacement est donc (en regroupant les deux paragraphes précédents)

$$z' = \frac{p \frac{z + q_1}{1 - \bar{q}_1 z} + q}{\bar{p} - \bar{q} \frac{z + q_1}{1 - \bar{q}_1 z}} = \frac{pz + pq_1 + q - q \bar{q}_1 z}{\bar{p} - \bar{p} \bar{q}_1 z - \bar{q} z - \bar{q} q_1} = \frac{z(p - q \bar{q}_1) + pq_1 + q}{\bar{p} - \bar{q} q_1 - z(\bar{q} + \bar{p} \bar{q}_1)} = \frac{Pz + Q}{\bar{P} - z \bar{Q}}$$

On démontre, et nous admettrons que réciproquement toute application de cette forme correspond à un déplacement.

Etude d'une application particulière, l'extension:

Soit l'application qui à l'axe z associe $z' = \frac{z+q}{1-qz}$ avec $q = \frac{ft}{2}$ et donc $|q| = 0$.

$$\text{On a } z' = \frac{\tan \frac{\theta}{2}(1+fs) + \frac{ft}{2}}{1 - \frac{ft}{2} \tan \frac{\theta}{2}(1+fs)} = [\tan \frac{\theta}{2}(1 + f(s + \frac{t}{2} \tan \frac{\theta}{2}))][1 - \frac{t}{2} \tan \frac{\theta}{2} f]^{-1}$$

$$z' = [\tan \frac{\theta}{2}(1 + f(s + \frac{t}{2} \tan \frac{\theta}{2}))][1 + \frac{t}{2} \tan \frac{\theta}{2} f]$$

$$z' = \tan \frac{\theta}{2}(1 + f(s + \frac{t}{2}(\cotan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2})))$$

$$z' = \tan \frac{\theta}{2}(1 + f(s + t \frac{1}{\sin \theta}))$$

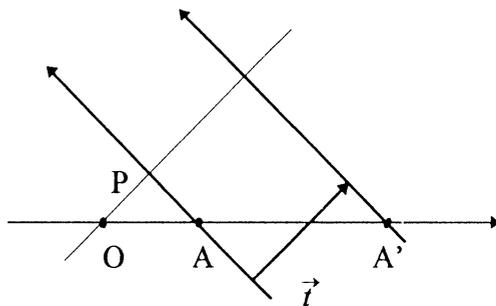
Si l'on calcule la distance de O à la nouvelle droite on a

$$s' \sin \theta' = (s + t \frac{1}{\sin \theta}) \sin \theta' = s \sin \theta' + t$$

donc

$$s' \sin \theta' = p + t$$

La droite transformée est donc construite en « translatant polairement » la droite initiale de t . On appelle cette nouvelle application une extension de paramètre t .



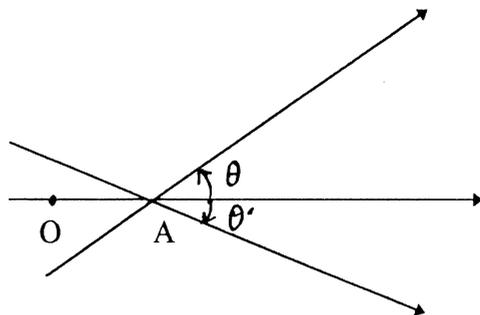
Pour finir, l'application qui à z associe $\frac{k}{z}$ avec

k un réel donné, s'appelle une inversion axiale de pôle O et de puissance k .

Les deux équations

$|z'| |z| = k$ et $\text{Arg } z' = \text{Arg } z$ définissent parfaitement la droite image, elle coupe l'axe polaire au même point que la droite initiale, et

l'angle θ est défini par $\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} = k$.



Pour finir, nous laissons donc le plaisir au lecteur (qui pourra aussi se reporter à la bibliographie) de démontrer le théorème suivant, *dual* du théorème sur le groupe circulaire complexe:

Théorème: Toute transformation axiale double de la forme $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$ avec le déterminant $ad-bc$ inversible dans l'anneau des nombres doubles, est le produit d'un déplacement ou d'une inversion axiale, ou d'un déplacement et d'une extension.

Bibliographie:

- YAGLOM (Isaac Moiseevich). *Les nombres complexes et leurs applications en géométrie*, Paris: Dunod, 1966.
- CLIFFORD (William Kingdon). *Mathematical Papers* (1882); rééd Chelsea publishing company, New York, 1968.
- HAMILTON (William Rowan). On Conjugate Functions, or Algebraic Couples, as tending to illustrate generally the Doctrine of Imaginary Quantities and so confirming the Results of Mrs Graves respecting the Existence of Two independent Integers in the complete expression of an Imaginary Logarithm, *British Association Report* (1834), p.519-523; *MP3*, p.97-103.
- Marcel BERGER (*Géométrie* (5 vol.), Paris: Nathan, 1979) cite plusieurs fois Laguerre⁵ et renvoie pour ce qui concerne la géométrie des cycles à l'ouvrage *A Course of Geometry* Cambridge University Press de D. PEDOE.

⁵ « La formule de Laguerre: ce qui suit est le fruit des cogitations de Laguerre, alors sur les bancs de la taupe, pour expliquer le cours de Géométrie de son professeur, cours qui ne le satisfaisait pas. » (t.2 p.54).

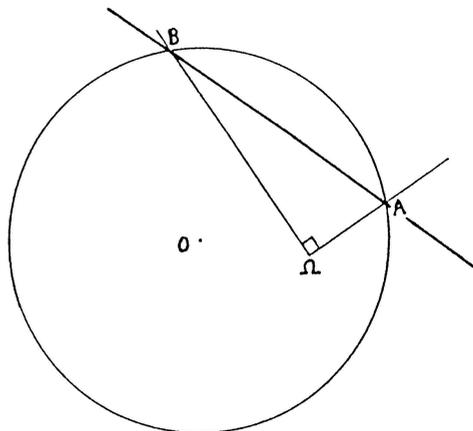
L'EQUERRE TOURNANTE: LE CAS DU CERCLE

On se propose de résoudre ici l'exercice suivant:

Etant donné un cercle C de centre O , de rayon 1; Ω point tel que $O\Omega \leq 1$; A et B deux points de C tel que

$$(\vec{\Omega A}; \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est l'enveloppe des droites (AB) ?



On procédera selon le plan suivant:

0- Dans une partie préliminaire, on rappellera ce qu'est une enveloppe de droites et comment on peut la déterminer pratiquement.

1- Puis on approchera le problème posé par des exercices élémentaires.

2- On résoudra enfin le problème dans le cas où $O\Omega < 1$.

0. Notions d'enveloppes de droites.

0.1 Définitions:

Etant donnée une famille de droites $(\Delta_u)_{u \in I}$, I désignant un intervalle réel, on dit que C est « une courbe enveloppant les droites (Δ_u) » quand toute droite Δ_u est tangente en un point de C et si toute tangente à C est une droite de la famille $(\Delta_u)_{u \in I}$.

Remarque: C peut naturellement être paramétrée à l'aide du paramètre u . On peut même en suivant la définition précédente, construire une bijection entre les points $M(u)$ de C et les droites (Δ_u) tangentes à C en $M(u)$. On appelle $M(u)$ le point « caractéristique » de l'enveloppe C .

Exemple: Etant donnés deux réels strictement positifs a et b la famille de droites d'équations cartésiennes $\frac{x \cos u}{a^2} + \frac{y \sin u}{b^2} = 1$, avec $u \in \mathbb{R}$, a pour enveloppe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

0.2 Détermination pratique.

Théorème: La famille $(\Delta_u)_{u \in I}$ d'équation générale

$$x \cdot \lambda(u) + y \cdot \mu(u) + \gamma(u) = 0,$$

λ, μ, γ , étant trois fonctions définies et de classe C^∞ sur un intervalle I de \mathbb{R} , admet en général une enveloppe C engendrée, lorsque u varie, par le point commun à Δ_u et à la droite Δ_u' associée dont l'équation

$$x.\lambda'(u) + y.\mu'(u) + \gamma'(u) = 0$$

est obtenue en annulant la dérivée par rapport à u du premier membre de l'équation de Δ_u ...

Démonstration: nous allons pour des raisons pratiques écrire la démonstration dans le plan projectif en associant à tout point M ses coordonnées homogènes (x,y,z) .

Pour tout réel u fixé de I , l'équation de Δ_u est alors $x.\lambda(u) + y.\mu(u) + z.\gamma(u) = 0$.

On a donc $M \in \Delta_u \Leftrightarrow \vec{F}(u). \vec{N}(u) = 0$ (*).

Supposons d'abord qu'il existe une paramétrisation $\vec{F}(u) (\alpha(u), \beta(u), \gamma(u))$, \vec{F} étant une fonction dérivable sur I , de l'enveloppe C déterminée par la famille de droites $(\Delta_u)_{u \in I}$.

Pour tout point M de l'enveloppe C il existera donc un réel u et une droite Δ_u tel que Δ_u est la tangente en M à C et $\vec{OM} = \vec{F}(u)$. Soit $\vec{N}(u)$ la fonction vectorielle de classe C^∞ sur I définie par $\vec{N}(u) (\lambda(u), \mu(u), \nu(u))$.

On a donc en dérivant (*) $\vec{F}'(u). \vec{N}(u) + \vec{F}(u). \vec{N}'(u) = 0$.

Par définition $\vec{F}'(u)$ est nul ou directeur de Δ_u , ce qui donne $\vec{F}'(u). \vec{N}(u) = 0$.

Finalement le point M est déterminé par les deux égalités $(\Sigma) \begin{cases} \vec{F}(u). \vec{N}(u) = 0 \\ \vec{F}'(u). \vec{N}(u) = 0 \end{cases}$..

Réciproquement si le système possède une solution¹ unique $\vec{F}(u)$, on déterminera par cette fonction une courbe paramétrée qui répondra entièrement au problème posé.

Il ne reste plus qu'à traduire analytiquement (en coordonnées ordinaires le système (Σ) pour obtenir le théorème.

1. Exercices d'approche.

1.1 L'expérience nous laissant penser que l'enveloppe en question est une ellipse, nous appelons désormais (E) cette solution conjecturée et nous allons commencer par nous intéresser aux positions particulières que peut prendre la droite (AB).

Dans toute la suite, on considère un repère orthonormal, (O, \vec{i}, \vec{j}) direct, O désignant le centre du cercle (C), de sorte que Ω ait pour coordonnées $(\alpha, 0)$ et $\alpha \in [0, 1]^2$.

1^{er} cas particulier:

(AB) parallèle à l'axe des ordonnées; deux positions sont envisageables comme les indique la figure 2 ci-contre.

Dans le triangle isocèle ΩHA rectangle en H :

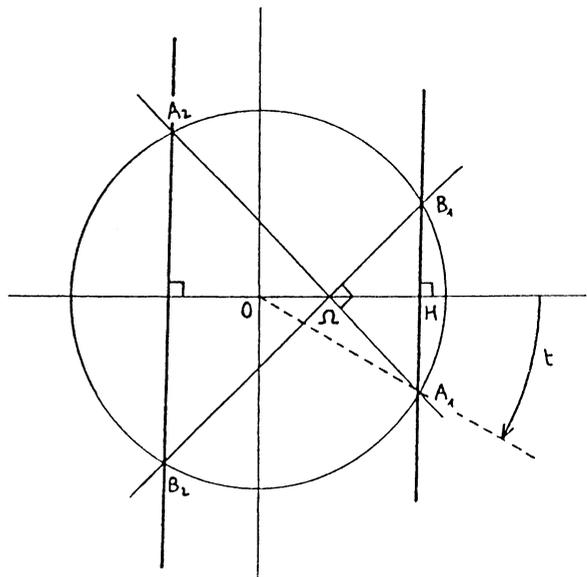
$$2 \Omega H^2 = \Omega A^2$$

La formule d'Al-Kashi, appliquée convenablement dans le triangle ΩOA nous permet d'écrire d'autre part:

$$\Omega A^2 = \Omega O^2 + OA^2 - 2 \Omega O \Omega A \cos t$$

où $t = ((\vec{O\Omega}, \vec{OA}))$

On définit: $2 \Omega H^2 = 1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos t$



¹ On peut remarquer, que lorsque cette solution correspond à $z=0$, on ne trouve pas un point de l'enveloppe mais une asymptote.

² On pourra vérifier que les calculs des pages suivantes ne souffriraient pas de l'hypothèse $\alpha \in [-1, 1]$. Le seul cas vraiment gênant est $|\alpha| = 1$.

Comme enfin: $\Omega H^2 = AH^2 = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, on peut affirmer que $\cos t$ est solution de l'équation: $2x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$ qui a pour discriminant (réduit) $\delta = 2 - \alpha^2$ toujours strictement positif puisque $\alpha^2 < 1$ et qui a donc deux solutions réelles distinctes $\frac{\alpha \pm \sqrt{2 - \alpha^2}}{2}$. Il est alors aisé de vérifier que

la fonction définie par $g(x) = \frac{x + \varepsilon \sqrt{2 - x^2}}{2}$ (avec $\varepsilon = \pm 1$)

est croissante sur $[0, 1]$ et varie de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1 pour $\varepsilon = 1$ et de $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ à 0 pour $\varepsilon = -1$.

Ce qui nous autorise la conclusion suivante: il existe toujours deux solutions en t telles que $\cos t = \frac{\alpha \pm \sqrt{2 - \alpha^2}}{2}$.

Remarques: (1) si on prend par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, autrement dit si Ω est au milieu d'un rayon de (C) , on obtient la valeur suivante $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$ que l'on croirait sortie d'une vieille malle en osier du grenier...etc.

(2) On vient de déterminer -tout au moins on l'imagine- la position des tangentes verticales de l'ellipse (E) et par là, son centre m , dont les coordonnées sont $(\frac{\alpha}{2}, 0)$ (demi-somme des solutions précédentes). Le point m est donc tout simplement le milieu de $[O, \Omega]$.

(3) Dans le cas $\alpha = 1$, le point Ω appartient au cercle (C) , la droite (AB) est un diamètre et contient toujours le point O qu'elle « enveloppe ».

2^{ème} cas particulier:

(AB) parallèle à l'axe des abscisses:

Ici l'on a

$$\begin{aligned} OK^2 &= \Omega K^2 - O\Omega^2 \text{ (dans le triangle } O\Omega K) \\ &= OA^2 - AK^2 \text{ (dans le triangle } OKA) \end{aligned}$$

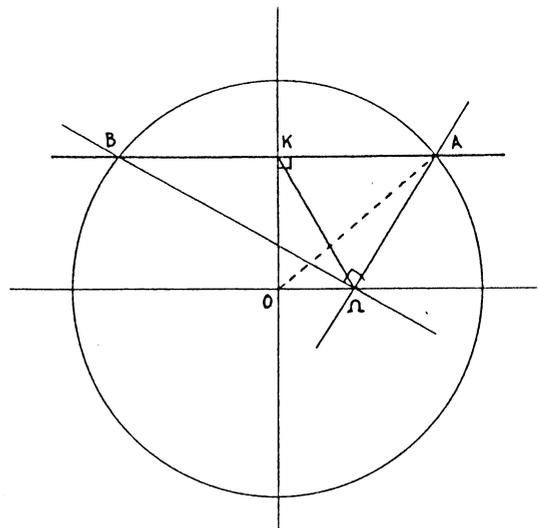
Or puisque K est le centre du cercle circonscrit au triangle $A\Omega K$ $\Omega K^2 = AK^2$

On en déduit

$$OK^2 = (OA^2 - OK^2) - O\Omega^2$$

et finalement $OK^2 = \frac{1 - \alpha^2}{2}$

$$OK = \pm \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{2}}$$



Remarques: (1) pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $OK = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$?

(2) On vient de déterminer ce qui sera la position des tangentes horizontales à (E) , ie les demi-axes verticaux.

Récapitulation.

(E) doit avoir pour équation cartésienne réduite

$$\frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{(2-\alpha^2)}{4}} + \frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = 1$$

* On observe que les foyers sont situés en O et Ω !

En effet si l'on pose $a = \frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ et $b = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}}$

, on a bien, toujours, $a > b$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\alpha}{2}$

* cas particuliers: (1) $\alpha = 0$ (ie Ω au centre O) l'équation devient $2x^2 + 2y^2 = 1$, c'est-à-dire celle du cercle de centre O , de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient l'ellipse $\frac{16}{7} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{8}{3} y^2 = 1$ (en voilà une qui mérite peut-être qu'on la présente à nos joyeux élèves curieux de TS option spécialité maths!).

(3) $\alpha = 1$ (Ω est sur le cercle), on obtient $y = 0$ et le rayon-segment $[O\Omega]$ comme ellipse aplatie. Ceci prouve la non continuité du phénomène puisque dans ce cas nous devrions trouver un point comme nous l'avons vu au numéro 3 des remarques de la page précédente.

1.2. Le problème posé n'a pas manqué de nous renvoyer à nos classiques. Dans tout bon manuel de TS, on trouve les exercices suivants:

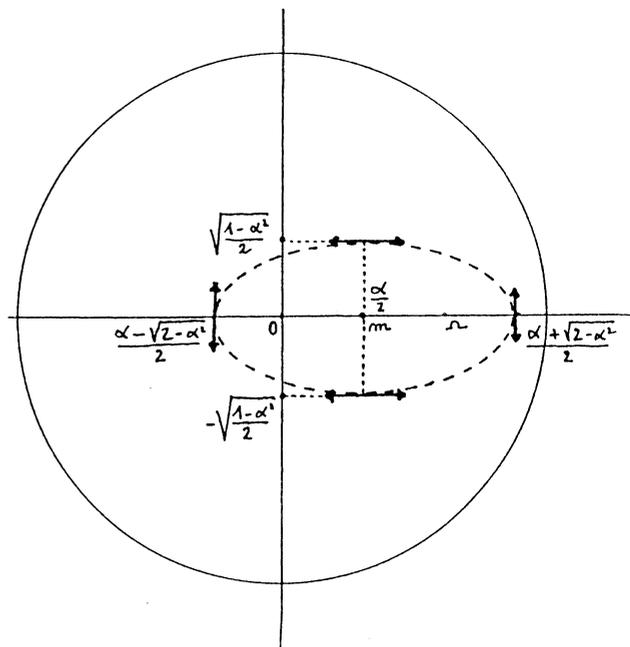
1.2.1

« Etant donné un cercle $C(O;1)$, Ω un point du plan tel que $O\Omega < 1$, Δ et D deux droites perpendiculaires en Ω coupant C , respectivement en A, A' , et B, B'

(on peut bien sûr choisir $(\vec{\Omega A}; \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}$).

on démontre que la médiane du triangle ΩAB issue de Ω est la hauteur du triangle $\Omega A'B'$. »

Cet exercice se résout très bien à l'aide du produit scalaire et, par exemple, après une introduction en douceur de la notion de puissance par rapport à un cercle.



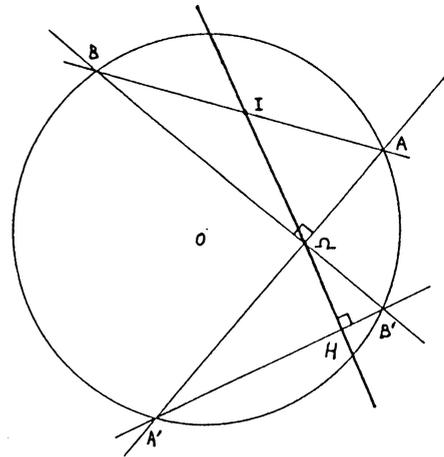
En effet on pourra écrire:

$$\vec{\Omega I} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega A} + \vec{\Omega B})$$

puis

$$\begin{aligned} \vec{\Omega I} \cdot \vec{A'B'} &= \frac{1}{2} (\vec{\Omega A} + \vec{\Omega B}) \cdot (\vec{\Omega B'} - \vec{\Omega A'}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{\Omega B} \cdot \vec{\Omega B'} - \vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A'}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A'} = \vec{\Omega B} \cdot \vec{\Omega B'} = \alpha^2 - 1$, appelée puissance du point Ω par rapport au cercle C .



1.2.2

Avec les mêmes hypothèses que celles de l'exercice 1.2.1 « Quel est le lieu des points I milieu de $[AB]$ quand le point A parcourt le cercle C . (on fait donc tourner l'équerre (AA', BB') autour de Ω !) »

Ceci est une application reconnue de la leçon sur les « lignes de niveaux ».

On écrit

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 = OI^2 + I\Omega^2 \quad (\text{avec } OA=1)$$

On appelle m le milieu de $[O\Omega]$ pour écrire la formule de la médiane:

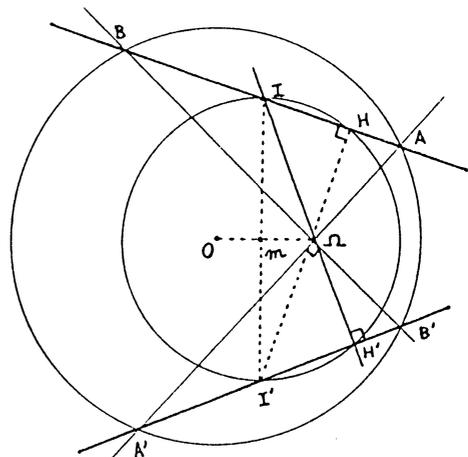
$$Im^2 = \frac{1}{2} (OI^2 + I\Omega^2) - \frac{1}{4} O\Omega^2$$

On obtient

$$mI^2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{2-\alpha^2}{4}$$

Donc I appartient³ au cercle γ de centre m et de rayon $\frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$

Remarque: * On retrouve en la personne de Ω un visage connu; en 1.1 on a rencontré l'équation $2x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$ qui avait pour solution $\frac{\alpha \pm \sqrt{2-\alpha^2}}{2}$. On se laisse aller à comprendre que γ est le cercle principal de l'ellipse (E) .



1.2.3

Avec les hypothèses et notations que de l'exercice 1.2.1 « Quel est le lieu des points H , pied de la hauteur issue de Ω dans le triangle ΩAB , quand le point A parcourt le cercle C . (cf figure précédente)? »

En fait, pourquoi se le cacher plus longtemps ce lieu est le même qu'au 1.2.2.

³ Nous laissons au lecteur le soin d'étudier la réciproque (tout point du cercle peut-être représenté par un point I) et de voir où intervient la commutativité du corps de base.

En effet,

$$\begin{aligned} (OI) \perp (AB) & \quad (\text{propriété de médiatrice}) \\ (\Omega I') \perp (AB) & \quad (\text{ex 1.2.1}) \end{aligned}$$

donc les droites $(\Omega I')$ et (OI) sont parallèles et puisque de la même façon on montre que (ΩI) et (OI') le sont également ($(OI') \perp (A'B')$ et $(\Omega I) \perp (A'B')$) le quadrilatère $(OIOI')$ est un parallélogramme; mais dans ce cas, m , le milieu de $[O\Omega]$ devient le milieu de $[II']$, $[II']$ devient un diamètre de γ et puisque H (ou H') est tel que IHI' est rectangle en H (ou H'), on a bien H sur le cercle γ .

Réciproquement si H est un point du cercle γ , on trace la perpendiculaire à (ΩH) passant par H . Elle coupe le cercle initial en A et B , et recoupe le cercle γ en I (éventuellement confondu avec H). Le point I est d'après la réciproque de l'exercice précédent le milieu de l'hypoténuse du triangle ΩAB qui est nécessairement rectangle. Ceci reconstruit parfaitement le problème.

2. Résolution du problème initial.

2.1. Equation de (AB) .

Pour résoudre analytiquement un tel problème d'enveloppes de droites, il nous faut une équation paramétrée de la droite variable (AB) . Or si l'on procède de façon triviale en cherchant les coordonnées de A et B -surtout de B - en fonction par exemple de $u = (\vec{i}; \vec{OA})$, on obtient des calculs qui décourageraient le plus opiniâtre.

Mais la chance nous sourit avec le point H qui est sur (AB) et dont les coordonnées sont de la

forme
$$\begin{cases} r \cos \theta + \frac{\alpha}{2} \\ r \sin \theta \end{cases} \quad \text{où } \theta = (\vec{i}; m\vec{H}) \text{ et } r = \frac{\sqrt{2-\alpha^2}}{2}. (\text{cf exercice 3})$$

On en déduit que $\vec{\Omega H} \begin{pmatrix} r \cos \theta - \frac{\alpha}{2} \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$, vecteur orthogonal à (AB) et donc l'équation de (AB) :

$$(r \cos \theta - \frac{\alpha}{2})(r \cos \theta + \frac{\alpha}{2} - x) + (r \sin \theta)(r \sin \theta - y) = 0$$

ie

$$x(r \cos \theta - \frac{\alpha}{2}) + y(r \sin \theta) = r^2 - \frac{\alpha^2}{4} \quad (= \frac{1-\alpha^2}{2})$$

du type $x \cdot \lambda(\theta) + y \cdot \mu(\theta) = \gamma(\theta)$ la fonction γ ne dépendant pas de θ .

2.2 Résolution analytique du problème initial.

On considère alors le système $(\Sigma) \begin{cases} \lambda(\theta) + y \mu(\theta) = \gamma(\theta) \\ \lambda'(\theta) + y \mu'(\theta) = \gamma'(\theta) \end{cases}$

ici
$$(\Sigma) \begin{cases} x(r \cos \theta - \frac{\alpha}{2}) + y(r \sin \theta) = \frac{1-\alpha^2}{2} \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = 0 \end{cases}$$

qui donne les coordonnées du point caractéristique M [de (E)] en fonction de θ .

On note que le déterminant du système (Σ) est $\Delta = \frac{r}{2} (2r - \alpha \cos \theta)$ et que ce réel n'est jamais

nul sauf⁴ pour $\left\{ \begin{array}{l} \alpha=1 \\ r=1 \\ \theta=0 \end{array} \right.$ (En effet $\left. \begin{array}{l} 2r = \sqrt{2-\alpha^2} > 1 \\ |\alpha \cos \theta| < 1 \end{array} \right\}$ pour $\alpha \in [0, 1[$).

On peut alors écrire le couple solution: $\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = \cos \theta \frac{1-\alpha^2}{2r - \alpha \cos \theta} \\ y(\theta) = \sin \theta \frac{1-\alpha^2}{2r - \alpha \cos \theta} \end{array} \right.$

et ensuite la norme du vecteur \vec{OM} $\rho(\theta) = \frac{1-\alpha^2}{2r - \alpha \cos \theta}$

(en insistant sur le fait que d'après la remarque précédente $2r - \alpha \cos \theta > 0$)

On reconnaît l'équation polaire⁵ d'une ellipse dont un des foyers est l'origine du repère (ici O)

de référence et dont l'excentricité est $e = \frac{\alpha}{2r}$.

Remarque: On peut éviter le passage aux coordonnées polaires en reprenant l'équation trouvée au paragraphe récapitulation du 1.1.

$$\frac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{\frac{(2-\alpha^2)}{4}} + \frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = 1$$

pour vérifier que $x(\theta)$ et $y(\theta)$ vérifient cette équation quel que soit le réel θ , par exemple comme suit

$$\frac{(x-\frac{\alpha}{2})^2}{r^2} = \frac{(2r \cos \theta - \alpha)^2}{(2r - \alpha \cos \theta)^2} \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{\frac{(1-\alpha^2)}{2}} = \frac{2(1-\alpha)^2 \sin^2 \theta}{(2r - \alpha \cos \theta)^2}$$

$$\text{et } (2r - \alpha \cos \theta)^2 - (2r \cos \theta - \alpha)^2 = (2r - \alpha)(1 + \cos \theta) (2r + \alpha)(1 - \cos \theta) = 2(1 - \alpha^2) \sin^2 \theta$$

car $4r^2 = 2 - \alpha^2 \dots$

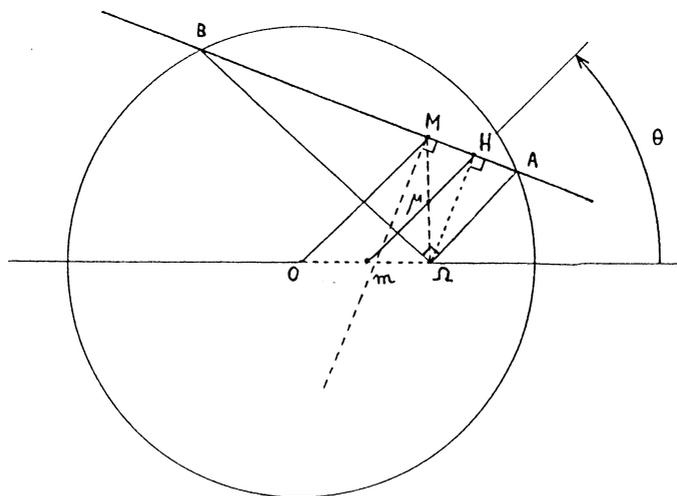
2.3 Autre résolution.

On peut même éviter ce calcul cartésien pour procéder -disons- plus géométriquement. Mais pour cela il faut reprendre le calcul au niveau du système (Σ) non encore résolu; la deuxième équation de (Σ) est celle d'une droite parallèle à (mH) (dont un vecteur directeur est bien \vec{u} $(\cos \theta, \sin \theta)$ et passant par O , ce qui nous permet d'affirmer que le point caractéristique M est à l'intersection de (AB) et de la parallèle à (mH) passant par O (d'où une construction géométrique!)

Considérons alors la perpendiculaire à (AB) en M , que nous appelons (δ) de vecteur directeur $\vec{M\delta}$.

⁴ Nous laissons au lecteur concentré le plaisir de juger cette situation critique.

⁵ L'équation en polaire d'une conique dont un foyer est O est de la forme $\rho = \frac{ed}{1 \pm e \cos(\theta)}$ avec d qui représente la distance de O à la directrice associée au foyer.



On a bien $(OM) \parallel (mH)$ et $(\delta) \parallel (\Omega H)$, donc:

$$(1) (\vec{MO}; \vec{M}\delta) = (\vec{Hm}; \vec{H}\Omega) \quad [\pi] \quad (\text{angles « correspondants »})$$

$$(2) (\vec{M}\delta; \vec{M}\Omega) = (\vec{\Omega H}; \vec{\Omega M}) \quad [\pi] \quad (\text{angles « alternes internes »})$$

De plus, dans le triangle $O\Omega M$, la droite (mH) projette le milieu m de $[O\Omega]$ sur le milieu μ de $[\Omega M]$, centre du cercle circonscrit au triangle ΩMH rectangle en H .

On en déduit l'égalité

$$(3) (\vec{\Omega M}; \vec{\Omega H}) = (\vec{H}\Omega; \vec{Hm}) \quad [\pi] \quad (\text{triangle isocèle } \mu\Omega H)$$

(1) (2) (3) nous permettent d'écrire

$$(\vec{MO}; \vec{M}\delta) = (\vec{M}\delta; \vec{M}\Omega) \quad [\pi]$$

Donc δ est bissectrice de $(\vec{MO}; \vec{M}\Omega)$ et par conséquent (AB) est aussi l'une des bissectrices du même angle.

La droite (AB) ne coupant⁶ pas le segment $[O\Omega]$, on conclut que δ est la bissectrice intérieure de $(\vec{MO}; \vec{M}\Omega)$.

On se propose enfin de montrer que la fonction: $\phi: \theta \rightarrow OM(\theta) + \Omega M(\theta)$ est constante.

Rappel: Soit $\vec{\varphi}$ une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et ne s'annulant pas sur I , alors la fonction $f: \theta \rightarrow \|\vec{\varphi}(\theta)\|$ est dérivable sur I et $f'(\theta) = \frac{\vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta)}{\|\vec{\varphi}(\theta)\|}$.

⁶ Il suffit de faire $y=0$ dans l'équation de (AB) .

En effet, pour tout θ fixé la fonction $\vec{\varphi}$ admet un développement limité à l'ordre 1 au point θ : $\varphi(\theta+h) = \varphi(\theta) + h \vec{\varphi}'(\theta) + o(h)$, que l'on peut développer selon le carré scalaire pour obtenir:

$$\begin{aligned} f(\theta+h) &= \sqrt{\vec{\varphi}(\theta+h) \cdot \vec{\varphi}(\theta+h)} = \sqrt{[\vec{\varphi}(\theta) + h \vec{\varphi}'(\theta) + o(h)]^2} \\ &= \sqrt{[\vec{\varphi}^2(\theta) + 2h \vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta) + o(h)]} \\ &= \sqrt{\vec{\varphi}^2(\theta)} \sqrt{1 + \frac{2h \vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta)}{\vec{\varphi}^2(\theta)} + o(h)} \\ &= \|\vec{\varphi}(\theta)\| \left(1 + \frac{h \vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta)}{\vec{\varphi}^2(\theta)} + o(h)\right) \quad (\text{en utilisant un développement de la racine}) \\ &= \|\vec{\varphi}(\theta)\| + \frac{h \vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta)}{\|\vec{\varphi}(\theta)\|} + o(h) \end{aligned}$$

Ainsi $f(\theta+h) = f(\theta) + \frac{h \vec{\varphi}(\theta) \cdot \vec{\varphi}'(\theta)}{\|\vec{\varphi}(\theta)\|} + o(h)$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en θ et est donc dérivable en θ , pour tout réel θ , c'est-à-dire dérivable sur I .

La fonction $\theta \rightarrow OM(\theta)$ est dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule pas, la fonction $\phi_1 : \theta \rightarrow OM(\theta)$ est donc dérivable sur \mathbb{R} et a comme dérivée $\phi_1'(\theta) = \frac{OM(\theta) \cdot OM'(\theta)}{OM(\theta)}$

On a le même résultat avec la fonction $\phi_2 : \theta \rightarrow \Omega M(\theta)$ $\phi_2'(\theta) = \frac{\Omega M(\theta) \cdot \Omega M'(\theta)}{\Omega M(\theta)}$, si l'on a remarqué que OM et ΩM avait la même dérivée $OM'(\theta)$ puisque $\Omega M = \Omega O + OM$.

Appelons \vec{u} (resp \vec{v}) le vecteur $\frac{OM(\theta)}{OM(\theta)}$ unitaire (resp $\frac{\Omega M(\theta)}{\Omega M(\theta)}$). Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dirige la bissectrice intérieure de $(\vec{MO}; \vec{M}\Omega)$ alors que par définition de l'enveloppe, en tout point régulier $OM'(\theta)$ dirige (AB) . Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $OM'(\theta)$ sont donc orthogonaux et

$$\phi'(\theta) = \phi_1'(\theta) + \phi_2'(\theta) = \frac{OM(\theta) \cdot OM'(\theta)}{OM(\theta)} + \frac{\Omega M(\theta) \cdot \Omega M'(\theta)}{\Omega M(\theta)} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot OM'(\theta) = 0$$

On a ainsi pour tout réel θ , $OM(\theta) + \Omega M(\theta) = C^{te}$, c'est-à-dire que le point M appartient à une ellipse de foyers O et Ω .

**ETUDE DE LA SERIE HARMONIQUE ALTERNEE : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,
CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES**

Le texte qui suit a été proposé en devoir à la maison en classe de Terminale D en 1993-1994. Une première version avait été proposée en Terminale C en 1991-1992. L'expérience a montré que ceci est trop difficile pour des élèves moyens. Quoiqu'il en soit la non commutativité de certaines sommes infinies est une découverte pour les élèves (comme cela l'a été pour nous!).

Devoir de mathématiques-fiction où l'on "démontrera" que :

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 = +\infty!$$

Soit la suite h définie par : $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1) a) Soit k un entier naturel non nul , établir l'encadrement suivant: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire les encadrements: $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq h_n$
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq h_n \leq \ln n + 1$

c) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$

d) Déterminer un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, h_n \geq 100$

Combien de temps mettra votre calculatrice pour calculer h_{n_0} ?

2) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit S_n la somme de ses n premiers

termes : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Programmer sur une calculatrice (ou sur un micro-ordinateur!) la suite S_n et calculer des valeurs approchées à 10^{-6} près de $S_{100}, S_{200}, \dots, S_{1000}$

Enoncer alors une conjecture concernant la somme infinie :

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

b) Etablir l'égalité: $\forall t > -1, \frac{1}{t+1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{t+1}$

En déduire alors : $\forall x > 0, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{t+1} dt$

puis que : $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{t+1} dt$

c) Etablir l'encadrement : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt$

En déduire un encadrement de $|\ln 2 - S_n|$ et la convergence de S_n puis calculer sa limite

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = h_{2n} - h_n$

3) On se propose maintenant de changer l'ordre des termes ; on les regroupe de la façon suivante : deux termes positifs puis un terme négatif et ainsi de suite :

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

On note $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ chaque groupe de trois termes ainsi défini.

a) Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$

b) Soit $S'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, programmer le calcul de S'_n sur une calculatrice (ou sur un micro-ordinateur!) et déterminer des valeurs approchées de: $S'_{100}, S'_{200}, \dots, S'_{1000}$. Que constate-t-on?

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S'_n = h_{4n} - \frac{1}{2}(h_{2n} + h_n) = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n}$

En déduire la valeur de la somme infinie précédente.

Retrouver alors le résultat précédent.

4) On change à nouveau l'ordre des termes de la façon suivante:

- un terme positif et un terme négatif,
- deux termes positifs et un terme négatif,
- trois termes positifs et un terme négatif,
- ...et ainsi de suite :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

On note : $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ les groupes de termes ainsi définis.

a) Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall n > 1, w_n &= \frac{1}{n^2 - n + 1} + \frac{1}{n^2 - n + 3} + \frac{1}{n^2 - n + 5} + \dots + \frac{1}{n^2 - n + (2n-1)} - \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 - n + 2k - 1} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

b) Etablir alors les inégalités:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, w_n &\geq \frac{n}{n^2 + n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ \forall n \geq 3, w_n &\geq \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

c) Que peut-on alors dire de la somme infinie précédente?

5) Que pensez-vous des trois résultats obtenus?

Remarques:

- Les formules demandées aux questions 2d, 3a, 3c, 4a peuvent être démontrées par récurrence... mais c'est bien plus "beau" par un calcul direct (regroupement de termes).
- Ce problème a été écrit à l'aide du livre : "Les contre-exemples en analyse" publié aux éditions Ellipses.

Cet article est extrait de celui publié dans le bulletin de la régionale de Haute Normandie de l'APMEP (n°8 : mars 1996)

1. Le paradoxe:

Il s'agit d'un paradoxe "classique" en probabilité. On en trouve un énoncé dans certains livres de Terminale dans le chapitre consacré aux probabilités conditionnelles. Par exemple dans le livre de la collection Terracher (Analyse Terminales C et E , ex 71P.280), on donne l'énoncé suivant

*Trois prisonniers partagent une cellule. Ils savent que deux d'entre eux seront exécutés et le troisième gracié, mais ne savent pas qui .
L'un d'entre eux demande au gardien : " Je sais que tu n'as pas le droit de me dire qui sera gracié, mais je te demande seulement de me désigner une personne condamnée parmi mes deux camarades ".
Le gardien satisfait à sa requête et le prisonnier reprend : "Je te remercie : avant j'avais une chance sur trois d'être gracié , à présent j'ai une chance sur deux". A-t-il raison?*

Remarquons une imprécision dans cet énoncé : on ne sait pas comment le gardien choisit parmi les deux condamnés celui qu'il désignera au prisonnier. Il faut donc préciser que dans le cas où ce sont les deux camarades du prisonnier qui sont condamnés alors le gardien désignera l'un des deux "au hasard" c'est-à-dire de façon équiprobable.¹

Par ailleurs, la "solution" est donnée en fin de livre sous la forme, pour le moins énigmatique : "Il a tort, confondant la probabilité avec la probabilité conditionnelle".

En quoi consiste le paradoxe ?

Pour le prisonnier: on peut donner deux argumentations:

- il n'y a plus qu'un condamné à choisir parmi deux individus donc il a une chance sur deux d'être condamné;
- l'information donnée par le gardien ne modifie en rien sa probabilité d'être condamné puisque de toutes façons le gardien ne désignera jamais le prisonnier comme condamné, sa probabilité d'être condamné sachant l'information donnée par le gardien reste donc identique à la probabilité initiale : $1/3$.

J'ai proposé une version moins "violente" de ce paradoxe en classe de Première S au début de cette année scolaire:

"Un drôle de jeu :

A la télévision américaine², s'est déroulé le jeu suivant: Un candidat doit choisir entre trois portes numérotées 1;2;3: derrière l'une d'entre elles se trouve un somptueux cadeau qui sera

¹ On pourra cependant établir dans ce cas, que, quel que soit le mode de décision du gardien, la stratégie optimale pour le joueur reste la même

² Notons qu'un tel jeu pourrait se dérouler sur une chaîne de télévision française!

remis au candidat s'il a choisi cette porte. La porte derrière laquelle se trouve le cadeau est appelée "bonne" porte ; les deux autres sont appelées "mauvaises" portes. Toutefois, dès que le candidat a effectué son choix, l'animateur ouvre devant lui une mauvaise porte, différente de celle qu'il a choisie. Dans le cas où le candidat a choisi la bonne porte, l'animateur ouvre au hasard l'une des deux portes restantes. Le candidat a alors la possibilité de modifier son choix et de choisir la porte fermée restante. On souhaite déterminer une tactique pour ce candidat.

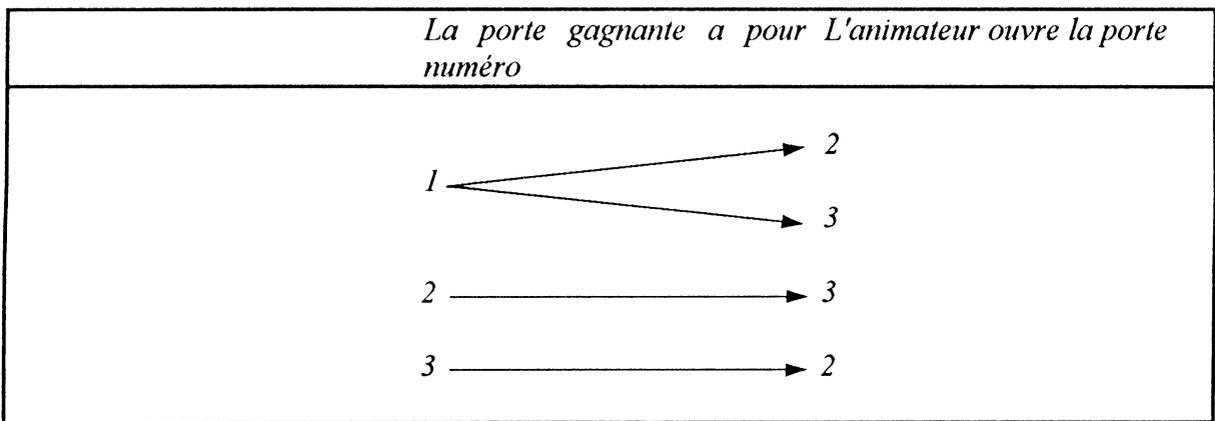
Albert dit : " Dès que l'animateur a ouvert une mauvaise porte ; il ne reste plus que deux portes possibles : celle que le candidat a choisie initialement et une autre , donc qu'il modifie ou non son choix ne change rien : il a une chance sur deux de gagner dans les deux cas".

Evariste dit : "Si le joueur ne modifie pas son choix ,pour gagner il doit choisir la bonne porte dès le début , donc il a dans ce cas une chance sur trois de gagner. Par conséquent s'il modifie son choix il a deux chances sur trois de gagner. Il a donc intérêt à modifier son choix".

1) Que pensez-vous de ces deux argumentations?

2) Supposons que le joueur choisisse la porte n°1.

2.1) Compléter l'arbre suivant:



2.2) En déduire la probabilité des événements :

- "L'animateur ouvre la porte n°2"

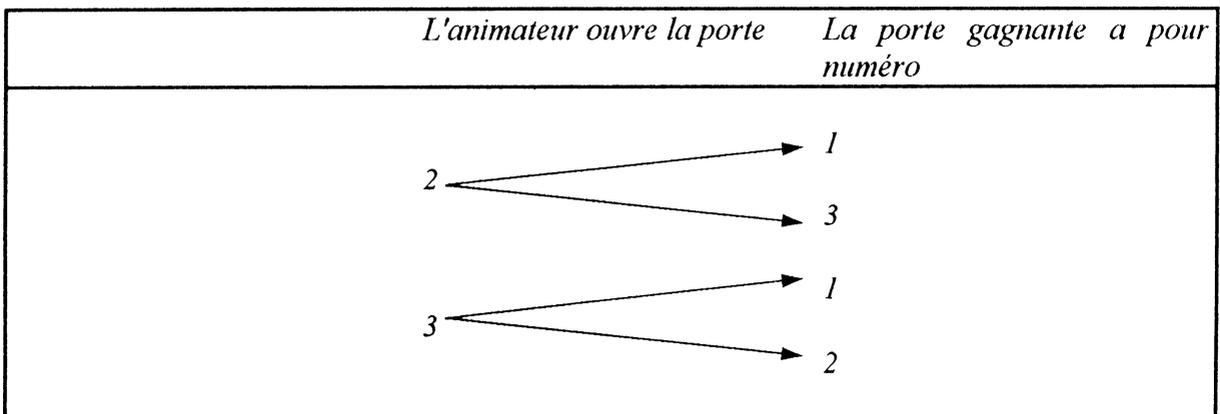
- "L'animateur ouvre la porte n°3"

2.3)

2.3.1) Compléter alors l'arbre suivant, en notant:

p : la probabilité que la porte n°1 soit gagnante lorsque l'animateur ouvre la porte n°2

q : la probabilité que la porte n°1 soit gagnante lorsque l'animateur ouvre la porte n°3



2.3.2) Calculer p et q en utilisant les deux arbres.

2.3.3) En déduire les probabilités de l'événement : "le joueur gagne" dans les deux cas :
- le joueur modifie son choix
- le joueur ne modifie pas son choix.

2. Une solution: laissée au lecteur...(ce n'est pas un plagiat de M. Berger dans ses livres de Géométrie). Les calculs sont élémentaires mais n'ont pas convaincu les élèves qui avaient tous conjecturé qu'Albert avait raison.

Au lieu d'utiliser les calculs pour infirmer cette conjecture ...ils ont utilisé cette conjecture pour effectuer leurs calculs!

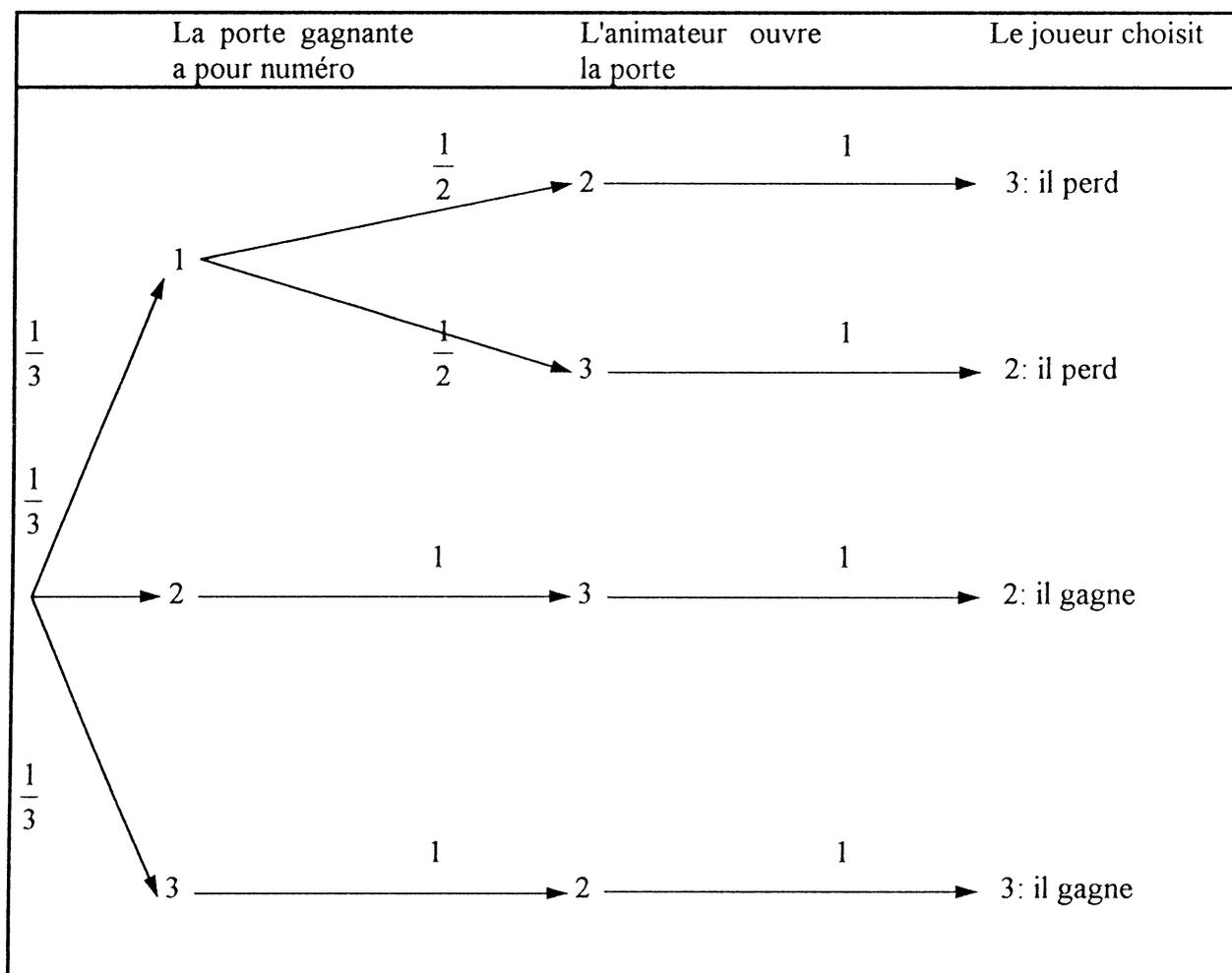
Autrement dit ils ont cherché des moyens pour arriver à la conclusion qu'ils avaient déterminée à l'avance ce qui est à l'inverse d'une démarche scientifique ... mais fréquent dans "la vie de tous les jours"... et dans certains débats.

3. Comment convaincre les élèves?

3.1 Encore un arbre!:

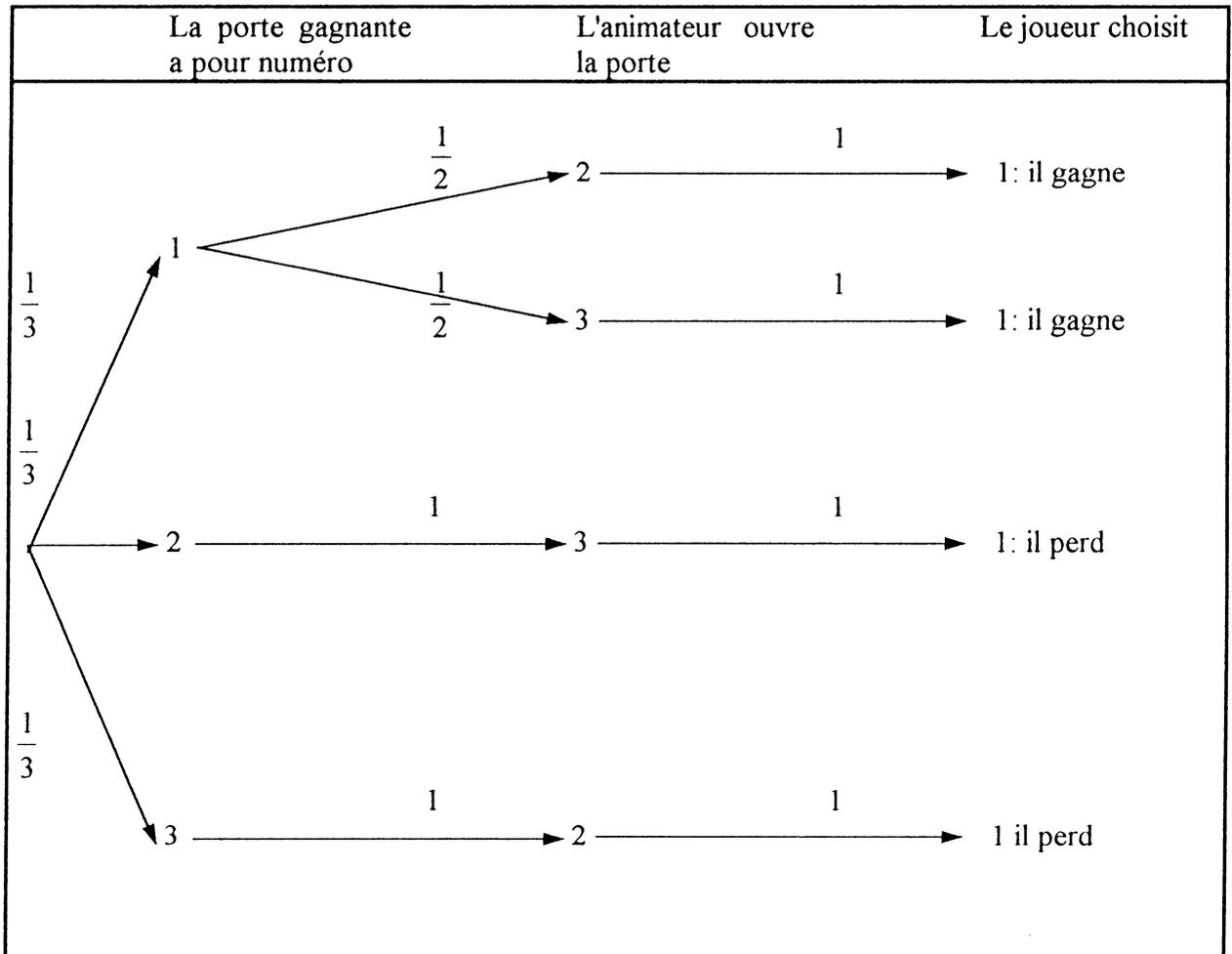
On peut effectuer un arbre pour prouver ce résultat :

1ère stratégie: le joueur modifie systématiquement son choix initial :



D'où : la probabilité que le joueur gagne en suivant cette stratégie est : $\frac{1}{3} \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{2}{3}$

2ème stratégie: le joueur ne modifie jamais son choix initial :



D'où : la probabilité que le joueur gagne en suivant cette stratégie est : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$

3.2. La calculatrice pour simuler... et démontrer!

Les calculatrices disposent toutes d'une touche *Ran#* qui renvoie "au hasard" un nombre décimal compris (au sens large) entre 0 et 0,999, ce nombre comportant 3 décimales.

On obtient donc un nombre entier entre 1 et n (au sens large) de façon équiprobable en utilisant : $\text{Int}(n \cdot \text{Ran}\#) + 1$, où *Int* désigne la partie entière.

Voici un algorithme permettant de simuler les deux stratégies du joueur.

Pour N essais :

- A désigne la porte gagnante
- O désigne la porte ouverte par l'animateur
- J désigne la porte choisie finalement par le joueur
- I désigne le nombre d'essais effectués:

G désigne le nombre d'essais gagnants

P désigne le nombre d'essais perdus

Affecter la valeur 0 à I,G,P

REPETER

Choisir au hasard la valeur de A parmi {1;2;3}

Si A=1 alors choisir au hasard la valeur de O parmi {2;3}

Si A=2 alors affecter à O la valeur 3 :

Si A=3 alors affecter à O la valeur 2 :

{Lorsque le joueur modifie systématiquement son choix initial:}

Si O=2 alors affecter à J la valeur 3

Si O=3 alors affecter à J la valeur 2

Si A=J alors ajouter 1 à G

Si A≠J alors ajouter 1 à P

Ajouter 1 à I

{Lorsque le joueur conserve son choix initial:}

Affecter à J la valeur 1

JUSQU'A CE QUE : I= K

Afficher : "Nombre d'essais gagnants : "G

Afficher : "Nombre d'essais perdants" : P

Les élèves ont effectué la simulation en classe , chacun d'entre eux réalisant 100 essais : le résultat est alors "proche" de celui attendu : dans le cas où le joueur modifie systématiquement

son choix initial, il gagne environ 2 parties sur 3 ; il n'en gagne environ qu'une sur 3 s'il conserve systématiquement son choix initial.

On peut de plus remarquer que les algorithmes précédents peuvent être simplifiés .

En effet :

• **si le joueur modifie systématiquement son choix initial:**

si A=1 alors O prend aléatoirement une des valeurs 2 ou 3 donc J prend une des valeurs 3 ou 2 : ce qui montre que $J \neq A$

si A= 2 alors O prend la valeur 3 donc J prend la valeur 2 : $J=A$

si A= 3 alors O prend la valeur 2 donc J prend la valeur 3 : $J=A$

• **si le joueur ne modifie jamais son choix initial :**

si A=1 alors J prend la valeur 1 : $J=A$ (O prend aléatoirement une des valeurs 2 ou 3 , mais cette variable ne sert à rien!)

si A= 2 alors J prend la valeur 1 : $J \neq A$ (O prend la valeur 3)

si A= 3 alors J prend la valeur 1 : $J \neq A$ (O prend la valeur 2)

Par conséquent , on peut écrire simplifier l'algorithme (à l'intérieur de la boucle REPETER)

Choisir au hasard la valeur de A parmi {1;2;3}	
<i>{Lorsque le joueur modifie systématiquement son choix initial:}</i>	<i>{Lorsque le joueur conserve son choix initial:}</i>
Si A=1 alors afficher "PERDU"	Si A=1 alors afficher "GAGNE"
Si A≠1 alors afficher "GAGNE"	Si A≠1 alors afficher "PERDU"

Il est alors évident de "voir" que la probabilité de gagner est $\frac{2}{3}$ avec la première stratégie et $\frac{1}{3}$ avec la seconde.

3.3. Un tableau pour calculer

L'animateur ouvre la porte n°:	2	3	Totaux
La porte gagnante est la porte n°:			
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3} \times 0 = 0$	$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 0 = 0$	$\frac{1}{3}$
Totaux	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

En considérant ces probabilités comme des fréquences on peut alors remplacer ce tableau de probabilités par un tableau d'effectifs , en considérant une suite de 600 essais.

L'animateur ouvre la porte n°:	2	3	Totaux
La porte gagnante est la porte n°:			
1	100	100	200
2	0	200	200
3	200	0	200
Totaux	300	300	600

Dans le cas où l'animateur ouvre la porte n°2 alors on considère la première colonne du tableau:

sachant que l'animateur ouvre la porte n°2, la probabilité que :

$$\text{la porte n°1 soit gagnante est : } \frac{100}{300} = \frac{1}{3} ;$$

$$\text{la porte n°2 soit gagnante est : } \frac{0}{300} = 0;$$

$$\text{la porte n°3 soit gagnante est : } \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

On "voit" que la moitié des essais réalisant l'événement: "La porte gagnante est la porte n°1 "a été "supprimée"; : 100 essais donnant la porte n°1 gagnante se trouvent ainsi éliminés; et c'est pour cela qu'il n'y a pas équiprobabilité entre les deux portes possibles 1 et 3 lorsque l'animateur ouvre la porte n°2 .

4. Conclusion :

J'ai proposé plusieurs méthodes pour convaincre ... dans l'espoir que l'une d'entre elles (au moins!) serait convaincante pour chaque élève ou plus précisément , que pour chaque élève , au moins l'une d'entre elles serait convaincante... Après avoir exposé ces trois méthodes , il semble que les élèves aient été convaincus essentiellement d'ailleurs par l'utilisation de la calculatrice (simulation puis simplification de l'algorithme).

Toutefois , peut-être conviendrait-il de tester cela à l'aide du problème suivant :

"Cent prisonniers partagent une cellule³. Ils savent que 99 d'entre eux seront exécutés et un seul sera gracié, mais ne savent pas qui .

L'un d'entre eux demande au gardien : " Je sais que tu n'as pas le droit de me dire qui sera gracié, mais je te demande seulement de me désigner 98 personnes condamnées parmi mes 99 camarades". Le gardien satisfait à sa requête et le prisonnier reprend : "Je te remercie : avant j'avais une chance sur cent d'être gracié , à présent j'ai une chance sur deux".

A-t-il raison?

5. Bibliographie:

A propos du paradoxe du prisonnier :

- "Persée, Pégase et Andromède; une surprenante stratégie pour tirer partie d'une information apparemment inutile": IAN STEWART, Pour la Science , septembre 1991 P.91 à 95 ; article de la série "Visions mathématiques" Cet article est publié à nouveau dans un dossier hors-série de "Pour la Science" : "Le hasard" (n° d'édition : 7611, avril 1996

³ On suppose la cellule suffisamment grande...!

- "Paradoxes et lois de probabilités" :MICHEL HENRY et HENRI LOMBARDI , Repères IREM n°13 (octobre 1993): le paradoxe de Bertrand est aussi exposé dans cet article.
- "Trois portes ,deux chèvres et une auto": CLAUDE BOUZITAT et GIL PAGES, Quadrature n°13, P.37-38, septembre-octobre 1992.

A propos des paradoxes en probabilité:

- "Paradoxes in Probabilty Theory and Mathematical Statistics" : GABOR J. SZEKELY (D. Reidel Publishing Company)

Utilisation des arbres en probabilités :

- "Des statistiques aux probabilités:exploitons les arbres":BERNARD PARZYSZ, Repères IREM n°10 (janvier 1993)
- "L'introduction du concept de probabilité conditionnelles: avantages et inconvénients de l'arborescence" : André Totohasina, Repères IREM n°15 , avril 1994.
- "Modélisation en probabilités au lycée": Gilles Aldon et Josette Feurly-Reynaud, IREM de Lyon
- "Arbres et tableaux de probabilités : analyse en termes de registres de représentations" : Claire Dupuis, Suzette Rousset-Bert, IREM et IRMA de Strasbourg, Repères IREM n°22, janvier 1996.

A propos de l'enseignement des probabilités:

- Michel Henry : "L'enseignement des probabilités : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques " : IREM de Besançon , octobre 1994

0) INTRODUCTION

Etant donnée une fonction f au moins deux fois dérivable sur I fermé, nous noterons (i) la condition suivante:

$$(i): \begin{cases} f(I) \subset I \\ \exists k \in]0; 1[\text{ tel que: } \forall (x, y) \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, il existe alors α unique tel que $f(\alpha) = \alpha$ (α est un point fixe de f) et

$\forall u_0 \in I$, la suite $U: \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers α

(on a aussi: $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$).

Cette situation est bien connue; nous nous proposons de préciser tout d'abord la rapidité de convergence de U . La recherche d'une situation optimale nous conduira alors assez naturellement à la méthode de Newton et à des exemples de convergences très rapides (convergence quadratique). Enfin, nous proposerons, à titre d'application le calcul de

$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et surtout de Φ^{-1} à l'aide d'une calculatrice programmable ordinaire.

1) RAPIDITE DE CONVERGENCE DE U

Nous poserons: $d_n = u_n - \alpha$ (on a alors: $u_n \xrightarrow{+\infty} \alpha \Leftrightarrow d_n \xrightarrow{+\infty} 0$), $f'(\alpha) = \beta$ et $\frac{f''(\alpha)}{2} = \gamma$. Etudier la rapidité de convergence de U revient à étudier celle de (d_n) vers 0 en la comparant à des suites connues.

Traitons tout d'abord le cas où f est affine et définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \in]0; 1[$. La suite U est alors arithmético-géométrique avec $\alpha = \frac{b}{1-a}$ et on vérifie facilement que (d_n) est géométrique de raison a ($u_n - \alpha = (u_0 - \alpha)a^n$), ce qui règle la question. A titre anecdotique, on peut aussi remarquer qu'en posant $a = q$ et $b = u_0$, on a alors: $u_n = \sum_{i=0}^n u_0 q^i$ et $\alpha = \frac{u_0}{1-q}$.

Dans le cas général, l'idée est que lorsque u_n est proche de α , f se comporte comme sa meilleure approximation affine en α i.e. $x \mapsto \alpha + \beta(x - \alpha)$ et que le comportement de (d_n) doit être comparable à une suite géométrique de raison β . C'est ce que nous allons préciser. Remarquons que: $f(\alpha + d_n) = f(u_n) = u_{n+1} = \alpha + d_{n+1}$, puis utilisant le d.l. d'ordre 2 de f au voisinage de α , nous obtenons:

$$f(\alpha + d_n) = \alpha + \beta d_n + \gamma d_n^2 + d_n^2 \varepsilon(d_n) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ ou encore:}$$

$$d_{n+1} = \beta d_n + \gamma d_n^2 + d_n^2 \varepsilon(d_n) \text{ et } \frac{d_{n+1}}{d_n} = \beta + d_n(\gamma + \varepsilon(d_n)) \text{ converge vers } \beta, \text{ ce que l'on}$$

présentait. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe a et b réels tels que: $d_n = a\beta^n + b\beta^{2n} + o(\beta^{2n})$, ce qui montre qu'au voisinage de l'infini d_n est équivalent à $a\beta^n$ (voir par exemple: « Agrégation interne ». TISSIER . Bréal).

En conclusion, (d_n) converge vers 0 comme une suite géométrique de raison β . Les suites géométriques ont la réputation de converger rapidement; cette convergence étant d'autant plus rapide que β est proche de 0, la situation idéale (car nous sommes pressés!) est bien entendu le cas $\beta = 0$. C'est ce que nous allons rechercher maintenant.

2) LE CAS $\beta = 0$

Commençons par traiter un exemple connu. U est la suite définie par:
$$\begin{cases} u_0 > \sqrt{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Cette suite tend rapidement vers $\sqrt{2}$ (méthode dite de Babylone).

On vérifie facilement que $\beta = 0$ puis que: $u_n > \sqrt{2}$ et $d_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{2}}{2u_n} d_n$, ce qui fournit

$$d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \text{ et la convergence de } U. \text{ Mais on a aussi: } d_{n+1} = \frac{1}{2u_n} d_n^2 \text{ et par une majoration}$$

grossière $d_{n+1} \leq d_n^2$. Cette dernière relation permet d'expliquer la rapidité de la convergence.

On remarque d'abord que $d_{n+1} = o(d_n)$, puis on obtient $d_n \leq d_0^{2^n}$ soit en prenant par exemple $u_0 = \frac{3}{2}$ d'où $d_0 \leq 10^{-1}$: $d_n \leq 10^{-2^n}$. On a alors l'assurance d'obtenir un milliard de décimales dès que $n \geq 30$.

Pour fixer les idées, la relation $d_n \leq (\frac{1}{2})^n 10^{-1}$ ne nous donnerait la même assurance qu'à partir de $n \geq 3321928092$. On parle de convergence quadratique (ou d'ordre 2) lorsque l'on a une relation du type: $|d_{n+1}| \leq M d_n^2$, $M > 0$. C'est ce type de convergence que va nous fournir le cas $\beta = 0$.

La relation: $d_{n+1} = \beta d_n + \gamma d_n^2 + d_n^2 \varepsilon(d_n^2)$ donne immédiatement $\frac{d_{n+1}}{d_n^2} = \gamma + \varepsilon(d_n)$ qui tend

vers γ . Toute suite convergente étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $|d_{n+1}| \leq M d_n^2$, ce qui est bien la relation désirée.

Dans la suite, nous noterons (ii) la condition: $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ f'(\alpha) = \beta = 0 \end{cases}$ (notons que, continuité de f'

obligeant, nous sommes assurés de trouver un voisinage de α sur lequel (i) sera vérifiée). La question qui se pose maintenant est: la situation (ii) est-elle courante?

Plus précisément, considérant les deux situations suivantes:

(1) α est racine isolée sur I de $f(x) = 0$ et sur I f' ne s'annule pas.

(2) α est point fixe isolé sur I de f et sur I $f'(x) \neq 1$.

Peut-on, partant de (1) ou (2), aboutir à (ii) afin d'obtenir une suite convergeant rapidement vers α ?

La réponse est positive et va nous conduire à la méthode de Newton.

3) VERS LA METHODE DE NEWTON

Partons de (1). On peut se ramener au point fixe à l'aide de g définie par $g(x) = x + f(x)$ mais il serait miraculeux que (ii) soit vérifiée

Remarquons alors que si k est une fonction ne s'annulant pas sur I , $f(x) = 0$ équivaut à $k(x)f(x)=0$ et F définie par $F(x) = x + k(x)f(x)$ nous ramène au point fixe.

Cherchons alors k pour que (ii) soit vérifiée, condition qui s'écrit:

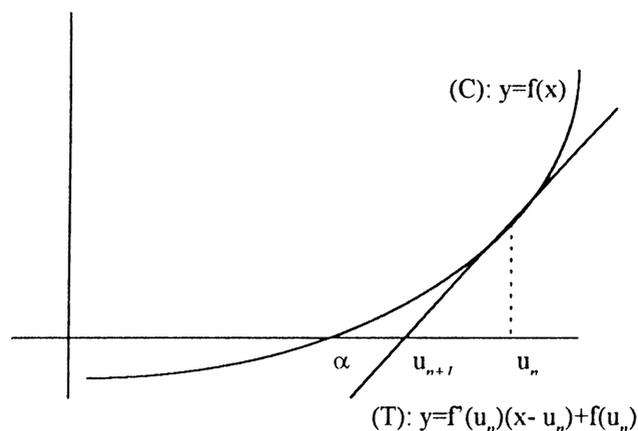
$$F'(\alpha) = 1 + k'(\alpha)f(\alpha) + k(\alpha)f'(\alpha) = 1 + k(\alpha)f'(\alpha) = 0$$

soit encore $k(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}$.

Pourquoi ne pas prendre la solution qui s'impose naturellement, à savoir $k(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ et qui

fournit: $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On retrouve bien la méthode de Newton dont la présentation

classique est résumée par la figure suivante:



u_n étant déterminé, u_{n+1} est l' abscisse du point d' intersection de la tangente (T) à (C) avec l' axe horizontal. On vérifie facilement que l'on a bien $u_{n+1} = F(u_n)$.

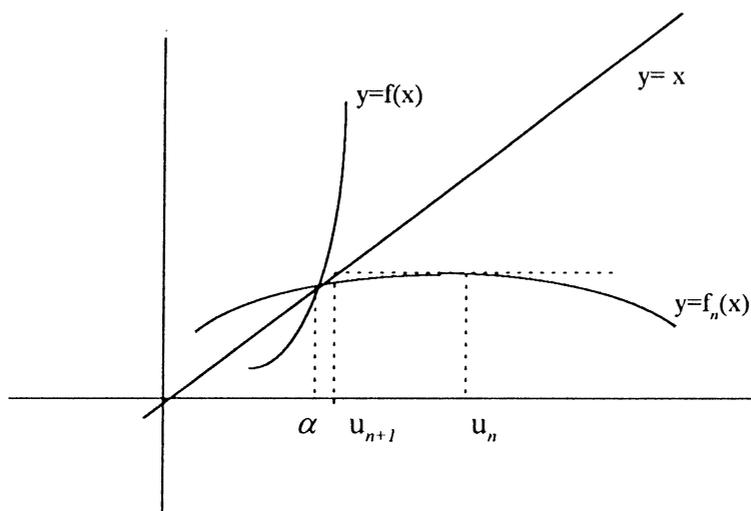
En partant de (2), on applique la démarche précédente à la fonction $x \mapsto f(x) - x$ et on obtient: $F(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1}$. On retrouve ce résultat à l'aide du procédé suivant:

A partir de u_n , on détermine la constante k_n telle que la fonction f_n définie par $f_n(x) = k_n f(x) + (1 - k_n)x$, qui a même point fixe que f , vérifie $f'_n(u_n) = 0$. On trouve

$k_n = \frac{-1}{f'(u_n) - 1}$ et on prend $u_{n+1} = f_n(u_n)$. Un calcul simple donne bien:

$$u_{n+1} = F(u_n).$$

Cette démarche est illustrée par la figure suivante:



Résumons nous:

(1) Si α est une racine isolée de $f(x) = 0$ sur I et si f' ne s'annule pas sur I F définie par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

vérifie (ii).

(2) Si α est un point fixe de f isolé dans I et si $f'(x) \neq 1$ sur I F définie par

$$F(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1}$$

vérifie (ii).

En ce qui concerne la vitesse de convergence dans la situation (1), signalons le résultat suivant:

f étant C^2 sur $[a; b]$, s'il existe m et $M > 0$ tels que:

$$\forall x \in [a; b], |f''(x)| \leq M \text{ et } |f'(x)| \geq m \text{ alors } |d_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} d_n^2.$$

En effet, partant de $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, on obtient:

$$u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \text{ puis tenant compte de } f(\alpha) = 0,$$

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{f'(u_n)} (f(\alpha) - f(u_n) - (\alpha - u_n)f'(u_n)) \text{ d'où}$$

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{f'(u_n)} \left(\frac{1}{2} (\alpha - u_n)^2 f''(c) \right) \text{ avec } c \text{ entre } \alpha \text{ et } u_n \text{ (Taylor-Lagrange),}$$

d'où le résultat annoncé qui présente de l'intérêt lorsque u_0 est proche de α .

4) QUELQUES EXEMPLES

A) Considérons le réel $\sqrt{2}$ comme l'unique racine sur $I =]0 ; +\infty [$ de $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - 2$. On obtient alors $F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ et on retrouve ainsi la méthode de Babylone.

B) Soit f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Sur $I = [1 ; 2]$, (i) est vérifiée et f admet comme unique point fixe $\alpha = \sqrt{2}$ que l'itération de f permet d'ailleurs d'obtenir comme une fraction continue. Ici, on obtient $F(x) = 1 + \frac{2x}{1 + (1+x)^2}$ et les suites obtenues convergent plus vite vers $\sqrt{2}$ que dans l'exemple précédent (utiliser le résultat du 3). On remarquera aussi que F est définie en -1 qui est un de ses points fixes).

C) Considérons π comme racine de $f(x) = 0$ avec $f(x) = \sin x$ sur par exemple $I = \left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} \right]$. On trouve $F(x) = x - \tan x$ et partant de $u_0 = 3$, on obtient $u_1 = 3,1425\dots$, $u_2 = 3,1415926533005\dots$ et $u_3 = 3,1415926535898\dots$ soit la valeur de π mémorisée par la calculatrice. Ici, on a non seulement $F'(\pi) = 0$ mais en plus $F''(\pi) = 0$ d'où une convergence d'ordre 3.

D) Si l'on part de $f(x) = e^x - 2$, on trouve $F(x) = x - 1 + 2e^{-x}$, ce qui permet d'obtenir rapidement une bonne valeur approchée de $\ln 2$ si l'on sait calculer l'exponentielle.

E) Considérant f définie par $f(x) = (\ln x - 1)^2$, nous avons cette fois $f(e) = 0$ mais de plus $f'(e) = 0$. On obtient quand même $F(x) = \frac{x}{2} (3 - \ln x)$ et si l'on a bien $F(e) = e$, on a seulement $F'(e) = \frac{1}{2}$ (situation (i)). Transformons alors F et nous débouchons sur $G(x) = \frac{x}{\ln x}$. Cette fois, c'est la fonction \ln qui permet de trouver e .

Tous ces exemples très simples peuvent être étudiés au lycée. Nous laissons au lecteur le plaisir d'en construire d'autres et d'analyser plus en profondeur cette situation qui est très riche. Signalons que si l'on désire des convergences encore plus spectaculaires, on peut envisager la fonction $F \circ F$ par exemple qui fournit des convergences d'ordre 4 (on prend les termes de deux en deux).

5) INVERSION D'UNE FONCTION

Le principe est très simple. Soit f une fonction strictement monotone de I dans J . Nous savons calculer de bonnes valeurs approchées de f et pour $y \in J$, nous désirons obtenir une bonne valeur approchée de $f^{-1}(y) = \alpha$. Considérons α comme l'unique solution dans I de l'équation $f(x) - y = 0$ et, appliquant ce qui précède, l'itération de la fonction:

$$F: x \mapsto x - \frac{f(x) - y}{f'(x)}$$

va nous fournir une suite convergeant rapidement vers α si l'on initialise pas trop loin de α (cela correspond aux exemples A) et C)).

Appliquons ceci à la fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

Il faut tout d'abord pouvoir calculer $\Phi(z)$. Pour cela, considérons Φ comme la primitive de $\varphi: z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})$ qui prend la valeur 0,5 en 0. Si l'on ne sait pas exprimer explicitement une primitive de φ , on peut en obtenir un développement en série entière.

On a:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^n n!}.$$

Cette série ayant toutes les propriétés requises, on obtient la primitive de φ qui s'annule en 0 en intégrant termes à termes et finalement:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z) \text{ avec } a_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\sqrt{2\pi} 2^n (2n+1)n!}.$$

La suite $|a_n(z)|$ est soit décroissante, soit unimodale (d'abord croissante, puis ensuite décroissante) et dans tous les cas, à partir du moment où le mode est dépassé, le reste de rang n de notre série sera majoré par la valeur absolue du premier terme négligé i. e. si n est assez grand:

$$\left| \Phi(z) - \sum_{k=0}^{k=n} a_k(z) \right| \leq |a_{n+1}(z)|.$$

Tenant compte de tout ceci, le test d'arrêt suivant: $|a_{n+1}(z)| \leq 10^{-13}$, nous assure en théorie une erreur sur $\Phi(z)$ majorée par 10^{-13} . Cependant, lorsque $|z|$ devient assez grand, le terme modal de $|a_n(z)|$ devient vite très grand. Pour $z = 4$ ce terme est de l'ordre de 44,7 et la calculatrice commet sur ce terme une erreur majorée par 10^{-12} , pour $z = 10$ le terme modal est de l'ordre de 10^{19} et est donc calculé à 10^5 près.

Il faut donc être raisonnable et en se limitant à $z \in [-4 ; 4]$ par exemple, nous aurons une précision au moins égale à 10^{-10} , ce qui est déjà un luxe!

Pour calculer $\Phi^{-1}(y)$, nous utiliserons alors la suite U définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{\Phi(u_n) - y}{\phi(u_n)} \end{cases}$$

et nous nous arrêterons dès que $|\Phi(u_n) - y| \leq 10^{-12}$. Ce test d'arrêt fournissant une précision acceptable si y n'est pas trop proche de 0 ou de 1.

Dans un souci pratique, donnons les programmes suivants réalisés sur une T.I.82:

Prgm P (met dans la mémoire P le calcul de $\Phi(Z)$)

```
: 0→S: Z→A: 1→I
: Lbl 1
: S+A→S
: A(Z²(-2I+1)) / (I(4I+2))→A
: If absA > e-13 : Then : 1+I→: Goto 1 : End
: 0.5+S/√(2π)→P
```

Prgm PHI (fonction Φ)

```
: Prompt Z
: Prgm P
: disp P
```

Prgm INVPHI (fonction Φ^{-1})

```
: Prompt Y
: 0→U
: Lbl 1
: U→Z
: e^-(Z²/2)/√(2π)→D
: Prgm P
: If abs(P - Y) > E-12 : Then : U - (P-Y)/D→U : Goto 1 : End
: Disp U
```

Pour $Z = 2$ la calculatrice affiche $\Phi(Z) = 0,9772498681$ et on constate avec plaisir que $\Phi^{-1}(\Phi(2)) = 2$. Tout va bien. Il en est de même pour $Z = 4$. Par contre, pour $Z = 5$, si l'on obtient $\Phi(5) = 0,999997133$, ce qui est encore satisfaisant, $\Phi^{-1}(\Phi(5))$ ne donne rien (il faudrait modifier le test d'arrêt). Ensuite, pour $Z = 6$, la calculatrice donne $\Phi(6) = 1,000000021$, ce qui est déjà gênant et pour $Z = 10$, on obtient $\Phi(10) = -56181$, ce qui ne nous surprend pas!

Ces programmes de base peuvent bien entendu être améliorés mais déjà les résultats obtenus sont suffisamment probants pour que nous puissions ranger notre table habituelle à côté de la règle à calcul que nous gardons précieusement en souvenir d'une époque révolue.

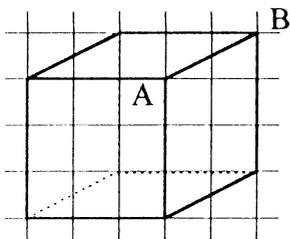
En complément, le lecteur intéressé pourra consulter par exemple:

MOISAN/ Mathématiques supérieures analyse/ Ellipses.
THEODOR/ Initiation à l'analyse numérique/ MASSON.
DEMAILLY/ Analyse numérique/ P.U.G..

AUTOUR DE LA PERSPECTIVE

La vision dans l'espace est en cours d'acquisition au collège, et demande à être affinée au lycée. Aucun programme ne vient structurer cet apprentissage, et c'est donc à l'aide de quelques thèmes d'exercices dirigés - ou de modules - que cette approche est proposée. Elle se compose de deux parties: la première, prévue pour le collège, se limite à la perspective cavalière; la seconde, pour le lycée, aborde la perspective avec points de fuite, ou projection centrale.

I Perspective cavalière



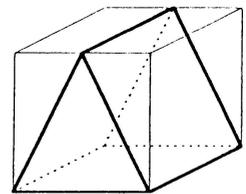
Dans toute la suite, on utilisera ce cube comme modèle.

1) Le premier exercice demandé consiste à reproduire ce cube. Pour certains élèves, le tracé du côté [AB] et des côtés de même direction pose un problème, qui va réapparaître tout au long de cette progression. Il y a une attirance constante vers la direction plus naturelle qui consiste à tracer des diagonales de carrés.

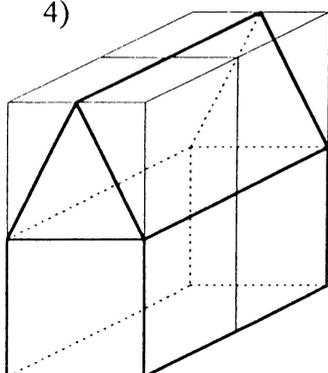
2) Les trois exercices suivants consistent à tracer deux cubes: d'abord l'un sur l'autre, puis l'un à côté de l'autre, et enfin l'un derrière l'autre.

3) Ensuite, on se sert du cube modèle comme « échafaudage » pour construire d'autres formes: par exemple, une forme de toit en bâtière. Il s'agit d'une nouvelle étape, où il faut placer le haut du toit bien au milieu d'un segment de trois carreaux.

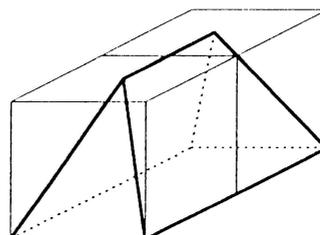
Cette nouvelle forme peut se dupliquer, se tourner d'un quart de tour pour donner un autre point de vue, et se poser sur des cubes.



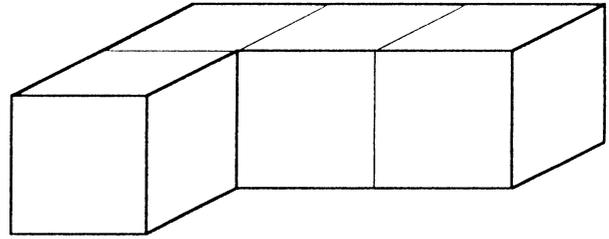
4)



On pourra s'essayer à tourner d'un quart de tour la maison ci-contre, ou à l'allonger. On peut aussi envisager de dessiner un toit en croupe, comme ci-dessous.



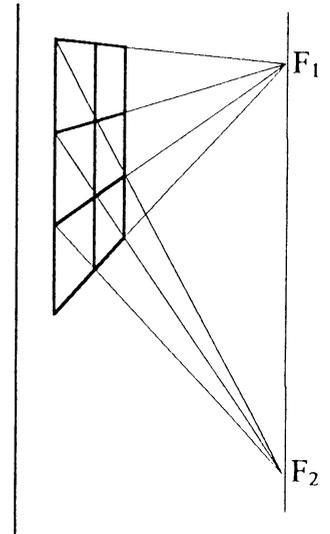
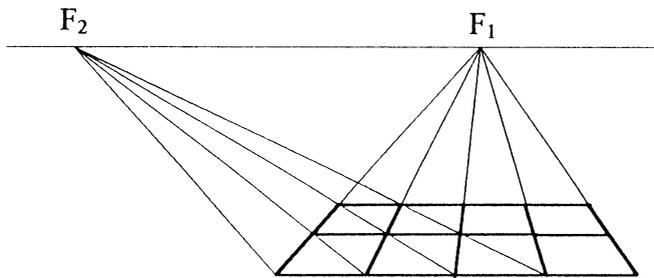
5) Après quelques aspects techniques tels que construire un toit sur une structure en L, comme celle présentée ci-contre, il est possible de faire appel à l'imagination pour créer d'autres formes, ce que permettent les bases présentées ici.



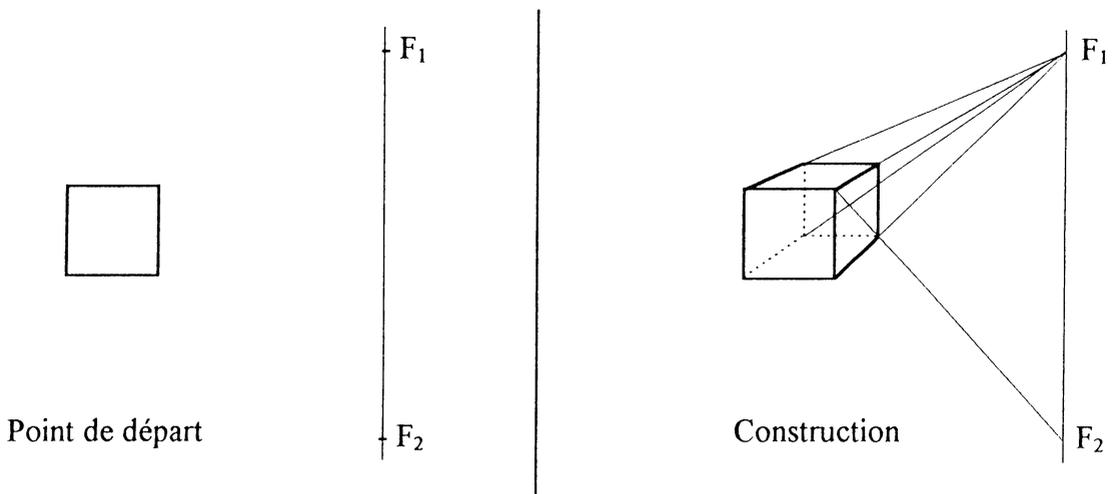
II Projection centrale

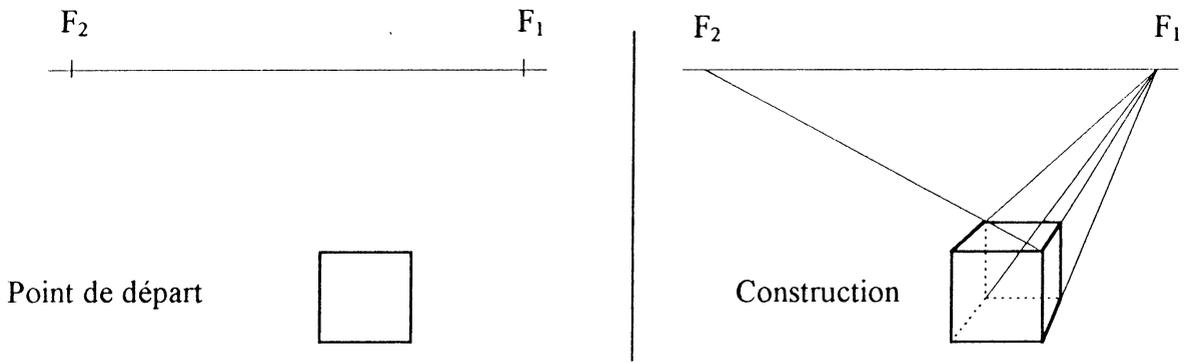
A Dessins

La première approche consiste à compléter un damier. Pour cela, il faut savoir que les horizontales de même direction concourent en un point appelé point de fuite. Cela fait apparaître deux points de fuite, que l'on nommera F_1 et F_2 . Le résultat à connaître est que ces deux points de fuite sont sur une même horizontale. De même, pour un damier vertical, les deux points de fuite seront sur une même verticale.



Il est alors possible, avec la donnée d'un carré vertical et de deux points de fuite, de construire un cube, en utilisant une des méthodes vues pour la construction du damier.

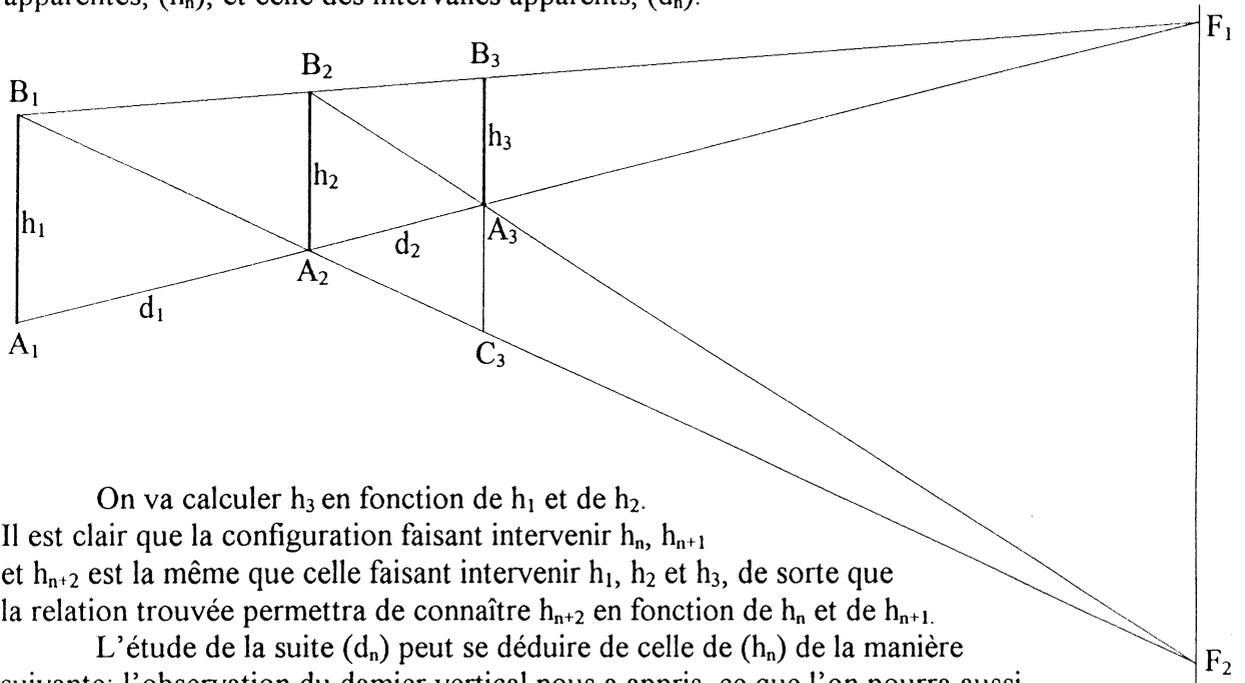




On est maintenant ramené à des exercices déjà étudiés, tels que placer deux cubes l'un à côté de l'autre, etc. On reste tributaire du choix initial du carré vertical et des deux points de fuite, qui feront beaucoup pour l'apparence finale des dessins.

B Suites

Une colonnade régulière vue en perspective fait apparaître les colonnes de plus en plus petites, et de plus en plus serrées. Ce qui suggère l'étude de deux suites, celle des hauteurs apparentes, (h_n) , et celle des intervalles apparents, (d_n) .



On va calculer h_3 en fonction de h_1 et de h_2 .

Il est clair que la configuration faisant intervenir h_n , h_{n+1} et h_{n+2} est la même que celle faisant intervenir h_1 , h_2 et h_3 , de sorte que la relation trouvée permettra de connaître h_{n+2} en fonction de h_n et de h_{n+1} .

L'étude de la suite (d_n) peut se déduire de celle de (h_n) de la manière suivante: l'observation du damier vertical nous a appris, ce que l'on pourra aussi vérifier par calcul, que sur la figure ci-dessus, A_3 est le milieu de $[B_3C_3]$. Ainsi

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{A_3C_3}{A_1B_1} = \frac{A_3B_3}{A_1B_1} = \frac{h_3}{h_1} \quad \text{et, plus généralement,} \quad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{h_{n+2}}{h_n}$$

On va donc concentrer ses efforts sur la suite (h_n) .

Pour calculer h_3 , on va choisir comme origine du repère le point A_1 , et comme vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ en abscisse, et $\frac{1}{h_1}\overrightarrow{A_1B_1}$ en ordonnée, de sorte que le point B_1 a pour ordonnée h_1 .

Les données sont donc:

$$A_1(0,0) ; A_2(1,0) , B_1(0,h_1) , B_2(1,h_2) .$$

On donnera sans explication les résultats successifs permettant de calculer h_3 .

$$(B_1B_2) : y = (h_2 - h_1)x + h_1$$

$$F_1 \left(\frac{h_1}{h_1 - h_2}; 0 \right)$$

$$(B_1A_2) : y = h_1(1 - x)$$

$$F_2 \left(\frac{h_1}{h_1 - h_2}; \frac{-h_1 h_2}{h_1 - h_2} \right)$$

$$(B_2F_2) : y = (-2 h_1 + h_2)x + 2 h_1$$

$$A_3 \left(\frac{2 h_1}{2 h_1 - h_2}; 0 \right)$$

$$B_3 \left(\frac{2 h_1}{2 h_1 - h_2}; \frac{h_1 h_2}{2 h_1 - h_2} \right)$$

$$\text{D'où} \quad h_3 = \frac{h_1 h_2}{2 h_1 - h_2}$$

On obtient donc une suite (h_n) définie par h_1, h_2 et la relation de récurrence

$$\boxed{h_{n+2} = \frac{h_n h_{n+1}}{2 h_n - h_{n+1}}}$$

Il est possible, à partir de là, de calculer en fonction de h_1 et de h_2 les termes successifs h_4, h_5 , etc. On trouve alors

$$h_4 = \frac{h_1 h_2}{3 h_1 - 2 h_2}, \quad h_5 = \frac{h_1 h_2}{4 h_1 - 3 h_2}, \quad h_6 = \frac{h_1 h_2}{5 h_1 - 4 h_2}$$

ce qui suggère la relation

$$\boxed{h_n = \frac{h_1 h_2}{(n-1) h_1 - (n-2) h_2}}$$

relation que l'on admettra ou que l'on vérifiera par récurrence.

On peut aussi s'intéresser à la suite (h_{n+1}/h_n) , dont on observera qu'elle n'est pas constante et que sa limite est 1.

L'étude des suites $(h_n), (h_{n+1}/h_n), (d_n)$ permet d'avoir une meilleure vision de la perspective. Par exemple, si l'on fait un agrandissement d'une photo de route droite bordée régulièrement de poteaux, et que l'on coupe cet agrandissement pour retrouver le format initial, à quoi peut-on s'attendre pour la comparaison des deux photos?

Supposons que l'on fasse coïncider le point de fuite, et la base du premier poteau: le premier poteau aura-t-il la même hauteur sur les deux photos, le deuxième sera-t-il à la même distance, aura-t-il la même hauteur?

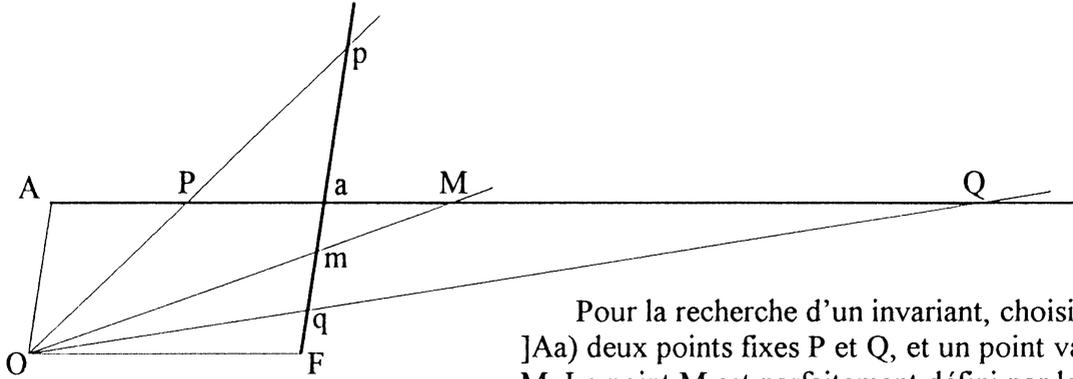
C Modélisation

Un observateur est placé en O , et sa vision de l'espace est limitée par le plan N , appelé plan neutre. Il perçoit donc un demi-espace ouvert (E)

Soit M un point quelconque de (E) . Il est vu par l'observateur comme tout autre point de la demi-droite $[AM)$. D'où l'idée de privilégier un point sur chaque demi-droite de (E) issue de O . Pour cela, on définit dans (E) un plan T , appelé tableau, parallèle au plan neutre et sur lequel vont se projeter tous les points de (E) dans la projection de centre O .

C'est cette projection que nous allons étudier.

nous venons de donner une visualisation de la fonction inverse, sur laquelle on pourra s'appuyer, en particulier, pour suggérer le sens de variation et les limites en zéro et à l'infini.



Pour la recherche d'un invariant, choisissons sur]Aa) deux points fixes P et Q, et un point variable M. Le point M est parfaitement défini par le quotient $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$. Dans une homothétie ou une projection

oblique, ce nombre est un invariant, ce qui signifie que $\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$

Voyons ce qu'il en est pour la projection étudiée ici.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} &= \frac{y_p - y_m}{y_q - y_m} = \frac{\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_m}}{\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_m}} = \frac{x_q (x_m - x_p)}{x_p (x_m - x_q)} \\ &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque M, et donc m, varie, l'application $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} \longmapsto \frac{\overline{mp}}{\overline{mq}}$ est linéaire,

de coefficient $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$; pour éliminer ce coefficient, il suffit de remarquer que

$$\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} \quad \text{et, avec un autre point N et son projeté n, on obtient de même}$$

$$\frac{\overline{np}}{\overline{nq}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} \quad \text{Il ne reste plus qu'à faire le quotient membre à membre pour trouver}$$

$$\boxed{\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} \cdot \frac{\overline{np}}{\overline{nq}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}}}$$

On a donc démontré que, dans la projection centrale, le birapport est un invariant.

POLARITE ET POLARITE RECIPROQUE A LA PORTEE DE TOUS CEUX QUI AIMENT FAIRE DES MATHS AU LYCEE !

I Polarité

I.1 Généralités

Définition 1

Etant donné, dans un plan euclidien P , ordinaire, un cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon $R > 0$, on dit que deux points M et M' sont conjugués par rapport à \mathcal{C} si et seulement si est vérifiée la relation :

$$(1) \vec{OM} \cdot \vec{OM}' = R^2$$

Remarques :

-Ainsi définie, la conjugaison (par rapport à \mathcal{C}) est parfaitement symétrique
 -On peut bien sûr définir la conjugaison par rapport à une sphère d'un espace euclidien quelconque, la relation (1) restant inchangée.

-On peut encore définir la conjugaison par rapport à n'importe quelle conique à centre (du plan P par exemple) de façon analogue en adaptant convenablement la relation (1) :

On ramène les coniques à une relation de la forme :

$$\phi(x, y) = 1$$

où est une forme quadratique (non dégénérée).

On considère la forme polaire associée et on pose :

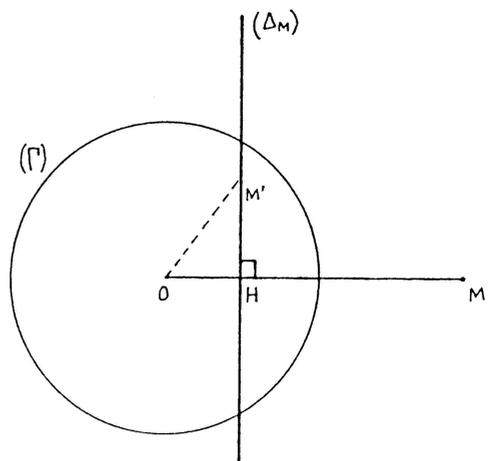
$$(M \text{ et } M' \text{ conjugués par rapport à } \mathcal{C}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{OM}, \vec{OM}') = 1$$

Proposition 1

L'ensemble des points conjugués de M par rapport à un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ est une droite. Cette droite est appelée "la polaire" de M (par rapport à \mathcal{C}), on la notera \mathcal{D}_M ou $\mathcal{D}_{(M)}$.

Il s'agit de la perpendiculaire à (OM) passant par le point H (de (OM)) vérifiant :

$$\vec{OH} = R^2 \frac{\vec{OM}}{OM^2}$$



Remarques :

- Cette définition n'est, à l'évidence, valable que pour $M \neq O$.
- Le point H est "l'inverse" de M (par rapport à \mathcal{C}).
- Cette proposition résulte directement d'un résultat de T.S. sur les lignes de niveau.

Proposition 2

Etant donnée une droite \mathcal{D} (ne passant pas par O), il existe un unique point M tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(M)}$. Ce point est appelé "le pôle" de \mathcal{D} (par rapport à \mathcal{C}).

Remarques :

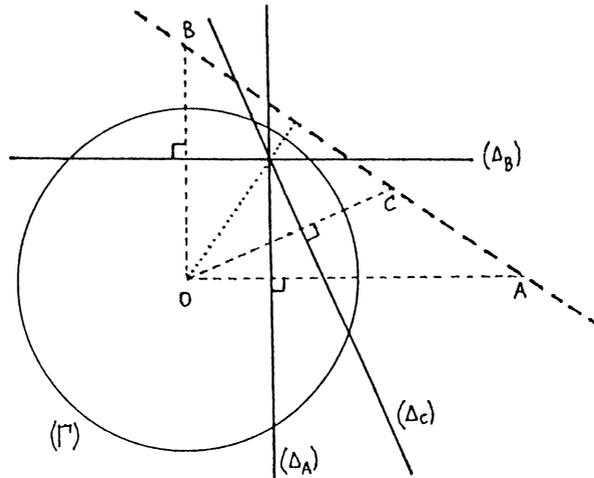
- Il suffit de considérer le projeté orthogonal de O sur \mathcal{D} , appelons-le H , puis l'inverse de H (par rapport à \mathcal{C}). On obtient le point M recherché.

- De la sorte, se trouve réalisée une bijection entre le plan pointé $P^* = P \setminus \{O\}$ et l'ensemble des droites de P^* .

- On ne peut pas ne pas citer ici les propriétés suivantes qu'on utilise très fréquemment dans les exercices :

- Si A et B sont deux points de P^* tels que $O \notin (AB)$, alors $\mathcal{D}_{(A)} \cap \mathcal{D}_{(B)}$ est le pôle de la droite (AB) .

- Trois points A, B et C de P^* sont alignés (et $O \notin (AB)$) si et seulement si $\mathcal{D}_{(A)}, \mathcal{D}_{(B)}$ et $\mathcal{D}_{(C)}$ sont concourantes.



Proposition 3

M étant un point du cercle $\mathcal{C}(O,R)$, alors M est sur sa polaire qui est alors la tangente en M à \mathcal{C} .

Réciproquement, si M est sur sa polaire, alors $M \in \mathcal{C}$ (et $\mathcal{D}_{(M)}$ est la tangente en M à \mathcal{C}).

Remarques :

- On prend ici pour définition de la tangente à un cercle \mathcal{C} en M , la position limite de la droite (MM') quand M' tend vers M en étant sur \mathcal{C} . (La limite étant celle induite par la structure euclidienne de P).

On déduit immédiatement de cette définition que la tangente à \mathcal{C} en M est la perpendiculaire en M à (OM) .

Mais on voit que la proposition 3 permet une nouvelle définition de la tangente à \mathcal{C} en M , à savoir "la polaire d'un point du cercle" !

- La démonstration de la proposition 3 résulte des équivalences :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow M \text{ conjugué de lui-même par rapport à } \mathcal{C} \Leftrightarrow M \in \mathcal{D}_{(M)}$$

Comme la polaire de M est perpendiculaire à (OM) et comme dans ce cas ($M \in \mathcal{C}$) elle passe par M , elle est donc tangente à \mathcal{C} en M .

Proposition 4

Pour tout point M tel que $OM > R$, la polaire $\mathcal{D}_{(M)}$ coupe \mathcal{C} en deux points K_1 et K_2 tels que (MK_1) et (MK_2) soient les tangentes à \mathcal{C} passant par M .

Démonstration :

Puisque $OM > R$, l'inverse H de M (par rapport à \mathcal{C}) vérifie $OH = \frac{R^2}{OM} < R$.

$\mathcal{D}_{(M)}$, la perpendiculaire à (OM) en H coupe donc deux fois \mathcal{C} .

Soit K un de ces points d'intersection :

$$K \in \mathcal{D}_{(M)} \text{ donc } \vec{OK} \cdot \vec{OM} = R^2$$

$$K \in \mathcal{C} \text{ donc } OK^2 = R^2$$

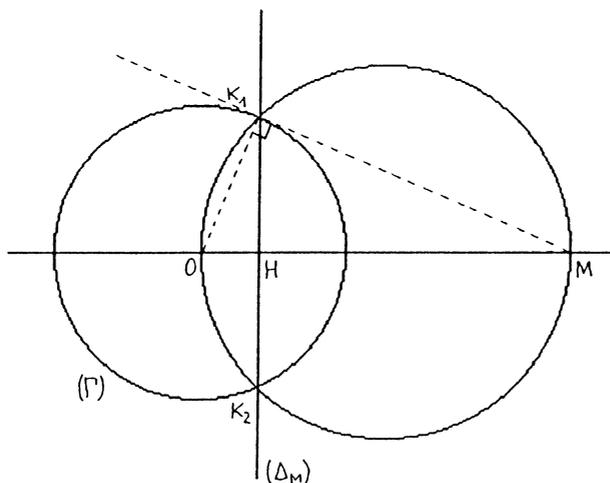
On en déduit $\vec{OK} \cdot \vec{KM} = 0$ donc (KM) est perpendiculaire à (OK) et passe par $K \in \mathcal{C}$, ie (KM) tangente à \mathcal{C} .

Remarques :

• Cela nous amène à la construction de la polaire de M quand $OM > R$:

Il suffit de tracer le cercle de diamètre $[OM]$ qui coupe \mathcal{C} en deux points K_1, K_2 : la droite (K_1K_2) est $\mathcal{D}_{(M)}$.

• Dans le cas où $OM < R$, on trace la perpendiculaire à (OM) qui coupe \mathcal{C} en deux points K_1 et K_2 . Le cercle circonscrit à (OK_1K_2) recoupe (OM) en H (inverse de M par rapport à \mathcal{C}). La perpendiculaire à (OM) en H est $\mathcal{D}_{(M)}$ [proposition 2]



Proposition 5

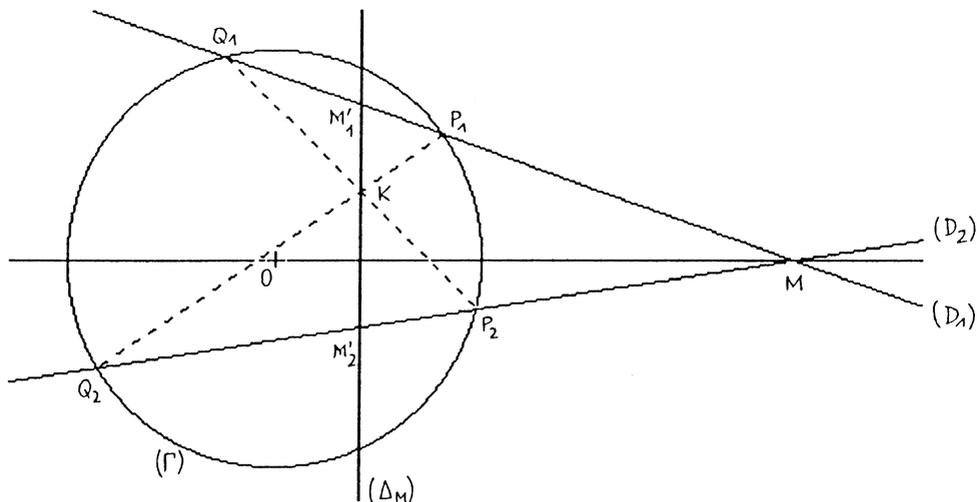
Si M est un point de P^* et D une droite passant par M et coupant \mathcal{C} en P et Q , alors D coupe $\mathcal{D}_{(M)}$ en M' tel que $[P, Q, M, M']$ soit une division harmonique, c'est-à-dire :

$$\vec{PM} \cdot \vec{QM}' + \vec{PM}' \cdot \vec{QM} = 0 \quad (\text{ou } \frac{\vec{PM}}{\vec{QM}} \cdot \frac{\vec{QM}'}{\vec{PM}'} = -1)$$

Remarque :

En choisissant comme repère (orthonormal) $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{OM}}{OM}$, on démontre qu'il existe toujours une infinité de droites D passant par M qui coupent deux fois \mathcal{C} . Les conjugués de M (par rapport à \mathcal{C}) peuvent alors se définir comme les points de la droite D tels que $[P, Q, M, M']$

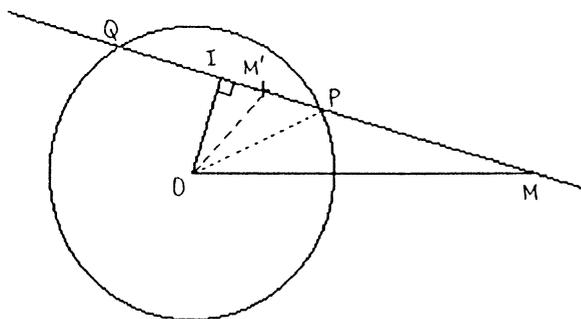
soit une division harmonique quand D tourne autour de M (d'où une autre construction de la polaire $\mathcal{D}_{(M)}$ utilisant la polarité par rapport à deux sécantes).



On construit la polaire de M par rapport aux droites (P_2Q_1) , (P_1Q_2) . K est sur cette polaire qui est aussi la polaire de M par rapport à (\mathcal{C}) car elles passent toutes deux par M'_1 , M'_2 . Il suffit ensuite de tracer la perpendiculaire à (OM) passant par K .

*

Démonstration (de la proposition 5) :



Il suffit d'établir l'égalité :

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \frac{1}{2} \left(\vec{PM} \cdot \vec{QM}' + \vec{PM}' \cdot \vec{QM} \right) + R$$

valable dès que M, M', P, Q alignés et P, Q sur \mathcal{C} .

Or

$$\begin{aligned} \vec{PM} \cdot \vec{QM}' + \vec{PM}' \cdot \vec{QM} &= (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{QO} + \vec{OM}') + (\vec{PO} + \vec{OM}') \cdot (\vec{QO} + \vec{OM}) \\ &= 2\vec{PO} \cdot \vec{QO} + 2\vec{OM} \cdot \vec{OM}' + (\vec{PO} + \vec{QO}) \cdot (\vec{OM} + \vec{OM}') \\ &= 2\vec{PO} \cdot \vec{QO} + 2\vec{OM} \cdot \vec{OM}' + 2\vec{IO} \cdot (\vec{OM} + \vec{OM}') \quad \text{où } I = \text{mil}(P, Q) \end{aligned}$$

d'une part $\vec{PO} \cdot \vec{QO} = OP^2 - IP^2$ (il suffit de développer $(\vec{PI} + \vec{IO}) \cdot (\vec{QI} + \vec{IO})$).

d'autre part $\vec{IO} \cdot (\vec{OM} + \vec{OM}') = -2OI^2$ car $\vec{IM} \cdot \vec{IO} = \vec{IM}' \cdot \vec{IO} = 0$

de sorte que

$$\begin{aligned} \vec{PM} \cdot \vec{QM}' + \vec{PM}' \cdot \vec{QM} &= 2OI^2 - 2IP^2 - 4OI^2 + 2\vec{OM} \cdot \vec{OM}' \\ &= 2\vec{OM} \cdot \vec{OM}' - 2(IP^2 + IO^2) \\ &= 2\vec{OM} \cdot \vec{OM}' - 2R^2 \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Pythagore

I.2 Point de vue analytique

Proposition 6

Si \mathcal{C} a pour équation $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ (dans le repère orthonormal $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$) et $M(x_0, y_0)$, alors la polaire de M par rapport à \mathcal{C} a pour équation :

$$xx_0 + yy_0 + d(x + x_0) + e(y + y_0) + f = 0$$

Démonstration :

On translate le repère initial $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ au centre du cercle \mathcal{C} .

L'équation de \mathcal{C} devient $X^2 + Y^2 = R^2$ avec $\begin{cases} X = x + d \\ Y = y + e \\ \text{et } R^2 = d^2 + e^2 - f \end{cases}$

Le nouveau repère étant tout aussi orthonormal que l'initial, on est autorisé à écrire :

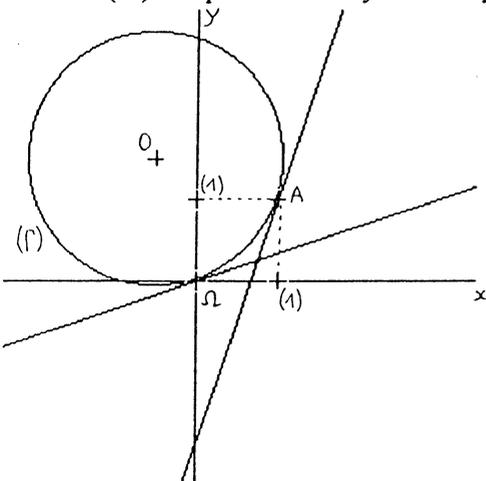
$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{OM}' = R^2 &\Leftrightarrow XX_0 + YY_0 = R^2 \quad \text{où } \begin{cases} M(X_0, Y_0) \\ M'(X, Y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x+d)(x_0+d) + (y+e)(y_0+e) = d^2 + e^2 - f \\ &\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 + d(x+x_0) + e(y+y_0) + f = 0 \end{aligned}$$

Remarques :

• Dans le cas où M est un point de (\mathcal{C}) , on obtient ainsi l'équation de la tangente à \mathcal{C} en $M(x_0, y_0)$, simplement par "dédoublément".

Exemples :

Soit (\mathcal{C}) d'équation $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$



L'équation de la tangente à (\mathcal{C}) en Ω , origine du repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, est :

$$x \times 0 + y \times 0 + \frac{1}{2}(x+0) - \frac{3}{2}(y+0) = 0$$

$$\text{ie } x - 3y = 0$$

L'équation de la tangente à (\mathcal{C}) en $A(1;1)$ est :

$$x \times 1 + y \times 1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2}(y+1) = 0$$

$$\text{ie } \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

$$\text{ou } 3x - y - 2 = 0$$

Proposition 7

Si le cercle (\mathcal{C}) a pour équation $x^2 + y^2 = R$ (dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})) et si (\mathcal{D}) est une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\gamma \neq 0$, alors le pôle de (\mathcal{D}) a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\alpha}{\gamma} R^2 \\ y_0 = \frac{\beta}{\gamma} R^2 \end{cases}$$

Remarques :

- Il suffit d'appliquer la proposition précédente et la bijection de la proposition 2
- Les formules obtenues en prenant une équation de (\mathcal{C}) sous sa forme générale $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ présentent peu d'intérêt :

La polaire de $M_0(x_0, y_0)$ peut s'écrire (proposition 6) :

$$x(x_0 + d) + y(y_0 + e) + dx_0 + ey_0 + f = 0$$

Le pôle de la droite (\mathcal{D}) d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ a des coordonnées qui doivent vérifier le système :

$$\frac{x_0 + d}{\alpha} = \frac{y_0 + e}{\beta} = \frac{dx_0 + ey_0 + f}{\gamma} \quad 1$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\alpha(e^2 - f) - \beta de + \gamma d}{\alpha d + \beta e + \gamma} \quad 2 \\ y_0 = \frac{-\alpha ed + \beta(d^2 - f) + \gamma e}{\alpha d + \beta e + \gamma} \end{cases}$$

qu'on écrira plutôt :

$$\begin{cases} x_0 + d = \frac{\alpha R^2}{\alpha d + \beta e + \gamma} \\ y_0 + e = \frac{\beta R^2}{\alpha d + \beta e + \gamma} \end{cases}$$

formules qui - on le devine ! - se retrouvent par composition de la translation $\begin{cases} X = x + d \\ Y = y + e \end{cases}$ avec

les formules de la proposition 7.

- Les propositions 6 et 7 se généralisent très bien aux cas des coniques à centre. En effet, dans ce cas "à centre", on peut encore faire jouer la translation de la proposition 6 de vecteur $\vec{\Omega O}$. On obtient les propositions suivantes :

Proposition 6^{bis}

Si (\mathcal{C}) est une conique (à centre) d'équation

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

Alors la polaire \mathcal{D}_M du point $M_0(x_0, y_0)$ (non au centre de (\mathcal{C}) !) a pour équation :

$$axx_0 + byy_0 + c(xy_0 + x_0y) + d(x + x_0) + e(y + y_0) + f = 0$$

¹ Les cas particuliers α, β , ou γ nul ne présentent aucune difficulté intéressante.

² Dire que $\alpha d + \beta e + \gamma = 0$ revient à dire que (\mathcal{D}) passe par O , centre de (\mathcal{C}) .

On n'hésitera pas à rapprocher cette dernière équation de celle donnée en remarque de la définition 1 de ce paragraphe I mettant en phase forme quadratique et forme polaire associée.

Proposition 7^{bis}

Si (\mathcal{C}) est une conique dont l'équation peut se ramener à la forme :

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad (AB \neq 0)$$

Alors le pôle de la droite (\mathcal{D}) , d'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\alpha}{\gamma A} \\ y_0 = \frac{\beta}{\gamma B} \end{cases}$$

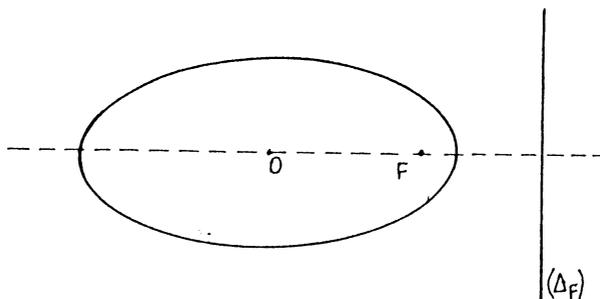
Exemples :

(1) Soit (\mathcal{C}) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$ et F le foyer de (\mathcal{C}) de coordonnées $(c;0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La polaire de F a pour équation (proposition 6^{bis}) :

$$\frac{x \cdot c}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$$

$$i.e. \quad x = \frac{a^2}{c}$$

On retrouve - bien sûr ? - la directrice de l'ellipse (\mathcal{C}) associée à F .



(2) Soit (\mathcal{C}) d'équation $x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 8y + 6 = 0$

• La polaire $\mathcal{D}_{(A)}$ du point $A(0;1)$ est la droite d'équation :

$$x \cdot 0 + 2y \cdot 1 + 2(x \cdot 1 + y \cdot 0) - 3(x+0) - 4(y+1) + 6 = 0$$

$$i.e. \quad x + 2y - 2 = 0$$

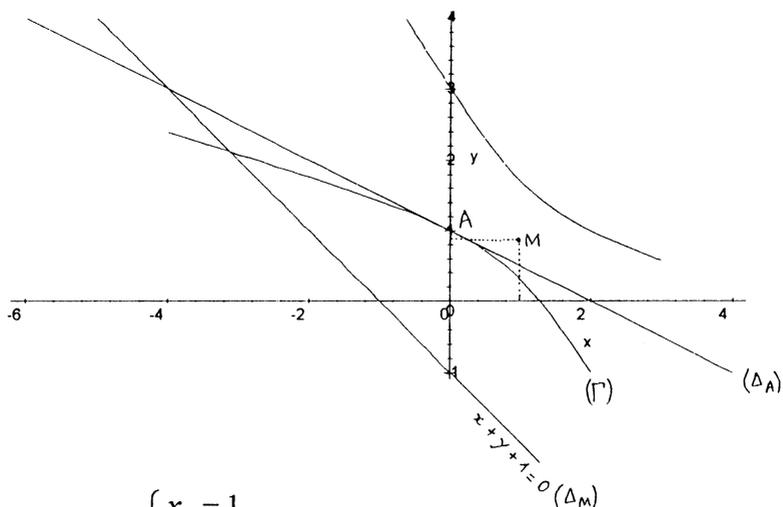
Le point étant sur la conique, on vient tout simplement de déterminer l'équation de la tangente à cette conique en $A!$ (cf figure ci-dessous)

• Pour trouver le pôle de la droite $x + y + 1 = 0$, on identifie cette équation à la forme générale de la proposition 6^{bis} qu'on écrit :

$$x(x_0 + 2y_0 - 3) + y(2y_0 + 2x_0 - 4) + (-3x_0 - 4y_0 + 6) = 0$$

Plus exactement, on résout le système :

$$\frac{x_0 + 2y_0 - 3}{1} = \frac{2y_0 + 2x_0 - 4}{1} = \frac{-3x_0 - 4y_0 + 6}{1}$$



Et on trouve le point $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \frac{5}{6} \end{cases}$.

• Par ailleurs, il n'échappera à personne que (\mathcal{C}) a pour centre le point O de coordonnées $(1;1)$. Pour déterminer les coordonnées de O , on peut poser $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ et résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 6 \\ 4\alpha + 4\beta = 8 \end{cases}$$

qui correspond à l'annulation des coefficients de X et de Y . L'équation de (\mathcal{C}) dans le nouveau repère étant :

$$X^2 + 2Y^2 + 4XY = 1$$

I.3 Point de vue projectif

• La conique (\mathcal{C}) (de centre O) d'équation (dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P)

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

peut être plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 rapporté au repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que le plan P ait pour équation $z = 1$.

• Le point $M_0(x_0, y_0)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ s'identifie à la droite (ωM_0) :

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = t \end{cases}$$

et, "réciproquement", le point $m_0(x_0, y_0, z_0)$ de \mathbb{R}^3 peut être identifié au point $M_0\left(\frac{x_0}{z_0}; \frac{y_0}{z_0}; 1\right)$ de P , dès que $z_0 \neq 0$.

De la sorte, la conique (\mathcal{C}) devient l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 (en fait $P_2(\mathbb{R})$, le projectif complétant le plan affine P) m de coordonnées (x,y,z) vérifiant :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0 \quad (*)$$

que l'on notera avantageusement sous forme matricielle :

$${}^tU.G.U_0 = 0 \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

A partir de là, on peut écrire l'équation de la polaire d'un point $M_0(x_0, y_0) \cong m_0(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à (\mathcal{C}) comme suit :

$${}^tU.G.U_0 = 0 \quad \text{avec} \quad U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

qui traduit tout simplement l'orthogonalité de $\vec{\omega M}$ et $\vec{\omega M_0}$ dans \mathbb{R}^3 muni de la forme quadratique associée à G (ici non définie bien entendu !).

Cette remarque en amène illico deux autres d'une importance capitale :

-la polarité n'est donc d'un point de vue projectif qu'une histoire d'orthogonalité dans \mathbb{R}^3 !

-la polarité se généralise aisément aux points et droites à l'infini maintenant disponibles

(on fait $z = 0$ dans $(*)$!) et même aux formes dégénérées !!... puisque seule la matrice G intervient dans la définition).

*

Reprenons pour finir ce paragraphe l'exemple de la conique du I.2 :

$$(\Gamma) : x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 8y + 6 = 0$$

La forme matricielle est :

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

La polaire de $M_0(x_0, y_0) \cong m_0(x_0, y_0, z_0)$ associée à (\mathcal{C}) est :

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$i.e. \quad x(x_0 + 2y_0 - 3z_0) + y(2x_0 + 2y_0 - 4z_0) + z(-3x_0 - 4y_0 + 6z_0) = 0$$

Si on veut le pôle de $(\Delta) : x + y + 1 = 0$, on résout le système 3×3 :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 3z_0 = k \\ 2x_0 + 2y_0 - 4z_0 = k \\ -3x_0 - 4y_0 + 6z_0 = k \end{cases}, \quad k \neq 0$$

On obtient la famille de points $m_0(-3k, -\frac{5k}{2}, -3k)$, $k \in \mathbb{R}^*$, qui s'identifie au point $M_0\left(\frac{x_0}{z_0}; \frac{y_0}{z_0}; 1\right)$

soit ici $M_0\left(1, \frac{5}{6}, 1\right)$. Evidemment, on retrouve $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \frac{5}{6} \end{cases}$.

(Plus généralement, le système $GU_0 = T$ a pour déterminant $\det G = 2$ et pour solution $U_0 = G^{-1}T$.)

II Polarité inverse

II.1 Généralités

Étude Élémentaire

a) Généralités

Définition 2

Étant donné un cercle (\mathcal{C}) (du plan euclidien P) de centre O , de rayon $R > 0$, et (C) une courbe admettant une tangente ne passant pas par O , en chacun de ses points, on peut alors construire point par point une courbe (C') en considérant les pôles des tangentes de (C) par rapport à (\mathcal{C}) .

(C') est appelée "la polaire inverse de (C) (par rapport à (\mathcal{C}))".

Remarques :

Il est assez clair que la courbe (C') sera d'autant plus régulière que la courbe (C) le sera à un degré supérieur. On est en droit de soupçonner ~~(C') d'être~~ continue quand (C) est de classe C^1 et (C') devrait avoir des tangentes dès que (C) sera de classe C^2 . Enfin, on ~~peut~~ imagine que les (éventuelles) tangentes de (C') seront les polaires des points de (C) . (Ainsi (C) sera-t-elle la polaire inverse de (C') !)

Voyons cela d'un peu plus près !

Supposons (C) donnée par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ dans le repère orthonormal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ de P (où O est, rappelons le, le centre de (\mathcal{C})). En M_0 de coordonnées $(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0))$, la tangente à (C) , (T_0) a pour équation :

$$xy'_0 - yx'_0 = \Delta_0$$

où l'on a noté $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$ et $\Delta_0 = \begin{vmatrix} x_0 & x'_0 \\ y_0 & y'_0 \end{vmatrix}$

On voit bien que (T_0) passe par l'origine de R si et seulement si $\Delta_0 = 0$ et on reconnaît les coordonnées du pôle de (T_0) (par rapport à (\mathcal{C})) dès que $\Delta_0 \neq 0$, à l'aide des constantes de l'équation de (T_0) (cf I.2), on a :

$$\begin{cases} \bar{x}(t_0) = \frac{y'_0}{\Delta_0} R^2 \\ \bar{y}(t_0) = -\frac{x'_0}{\Delta_0} R^2 \end{cases}$$

Ainsi la courbe (C') , polaire inverse de la courbe (C) , de paramétrisation $[x(t), y(t)]$, par rapport à (\mathcal{C}) (de centre O , de rayon R) est-elle donnée par la paramétrisation :

$$(*) \quad \begin{cases} \bar{x}(t) = \frac{y'(t)}{\Delta(t)} R^2 \\ \bar{y}(t) = -\frac{x'(t)}{\Delta(t)} R^2 \end{cases} \quad \text{où } \Delta(t) = x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$$

On en déduit aussitôt la continuité de (C') dès que (C) est de classe C^1 (partout où $\Delta(t) \neq 0$).

Si de plus (C) est de classe C^2 , on peut considérer les dérivées de \bar{x} et \bar{y} . On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\Delta y'' - \Delta' y'}{\Delta^2} = -y' \frac{x' y'' - x'' y'}{\Delta^2} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = -\frac{x'' \Delta + x' \Delta'}{\Delta^2} = x' \frac{x' y'' - x'' y'}{\Delta^2} \end{cases}^3$$

(à la constante multiplicative près R^2)

Il s'ensuit $x \frac{d\bar{y}}{dt} - y \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\Delta^2}$ (qu'on pourrait noter $\bar{\Delta}(t)$?) de sorte que, si l'on applique les formules de $(*)$ à la courbe (C') , on retrouve x, y , c'est-à-dire exactement :

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}(t) = \frac{\frac{d\bar{y}}{dt}}{\bar{\Delta}(t)} = x(t) \\ \bar{\bar{y}}(t) = \frac{\frac{d\bar{x}}{dt}}{\bar{\Delta}(t)} = y(t) \end{cases}$$

Conclusion :

Dès que (C) est de classe C^2 , elle est la polaire inverse de (C') .

Quelques exemples simples :

(1) Prenons pour (C) la droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \lambda t \\ y(t) = \beta + \mu t \end{cases}$$

qui donne pour équation cartésienne $\mu x - \lambda y = \mu \alpha - \lambda \beta$.

(C) passe par $A(\alpha, \beta)$, est dirigée par $\vec{u}(\lambda, \mu)$ et ne contient l'origine O de \mathbb{R}^2 que si :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \mu \end{vmatrix} = 0$$

qui correspond précisément à $\Delta(t) !$

³ La notation \bar{x}' pourrait paraître ambiguë : doit-on lire \bar{x}' ou $\overline{x'}$?

Preons pour simplifier (\mathcal{C}) de rayon 1 (ou...), les formules (*) donnent dans ce cas très particulier :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \frac{\mu}{\mu\alpha - \lambda\beta} \\ \bar{y}(t) = \frac{-\lambda}{\mu\alpha - \lambda\beta} \end{cases}$$

c'est-à-dire les coordonnées d'un point, le pôle de la droite (C) par rapport à (\mathcal{C}).

(2) Prenons pour (C), une ellipse de centre O , de demi-axes a et b et (\mathcal{C}) le cercle de centre O , de rayon 1 ((C) et (\mathcal{C}) sont donc concentriques !).

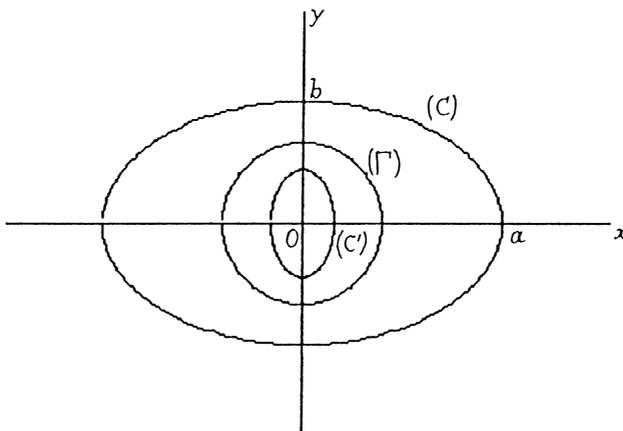
On peut paramétrer (C) de la façon suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases}$ et $\Delta(t) = ab$

si bien que la paramétrisation de (C') est $\begin{cases} \bar{x}(t) = \frac{1}{a} \cos t \\ \bar{y}(t) = \frac{1}{b} \sin t \end{cases}$

(C') est (bien sûr) une ellipse de centre O : son axe focal est orthogonal à l'axe focal de (C) :



On se pose naturellement la question de savoir ce que devient (C') quand (C) est une ellipse, voire un cercle ou une hyperbole non plus centrés en O . C'est l'objet du paragraphe suivant.

b)

II-2 Polaire inverse d'une conique par rapport à un cercle (ou une autre conique)

En fait, notre ambition sera de démontrer de la façon la plus élémentaire possible deux formes simplifiées du théorème général suivant :

"La polaire inverse d'une conique par rapport à une conique est une conique"⁴

⁴ Les paraboles posent problèmes ...

Théorème

La polaire inverse d'un cercle par rapport à un cercle (\mathcal{C}) (de centre O , de rayon a) est une conique dont le point O est un des foyers.

1^{ère} démonstration :

On considère (C) sous la forme paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos t \\ y(t) = \beta + a \sin t \end{cases}$$

On a $\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = a \cos t \end{cases}$ et $\Delta(t) = a(a + \alpha \cos t + \beta \sin t)$

Donc (C') est donnée par la paramétrisation :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \frac{\cos t}{a + \alpha \cos t + \beta \sin t} \\ \bar{y}(t) = \frac{\sin t}{a + \alpha \cos t + \beta \sin t} \end{cases}$$

On en déduit $\rho(t) = \sqrt{\bar{x}(t)^2 + \bar{y}(t)^2} = \frac{1}{|a + \alpha \cos t + \beta \sin t|}$

(il s'agit de la distance OM , où M est le point caractéristique de (C'))

Si on pose $d = O\Omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\cos \theta = \frac{\alpha}{d}$ $\sin \theta = \frac{\beta}{d}$, on peut encore écrire :

$$\rho(t) = \frac{\frac{1}{a}}{\left|1 + \frac{d}{a} (\cos \theta \cdot \cos t + \sin \theta \cdot \sin t)\right|} = \frac{\frac{1}{a}}{\left|1 + \frac{d}{a} \cos(t - \theta)\right|}$$

On reconnaît là, l'équation en polaire d'une conique d'excentricité $e = \frac{d}{a}$ et de paramètre

$$p = \frac{1}{a}$$

On remarque que:

(C') est une ellipse si $d < a$, c'est-à-dire que O est dans le disque de centre Ω , de rayon a ; dans ce cas, aucune tangente à (C) ne passe par O et (C') n'a pas de "point à l'infini".

(C') est une parabole si $d = a$, c'est-à-dire que O est sur (C); dans ce cas, la tangente à (C) en O donne un "point à l'infini" à (C').

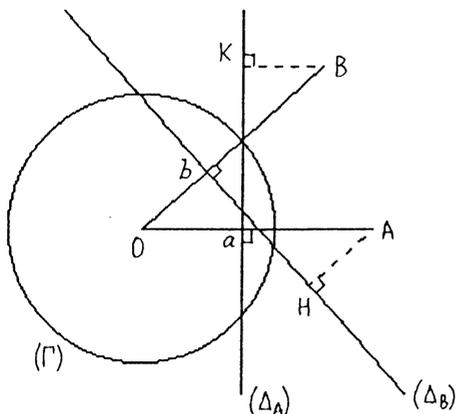
Enfin, (C') est une hyperbole si $d > a$, c'est-à-dire que O est à l'extérieur du disque de centre Ω , de rayon a ; dans ce cas, il existe deux tangentes à (C) passant par O qui donnent "deux points à l'infini" à (C').

Par définition, $p = eh$ où h est la distance du foyer, ici O , à la directrice associée.

2^{ème} démonstration :

(1) On démontre d'abord l'égalité suivante dite de "Salmon" :

Si (\mathcal{C}) est un cercle de centre O , A et B deux points de polaires $\mathcal{D}_{(A)}$, $\mathcal{D}_{(B)}$ et d'inverses a , b par rapport à (\mathcal{C}) ,



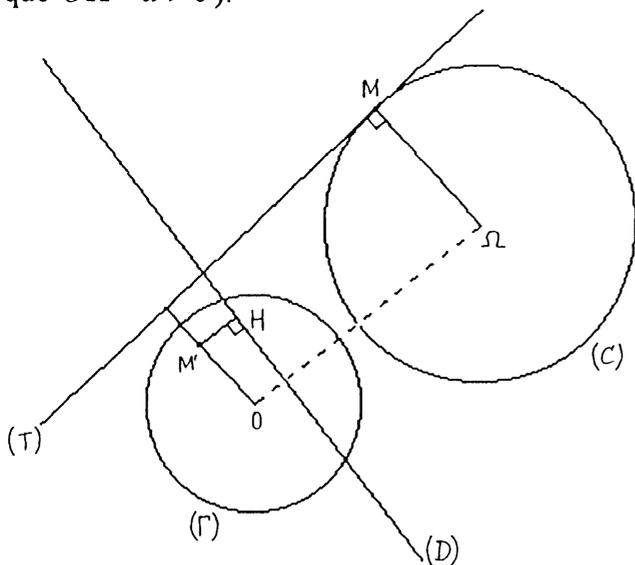
Si on appelle H (respectivement K) le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}_{(B)}$ (respectivement de B sur $\mathcal{D}_{(A)}$),

Alors $OA \cdot BK = OB \cdot AH$

(Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{BK} &= \vec{OA} \cdot (\vec{BO} + \vec{Oa} + \vec{aK}) \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{BO} + R^2 + 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{AH} &= \vec{OB} \cdot (\vec{AO} + \vec{Ob} + \vec{bH}) \\ &= \vec{OB} \cdot \vec{AO} + R^2 + 0 \end{aligned}$$

(2) On considère (\mathcal{C}) (le cercle de centre O , ...), (C) (le cercle de centre Ω de rayon a tel que $O\Omega = d > 0$).



M un point de (C) ; (T) la tangente à (C) en M ; M' le pôle de (T) par rapport à (\mathcal{C})

(\mathcal{D}) la polaire de Ω par rapport à (\mathcal{C}) , H le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D})

Puisque M est le projeté orthogonal de Ω sur (T) et (T) la polaire de M' , l'égalité de Salmon donne ici :

$$\frac{M'O}{M'H} = \frac{\Omega O}{\Omega M} = \frac{d}{a}$$

Au lecteur la conclusion ...

Théorème 2

La polaire inverse d'une conique à centre (non dégénérée) par rapport à une conique à centre (non dégénérée) est une conique.

Démonstration :

Se placer ici dans le cadre projectif apporte on va le voir, une simplification de la rédaction tout à fait appréciable.

La conique "de base" (\mathcal{C}) de centre O peut se ramener à l'équation :

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

(dans le repère orthonormal $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$)

Après un passage convenable dans le projectif (cf I.3), on peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$'T.G.T = 0$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(qui donne tout simplement $Ax^2 + By^2 - z^2 = 0$)

Pour un point M_0 de coordonnées (projectives) $T_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ quelconques, la polaire a pour équation (projective) :

$$'T_0.G.T = 0$$

$$[\text{ie } Axx_0 + Byy_0 - zz_0 = 0 \quad (*)]$$

Considérons maintenant une conique (C) quelconque dans le plan de (\mathcal{G}) et d'équation :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

(dans le repère R)

Son équation projective associée s'écrit :

$$'T.D.T = 0$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(Dans le cas non dégénérée, $\det D \neq 0$; il existe en effet une matrice équivalente de la forme $\begin{pmatrix} a' & c' & 0 \\ c' & b' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a'b' - c'^2 \neq 0$; cf I ...)

Soit enfin M_0 sur (C); la tangente à (C) en M_0 a une équation de la forme (projective) :

$$'T_0.D.T = 0$$

$$\text{ie } (ax_0 + cy_0 + dz_0)x_0 + (cx_0 + by_0 + ez_0)y_0 + (dx_0 + ey_0 + fz_0)z_0 = 0$$

En identifiant cette équation à la forme polaire (*), on en déduit que le pôle de cette tangente par rapport à (\mathcal{G}) a pour coordonnées :

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = \frac{ax_0 + cy_0 + dz_0}{A} \cdot \lambda \\ \bar{y}_0 = \frac{cx_0 + by_0 + ez_0}{B} \cdot \lambda \\ \bar{z}_0 = \frac{dx_0 + ey_0 + fz_0}{-1} \cdot \lambda \end{cases}$$

(coordonnées projectives définies à un paramètre λ près !)
Soit, matriciellement :

$$\bar{T}_0 = \lambda.H.T_0$$

où H est la matrice
$$\begin{pmatrix} \frac{a}{A} & \frac{c}{A} & \frac{d}{A} \\ \frac{c}{B} & \frac{b}{B} & \frac{e}{B} \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}$$

Comme $\det H = \frac{-1}{AB} \det D$, H est inversible dès que $\det D \neq 0$, ie (C) non dégénérée.

On écrit alors $T_0 = \mu H^{-1} \bar{T}_0$ ($\mu \in \mathbb{R}, \mu = \frac{1}{\lambda}$)

et finalement

$$M_0 \in (C) \Leftrightarrow {}^t T_0 . D . T_0 = 0 \Leftrightarrow {}^t \bar{T}_0 . ({}^t H^{-1} . D . H^{-1}) . T_0 = 0$$

On reconnaît une équation (projective) de conique en la matrice (symétrique !) ${}^t H^{-1} . D . H^{-1}$. C'est la polaire de (C) !

Récapitulation :

Etant donnée une conique (\mathcal{C}) d'équation $Ax^2 + By^2 = 1$. A la conique (C) d'équation

$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ on associe la matrice $D = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $\det D \neq 0$ puis la

matrice $D' = {}^t H^{-1} . D . H^{-1}$ avec $H = \begin{pmatrix} \frac{a}{A} & \frac{c}{A} & \frac{d}{A} \\ \frac{c}{B} & \frac{b}{B} & \frac{e}{B} \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}$.

La conique (C') polaire inverse de (C) par rapport à (\mathcal{C}) est celle qui a pour équation :

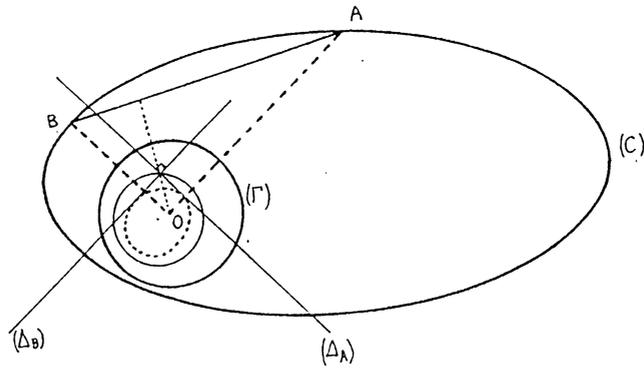
$${}^t T . D' . T = 0 \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

II.3 Enfin une application ! ...

Il faut l'avouer tout net, ce travail est parti de la volonté de comprendre et résoudre le problème suivant :

Etant donnée une ellipse (E) et un point Ω situé dans le plan de cette ellipse (par exemple à l'intérieur !), on considère deux demi-droites perpendiculaires en Ω coupant respectivement (E) en A et B .

L'enveloppe des droites (AB) quand on déplace A sur l'ellipse (E) est une conique !



Démonstration :

On considère un cercle centré en Ω (on peut le choisir à l'intérieur de (E) par exemple). Les polaires $\mathcal{D}_{(A)}$ et $\mathcal{D}_{(B)}$ par rapport à (\mathcal{C}) sont des tangentes à (E) , la polaire inverse de (E) (par rapport à (\mathcal{C})). Or, puisque $(\Omega A) \perp (\Omega B)$, on a aussi $\mathcal{D}_{(A)} \perp \mathcal{D}_{(B)}$, (En effet, $\mathcal{D}_{(A)} \perp (\Omega A)$ et $\mathcal{D}_{(B)} \perp (\Omega B)$).

Ainsi, quand A (ou B) parcourt (E) , $\mathcal{D}_{(A)}$ et $\mathcal{D}_{(B)}$ parcourent l'ensemble des tangentes à (E) en étant perpendiculaires ! On sait que le point d'intersection, appelons le point K , de ces tangentes parcourt lui le cercle orthoptique de (E) ⁶.

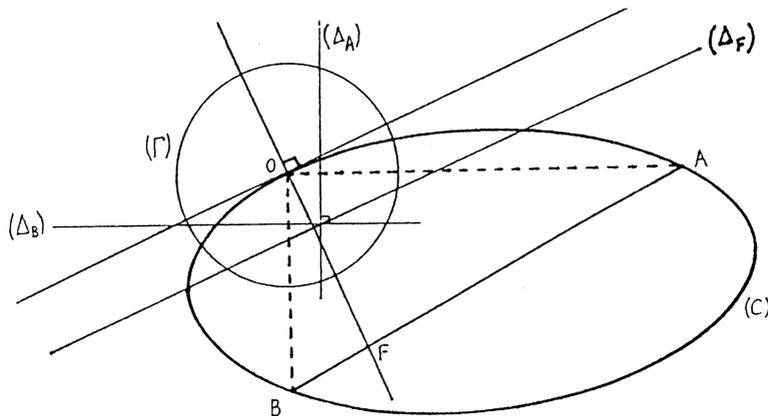
Mais, par ailleurs, K est le pôle de (AB) (cf la remarque faite au I.1) comme intersection des polaires de A et B !

De sorte que, quand K parcourt le cercle (γ) orthoptique de (E) , (AB) parcourt l'ensemble des tangentes à (γ') , la courbe polaire réciproque de (γ) par rapport à (\mathcal{C}) .

Le théorème 1 précédent nous dit que (γ') est une conique. Par définition d'une enveloppe de droites, (γ') est l'enveloppe des droites (AB) ...

⁶ Si on avait placé Ω sur l'ellipse (E) , alors (E) aurait eu un "point à l'infini", à savoir le pôle (par rapport à (\mathcal{C})) de la tangente en Ω à (E) ; dans ce cas, (E) eût été une parabole et le point K aurait parcouru une droite - la directrice de la parabole -, donc (γ') aurait été réduit à un point. D'où la conclusion dans ce cas là :

Etant donné un point Ω sur une ellipse (E) , les droites (AB) telles que A, B sur (E) et $(\Omega A) \perp (\Omega B)$, passent par un point fixe. Ce point est le *point de Frégier* de l'ellipse (E) associé à Ω .



DES RACINES D'UN POLYNÔME A LA FONCTION DE MOËBIUS.

Présentation

Le but de cet exposé est de résoudre un problème d'inversion.

Parmi les plus classiques, notons l'inversion de la matrice de Pascal, qui peut servir d'idée directrice pour résoudre des problèmes tels que le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments, ou le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments. Le premier problème a été résolu dans un stage précédent à l'aide de séries entières, le second le sera ici à l'aide de la formule du crible.

La formule d'inversion présentée ici est celle de Moëbius. Dans un premier temps, cette formule sera parachutée et vérifiée : la méthode est rapide et efficace. Mais elle utilise un outil sophistiqué, la fonction de Moëbius, dont on peut se demander d'où elle sort.

La deuxième partie, la plus longue, tentera de répondre à cette interrogation.

Exemple introductif

Soit la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n^2 - 1 \\ u_0 = \cos \theta_0 \end{cases}$$

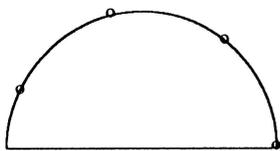
On sait que $\cos 2\theta = 2 \cos^2\theta - 1$, d'où $u_n = \cos 2^n\theta_0$.

On se propose de chercher, pour $p > 0$ donné, le nombre $f(p)$ de suites de plus petite période p . Pour cela, on commence par chercher les suites de période p . On résout donc l'équation en $\cos \theta_0$ $\cos 2^p\theta_0 = \cos \theta_0$

La fonction \cos étant bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1; 1]$, on va résoudre l'équation en θ_0 sur $[0, \pi]$.

$$2^p \theta_0 = \theta_0 + 2k\pi$$

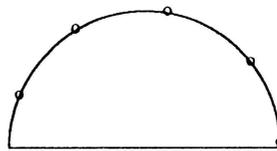
$$\theta_0 = \frac{2k\pi}{2^p - 1}$$



Le nombre de solutions est 2^{p-1}

$$2^p \theta_0 = -\theta_0 + 2k'\pi$$

$$\theta_0 = \frac{2k'\pi}{2^p + 1}$$



Le nombre de solutions est $2^{p-1} + 1$

Les nombres $2^p - 1$ et $2^p + 1$ sont premiers entre eux, donc 0 est la seule solution commune, de sorte que le nombre de suites de période p est $g(p) = 2^p$

$$g(p) = \sum_{d|n} f(d)$$

Cette relation étant vraie pour tout p , comment trouver $f(p)$ lorsque c'est la fonction g qui est connue, comme dans notre exemple?

Exercice: déterminer $f(6)$ (il s'agit de résoudre un système simple de 4 équations à 4 inconnues).

Réponse au problème d'inversion

Fonction de Moëbius Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, telle que

- $\mu(1) = 1$
- si n est divisible par le carré d'un nombre premier, alors $\mu(n) = 0$
- si p_1, p_2, \dots, p_k sont premiers distincts, alors $\mu(p_1 p_2 \dots p_k) = (-1)^k$

Théorème d'inversion de Moëbius

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, alors $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

on s'appuie sur le

Lemme $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ pour $n > 1$

Preuve Posons $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \sum_i \mu(p_i) + \sum_{i < j} \mu(p_i p_j) + \dots \\ &= 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \\ &= (1 - 1)^n = 0 \end{aligned}$$

Preuve du théorème

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{dp=n} \mu(d) g(p) = \sum_{dp=n} \mu(d) \sum_{qr=p} f(r) \\ &= \sum_{dqr=n} \mu(d) f(r) = \sum_{r|h} f(r) \sum_{d|(n/r)} \mu(d) \end{aligned}$$

D'après le lemme, pour $r < n$, $\sum_{d|(n/r)} \mu(d) = 0$, de sorte que le seul terme non nul de la

somme $\sum_{r|n}$ s'obtient pour $r = n$, et donc $\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \mu(1) = f(n)$

Application: retrouver $f(6)$ calculé dans le paragraphe précédent.

Relations entre coefficients et racines

$$\begin{aligned} P(X) &= X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_n \\ &= (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n) \end{aligned}$$

Avec ces notations, on sait que $a_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$

En particulier, $(1 - z_1)(1 - z_2) \dots (1 - z_n) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$

Fonctions caractéristiques

Soit E un ensemble, A et B deux sous ensembles de E . On note

$$\chi_A : E \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Avec ces notations, on obtient les résultats suivants:

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Relation fondamentale

Première approche

$$\chi_{A \cup B} = 1 - \chi_{\overline{A \cup B}} = 1 - \chi_{\bar{A} \cap \bar{B}} = 1 - \chi_{\bar{A}} \chi_{\bar{B}} = 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B)$$

$$= 1 - (1 - \chi_A - \chi_B + \chi_{A \cap B}) = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

Cas général

$$\chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = (1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2}) \dots (1 - \chi_{A_n}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \chi_{A_{i_2}} \dots \chi_{A_{i_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

Formule du crible

On somme cette relation sur tous les éléments de E . Comme $\sum_{q \in E} \chi_A(q) = \text{card}(A)$,

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Cette formule du crible est fondamentale en analyse combinatoire. Voici un exemple d'utilisation:

Nombre $\sigma(n,p)$ de surjections de N dans P .

N est un ensemble à n éléments, et P un ensemble à p éléments. Numérotons de 1 à p les éléments de P



Soit A_i l'ensemble des applications de N dans P qui recouvrent i .

Une surjection de N dans P est une application recouvrant tous les éléments de P , donc

$$\sigma(n,p) = \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p)$$

Le nombre total d'applications de N dans P est p^n , ce qui nous permet de dénombrer les applications de N dans P qui ne sont pas des surjections.

$$p^n - \sigma(n,p) = \text{card}(\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p})$$

$$= \text{card}(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_p)$$

$$= \sum_{k=1}^p ((-1)^{k+1}) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} (\bar{A}_{i_1} \cap \bar{A}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k})$$

Soit E_k l'ensemble formé des éléments i_1, i_2, \dots, i_k .

$\bar{A}_{i_1} \cap \bar{A}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}$ est l'ensemble des applications de N dans $P \setminus E_k$. Leur nombre est $(p-k)^n$.

D'autre part, pour k donné, il y a $\binom{p}{k}$ ensembles tels que E_k . Donc

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} \text{card} (\bar{A}_{i_1} \cap \bar{A}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}) = \binom{p}{k} (p-k)^n \quad \text{Donc}$$

$$\begin{aligned} p^n - \sigma(n,p) &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n \\ \sigma(n,p) &= p^n - \sum_{k=1}^p ((-1)^{k+1}) \binom{p}{k} (p-k)^n \\ &= p^n + \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n \\ &= \sum_{k=0}^p ((-1)^k) \binom{p}{k} (p-k)^n \end{aligned}$$

Retour au problème d'inversion

On va résoudre le problème général suivant:

Soit $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ et, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $g(a) = \sum_{d|a} f(d)$

La fonction g étant connue, déterminer la fonction f .

C'est ce type de problème qui a été proposé dans l'exemple introductif.

Mise en place

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, et D_a l'ensemble des diviseurs de a . Alors

$$g(a) = \sum_{q|a} f(q) \chi_{D_a}(q)$$

$$\chi_{D_a} = \chi_{\{a\}} + \chi_{D_a \setminus \{a\}}, \text{ donc}$$

$$g(a) = \sum_{q|a} f(q) \chi_{\{a\}}(q) + \sum_{q|a} f(q) \chi_{D_a \setminus \{a\}}(q)$$

Or $\sum_{q|a} f(q) \chi_{\{a\}}(q) = f(a)$, donc

$$g(a) = f(a) + \sum_{q|a} f(q) \chi_{D_a \setminus \{a\}}(q), \text{ soit}$$

$$\boxed{f(a) = g(a) - \sum_{q|a} f(q) \chi_{D_a \setminus \{a\}}(q)}$$

Soit p un diviseur de a . Alors

$$\sum_{q|a} f(q) \chi_{D_p}(q) = g(p).$$

Ainsi, le problème sera résolu si l'on sait exprimer $\chi_{D_a \setminus \{a\}}$ en fonction des χ_{D_p} .

Avant de résoudre ce problème, comprenons-le sur un exemple.

$$g(a/p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}) = \sum_{q/a} f(q) \chi_{D_{a/p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}}}(q)$$

On trouve finalement

$$f(a) = g(a) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} g(a/p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k})$$

Cette relation est la relation cherchée, à condition de l'écrire

$$f(a) = \sum_{d/a} \mu(d)g\left(\frac{a}{d}\right)$$

en observant que les seuls diviseurs d qui apparaissent sont:

- $d = 1$ pour $g(n)$, donc $\mu(1) = 1$
- $d = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \dots p_{i_k}$, les nombres p_i étant premiers distincts, auquel cas $\mu(d) = (-1)^k$
- si d est d'une autre forme, c'est-à-dire si d est multiple d'un carré, $\mu(d) = 0$.

On a donc bien démontré la formule d'inversion de Moëbius, en introduisant de manière naturelle la fonction du même nom.

Titre : Aimer faire des maths 3

Auteurs : Bertrand FORT, Thierry HAMEL, Dominique POMMIER, François PREVOST, Luc SINEGRE, Yves SUPRIN.

Public concerné : Professeurs de Lycée, collèges, Post-Bac.

Résumé

Actes du stage P.A.F "Aimer faire des maths".

Mots clés : Nombre complexe, double, dual, hypercomplexe.

Enveloppe, conique, base roulante.

Série harmonique alternée, convergence commutative.

Paradoxe du prisonnier.

Point fixe. Méthode de Newton.

Perspective, projection centrale.

Polarité, pôles et polaires.

Fonction de Moëbius, crible de Poincaré.

Editeur : IREM de ROUEN.

Date : Juin 1996

Nombre de pages : 66

Format : A4.

Prix : 40.00 F.

Publication : ISBN : 2-86239-068-2

Dépôt légal : 2^{ème} Trimestre 1996.

Bon de commande

M. , Mme, Mlle : _____

Adresse : _____

Libellé	Prix	Quantité	Total
AIMER FAIRE DES MATHS 3	40.00 F.....	
Frais d'envoi : 15 F pour le 1 ^{er} livre et 10 F par livre supplémentaire (France)		
Frais réels pour l'étranger		
			SOMME DUE :

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN

Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

DATE :

SIGNATURE :