



IREM de ROUEN

BP 138

76821 Mont Saint Aignan

Tél. et Fax.

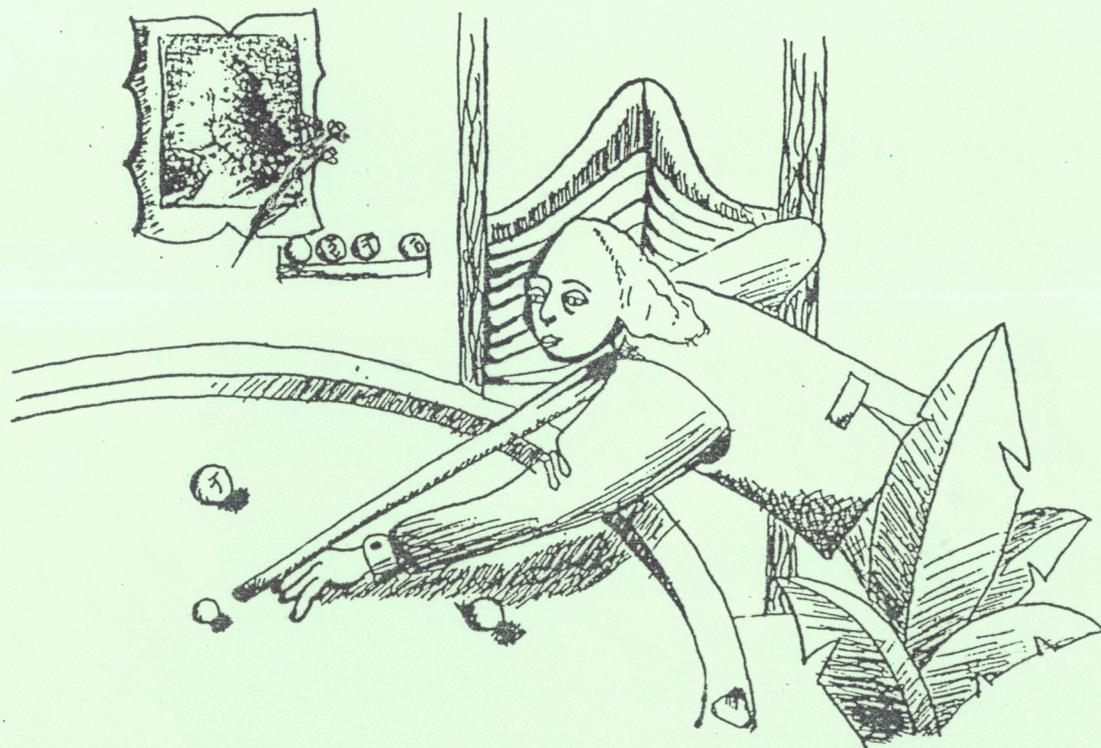
35-14-61-41

Aimer

encore

faire des

Maths 2



SOMMAIRE

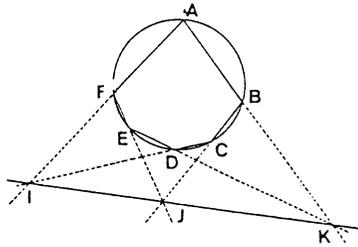
page

<i>1</i>	<i>Avant et après le théorème de Pascal.</i>	Luc Sinègre (Rouen).
<i>24</i>	<i>Les polynômes et nombres de Bernoulli.</i>	Bertrand Fort (Dieppe).
<i>33</i>	<i>Phénomènes stochastiques dans l'hypercube.</i>	Jean Claude Jovet et François Prévost (Dieppe).
<i>45</i>	<i>Le billard circulaire.</i>	Thierry Hamel (Evreux).
<i>55</i>	<i>Introduire les complexes en terminale S.</i>	Frédérique Bouteaud (Rouen).
<i>58</i>	<i>Deux exercices.</i>	Bertrand Fort (Dieppe).

AVANT ET APRES LE THEOREME DE PASCAL.

Le but de ce texte est de démontrer le théorème de Pascal:

Si un hexagone A, B, C, D, E, F est inscrit dans une conique, les intersections des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (AF) sont alignées.



Mais il s'agit aussi d'une promenade au coeur de la géométrie projective; j'ai toutefois évité d'utiliser certains outils (les perspectives ou les envois d'objets à l'infini), ce qui fait que les démonstrations ne sont pas toujours les plus courtes ou les plus élégantes. En cas de problème je suis revenu à l'algèbre ou au moins à des notions partagées par tous. J'ai essayé de faire ressortir l'unité des différents domaines (géométrie, algèbre, algèbre géométrique) sans doute étudiés par les stagiaires à un moment ou à un autre de leur cursus.

1. BIRAPPORT SUR UNE DROITE.

a. Définition: Etant donnés quatre points A, B, C, D sur une même droite, on appelle birapport des quatre points (A,B,C,D) la quantité $\frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}$.

Il est toujours possible de considérer C et D, quand ils sont différents de A, sont barycentres de A et B affectés des coefficients respectifs u et -1 et u' et -1.

Dans ce cas (A,B,C,D) = u' + u.

Remarque: Si a, b, c, d sont les abscisses des points A, B, C, D d'origine O,

$$(A, B, C, D) = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}$$

b. Rapport anharmonique.

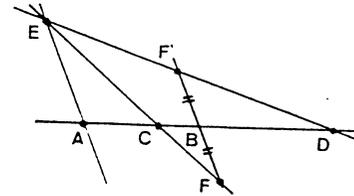
Un cas particulier important, arrive lorsque (A,B,C,D) = -1. On dit alors que les points C et D divisent harmoniquement le segment [A,B].

Dans ce cas, comme l'écrit par exemple Poncelet¹, on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ et "la ligne AB est divisée en segment proportionnels par le point C ou le point D".

Mais pourquoi utiliser le mot "harmonique"? Parce que la distance CD est la moyenne harmonique des distances DA et DB. En effet d'après la remarque du paragraphe précédent on a $\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b}{a} = -1$, si l'on choisit D au centre du repère, et donc $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Conclusion
$$\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} = \frac{2}{DC}$$
.

Le point D est le "conjugué" harmonique du point C par rapport à deux points distincts fixés A et B (ie (A,B,C,D)=-1) si et seulement si D est le barycentre de A et B affectés des mêmes coefficients que C (au signe près pour l'un deux). Cette remarque nous permet de donner une construction géométrique du quatrième point quand les trois premiers sont donnés.



Il suffit de réaliser géométriquement C comme barycentre de A et de B par deux segments parallèles [AE] et [BF], puis de construire F' le symétrique de F par rapport au point B.

On obtient une relation classique en introduisant le point O milieu du segment [CD]. Dans ce cas la relation principale devient $\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b+c}{a+c} = -1$ ou encore $c^2 = ab$.

Le birapport de (A,B,C,D) est donc anharmonique si et seulement si $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2$, c'est-à-dire si et seulement si tout cercle contenant A et B est orthogonal au cercle de diamètre CD.

c. Point de vue moderne.

A chaque point de la droite (AB) correspond un système de coordonnées barycentriques (x,y) défini à un facteur de proportionnalité près. On représente ainsi les points de la droite par les droites vectorielles de R^2 et l'on dit que l'on travaille ainsi sur la droite projective. Nous n'aurons pas besoin de définitions plus compliquées pour le moment. Définissons dans R^2 la forme $\langle (x,y); (x',y') \rangle = xy' + x'y$. Il est facile de démontrer que cette forme est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Si en effet un vecteur (a,b) était orthogonal à tout vecteur, il serait en particulier orthogonal à (1,0) donc b serait nul, et à (0,1) donc a le serait également. On ne peut appliquer cette forme sur la droite (AB), puisque les systèmes de coordonnées ne sont pas uniques. Toutefois, si un vecteur (x,y) est orthogonal à un vecteur (x',y'), tout vecteur $\lambda(x,y)$ le restera. On peut donc définir une orthogonalité sur la droite (AB) induite par celle de R^2 . Attention, la forme n'est pas définie, les vecteurs isotropes sont donnés par l'équation $2xy=0$. Les points A et B sont donc les représentants, sur la droite (AB) des deux droites isotropes. Le point C(u,-1) sera orthogonal au point D(u',-1) si et seulement si $-u'u=0$, soit (A,B,C,D) = u' + u = -1.

En termes modernes, les propriétés de l'anharmonisme se ramènent à la simple orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire...

¹ Traité des propriétés projectives des figures Tome 1 p.12. Paris Gauthier-Villars (1865).

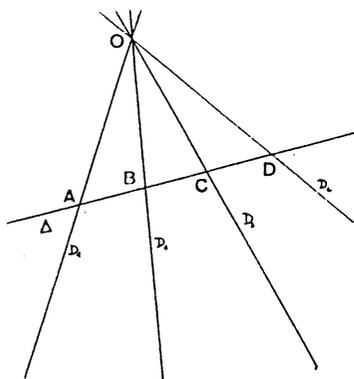
2. FAISCEAU DE DROITES

On appelle faisceau de droites quatre droites distinctes du plans qui sont concourantes en O .² Ainsi, un faisceau de droites est entièrement déterminé par deux droites disons D_1 et D_2 que dans toute la suite nous supposons fixées. Le plus simple est de prendre dorénavant ces droites comme les axes d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et leurs équations respectives $y=0$ et $x=0$.

Chaque droite qui passe par O et non verticale, possède une équation unique de la forme $ux+y=0$. L'ensemble des droites non verticales s'identifie ainsi, *via* cette écriture à un ensemble à un paramètre, l'ensemble des équations (auquel on adjoint ensuite l'équation $x=0$), et l'on peut *symboliquement* représenter cet ensemble par une nouvelle droite numérique.

Prendre un faisceau de quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 , du plan revient donc, sur cette "super" droite à prendre quatre points d_1, d_2, d_3, d_4 . Les points d_1, d_2 sont d'ailleurs les barycentres des deux premiers avec comme coefficients u et 1 (resp u' et 1).

Nous allons voir que les propriétés géométriques du faisceau se retrouvent sur cette droite.



Considérons le birapport des quatre points déterminés par une sécante Δ au faisceau. Par homothétie de centre O le birapport est conservé et donc, on peut, pour simplifier, choisir Δ contenant le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque la sécante n'est pas horizontale, appelons m son coefficient directeur et écrivons son équation paramétrique.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{R} \quad B\vec{M} = \rho(\vec{i} + m\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 1 + \rho \\ y = \rho m \end{cases}$$

Δ coupe les droites D_1, D_2, D_3, D_4 en A, B, C, D de paramètres respectifs $-1, 0, \frac{-u}{m+u}$ et $\frac{-u'}{m+u'}$.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\rho_C - \rho_A}{\rho_C - \rho_B} + \frac{\rho_D - \rho_A}{\rho_D - \rho_B} = \frac{\frac{-u}{m+u} + 1}{\frac{-u}{m+u} + 1} + \frac{\frac{-u'}{m+u'} + 1}{\frac{-u'}{m+u'} + 1} = u' + u.$$

Le birapport ne dépend donc pas de la sécante, mais intrinsèquement du faisceau. Mieux cette constante est exactement le birapport des quatre points d_1, d_2, d_3, d_4 mesuré sur la super droite

² On peut aussi accepter le cas de quatre droites parallèles, mais j'ai écarté artificiellement ce cas pour simplifier.

³ Si Δ est parallèle à D_4 $m=-u'$ et le paramètre du troisième point, disons de V est $\frac{u}{u'-u}$.

⁴ Les dénominateurs ne s'annulent pas, puisque Δ a été choisie non parallèle aux quatre droites.

précédente. Cette propriété est connue depuis longtemps, comme le rappelle Chasles⁵ puisqu'elle apparaît à la 129ème proposition du septième livre de Pappus: "Quand quatre droites sont issues d'un même point, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique a toujours la même valeur, quelle que soit la transversale". La notion de birapport est donc une propriété projective, puisqu'elle est conservée par toute projection centrale.

Définition:

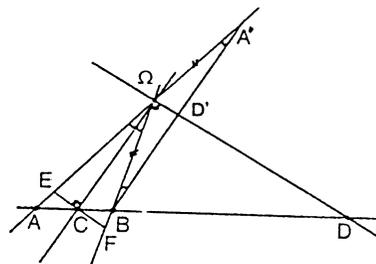
Le faisceau des quatre droites sera dit harmonique quand son birapport sera égal à -1 .

Le faisceau est donc harmonique si et ssi $u=-u'$, ou encore si et ssi le paramètre de V vaut $-1/2$, donc si V est le milieu de $[AB]$.

Proposition: Un faisceau de droites est donc harmonique si et seulement si trois droites déterminent sur une sécante parallèle à la quatrième deux segments égaux.

Exemple

Dans le triangle ΩAB , on a dessiné les bissectrices intérieure et extérieure issues de Ω ; elles coupent (AB) en C et D . On appelle O le milieu de $[CD]$.



La perpendiculaire à la bissectrice intérieure passant par C recoupe les côtés du triangle en E et F . (ΩC) est à la fois la hauteur et la bissectrice de ΩEF , donc C est le milieu de $[EF]$. Le faisceau $(\Omega A, \Omega B, \Omega C, \Omega D)$ est donc harmonique. On en déduit:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

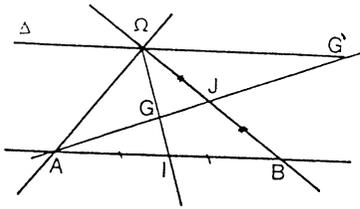
Si l'on mène la parallèle à (ΩC) passant par B qui coupe (ΩA) en A' , et (ΩD) en D' , D' est le milieu de $[BA']$. La droite (ΩD) qui est par construction une hauteur du triangle $\Omega BA'$ est aussi une médiane. Le triangle est donc isocèle d'où $\Omega A' = \Omega B$ et donc

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega A'}} = -\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega B}}$$

On démontre de plus que le cercle de diamètre $[CD]$, lieu des points M tels que $\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega B}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est un cercle orthogonal au cercle circonscrit au triangle ABC .

⁵ Aperçu Historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, p.302, Paris Gauthier-Villars (1889).

Exemple2



Le second exemple très classique est fourni par la médiane issue de Ω du triangle. Puisqu'elle découpe $[AB]$ en deux segments égaux, nous pouvons dire, en appelant Δ la parallèle à (AB) menée par Ω et I le milieu de $[AB]$, que le faisceau $(\Omega A, \Omega B, \Omega I, \Delta)$ est harmonique.

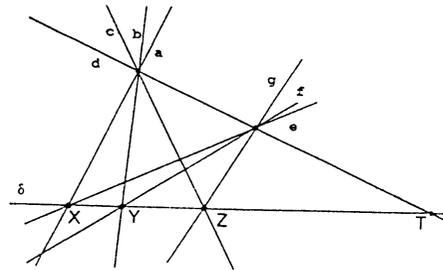
Ainsi, si on appelle G le centre de gravité, et J le milieu de $[\Omega B]$, la droite (AG) recoupe Δ en G' tel que $(A, J, G', G) = -1$, G étant le barycentre de $(A, 1)$ $(J, 2)$, G' sera celui de $(A, 1)$ $(J, -2)$.

Nous finissons par une proposition sur les faisceaux qui nous sera utile plus loin.

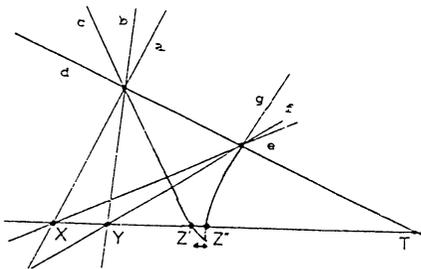
Proposition: Soient a, b, c, d quatre droites d'un faisceau, et d, e, f, g quatre autres droites d'un second faisceau. On suppose que les droites a et e, b et f, c et g sont sécantes en X, Y, Z . Alors les points X, Y, Z sont alignés si et seulement si les birapports $[a, b, c, d]$ et $[e, f, g, d]$ sont égaux.

Dans le sens direct: si X, Y, Z sont alignés sur une droite δ qui coupe d en T . On lit δ comme une transversale sur le premier faisceau et sur le second donc

$$[a, b, c, d] = [X, Y, Z, T] = [e, f, g, d].$$



Si maintenant l'on suppose les deux birapports égaux, appelons encore δ la droite contenant X et Y qui coupe d en T . Les droites c et g coupent δ en Z' et Z'' .
Or $[a, b, c, d] = [X, Y, Z', T]$
et $[e, f, g, d] = [X, Y, Z'', T]$
donc $Z' = Z''$.



3. APPLICATION AUX CONIQUES.

On souhaite obtenir des propriétés "projectives" des coniques et l'on a choisi une définition barycentrique; elle ne permet pas, certes, pour l'instant de distinguer par des critères précis les différents types (ellipse, hyperbole, parabole, etc...), mais ce n'est pas très important pour ce que l'on veut faire. Cette présentation permet d'obtenir des résultats projectifs en faisant l'économie de leur définition théorique.

a. Coordonnées barycentriques.

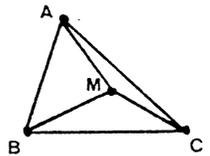
Tous les points du plan seront donc repérés comme barycentre d'un triangle donné; les coefficients donneront les coordonnées homogènes (x, y, z) .

Remarque: le point M est de coordonnées (x, y, z) , si et seulement si l'on a

$$xM\vec{A} + yM\vec{B} + zM\vec{C} = \vec{0}.$$

ce qui entraîne par exemple:

$$xM\vec{A} \wedge M\vec{C} + yM\vec{B} \wedge M\vec{C} = \vec{0}.$$



Les coordonnées sont donc proportionnelles aux aires orientées $S_{MBC}, S_{MCA}, S_{MAB}$.

Nous aurons besoin de deux résultats sur les équations de droites en coordonnées barycentriques.

Point 1: Toute droite du plan possède une équation de la forme $ux + vy + wz = 0$, avec u, v, w non tous nuls. Réciproquement toute équation du type précédent représente une droite.

Une droite (IJ) aura dans un repère barycentrique IJK l'équation $Z=0$. Si maintenant l'on rapporte cette équation à un repère quelconque l'on n'effectuera que des substitutions linéaires de coordonnées barycentriques et l'on trouvera comme nouvelle équation $ux + vy + wz = 0$. Les coefficients u, v, w représentent les troisièmes composantes des coordonnées barycentriques de A, B, C dans le repère IJK et ne sont donc pas tous nuls (sinon ABC seraient alignés).

Réciproquement, soit par exemple $ux + vy + wz = 0$ avec u non nul, une équation que l'on peut donc simplifier sans perdre la généralité sous la forme $x + vy + wz = 0$.

$$x + vy + wz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -v\alpha - w\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Les points $M(x, y, z)$ vérifient l'équation si -et seulement si- ils sont barycentres des points fixes $E(-v, 1, 0)$ et $F(-w, 0, 1)$.

Point 2: Les points M, M', M'' sont alignés si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ de leurs coordonnées barycentriques est nul.

Supposons que deux des points, par exemple M' et M'', soient distincts. Soit N un point courant de coordonnées (X, Y, Z)

Comme $\begin{vmatrix} X & x' & x'' \\ Y & y' & y'' \\ Z & z' & z'' \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - Y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$ et que l'un des déterminants deux deux

est non nul (M'' ≠ M'), $\begin{vmatrix} X & x' & x'' \\ Y & y' & y'' \\ Z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$ représente l'équation de la droite (M'M''), ce qui démontre la proposition.

b. Les coniques

Définition: On appelle conique du plan l'ensemble des points qui dans le repère ABC

correspond à une équation du type $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire une équation

du type $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$.

Un couple de droites correspond donc à la conique d'équation $2xy=0$ dans un repère bien choisi. Dans ce cas on parle de conique dégénérée. La conique est propre si et seulement si le déterminant de la matrice de la définition ne s'annule pas. Une conique dégénérée se réduit à un système de deux droites, éventuellement confondues.

Démonstration:

Supposons le déterminant nul, et pour commencer la matrice de rang 2. Alors il existe un

vecteur $\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix}$ non nul tel que $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$. Puisque toutes les coordonnées

ne sont pas nulles, prenons, par exemple $\zeta \neq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur courant. Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{x}{\zeta} \\ \frac{y}{\zeta} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = X'$ est encore annulé par la

matrice A.

On a

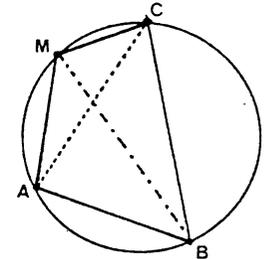
$$\begin{aligned} {}^tXAX &= 0 \Leftrightarrow {}^t(X - X')A(X - X') = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x' \ y - y' \ 0) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x')^2 + 2d(x - x')(y - y') + b(y - y')^2 = 0 \end{aligned}$$

Si la conique est non vide, ce trinôme se factorise forcément sur R en deux équations du premier degré ce qui correspond à deux droites⁶.

Si la matrice est de rang 1 le discriminant $ab - d^2$ est nul et donc on aboutit à une droite double.

Exemple.

Pour retrouver l'équation barycentrique du cercle, on peut reprendre la réciproque du théorème de Ptolémée⁷. Appelons a, b, c les longueurs BC, CA, AB.



Le théorème de Ptolémée s'énonce alors ainsi

$$\varepsilon MA \cdot BC + \varepsilon' MB \cdot CA + \varepsilon'' MC \cdot AB = 0.$$

soit

$$\varepsilon a MA + \varepsilon' b MB + \varepsilon'' c MC = 0. \quad (*)$$

Les ε valent 1 ou -1 selon le signe des aires MBC, MCA, MAB.

Or les coordonnées barycentriques du point M sont $(S_{MBC}, S_{MCA}, S_{MAB})$ proportionnelles à

$$(MB \cdot MC \sin(\overline{MB}, \overline{MC}), MC \cdot MA \sin(\overline{MC}, \overline{MA}), MA \cdot MB \sin(\overline{MA}, \overline{MB}))$$

ou encore, puisque dans un triangle les sinus sont proportionnels aux côtés, proportionnelles à

$$\left(\frac{\varepsilon a}{MA}, \frac{\varepsilon' b}{MB}, \frac{\varepsilon'' c}{MC} \right)$$

L'équation (*) s'écrit donc $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0$

Proposition: Par cinq points tels que trois quelconques ne soient jamais alignés passe une conique propre et une seule.

Appelons A, B, C, D, E les cinq points.

En prenant comme repère A, B, C, on a facilement que $a=0, b=0, c=0$.

⁶ Une étude un peu plus minutieuse montrerait que dans ce cas le discriminant $ab - d^2$ de cette équation, qui correspond au premier mineur de A, ne peut s'annuler, et donc que les deux droites sont distinctes.

⁷ Cf *Pourquoi aimer encore faire des maths au Lycée*. Leçon de T.Hamel sur le théorème de Ptolémée p.19 (Irem 1994).

Il nous reste donc deux conditions (les coordonnées de $D(x,y,z)$ et $E(x',y',z')$) pour déterminer les derniers coefficients.

$$\Sigma: \begin{cases} dx + ey + fz = 0 \\ dx'y' + ex'z' + fy'z' = 0 \end{cases}$$

Puisque les points D et E ne coïncident pas, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc par exemple $\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$ est différent de zéro.

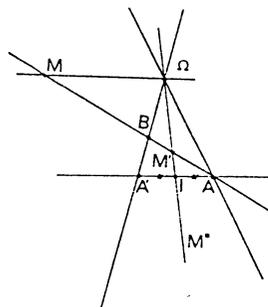
Comme le déterminant $\begin{vmatrix} xy & xz \\ x'y' & x'z' \end{vmatrix} = xx' \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$ est non nul⁸, Σ est de rang deux et il admet donc une solution à un paramètre qui fournit les coefficients à un paramètre près (qui sont tous non nuls!) et donc une unique conique.

$$\text{Comme de plus } \begin{vmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 2def \neq 0, \text{ la conique est propre.}$$

4. DUALITE PAR RAPPORT A UNE CONIQUE.

a. Introduction géométrique

Soient d et d' deux droites sécantes en Ω . Etant donné un point M du plan fixé. Une droite variable contenant M recoupe d et d' en A et B . Soit M' le conjugué harmonique de M sur la droite (AB) . Quel est le lieu des points M' ?

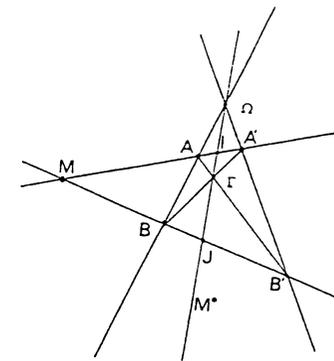


La parallèle à (ΩM) passant par A coupe (ΩB) en A' . L'intersection de $(\Omega M')$ avec cette droite est le milieu I de $[AA']$. Ainsi l'ensemble recherché est inclus dans (ΩI) . On vérifie que, réciproquement, tout point de la droite $(\Omega I) \setminus \{\Omega\}$ convient.

La droite ainsi obtenue est appelée M^* la polaire du point M . Nous venons d'en donner une construction simple. En voici une seconde très classique.

⁸ Si x est nul D appartient à (BC) ...

On construit deux transversales menées par M . Elles coupent d et d' en A, B et A', B' . Appelons I et J les intersections de M^* avec ces transversales. (AB') et (BA') sont sécantes en Γ . La polaire de M par rapport aux deux nouvelles droites (ΓA) et (ΓB) contient I et J et coïncide donc avec M^* . Ainsi $M^* = (\Omega \Gamma)$.



b. Aspect analytique

Soit $(x,y,0)$ les coordonnées du point M . Le repère étant défini par A, B et Ω . Le point M' a pour coordonnées $(x,-y,0)$ et les points de la polaire ont pour coordonnées $(x,-y,z)$. Sur la droite (AB) , comme nous l'avons déjà remarqué, la conjugaison se traduit par une orthogonalité par rapport à la forme quadratique définie par $\langle (x,y); (x',y') \rangle = xy' + x'y$.

Si nous étendons cette forme au plan en posant $\langle (x,y,z); (x',y',z') \rangle = xy' + x'y$, nous obtiendrons une forme bilinéaire, dont le noyau dans R^3 est constitué par l'axe des z , représenté dans le plan par Ω . Les vecteurs isotropes sont d'équation $x=0$ ou $y=0$ et z quelconque, et sont représentés par les deux droites d et d' . A tout point M du plan correspond une droite de R^3 , dont le plan orthogonal correspond à M^* .

Tout le langage géométrique des pôles et polaires peut donc être utilement remplacé par celui plus actuel des formes quadratiques⁹.

Par exemple la proposition N appartient à la polaire M^* si et seulement si M appartient à la polaire N^* traduit la symétrie de la forme.

On peut démontrer directement la proposition: trois points sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes. On peut aussi lire ainsi "le rang d'un système de vecteurs est 2 si et ssi leurs trois plans orthogonaux appartiennent à un même faisceau" etc...

On met ainsi en place un système de transformation des figures qui obéit à des règles simples et permet d'obtenir de nouveaux théorèmes. Les points sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes, les droites sont concourantes si et seulement si leurs pôles sont alignés.

Remarque1

Soit C un point de la droite (AB) de coordonnées $(1,u)$, son conjugué sera le point $D(1,-u)$ et

$$\text{sa polaire la droite } (\Omega D) \text{ d'équation } \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -u & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0, \text{ soit encore } y + ux = 0, \text{ on retrouve ainsi}$$

justifiée l'association qui avait permis d'identifier les droites (ou leurs équations) à des points.

⁹ Historiquement cette unification a été faite dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle. Dans l'enseignement secondaire français, la théorie des pôles a été enseignée jusqu'en 1971. La révolution bourbakiste a bouleversé cet ordre, ce qui était logique puisqu'en développant les structures elle diffusait le point de vue moderne. De nos jours qu'en reste-t-il?

Remarque2

Prenons quatre points A, B, C, D alignés et leurs polaires A', B', C', D' que la droite (AB) coupe en A', B', C', D' . Choisissons (I, J) les points d'intersection avec les droites de départ, comme repère sur cette droite et prenons les coordonnées des premiers points sous la forme $(1, a)$ $(1, b)$ $(1, c)$ $(1, d)$. Les coordonnées de A', B', C', D' seront $(1, a')$ $(1, b')$ $(1, c')$ $(1, d')$.

On a $\overline{IA} = \frac{a}{1+a}$ $\overline{IJ} = \frac{a}{1+a}$, donc

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{a}{1+a} - \frac{c}{1+c}}{\frac{a}{1+a} - \frac{d}{1+d}} \cdot \frac{\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b}}{\frac{a}{1+a} - \frac{d}{1+d}} = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}$$

Comme la conjugaison n'a fait que changer les signes on peut écrire

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = (A', B', C', D').$$

La dualité conserve donc les birapports entre les points et les droites polaires.

c. Généralisation.

Etant donné une conique d'équation $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, on peut de même définir

la polaire d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ comme ensemble des points $M'(x', y', z')$ déterminés par

l'équation $(x_0 \ y_0 \ z_0) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$. C'est bien sûr encore une droite que l'on peut

noter M^* . On utilise donc la forme bilinéaire:

$$\langle (x, y, z); (x', y', z') \rangle = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

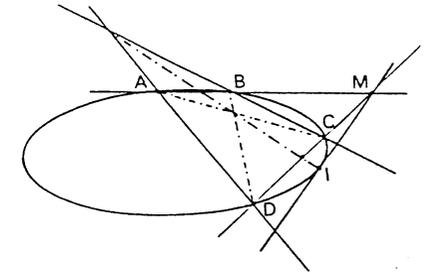
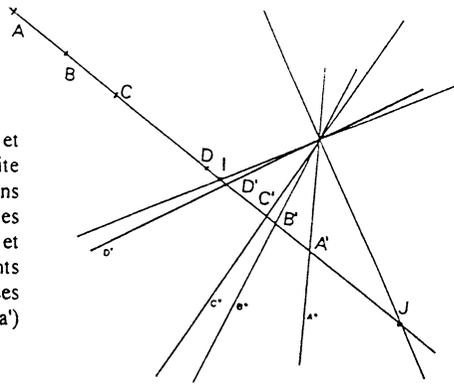
qui est non dégénérée dans le cas d'une conique propre et dont l'ensemble des vecteurs isotropes correspond, dans le plan, à la conique de départ.

Soit M un point fixé, deux droites issues de M coupent la conique en deux couples de points (A, B) , (C, D) . Choisissons A, B, C comme nouveau repère barycentrique, les coordonnées de M sont $(x, y, 0)$. L'expression de la forme quadratique restreinte à l'image de la droite (AB) est

de la forme $\langle (x, y, 0); (x', y', 0) \rangle = (x \ y \ 0) \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = d(xy' + x'y)$.

On retrouve donc la forme déjà étudiée précédemment¹⁰. La polaire de M par rapport à la conique coupe (AB) en un point qui appartient justement à la polaire de M par rapport aux droites (AC) et (BD) .

¹⁰ d est différent de zéro puisque le déterminant de la matrice vaut $2edf$ et ne s'annule pas.

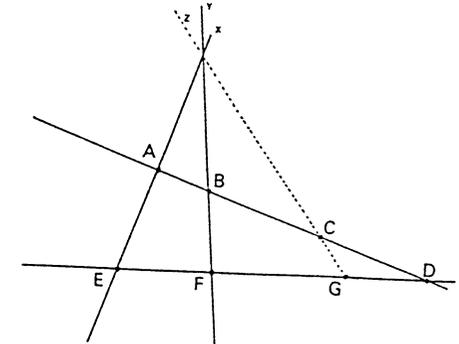


Supposons maintenant que la polaire de M coupe la conique en I . La polaire de I est donc (IM) . Si elle recoupait la conique en J distinct de I , nous aurions sur la droite (IJ) deux points correspondants à deux vecteurs isotropes et orthogonaux entre eux. La forme serait donc indistinctement nulle sur la droite ce qui a été exclu puisque la conique est propre. I^* est donc la tangente à la conique.

APPLICATION1: Comme exemple écrivons le théorème dual de la proposition démontrée au paragraphe 1.

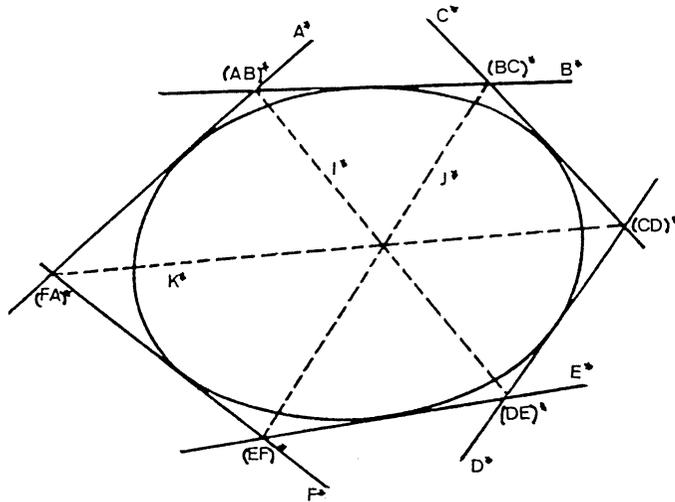
On construit deux quadruplets de points (A, B, C, D) et (E, F, G, D) . On appelle x la droite (AE) , y la droite (BF) et z la droite (CG) . Les trois droites x, y, z sont concourantes si et ssi les birapports $(A, B, C, D) = (E, F, G, D)$.

En effet, après transformation par dualité, les points deviennent deux quadruplets de droites (a, b, c, d) et (e, f, g, d) . Les droites x, y, z contenant A et E , B et F , C et G , deviennent les points X, Y, Z . Et nous avons déjà vu que les droites x, y, z sont concourantes si et seulement si X, Y, Z sont alignés, c'est-à-dire, si $(a, b, c, d) = (e, f, g, d)$, soit $(A, B, C, D) = (E, F, G, D)$.



APPLICATION2: On peut énoncer le théorème dual du théorème de Pascal, en utilisant la polarité par rapport à la conique où s'inscrit l'hexagone. Le point A sera transformé en sa

polaire, c'est-à-dire, en la tangente passant par A à la conique. L'hexagone inscrit est donc transformé en un hexagone exinscrit. La polaire du point I intersection de (AB) avec (DE), est une droite qui va contenir les points (AB)' et (DE)'. L'alignement des trois points I, J, et K équivaut donc au concours des trois droites I', J', K'. C'est le théorème de Brianchon (1785-1862).¹¹



5. L'HEXAGRAMME MYSTIQUE.

Soit A, B, C, D, E, F les six points. Choisissons comme repère les points A, C, et E. Les points B, D, et F auront comme coordonnées (a, b, c) (a', b', c') (a'', b'', c'') .

Un point M (x, y, z) appartient à la droite (AB) si et ssi $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ soit $\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = 0$.

Le même point appartient à la droite (ED) si et ssi $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a' & b' & c' \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ soit $\begin{vmatrix} a' & b' \\ x & y \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi l'on trouve que I, le point d'intersection de ces droites, a pour coordonnées $(a'b, bb', cb')$.

¹¹ Le théorème de Brianchon qui fut démontré alors que le mathématicien était étudiant à polytechnique. forme avec celui de l'hexagramme, la première paire de théorèmes "duaux".

Par permutation on trouve de la même façon pour les points J et K intersections de (BC) et (EF) et de (CD) et (AF) les coordonnées $(aa'', b''a, ca'')$ et $(a'c'', c'b'', c'c'')$.

La condition d'alignement de I, J, et K est donc $D = \begin{vmatrix} a'b & bb' & cb' \\ aa'' & b''a & ca'' \\ a'c'' & c'b'' & c'c'' \end{vmatrix} = 0$.

L'équation de la conique qui contient A, C, E est de la forme $(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

La conique passera par les points B, D, E si et seulement si le système

$\begin{cases} \alpha ab + \beta ac + \gamma cb = 0 \\ \alpha a'b' + \beta a'c' + \gamma c'b' = 0 \\ \alpha a''b'' + \beta a''c'' + \gamma c''b'' = 0 \end{cases}$ possède au moins une solution non triviale donc si et ssi son

déterminant est nul. Soit $D' = \begin{vmatrix} ab & ac & cb \\ a'b' & a'c' & c'b' \\ a''b'' & a''c'' & c''b'' \end{vmatrix} = 0$

Or $D = bb'aa''c'c'' \begin{vmatrix} a'/b' & 1 & a'/b \\ 1 & b''/a'' & c'/a \\ a'/c' & b''/c'' & 1 \end{vmatrix}$ et $D' = abc'b'a''c'' \begin{vmatrix} 1 & c'/b & c'/a \\ a'/c' & a'/b' & 1 \\ b''/c'' & 1 & b''/a'' \end{vmatrix}$

On effectue une permutation sur les lignes, puis sur les colonnes de ce déterminant pour retrouver le premier (avec une transposition):

$\begin{vmatrix} 1 & c'/b & c'/a \\ a'/c' & a'/b' & 1 \\ b''/c'' & 1 & b''/a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'/c' & a'/b' & 1 \\ b''/c'' & 1 & b''/a'' \\ 1 & c'/b & c'/a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'/b' & 1 & a'/c' \\ 1 & b''/a'' & b''/c'' \\ c'/b & c'/a & 1 \end{vmatrix}$

La conique passant par A, C, E contient B, D F si et seulement si les points I, J, K sont alignés.

6. POURQUOI MYSTIQUE.

Pour répondre à cette question il faut replacer ce théorème dans l'oeuvre géométrique de Pascal. Alors âgé de seize ans, comme il l'écrivit lui-même, Pascal désirait en faire la base d'un traité général sur les coniques. Malheureusement cet ouvrage ne nous ait pas parvenu. "Leibniz, qui pendant son séjour à Paris, l'a eu entre les mains, nous fait connaître par une lettre adressée en 1676 à M. Perier, neveu de Pascal, les titres des six parties ou traités, qui devaient le composer"¹².

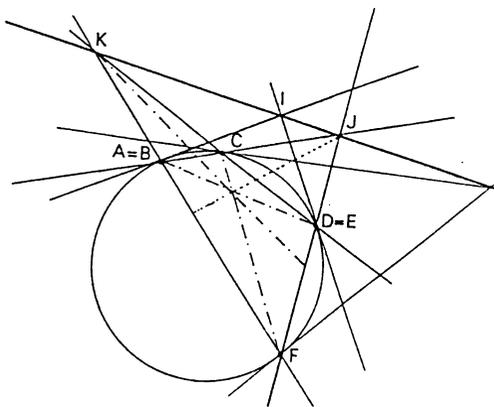
¹² Aperçu Historique des méthodes en Géométrie (Opus cité) p.70.

La première partie utilisait les principes de la perspective pour engendrer les coniques à partir du cercle, et en déduire les propriétés.

La deuxième "roulait autour de l'hexagramme mystique". Le théorème aurait été démontré sur le cercle et étendu par perspective aux autres coniques.

La troisième donnait les applications de l'hexagramme, la propriété (donnée à la page 17) des cordes et des diamètres coupés harmoniquement.

De plus Chasles, après Poncelet¹³ suppose que cette partie devait également comporter la théorie des pôles. En effet quand on fait dégénérer l'hexagone en quadrilatère, en rendant deux côtés infiniment petits, on obtient cette figure:



Ce qui donne la proposition suivante: Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, les tangentes menés par deux sommets opposés, se coupent sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés.

On peut donc retrouver toute la théorie des pôles et des polaires à partir de l'hexagramme.

Les trois dernières parties contenaient des développements géométriques qui n'intéressent pas directement cet exposé¹⁴.

On connaît une partie de ces considérations géométriques grâce à un autre traité paru en 1640, *l'Essai pour les coniques*¹⁵. Le théorème de l'hexagramme mystique y est d'abord énoncé comme un lemme dont tout le reste doit découler. Là encore on retrouve donc le théorème au point de départ de plusieurs grands théorèmes de géométrie projective (théorie des transversales, involution: de six points). Ainsi Mersenne a pu affirmer que le traité complet aurait comporté plus de quatre cents corollaires.

¹³ Les quatrième et cinquième des propriétés énoncées en tête de cet article ont été données par Lahire., les trois autres appartiennent à Mac Laurin...., elles ont été reproduites ensuite par R.Simson, Müller etc. Ces différents géomètres n'ont probablement fait que répéter ce qu'avait déjà exposé le célèbre Pascal dans le IIIème Livre de son *Traité inédit sur les sections coniques* (Traité des propriétés projectives des figures Tome 1 p.97).

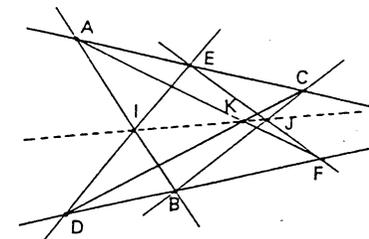
¹⁴ "La quatrième partie contenait ce qui a rapport aux segments faits sur des sécantes menées parallèlement à deux droites fixes, et les propriétés des foyers. Dans la cinquième, Pascal résolvait les problèmes où il s'agit de décrire une conique qui satisfasse à cinq conditions, d: passer par des points et de toucher des droites. Enfin la sixième partie avait été intitulée par Leibniz, *De loco solido*. Quelques mots nous font supposer qu'il pouvait y être question du fameux problème de Pappus, *Ad tres aut quatuor lineas*" (Aperçu des méthodes en Géométrie, opus cité p.71).

¹⁵ Cet essai est reproduit en partie dans le fascicule 5 des cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques, coédité par le CRDP de Rouen et par l'IREM (1993).

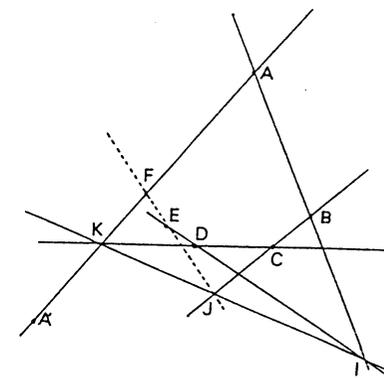
7. LES APPLICATIONS.

Ce n'est pas notre propos de donner ici toutes les applications du théorème de Pascal, qui, comme nous venons de le dire, pourrait pourtant être placé comme un théorème primitif de la théorie des coniques.

a. Si la conique dégénère en deux droites, on reconnaît alors le théorème de Pappus. Les intersections des trois croix obtenues à partir de deux couples de trois points sur deux droites sont alignées.

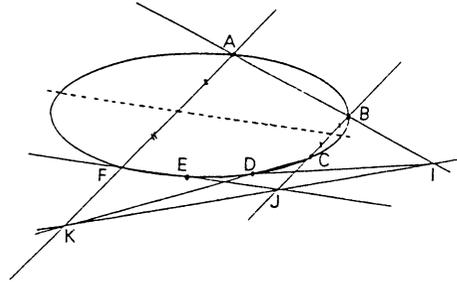


b. Le théorème fournit aussi un moyen pratique de construire les points d'intersection d'une droite et de la conique définie par cinq points quand la droite contient l'un de ces points. Etant donnés cinq points A,B,C,D,E définissant la conique, et A' un point fixé sur la droite, on cherche l'intersection de la droite (AA') avec la conique. On construit d'abord I l'intersection de (AB) avec (ED). Le point K est l'intersection de (AA') avec (CD). La *Pascale* (IK) recoupe le côté (BC) en J. Le point F recherché se trouve à l'intersection de (EJ) avec la droite (AK). Salmon¹⁶ note que cette construction revient à construire le triangle FKJ dont les côtés passent par des points fixes E, I, et A, et que ce corollaire a été énoncé par Mac Laurin.

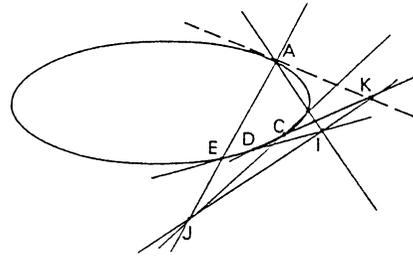


¹⁶ *Traité de géométrie analytique. Sections coniques* Paris Gauthier-Villars 1884 p.415. Traduction du traité des *Conic Sections* par M.M. Resal et Vaucheret.

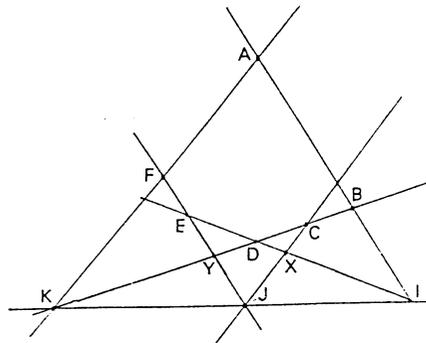
c. Pour trouver le centre de la conique définie par cinq points. On construit d'abord (AK) parallèlement à (BC). La construction du b. permet d'obtenir à l'aide du point F une corde (AF) parallèle à (BC). Et la droite qui joint le milieu de ces cordes est un diamètre. Il suffit alors de recommencer la construction pour obtenir un second diamètre.



d. Pour construire la tangente à une conique passant par l'un des cinq points de définition, A, il suffit de considérer cette droite (AF) avec F=A. On construit d'abord I. Le point J est alors à l'intersection de (BC) avec (FE)=(AE). Le point K est l'intersection de (IJ) avec (CD). (AK) est la tangente recherchée.



e. Terminons en donnant en conséquence une propriété remarquable des coniques: le birapport (BA, BC, BD, BE) ne dépend pas du point B et vaut donc (FA, FC, FD, FE) . Appelons X, Y, I et K les intersections respectives de (BC) et (ED), (CD) et (EF), (AB) et (DE), (AF) et (DC). On a $(BA, BC, BD, BE) = (I, X, D, E)$ et $(FA, FC, FD, FE) = (K, C, D, Y)$. On applique alors la proposition démontrée dans le paragraphe dualité. Les droites (IK), (XC) et (EY) étant concurrentes en J d'après le théorème de Pascal, $(I, X, E, D) = (K, C, Y, D)$, et, après permutation, on obtient la proposition.



8. L'APPORT DE LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE.

a. Introduction.

On fait remonter les débuts de l'introduction de l'algèbre en géométrie au mathématicien allemand Plücker (1801-1868). Ce dernier, à cause d'ailleurs d'une intervention malheureuse de Gergonne, se serait tourné vers cette nouvelle approche à la suite d'une polémique avec Poncelet. Les difficultés de Plücker n'étaient pas terminées puisque Collette¹⁷ raconte qu'il se détourna de la géométrie à cause de l'opposition résolue de Steiner. En fait Plücker, qui reconnaît avoir été influencé par le traité de *Géométrie analytique* du mathématicien Jean-Baptiste Biot (1774-1862), fut amené à découvrir de manière indépendante la méthode de *la notation abrégée* qui avait précédemment été introduite par Lamé (1795-1870).

Il s'agit de représenter un lieu de points, par son équation, et d'écrire cette dernière sous la forme $E=0$. Pour éviter le problème de la multiplicité des équations qui représentent une droite Salmon, par exemple utilise d'abord l'équation normale de la droite¹⁸.

Il désigne par α la quantité $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - p$, et par β $x \cos(\beta) + y \sin(\beta) - p$ et remarque que l'équation $\alpha - k\beta = 0$ représente une droite qui passe par l'intersection des deux droites précédentes. Il étend ensuite la notation aux cas des équations linéaires quelconques.

Exemple:

Soit deux coniques d'équation $S=0$ et $S'=0$. L'équation $S=kS'$ représente donc une conique qui passe par les quatre points réels ou imaginaires d'intersection des deux précédentes. On peut alors déterminer k pour que cette équation soit vérifiée par un cinquième point arbitraire.

Pour trouver la conique qui passe par les points (1,2) (3,5) (-1,4) (-3,-1) (-4,3) on forme les équations des côtés du quadrilatère

$$(3x-2y+1)(5x-2y+13)=k(x-4y+17)(3x-4y+5)$$

Pour contenir le cinquième point on trouve $k = -\frac{221}{19}$ ce qui donne tous calculs effectués:

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0$$

b. Une nouvelle démonstration du théorème de Pascal.

On s'est donné un hexagone ABCDEF inscrit dans une conique propre, les côtés opposés sont sécants en I, J et K. Pour simplifier on va noter $\langle AB \rangle = 0$ l'équation réduite de la droite (AB).

Etudions donc l'équation du second degré $\langle AB \rangle \langle CD \rangle - \lambda \langle BC \rangle \langle AD \rangle = 0$.

C'est l'équation d'une conique qui contient les points A, B, C, D. Il est donc possible de déterminer λ (par exemple avec le point E dont les coordonnées ne peuvent annuler la quantité $\langle BC \rangle \langle AD \rangle$) pour que cette équation représente notre conique. Le réel λ ne peut s'annuler, si l'on prend le soin de prendre une conique propre.

On peut faire le même raisonnement avec la nouvelle équation $\langle DE \rangle \langle FA \rangle - \mu \langle EF \rangle \langle AD \rangle = 0$.

En combinant ces deux équations on trouve:

$$\mu \langle AB \rangle \langle CD \rangle - \lambda \langle DE \rangle \langle FA \rangle = \lambda \mu \langle AD \rangle (\langle BC \rangle - \langle EF \rangle)$$

¹⁷ Histoire des mathématiques, t2 p.274 Vuibert.
¹⁸ Traité de géométrie analytique (Opus cité) p.90.

$\mu\langle AB\rangle\langle CD\rangle - \lambda\langle DE\rangle\langle FA\rangle = 0$ est donc l'équation d'une conique circonscrite au quadrilatère formé par les droites $\langle AB\rangle$ $\langle DE\rangle$ $\langle CD\rangle$ et $\langle FA\rangle$, ie l K A D. Cette conique dont l'équation est aussi $\langle AD\rangle\langle BC\rangle - \langle EF\rangle = 0$ est donc dégénérée. Elle contient la droite $\langle AD\rangle$ et une autre droite, nécessairement $\langle IK\rangle$ dont l'équation est $\langle BC\rangle - \langle EF\rangle = 0$ et qui contient donc $\langle BC\rangle \cap \langle EF\rangle = \{J\}$.

Les points I, J, K sont donc alignés.

L'intérêt de cette démonstration, en plus de sa simplicité, est de donner une équation explicite de la *Pascale* correspondant à la configuration ABCDEF. Nous allons ainsi pouvoir déduire une nouvelle proposition que l'on doit au mathématicien allemand Steiner.

c. Un théorème de Steiner.

Théorème: Les trois droites de Pascal obtenues en prenant successivement les hexagones ABCDEF, EDAFCB et CFEBAD passent par un même point.¹⁹

Remarque: Les trois hexagones ont été obtenus, en faisant opérer les deux cycles d'ordre 3 sur les points A, C et E, et en même temps leurs inverses sur les trois autres points B, D et F.

Démonstration:

Nous avons vu que l'équation de la première *Pascale* est $\langle BC\rangle - \langle EF\rangle = 0$

Celle des deux autres seront $\langle DA\rangle - \langle BC\rangle = 0$ et $\langle FE\rangle - \langle AD\rangle = 0$.

Comme la troisième équation est la différence des deux autres, il est évident que les trois *Pascales* sont concourantes en un même point (ou à la rigueur parallèles).

d. Un prolongement de Kirkman.

Il serait fastidieux, et hors de propos, de donner en détail, toutes les applications de cette configuration qui ont été exposées par le Révérend P.Kirkman et qui témoignent, bien sûr, de la richesse de cette configuration. Nous nous contenterons seulement d'en démontrer une, à cause du petit exercice de combinatoire qu'elle contient.

Exercice: Combien de *Pascales* distinctes contient la configuration de l'hexagramme mystique?

A partir des 6 points de départ qu'on appelle les points *P*, on peut construire $C_6^2 = 15$ droites qu'on appelle les droites *C*. Chacune de ces 15 droites rencontre, en général, les 14 autres.

Considérons par exemple la droite $\langle AB\rangle$ elle rencontre les 14 autres en $14 \cdot 4 \cdot 4 = 6$ points distincts des points *P* qu'on appelle les points *p*. Il y a donc $(15 \times 6) : 2 = 45$ points *p* au total.

Le théorème de Pascal exprime que ces 45 points pris judicieusement 3 par 3 sont alignés. Par exemple $\langle AB\rangle \cap \langle DE\rangle$ $\langle CD\rangle \cap \langle FA\rangle$ $\langle EF\rangle \cap \langle BC\rangle$ sont alignés.

¹⁹ "Ce fut Steiner qui appela l'attention des géomètres sur les propriétés de la figure obtenue en joignant de toutes les manières possibles six points d'une conique; Plücker rectifia et développa les propriétés de Steiner, mais la théorie complète ne fut reprise que quelques années après par M.Cayley et surtout par M.Kirkman qui l'enrichit de nombreux théorèmes"; (Salmon, Traité de géométrie analytique (Op. cité) p.647. On trouve les papiers cités dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol3 pp.211-213 pour Cayley et vol 5 nov.1850 pp.185-200 pour Kirkman.

La *Pascale* est alors définie par le tableau $\begin{pmatrix} AB & CD & EF \\ DE & FA & BC \end{pmatrix}$ ou plus simplement $(AB \ CD \ EF)$. Par chaque point de type *p* on peut mener quatre *Pascales* par exemples par le point $\langle AB\rangle \cap \langle DE\rangle$ on peut mener les *Pascales*

$$\begin{pmatrix} AB & CD & EF \\ DE & FA & BC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & FD & EC \\ DE & CA & BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & CE & DF \\ ED & FA & BC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & FE & DC \\ ED & CA & BF \end{pmatrix}$$

En effet AB étant fixée, il faut que sur la première ligne les quatrième et cinquième lettres soient E D ou D E. Il reste alors deux choix pour placer les lettres manquantes.

On trouve alors 45×4 points de type *p* et donc $45 \times 4 : 3 = 60$ *Pascales* puisque chaque *Pascale* contient trois points *p*

Plus simplement une fois que l'on a vu que chaque *Pascale* est caractérisée par le tableau

$$\begin{pmatrix} AB & CD & EF \\ DE & FA & BC \end{pmatrix},$$

il suffit de compter le nombre de tableaux, $6!$ pour la première ligne, et de diviser par $3!$ le nombre de permutations des blocs et encore par 2 à cause de la duplication

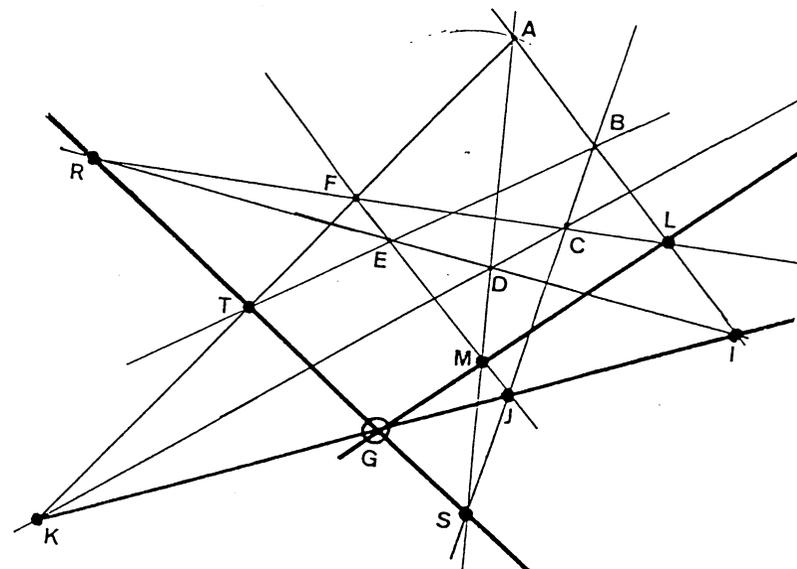
$$\begin{pmatrix} DE & FA & BC \\ AB & CD & EF \end{pmatrix}$$

Pour définir un point de Steiner appelé point *g*, à l'intersection de trois *Pascales* il suffit de ne garder que la première ligne des tableaux définissant les *Pascales* soit

$$\begin{pmatrix} AB & DE & CF \\ CD & FA & BE \\ EF & BC & AD \end{pmatrix}$$

par exemple $\begin{pmatrix} AB & DE & CF \\ CD & FA & BE \\ EF & BC & AD \end{pmatrix}$. On montre que sur chaque *Pascale* il n'y a qu'un point *g*

puisque, si l'on se donne les deux premières lignes du tableau précédent, la troisième ligne est constituée par les lettres manquantes sur chaque colonne. Il y a donc en tout 20 points *g*. On obtient ainsi une partie du théorème de Kirkman: Les soixante *Pascales* se recroisent trois par trois en 20 points *g*.



9. UTILISATION DES CUBIQUES

Nous venons de voir les prolongements et les facilités obtenues grâce à l'apport de la géométrie algébrique. Toutefois, pour l'instant nous n'avons considéré que des courbes du second degré. Cayley dans son article²⁰ passe au degré trois en considérant les trois côtés successifs de l'hexagramme. Par exemple $(AB) \cup (CD) \cup (EF)$ est une courbe dégénérée du troisième degré dont l'équation, en notation abrégée, sera $\langle AB \rangle \langle CD \rangle \langle EF \rangle = 0$. Les autres côtés forment également une courbe du troisième degré $\langle BC \rangle \langle DE \rangle \langle FA \rangle = 0$.

a. Préliminaires.

Définition: On appelle cubique, une courbe dont une équation est (en coordonnées barycentriques) $U(x,y,z)=0$, U étant un polynôme homogène du troisième degré.

Remarque: deux courbes du troisième degré se coupent toujours suivant 9 points (réels ou imaginaires). En effet l'élimination des deux équations conduit à une équation du neuvième degré.

Il avait fallu cinq points pour déterminer les coniques. Le polynôme U , ici contient 10 constantes arbitraires. On peut penser que donc 9 points suffiront pour déterminer de façon unique une cubique. Ce résultat est parfois en défaut, quand une relation de dépendance relie les colonnes du déterminant que permettent d'écrire les neuf données. Ceci provient géométriquement du lemme suivant:

Lemme: Toute courbe du troisième degré qui contient déjà les 8 points d'intersection de deux cubiques, contient nécessairement le neuvième.

A tout point du plan (x,y,z) on peut associer le 10-uplet

$$(x^3 \ y^3 \ z^3 \ x^2y \ y^2z \ z^2x \ x^2z \ y^2x \ z^2y \ xyz).$$

Se donner 9 points revient à se donner 9 vecteurs de R^{10} , et à discuter de leur indépendance.

On va faire la démonstration du lemme dans le cas où les 8 points de départ correspondent à une famille de vecteurs indépendants.

Soit U et V deux polynômes du troisième degré dont l'intersection (neuf points) contient les huit points de départ. Il est possible de déterminer un point du plan tel que la famille de 9 vecteurs associée soit de rang²¹ 9. La cubique déterminée par ces 9 points sera donc unique (puisque le système correspondant) sera de rang neuf et fournira une unique solution à un coefficient de proportionnalité près. Soient U_0 et V_0 les valeurs que prennent nos polynômes au point supplémentaire que nous venons de choisir. L'équation $UV_0 - VU_0 = 0$ est celle d'une cubique qui passe par nos huit premiers points, et aussi par le neuvième, c'est donc l'équation de notre unique cubique. Or il est facile de voir que cette courbe passe aussi par le neuvième point d'intersection des deux premières cubiques.

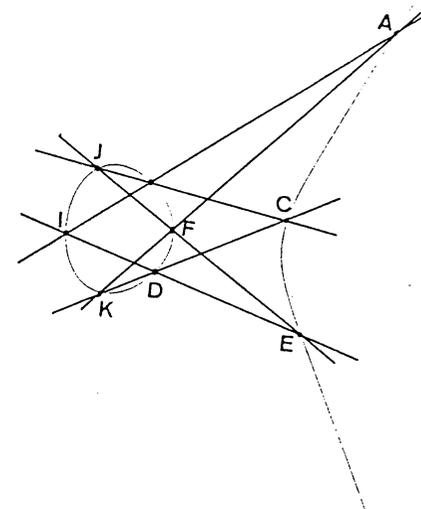
Remarque: cette propriété a déjà été signalée par Chasles²² comme pouvant amener au théorème de Pascal. Cayley n'a d'ailleurs pas oublié de signaler cette source.

²⁰C & D *J. Math Journal* (Opus cité).

²¹ Si pour tout point du plan le système correspondant est de rang inférieur, les deux cubiques coïncident partout.

²² Aperçu Historique (Opus cité) p.150.

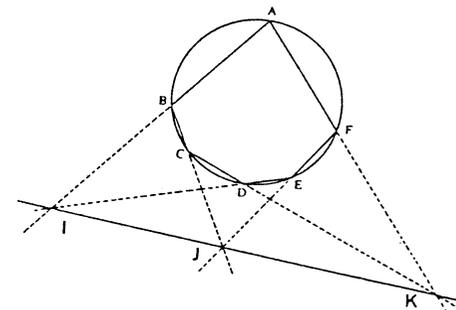
Corollaire: Quand un hexagone a ses six sommets et deux des trois points de concours des côtés opposés sur une courbe du troisième degré, le troisième point est aussi sur la courbe.



En effet les côtés de rang pair $AB \cup CD \cup EF$ et de rang impair $BC \cup DE \cup FA$ forment deux cubiques qui rencontrent la cubique de départ en 8 points $ABCDEFIJ$, par hypothèse. La cubique donnée qui contient ces huit points contiendra, d'après le lemme, également le neuvième point.

b. Application à une nouvelle démonstration du théorème de l'hexagramme.

On va considérer la cubique formée par la conique de départ et aussi par la droite (IJ) . Cette cubique a avec les deux cubiques des côtés pairs et impairs 8 points en commun, et donc également le neuvième. K appartient donc à cette cubique, comme il n'est pas sur la conique, IJK sont alignés.



c. Généralisations.

Pour finir ce tour d'horizon, je donne une généralisation, exposée par Salmon, (sans les démonstrations qui nous emmèneraient trop loin...), qui montre la qualité du nouvel outil. Il

Proposition:

Toutes les courbes du n-ième degré qui passent par $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ points fixes passent aussi par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points fixes.

Pour comprendre la valeurs des coefficients, il suffit de dénombrer le nombre de monômes correspondant à un polynôme de degré n, c'est-à-dire les triplets (i, j, k) avec $i+j+k=n$. Si $i=n$, les deux autres coefficients s'annulent, si $i=n-1$, on a deux choix, si $i=n-k$, on a k+1 possibilités, soit en tout $\sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, mais en tenant compte du coefficient de proportionnalité on trouve $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = \frac{1}{2}(n)(n+3)$.

On retrouve les propositions précédentes pour $n=3$.

Mais voici en corollaire la généralisation du théorème de Pascal:

Corollaire:

Si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes du n-ième degré, np se trouvent sur une courbe de degré p ($p < n$), les $n(n-p)$ autres points restants seront situés sur une courbe de degré $(n-p)$.

0 Introduction

• On se propose de calculer l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ par une suite d'intégrations par parties.

Soit $P_0(t)=1$, et $P_1(t)$ une primitive de $P_0(t)$.

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 P_0(t)f(t)dt = [P_1(t)f(t)]_0^1 - \varepsilon_1, \text{ avec } \varepsilon_1 = \int_0^1 P_1(t)f'(t)dt.$$

Plus généralement, soit $P_n(t)$ une primitive de $P_{n-1}(t)$.

$$\int_0^1 f(t)dt = [P_1(t)f(t)]_0^1 - [P_2(t)f'(t)]_0^1 + \varepsilon_2, \text{ avec } \varepsilon_2 = \int_0^1 P_2(t)f''(t)dt.$$

On trouve alors

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} [P_k(t)f^{(k-1)}(t)]_0^1 + (-1)^n \varepsilon_n, \text{ avec } \varepsilon_n = \int_0^1 P_n(t)f^{(n)}(t)dt.$$

Dans la construction de la suite P_n on a, à chaque étape, le choix de la constante d'intégration.

On se propose de choisir ces constantes pour minimiser $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

•• Si u et v sont des fonctions à valeurs réelles définies sur $[0,1]$, $(u|v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt$ est un

produit scalaire, dont la norme associée est $\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^1 u(t)^2 dt}$.

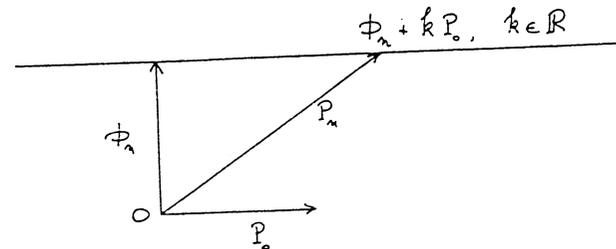
D'après la relation de Cauchy-Schwarz, $|(u|v)| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.

Ici, $\varepsilon_n = (P_n|f^{(n)})$, donc $|\varepsilon_n| \leq \|P_n\|_2 \|f^{(n)}\|_2$.

On va minimiser $\|P_n\|_2$.

Pour P_{n-1} donné, $\|P_n\|_2$ sera minimal pour l'unique Φ_n tel que $(\Phi_n|P_0) = 0$, soit $\int_0^1 \Phi_n(t)dt = 0$.

En effet, le produit scalaire munit l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à valeurs réelles dans $[0,1]$ d'une structure d'espace euclidien dans lequel Φ_n et P_0 sont orthogonaux, donc toute primitive de P_{n-1} s'écrit: $P_n = \Phi_n + k P_0$.



²⁴ "Analogues of Pascal's Theorem", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* N°23, mars 1864 p.216-222, *Mathematical Papers* (1882) p.72-79; rééd Chelsea publishing company, New York, 1968.

••• D'où la recherche d'une suite de polynômes Φ_n vérifiant : $\Phi_0(t) = 1$

$$\text{et pour tout } n \geq 1 : \begin{cases} \Phi_n' = \Phi_{n-1} \\ \int_0^1 \Phi_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

Par exemple, $\Phi_1(t) = t - \frac{1}{2}$, d'où :

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \left[\left(t - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (f(0) + f(1))$$

On observe que Φ_n est de degré n et que le coefficient de t^n est $\frac{1}{n!}$. on s'intéressera donc aux polynômes : $B_n = n! \Phi_n$

Polynômes et nombres de Bernoulli

1) Définitions

Il existe une suite unique (B_n) de polynômes à valeurs réelles, définie par : $B_0(X) = 1$

$$\text{et pour } n \geq 1, \begin{cases} B_n' = n B_{n-1} \\ \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

Ces polynômes sont les polynômes de Bernoulli. Les nombres $b_n = B_n(0)$ sont les nombres de Bernoulli.

Il sera parfois intéressant dans les calculs de revenir à la suite (Φ_n) avec $\Phi_n = \frac{B_n}{n!}$, car la relation $\Phi_n' = \Phi_{n-1}$ est plus simple qu'avec B_n . Cette relation se généralise à : $\Phi_n^{(k)} = \Phi_{n-k}$

$$\text{soit : } \frac{B_n^{(k)}}{n!} = \frac{B_{n-k}}{(n-k)!}$$

2) Etude de B_n sur $[0, 1]$

Proposition 1 : $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$

Preuve. Soit $A_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
Il s'agit de montrer que $A_n(X) = B_n(X)$.

$$\text{Pour } n > 0, A_n'(X) = (-1)^n (-1) B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = n A_{n-1}(X)$$

$$\text{et } \int_0^1 A_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0 \text{ en posant } u = 1-t.$$

$$\text{D'autre part, } A_0(X) = B_0(1-X) = 1.$$

$$\text{Par unicité de la suite ainsi définie, } A_n(X) = B_n(X).$$

Conséquences :

La courbe de représentative de B_n admet une symétrie

- axiale par rapport à la droite $\Delta : X = \frac{1}{2}$ pour n pair
- centrale par rapport au point $I(\frac{1}{2}; 0)$ pour n impair.

Proposition 2 :
Pour n pair, $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.
Pour $n=1$, $B_1(1) = \frac{1}{2}$ et $B_1(0) = b_1 = -\frac{1}{2}$
Pour n impair supérieur à 1, $B_n(1) = B_n(0) = 0$.

$$\text{Preuve : } \bullet B_0(1) = B_0(0) = b_0 = 1.$$

$$\bullet B_1(1) - B_1(0) = \int_0^1 B_1'(t) dt = 1.$$

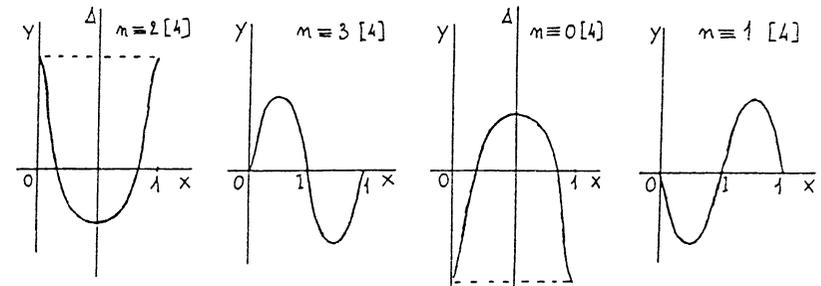
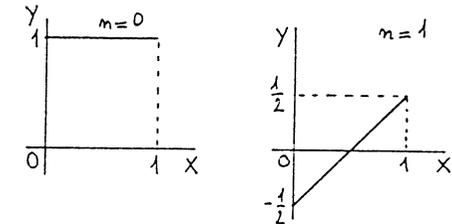
Par ailleurs, $B_1(1-X) = -B_1(X)$, d'où $B_1(1) = -B_1(0)$ et le résultat.

$$\bullet \text{ Pour } n > 1, B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$$

Par ailleurs, pour n impair, $B_n(1-X) = -B_n(X)$.

Donc $B_n(1) - B_n(0) = 0$ et $B_n(1) + B_n(0) = 0$. D'où : $B_n(1) = B_n(0) = 0$.

Forme de B_n



Conséquences:

Pour $n > 0$, B_{2n} est du signe de $(-1)^{n-1}$ et $B_{2n} - b_{2n}$ est du signe de $(-1)^n$ sur $[0,1]$.

3 Calcul de b_n et de $B_n(X)$

$$B_0(X) = 1 \text{ donc } B'_1(X) = 1 \text{ d'où } B_1(X) = X + C$$

$$\int_0^1 B_1(t) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + C t \right]_0^1 = \frac{1}{2} + C \text{ d'où } C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } B_1(X) = X - \frac{1}{2}$$

$$\text{Par la formule de Taylor: } B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

$$\text{Or } \frac{B_n^{(k)}(X)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k}(X) \text{ donc } \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k} B_{n-k}$$

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k X^{n-k}$$

En particulier, le coefficient dominant de B_n est 1. On va réutiliser la formule de Taylor, en se rappelant que $B_k = 0$ pour k impair autre que 1.

Pour $n > 0$

$$B_{2n+1}(1) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} B_k = (2n+1) B_1 + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} B_{2k}$$

$$0 = (2n+1) B_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} B_{2k} + (2n+1) B_{2n}$$

soit enfin

$$B_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} B_{2k} + \frac{1}{2}$$

$$n = 1 \quad b_2 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$n = 2 \quad b_4 = -\frac{1}{5} \left(1 + \binom{5}{2} \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{5}{3} \right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{30}$$

$$\text{De même } b_6 = \frac{1}{42} \text{ et } b_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_0(X) = 1 \quad ; \quad B_1(X) = X - \frac{1}{2} \quad ; \quad B_2(X) = b_0 X^2 + 2b_1 X + b_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$B_3(X) = b_0 X^3 + 3b_1 X^2 + 3b_2 X + b_3 = X^3 - \frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{2} X \quad ; \quad B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

4 Application 1

Théorème. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, alors $S_k(n) = \frac{1}{k+1} (B_{k+1}(n+1) - b_{k+1})$

Preuve: Par récurrence sur k . On va utiliser la propriété suivante, alternative de $B'_n(X) = n B_{n-1}(X)$ dans la définition de la suite (B_n) , $B_{k+1}(X+1) - B_{k+1}(X) = (k+1)X^k$
 $k=0$ Vrai

Soit $k \geq 1$, et la propriété vraie à l'ordre $k-1$, c'est-à-dire $B_k(X+1) - B_k(X) = k X^{k-1}$
 Alors

$$(k+1) B_k(X+1) - (k+1) B_k(X) = k(k+1) X^{k-1}$$

, soit

$$B'_{k+1}(X+1) - B'_{k+1}(X) = k(k+1) X^{k-1}$$

Par intégration,

$$B_{k+1}(X+1) - B_{k+1}(X) = (k+1) X^k + C$$

Pour $X=0$, on trouve $C=0$, d'où

$$B_{k+1}(X+1) - B_{k+1}(X) = (k+1) X^k,$$

ce qui achève la récurrence et prouve la propriété.

On écrit cette relation successivement pour $X=1, X=2, \dots, X=n$, et on somme, ce qui donne

$$B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) = (k+1) S_k(n)$$

D'où le théorème, en observant que $B_{k+1}(1) = b_{k+1}$, car $k+1 > 1$.

5 Application 2

Théorème: Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$, on définit $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |b_{2n}|$

On va utiliser le théorème suivant, dû à Dirichlet

Soit f une fonction périodique continue, de période T , admettant en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Alors, pour tout x ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=0}^{\infty} (a_q \cos \frac{2\pi}{T} qx + b_q \sin \frac{2\pi}{T} qx)$$

$$\text{avec } a_q = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi}{T} qt dt \quad \text{et} \quad b_q = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi}{T} qt dt$$

On applique ce théorème à la fonction β_{2n} de période 1 dont la restriction à $[0;1[$ est B_{2n} . Cette fonction β_{2n} vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet avec $T=1$. De plus elle est paire, donc $b_q=0$ pour tout $q > 0$.

$$a_q = 2 \int_0^1 \beta_{2n}(t) \cos 2\pi q t dt = 2 \int_0^1 B_{2n}(t) \cos 2\pi q t dt,$$

soit

$$\frac{a_q}{2(2n)!} = \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} \cos 2\pi q t dt = \int_0^1 \Phi_{2n}(t) \cos 2\pi q t dt$$

• $q=0$

$$\frac{a_0}{2(2n)!} = \int_0^1 \Phi_{2n}(t) dt = [\Phi_{2n-1}(t)]_0^1 = 0 \quad \text{car } n>1$$

• $q>0$ Après une intégration par parties, où on intègre le cos, on trouve

$$\frac{a_0}{2(2n)!} = \left[\Phi_{2n}(t) \frac{1}{2\pi q} \cos(2\pi q t - \frac{\pi}{2}) \right]_0^1 - \int_0^1 \Phi_{2n-1}(t) \frac{1}{2\pi q} \cos(2\pi q t - \frac{\pi}{2}) dt,$$

soit

$$\frac{a_0}{2(2n)!} = - \int_0^1 \Phi_{2n-1}(t) \frac{1}{2\pi q} \cos(2\pi q t - \frac{\pi}{2}) dt$$

car

$$\left[\Phi_{2n}(t) \frac{1}{2\pi q} \cos(2\pi q t - \frac{\pi}{2}) \right]_0^1 = 0.$$

Après une deuxième intégration par parties,

$$\frac{a_q}{2(2n)!} = - \left[\Phi_{2n-1}(t) \frac{1}{(2\pi q)^2} \cos(2\pi q t - \pi) \right]_0^1 + \int_0^1 \Phi_{2n-2}(t) \frac{1}{(2\pi q)^2} \cos(2\pi q t - \pi) dt$$

Après $2n$ intégrations par parties,

$$\frac{a_q}{2(2n)!} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k [\varphi_k(t)]_0^1 + \int_0^1 \Phi_0(t) \frac{1}{(2\pi q)^{2n}} \cos(2\pi q t - n\pi) dt,$$

en posant

$$\varphi_k(t) = \Phi_{2n-k}(t) \frac{1}{(2\pi q)^{k+1}} \cos(2\pi q t - (k+1)\frac{\pi}{2})$$

On observe d'abord que la dernière intégrale est nulle. Ensuite, $\varphi_k(1) = \varphi_k(0)$, sauf pour la fonction φ_k qui fait intervenir Φ_1 . Ce k vérifie l'équation $2n-k=1$, soit $k=2n-1$.

Donc

$$\frac{a_q}{2(2n)!} = - \frac{1}{(2\pi q)^{2n}} (-1)^n [\Phi_1(t)]_0^1 = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2\pi q)^{2n}}$$

$$\frac{\beta_{2n}(x)}{2(2n)!} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi q)^{2n}} \cos 2\pi q x$$

En particulier, pour $x=0$,

$$\frac{b_{2n}}{2(2n)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$$

Donc $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (-1)^{n-1} b_{2n}$. Or nous avons vu que b_{2n} est du signe de $(-1)^{n-1}$, ce qui termine la preuve. On retrouve par exemple, pour $n=1$ et $n=2$, les résultats:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

L'égalité démontrée par le théorème peut aussi s'écrire

$$|b_{2n}| = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$$

Or

$$\zeta(2n) < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = 1 - \left[\frac{1}{(2n-1)t^{2n-1}} \right]_1^{\infty} = 1 + \frac{1}{2n-1}$$

De sorte que, au voisinage de l'infini,

$$|b_{2n}| = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

6 Fonctions génératrices.

On a vu que, au voisinage de l'infini, $|b_{2n}| = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$. Donc en posant $u_n = \frac{b_n}{n!}$, on trouve que

$$\frac{|u_{2n+2}|}{|u_{2n}|} \approx \frac{1}{(2\pi)^2}.$$

Introduisons la fonction g définie par la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

Cette fonction est définie à l'intérieur du disque d'équation $|z^2| < (2\pi)^2$, soit $|z| < (2\pi)$.

On a vu que $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, soit $\frac{B_n(1)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(n-k)! k!}$.

On reconnaît dans le membre de droite une expression de la forme $\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$, produit

de Cauchy d'ordre n des séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n$.

Ici $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$, donc

$$\exp(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} z^n.$$

Mais $B_n(1)=b_n$ pour tout n autre que 1, auquel cas $B_1(1)=1+b_1$.

Alors $\exp(z)g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = z + g(z)$, soit enfin pour $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Pour retrouver la fonction génératrice non plus de b_n mais de $B_n(X)$, on utilise la

$$\text{formule } \frac{B_n(X)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{X^{n-k} b_k}{(n-k)! k!}.$$

Des calculs analogues conduisent à la formule

$$\frac{z \exp(zX)}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(X)}{n!} z^n \text{ pour } |z| < 2\pi.$$

7 Application 3

On va utiliser la fonction génératrice $g(z)$ pour trouver, en fonction des nombres de Bernoulli, un développement en série entière de la tangente.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{b_1}{1!} z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = -\frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Or

$$g(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z \frac{2 + e^z - 1}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

$$\text{Ainsi, pour } |z| < 2\pi, \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Remarquons que $\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}$, donc en posant $\frac{z}{2} = i\theta$, ce qui implique $|\theta| < \pi$, on

trouve:

$$i\theta \frac{2 \cos \theta}{2i \sin \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_{2n}}{(2n)!} (2\theta)^{2n}$$

$$\theta \cotan \theta = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-1)^{n-1} b_{2n}}{(2n)!} \theta^{2n}$$

$$\text{et compte tenu du signe de } b_{2n}, \theta \cotan \theta = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n |b_{2n}|}{(2n)!} \theta^{2n}.$$

Pour passer à la tangente, on se rappelle que $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{2 - \tan^2 \theta}$ d'où

$$\cotan(2\theta) = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta},$$

soit $2 \cotan(2\theta) = \cotan \theta - \tan \theta$, et $\tan \theta = \cotan \theta - 2 \cotan(2\theta)$, d'où la relation, compte tenu de $|\theta| < \pi$:

Pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$,

$$\tan \theta = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{2n} - 2^{2n-1}) \frac{|b_{2n}|}{(2n)!} \theta^{2n-1}$$

8 En guise de conclusion.

L'introduction a donné comme motivation à l'étude des nombres et polynômes de Bernoulli le calcul des intégrales définies. Ce calcul amène à la formule d'Euler-Mac Laurin, dont les prolongements et la richesse des applications, entre autres pour le calcul numérique de séries à convergence très lente font l'objet d'une autre étude utilisant les résultats déjà acquis.

Introduction

En statistique inférentielle, étant donné une population sur laquelle est définie une variable statistique X dont la distribution est supposée représentée par une densité f , on est conduit à étudier la moyenne m de X et sa dispersion qui peut être caractérisée par son écart type σ . A cet effet on choisit de façon aléatoire et indépendante n individus et l'on définit ainsi une suite de variables indépendantes et équidistribuées (X_i) ($i \in [1, n]$) dont la loi commune est la distribution de X . On s'intéresse alors aux variables aléatoires suivantes:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ qui se déduit de la somme } \Sigma_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S = S_n = \text{Sup}_{i=1, \dots, n} X_i \quad i_n = \text{Inf}_{i=1, \dots, n} X_i$$

et l'étendue¹ $R_n = S_n - i_n$

Nous avons choisi d'étudier ces variables aléatoires en partant de la distribution la plus simple, ie la loi uniforme sur $[0, 1]$ notée $U_{[0,1]}$ dont la densité notée f_1 ,

$$\text{est définie par } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_1(t) = 1 \\ \text{sinon} & f_1(t) = 0 \end{cases}$$

Nous utiliserons les notations suivantes:

Si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(x)$ et de densité $f(x)$ on a:

$$P(X \leq k) = F(k) = \int_{-\infty}^k f(t) dt, \text{ avec sur chaque intervalle où } F \text{ est dérivable, la}$$

relation $F' = f$.

Dans un premier temps nous étudierons les cas $n=2$ et $n=3$ où le calcul des probabilités sera associé à des problèmes géométriques qui nous ont paru intéressants. Nous généraliserons ensuite avant de présenter les applications pratiques qui ont motivé cet exposé.

1 Cas $n=2$.

Tirer indépendamment "au hasard" deux réels dans $[0, 1]$ revient à définir X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. S désignant une partie de $[0, 1]^2$ la probabilité $P[(X, Y) \in S]$ sera égale à l'aire de S lorsque celle-ci est définie (définition intuitive).

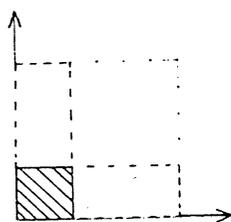
a) Loi de S_2 .

$$P[S_2 \leq k] = P[(X, Y) \in S_k]$$

$$\text{où } S_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x \leq k \text{ et } y \leq k\}$$

(fig 1).

$$\text{d'où } P[S_2 \leq k] = k^2 \text{ et } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{S_2}(t) = 2t \\ \text{sinon} & f_{S_2}(t) = 0 \end{cases}$$



(fig 1)

b) Loi de i_2 .

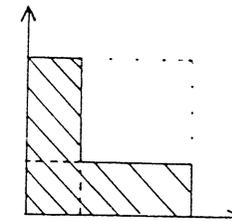
$$P[i_2 \leq k] = P[(X, Y) \in S_k]$$

$$\text{où } S_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x \leq k \text{ ou } y \leq k\}$$

(fig 2).

$$\text{d'où } P[i_2 \leq k] = 1 - (1 - k)^2$$

$$\text{et } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{i_2}(t) = 2 - 2t \\ \text{sinon} & f_{i_2}(t) = 0 \end{cases}$$



(fig 2)

Remarques: les événements sont physiquement représentés par des parties de $[0, 1]^2$ ainsi que leur intersection et leur réunion, ce qui nous paraît intéressant sur le plan pédagogique.

c) Loi de Σ_2 .

$$P[\Sigma_2 \leq k] = P[(X, Y) \in S_k]$$

$$\text{où } S_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x + y \leq k\}$$

$$\text{d'où } P[S_2 \leq k] = k^2 \text{ et } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{S_2}(t) = 2t \\ \text{sinon} & f_{S_2}(t) = 0 \end{cases}$$

Calculer cette probabilité revient à déterminer l'aire du polygone défini par les axes et la droite D d'équation $x + y = k$, aussi nous distinguons deux cas:

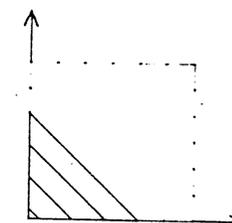
$$0 \leq k \leq 1 \text{ (fig 3)}$$

$$1 \leq k \leq 2 \text{ (fig 4)}$$

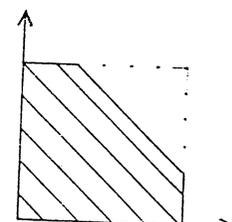
$$P[\Sigma_2 \leq k] = \frac{1}{2} k^2$$

$$P[\Sigma_2 \leq k] = 1 - \frac{1}{2} (2 - k)^2$$

$$\text{Finalement } \begin{cases} t \in [0, 1] & f_{\Sigma_2}(t) = t \\ t \in [1, 2] & f_{\Sigma_2}(t) = 2 - t \\ t \notin [0, 2] & f_{\Sigma_2}(t) = 0 \end{cases}$$



(fig 3)



(fig 4)

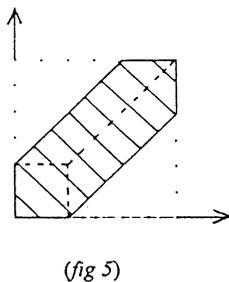
¹ Ou range en anglais...

² voir page 1.

d) Loi de R_2 .
 $P[R_2 \leq k] = P[(X, Y) \in S_k]$

où $S_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / |x - y| \leq k\}$
 (fig 5)

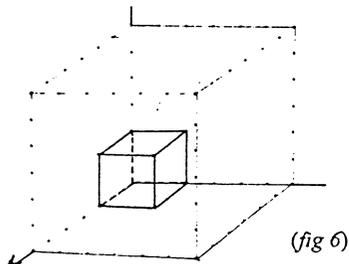
d'où³ $P[R_2 \leq k] = 1 - (1 - k)^2$ et⁴ $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{R_2}(t) = 2 - 2t \\ \text{sinon} & f_{R_2}(t) = 0 \end{cases}$



2 Cas $n=3$.

Le cas $n=2$ se prolonge naturellement dans le cube avec le triplet (X, Y, Z) et le calcul des probabilités sera associé à un calcul de volumes qui seront déterminés par un régionement de l'espace.

a) Loi de S_3 .
 $P[S_3 \leq k] = P[(X, Y, Z) \in S_k]$ où $S_k = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 / x \leq k \text{ et } y \leq k \text{ et } z \leq k\}$
 (fig 6)



d'où $P[S_3 \leq k] = k^3$

et $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{S_3}(t) = 3t^2 \\ \text{sinon} & f_{S_3}(t) = 0 \end{cases}$

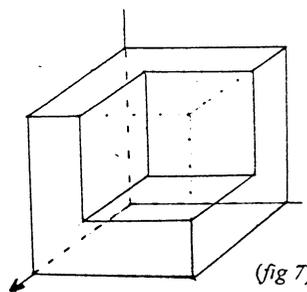
b) Loi de i_3 .
 $P[i_3 \leq k] = P[(X, Y, Z) \in S_k]$ où $S_k = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 / x \leq k \text{ ou } y \leq k \text{ ou } z \leq k\}$

³ On constate que R_2 et i_2 ont la même loi, alors que l'évènement $R_2 = i_2$ est quasi impossible. Il sera intéressant de raisonner de la façon suivante: nous pouvons considérer $(R_2 \leq k)$ comme la réunion de deux

(2!) évènements équiprobables, l'un deux étant $(X, Y) \in S'_k$ où $S'_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x \leq y \text{ et } y - x \leq k\}$.

⁴ Pierre Chevalier, de Bernay, s'est amusé à retrouver cette formule en calculant d'abord, dans le cas d'une loi uniforme et discrète la loi de l'étendue puis en passant à la limite. Si X suit une loi uniforme sur les valeurs $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, pour tout entier k de cet ensemble $P[R_2 \leq \frac{k}{N-1}] = \frac{2k+1}{N} - \frac{k(k+1)}{N^2}$ et en posant

$t = \frac{k}{N-1}$ on trouve $\lim_{N \rightarrow +\infty} P[R_2 \leq t] = 2t - t^2$. Cette méthode s'applique aussi au cas $n=3$, et permet alors de trouver le nombre de points à coordonnées entières d'un N-glisso-hypercube!



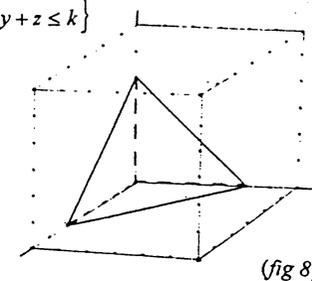
d'où
 $P[i_3 \leq k] = 1 - (1 - k)^3$

et $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{i_3}(t) = 3(1-t)^2 \\ \text{sinon} & f_{i_3}(t) = 0 \end{cases}$

c) Loi de Σ_3 .
 $P[\Sigma_3 \leq k] = P[(X, Y, Z) \in S_k]$ où $S_k = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 / x + y + z \leq k\}$
 Nous distinguerons trois cas:
 1) $0 \leq k \leq 1$ (fig 8)

d'où $P[\Sigma_3 \leq k] = \frac{1}{6} k^3$

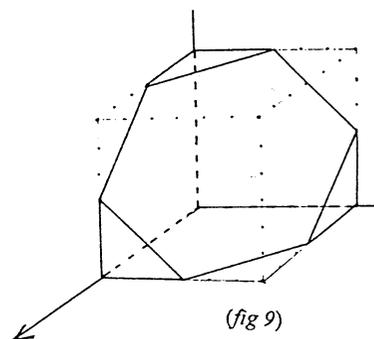
et $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{\Sigma_3}(t) = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$



2) $1 \leq k \leq 2$ (C'est le cas le plus intéressant).

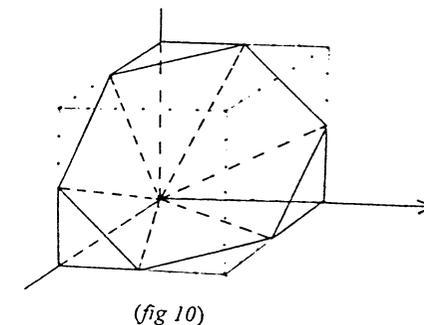
Le calcul du volume de S_k peut se faire de plusieurs manières.

1. On considère S_k comme une pyramide tronquée (fig 9).
2. On considère S_k comme la réunion de quatre pyramides (fig 10).
3. On utilise le calcul intégral.



On obtient $P[\Sigma_3 \leq k] = \frac{1}{6} k^3 - 3 \frac{1}{6} (k-1)^3$

et $\begin{cases} 1 \leq t \leq 2 & f_{\Sigma_3}(t) = -t^2 + 3t - \frac{3}{2} \end{cases}$



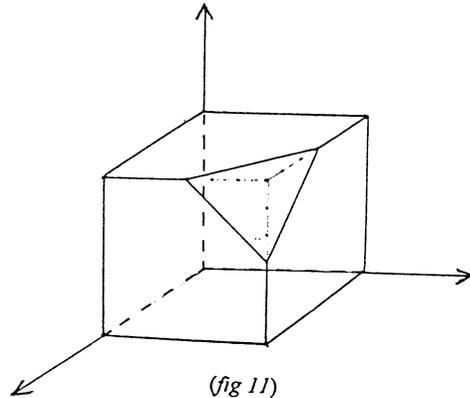
2) $2 \leq k \leq 3$ (fig 11).

On trouve facilement

$$P[\Sigma_3 \leq k] = 1 - \frac{1}{6}(3-k)^3 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \leq t \leq 2 & f_{\Sigma_3}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} \\ 2 \leq t \leq 3 & f_{\Sigma_3}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} \\ \text{sinon} & f_{\Sigma_3}(t) = 0 \end{cases}$$

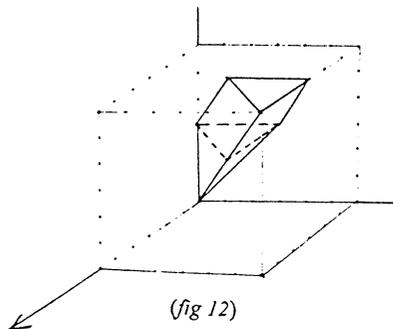
Conclusion

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{\Sigma_3}(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ 1 \leq t \leq 2 & f_{\Sigma_3}(t) = -t^2 + 3t - \frac{3}{2} \\ 2 \leq t \leq 3 & f_{\Sigma_3}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} \\ \text{sinon} & f_{\Sigma_3}(t) = 0 \end{cases}$$



d) Loi de R_3 .

Raisonnons de la façon suivante: comme il y a 3! façons de présenter X, Y et Z , considérons $[R_3 \leq k]$ comme la réunion quasi-disjointe de 3! événements équiprobables, l'un deux étant $[(X, Y, Z) \in S_k]$ où $S_k = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 / x \leq y \leq z \leq k \text{ et } z - x \leq k\}$ (fig 12).



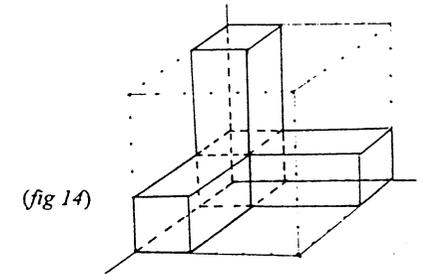
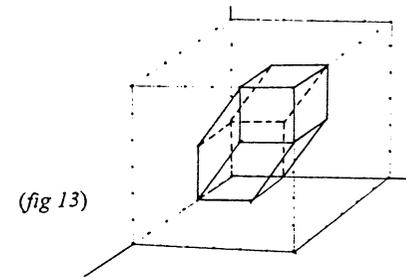
Considérant S_k comme la réunion d'un prisme et d'une pyramide on obtient (fig 12):

$$\begin{aligned} P[R_3 \leq k] &= 6 \left[\frac{(1-k)^2 k^2}{2} + \frac{k^3}{6} \right] \\ &= 3(1-k)^2 + k^3 \\ &= 3k^2 - 2k^3 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{R_3}(t) = 6(t - t^2) \\ \text{sinon} & f_{R_3}(t) = 0 \end{cases}$$

Le volume représentant $[R_3 \leq k]$ est particulièrement intéressant (fig 13).



La relation $U = k^3 + (1-k)k^2$ permettant de le voir comme le même volume que celui de la figure 14.

3 Généralisation.

a) Lois⁵ de S_n et de i_n .

X étant une variable de dimension n de densité f , on peut écrire:

$$\begin{aligned} P[S_n \leq k] &= P[(X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k) \cap \dots \cap (X_n \leq k)] \\ &= \prod_{i=1}^n P[(X_i \leq k)] \\ &= \prod_{i=1}^n [F(k)]^n \end{aligned}$$

et si F est dérivable

$$f_{S_n}(t) = n f(t) [F(t)]^{n-1}$$

en particulier dans le cas d'une loi uniforme $U_{[0,1]}$ on obtient

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{S_n}(t) = n t^{n-1} \\ \text{sinon} & f_{S_n}(t) = 0 \end{cases}$$

⁵ Ces lois du Sup et de l'inf, sont les cas particuliers de la recherche d'une loi plus générale: celle de la p -ième des n variables ordonnées (X_1, X_2, \dots, X_n) . On trouve que cette loi est

$$\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} F^{p-1}(x)(1-F(x))^{n-p} f(x)$$

et le lecteur retrouvera celle du Sup et de l'inf en prenant respectivement $p=n$ et $p=1$. Pour ce qui concerne l'histoire de la statistique des grandes valeurs cf l'article "E.J Gumbel et la statistique des extrêmes" de S. Hertz dans *Matapli* SMAI bulletin de liaison n°41, Janv 1995.

Puis

$$\begin{aligned} P[i_n \leq k] &= P[(X_1 \leq k) \cup (X_2 \leq k) \cup \dots \cup (X_n \leq k)] \\ &= 1 - P[(X_1 \geq k) \cup (X_2 \geq k) \cup \dots \cup (X_n \geq k)] \\ &= \prod_{i=1}^n P[(X_i \leq k)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F(k)]^n \end{aligned}$$

si F est dérivable on a

$$f_{i_n}(t) = nf(t)[1 - F(t)]^{n-1}$$

et toujours dans le cas d'une loi uniforme $U_{[0,1]}$ on obtient

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{i_n}(t) = n(1-t)^{n-1} \\ \text{sinon} & f_{i_n}(t) = 0 \end{cases}$$

b) Lois de Σ_n .

Nous utiliserons le résultat suivant (admis):

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densité f et g , la densité de $Z=X+Y$ est donnée par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = (f * g)(x)$$

[produit de convolution⁶].

Reprenons les cas $n=2$ et $n=3$ en posant, $f_{[0,1]} = f_1$ et $f_n = f_{i_n}$.

1. cas $n=2$

$$f_2(x) = (f_1 * f_1)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_1(x-t)dt$$

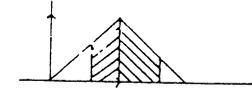
or $f_1(t)f_1(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x-1 \leq t \leq x \end{cases}$, ce qui conduit à distinguer les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 \leq x \leq 2$.

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq 1 \quad f_2(x) = \int_0^x dt = x \quad \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \quad f_2(x) = \int_{x-1}^1 dt = 2-x$$

On retrouve ainsi le résultat de la partie **1**.

2. cas $n=3$

On peut s'aider du graphique suivant pour déterminer $f_3(x) = (f_2 * f_1)(x)$



(fig 15)

D'où

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq 1 \quad f_3(x) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$$

pour $1 \leq x \leq 2$ (d'après la figure précédente)

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_{x-1}^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^1 + \left[\frac{-(2-t)^2}{2} \right]_1^x \\ &= -x^2 + 3x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

et pour $2 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_{x-1}^2 (2-t) dt = \left[\frac{-(2-t)^2}{2} \right]_{x-1}^2 \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la partie **2**.

3. Dans les cas $n=4$ et $n=5$ les calculs donnent:

$n=4$		$n=5$	
$0 \leq t \leq 1$	$f_4(t) = \frac{t^3}{6}$	$0 \leq t \leq 1$	$f_5(t) = \frac{t^4}{24}$
$1 \leq t \leq 2$	$f_4(t) = -\frac{t^3}{2} + 2t^2 - 2t + \frac{2}{3}$	$1 \leq t \leq 2$	$f_5(t) = -\frac{t^4}{6} + \frac{5}{6}t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{5}{6}t - \frac{5}{24}$
$2 \leq t \leq 3$	$f_4(t) = \frac{t^3}{2} - 4t^2 + 10t - \frac{22}{3}$	$2 \leq t \leq 3$	$f_5(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{5}{2}t^3 + \frac{35}{4}t^2 - \frac{25}{2}t + \frac{155}{24}$
$3 \leq t \leq 4$	$f_4(t) = -\frac{t^3}{6} + 2t^2 - 8t + \frac{32}{3}$	$3 \leq t \leq 4$	$f_5(t) = -\frac{t^4}{6} + \frac{5}{2}t^3 - \frac{55}{4}t^2 + \frac{65}{2}t - \frac{655}{24}$
sinon	$f_4(t) = 0$	$4 \leq t \leq 5$	$f_5(t) = \frac{t^4}{24} - \frac{5}{6}t^3 + \frac{25}{4}t^2 - \frac{125}{6}t + \frac{625}{24}$
		sinon	$f_5(t) = 0$

Il est intéressant⁷ de voir l'évolution de la densité de Σ_n et donc à une affinité près celle de \bar{X}_n . Les calculatrices graphiques donnent un résultat satisfaisant).

⁶ Voir par exemple M. Métivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod: Paris (1972) pp.124-127.

⁷ On peut remarquer (et démontrer facilement par récurrence) que f_{i_n} est de classe C^{n-2} .

Si l'on juxtapose à chaque courbe la gaussienne de même moyenne et de même écart type (à savoir $\frac{n}{2}$ et $\sqrt{\frac{n}{12}}$) on constate un cas particulier du théorème central limite dont la version la plus simple⁸ est :

Si $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même densité f , de moyenne m et d'écart type σ , la variable $\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.

Ce théorème est fondamental et très puissant. On peut donc considérer, quelle que soit la distribution de X , que les lois de Σ_n et de \bar{X}_n sont normales pour n assez grand.

c) Lois de R_n .

Reprenons le calcul de $P[R_n \leq k]$ dans le cas $n=2$ à l'aide du calcul intégral.

Nous pourrions écrire

$$\frac{1}{2!} P[R_n \leq k] = \iint_{\substack{(x,y) \in [0,1]^2 \\ y-x \leq k}} dx dy = \int_0^{1-k} dx \left[\int_x^{x+k} dy \right] + \int_{1-k}^1 dx \left[\int_x^1 dy \right]$$

$$= \int_0^{1-k} k dx + \int_{1-k}^1 (1-x) dx = k(1-k) + \left[\frac{-(1-x)^2}{2} \right]_{1-k}^1$$

$$= k(1-k) + \frac{k^2}{2}$$

D'où le résultat.

Effectuons la même chose dans le cas $n=3$.

Nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{3!} P[R_3 \leq k] = \iiint_{\substack{(x,y,z) \in [0,1]^3 \\ z-x \leq k \\ x \leq y \leq z}} dx dy dz = \int_0^{1-k} \left[\int_x^{x+k} \left[\int_y^{y+k} dz \right] dy \right] dx + \int_{1-k}^1 \left[\int_x^1 \left[\int_y^1 dz \right] dy \right] dx$$

$$= \int_0^{1-k} \left[\int_x^{x+k} (x+k-y) dy \right] dx + \int_{1-k}^1 \left[\int_x^1 (1-y) dy \right] dx = \int_0^{1-k} \left[\frac{-(x+k-y)^2}{2} \right]_x^{x+k} dx + \int_{1-k}^1 \left[\frac{-(1-y)^2}{2} \right]_x^1 dx$$

$$= \int_0^{1-k} \left[\frac{k^2}{2} \right] dx + \int_{1-k}^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = (1-k) \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$$

D'où à nouveau le résultat.

⁸ Voir par exemple M. Métivier (*Opus cité*) pp.208-213.

Enfin, pour le cas général, laissons nous guider par le calcul intégral. Nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{n!} P[R_n \leq k] = \int \dots \int_{\substack{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n \\ x_n - x_1 \leq k \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Cette intégrale se sépare en une somme de deux intégrales:

$$\frac{1}{n!} P[R_n \leq k] = \int_0^{1-k} I_n dx_1 + \int_{1-k}^1 J_n dx_1$$

avec

$$I_n = \left[\int_{x_1}^{x_1+k} \dots \int_{x_{n-1}}^{x_1+k} dx_n \right] dx_2 \quad \text{et} \quad J_n = \left[\int_{x_1}^1 \dots \int_{x_{n-1}}^1 dx_n \right] dx_2$$

On démontre facilement par récurrence que $I_n = \frac{k^{n-1}}{(n-1)!}$ et $J_n = \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$\frac{1}{n!} P[R_n \leq k] = \int_0^{1-k} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 + \int_{1-k}^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1$$

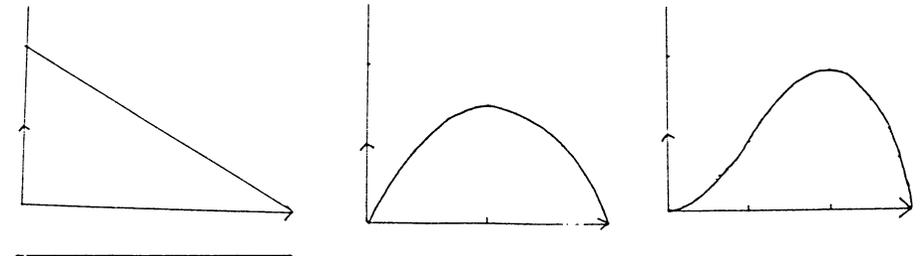
$$= (1-k) \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} + \left[\frac{-(1-x_1)^n}{n!} \right]_{1-k}^1$$

$$= (1-k) \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{k^n}{n!}$$

Finalement $P[R_n \leq k] = n(1-k)k^{n-1} + k^n = nk^{n-1} - (n-1)k^n$

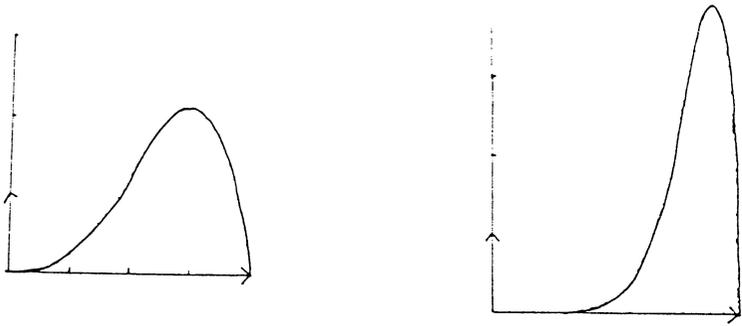
ce qui donne la densité suivante: $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & f_{R_n}(t) = n(n-1)[t^{n-2} - t^{n-1}] \\ \text{sinon} & (t) = 0 \end{cases}$

L'évolution de la densité de R_n , donnée par la suite des figures qui suivent est également intéressante⁹ ($n=2, 3, 4, 5$ et 10).



⁹ La suite (f_{R_n}) donne un exemple de suite de fonctions convergeant simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ mais ne convergeant pas uniformément (théorème de la bosse glissante). Toutefois pour tout réel positif ε la convergence de la suite (f_{R_n}) étant uniforme sur $[0, 1-\varepsilon]$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\varepsilon} f_{R_n}(t) dt = 0$ ce qui signifie que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[|R_n - 1| < \varepsilon] = 1$. En d'autres termes R_n converge vers la variable certaine égale à 1 en probabilité.



4 Quelques applications

1) Contrôle statistique des procédés.

Dans l'industrie, la population étudiée est la production d'un objet pendant une certaine durée. X est un paramètre qui doit être borné (tolérance Sup, inf) et la distribution modèle est celle de la loi normale $N(m, \sigma)$ lorsque le procédé fonctionne bien

Le but est d'estimer et de surveiller m et σ . A cet effet on prélève à intervalles de temps réguliers des échantillons de taille n (nous supposons ici que n est compris entre 1 et 12) et on mesure pour chaque échantillon sa moyenne \bar{X} et son étendue R . Quelle que soit la valeur

de n , la loi de \bar{X} est une loi $N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ puisque X suit elle même une loi normale. En effet

toute combinaison linéaire de lois normales est encore une loi normale. Une estimation de m jugée correcte est \bar{X} (moyenne des moyennes, calculée sur une vingtaine d'échantillons).

Reste à estimer σ . On obtient une solution satisfaisante à l'aide de R car $E(R) = \sigma d_2$ (d_2 est un coefficient qui ne dépend que de n). En effet en notant ϕ la densité de la loi $N(0, 1)$ et Φ sa fonction de répartition on obtient¹⁰:

$$E(R) = \sigma \underbrace{\left[2n \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi(u) [\Phi(u)]^{n-1} du \right]}_{d_2}$$

¹⁰ Pour le calcul de cette espérance, on peut supposer que $m=0$. Les densités de S_n et i_n sont alors

"symétriques" par rapport à l'axe vertical et il vient (avec le changement de variable $u = \frac{x}{\sigma}$ en notant la densité et la fonction de répartition de X :

$$\begin{aligned} E(R_n) &= E(S_n) - E(i_n) = 2E(S_n) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x n \phi_\sigma(x) [\Phi_\sigma(x)]^{n-1} dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \right]^{n-1} dx \\ &= \sigma \left[2n \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi(u) [\Phi(u)]^{n-1} du \right] \end{aligned}$$

On obtient alors une estimation de σ par $\frac{\bar{R}}{d_2}$ où \bar{R} est la moyenne des étendues calculée sur la vingtaine des échantillons prélevés. (Tout ceci est justifié par la loi des grands nombres qui affirme que la moyenne empirique converge presque sûrement vers l'espérance mathématique). Ceci fait, on peut affirmer que environ 99,7% de la production se situe dans l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ avec $m = \bar{X}$ et $\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$. On détermine également les intervalles $I_{\bar{X}}$ et I_R où doivent se trouver \bar{X} et R avec une probabilité supérieure à 0,997. Si d'une part $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ est inclus dans l'intervalle [Tolérance minimale, Tolérance maximale] et si d'autre part les vingt valeurs de \bar{X} et R utilisées sont dans $I_{\bar{X}}$ et I_R on dit que le procédé est capable et qu'il est sous contrôle statistique. On se sert alors de $I_{\bar{X}}$ et I_R pour établir des cartes de contrôles pour la suite de la production; les valeurs m et σ étant régulièrement réactualisées.

Remarque: Loi de R .

On démontre que si X admet f pour densité avec $f(t) > 0 \Leftrightarrow a < t < b$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ la densité de R est donnée par

$$f_R(t) = n(n-1) \int_a^{b-x} [F(x+t) - F(x)]^{n-2} f(x+t) f(t) dt$$

(on peut ainsi retrouver le résultat du [3]).

2) Estimation d'une moyenne.

Lorsque l'on veut utiliser la valeur moyenne m d'un caractère X défini sur une population dont la distribution est inconnue, le théorème central limite affirme que si n est assez grand (pour un sondage on prend souvent $n=1000$) la loi de \bar{X} est approximativement

$N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Estimant σ à l'aide de $S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ on obtient un intervalle dit de

confiance dans lequel doit se trouver \bar{X} avec une probabilité $1-\alpha$ fixée. Soit:

$$\begin{aligned} P \left[m - \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq m + \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \right] &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P \left[\bar{X} - \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

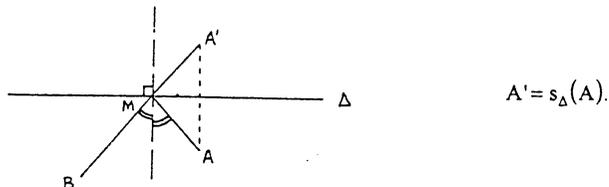
On conclut alors, avec un taux de confiance égal à $100(1-\alpha)\%$ que $m = \bar{X} \pm \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}}$ où $z_{\alpha/2}$ est

l'unique réel tel que la probabilité $P[Z \geq z_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$ avec Z qui suit une loi normale réduite.

Conclusion: Nous pensons que les parties [1] et [2] constituent une activité intéressante sur le plan pédagogique et permettent de présenter les problèmes statistiques importants qui sont abordés dans les parties [3] et [4] (les fonctions génératrices des nombres aléatoires des calculatrices permettent de simuler une expérience et d'observer les distributions empiriques obtenues).

LE BILLARD¹ CIRCULAIRE.

Etant données deux boules sur un billard circulaire, la première question qui se pose naturellement (!?) est de savoir dans quelle direction il faut frapper la première boule pour atteindre la seconde en jouant une fois sur la bande, sans effet... En fait, la vraie première question qui se pose est celle-ci: pourquoi avoir choisi un billard circulaire alors que l'on sait résoudre le problème quand celui-ci est rectangulaire et cela de façon élémentaire, en termes de symétrie, comme la figure ci-dessous le rappelle (?):



$$A' = s_{\Delta}(A).$$

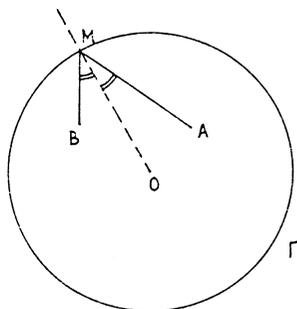
M est l'unique point de la droite Δ vérifiant les propriétés suivantes:

- La longueur $MA+MB$ est minimale.
- La perpendiculaire à Δ issue de M est bissectrice de l'angle AMB .
- M est aligné avec B et A' .

Au cours de cet exposé, on se posera de façon similaire les questions qui suivent:

Si Γ est un cercle de centre O, et A et B deux points du disque limité par Γ de sorte que A, B, O forment un vrai triangle, existe-t-il des points M du cercle tels que:

- (1)• La droite (OM) est la bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle AMB ?
- (2)• $AM+MB$ est le chemin le plus court pour aller de A à B en passant par Γ ?
- (3)• Les solutions des problèmes ci-dessus coïncident-elles ?
- (4)• Comment retrouver la "symétrie" par rapport au bord du billard ?



¹ Adaptation de W.T.Hamelton à partir d'un exercice extrait de la bible de Saint-Terracher (*versets 26 et 29, page 92 des "obligatorae disquisitiones in T.S"*).

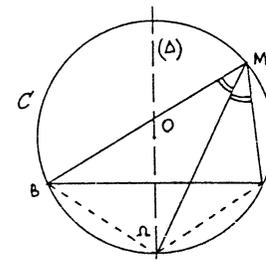
1ère partie:

Un triangle ΩAB étant donné, trouver les points M du plan tels que (ΩM) soit la bissectrice (intérieure) de l'angle AMB .

1.1 Cas isocèle: approche "géométrique pure".

On envisage ici le cas où le triangle ΩAB est isocèle, $i-e \Omega A = \Omega B$.

Il est immédiat que les points de la médiatrice Δ de $[A,B]$ (sauf éventuellement Ω) sont solutions. On cherche donc en dehors de Δ . Vérifions que les points du cercle C circonscrit à Ω, A et B (*privé des points Ω, A, B*) sont également solutions.



Appelons O le centre du cercle C , on peut écrire:

$$2 \cdot AM\Omega = AO\Omega = \Omega OB = 2 \cdot \Omega MB \quad [2\pi]$$

$$\text{donc } AM\Omega = \Omega MB \quad [\pi]$$

Ce qui signifie exactement que (ΩM) est bissectrice de l'angle AMB , intérieure ou extérieure selon que le point M est situé sur le grand arc ou le petit arc d'extrémités A et B.

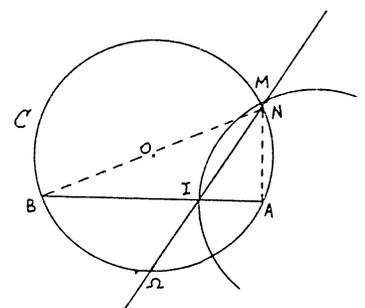
Problème réciproque: existe-t-il d'autres solutions au problème?

Soit M un tel point solution, non situé sur Δ . Puisque (ΩM) est bissectrice de AMB , elle coupe la droite (AB) en un point I^2 , vérifiant:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM}.$$

M est donc sur le cercle-ligne de niveau:

$$\gamma = \left\{ P / \frac{AP}{BP} = k \right\} \text{ avec } k = \frac{AI}{BI}.$$



Or (ΩM) recoupe le cercle C en un point N, tel que, d'après l'étude directe précédente, (ΩN) est bissectrice de AMB donc vérifiant lui aussi:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AI}{BI}.$$

² Les puristes auront sans doute envie de savoir ce qui se passerait si (ΩM) était parallèle à (AB) , ou encore si M était sur la droite (AB) ...

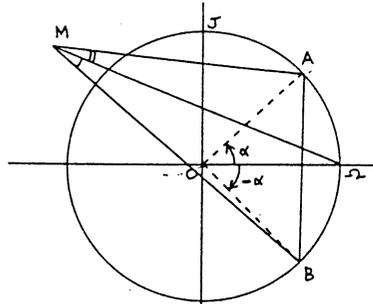
Par conséquent le point N est à l'intersection du cercle-ligne de niveau défini ci-dessus et de la droite (ΩM). Cette intersection étant constituée des deux points I et M, et N ne pouvant être en I (*car il est sur C*), on en déduit que $M = N$ et que M est sur le cercle C.

Conclusion: L'ensemble solution recherché (*auquel on ajoute naturellement les points de base Ω , A et B*) est l'union de la médiatrice Δ de $[A,B]$ avec le cercle C circonscrit à Ω , A et B. On pourra désigner dorénavant par S cet ensemble solution.

1.2 Cas isocèle: approche "complexes".

On considère encore que le triangle $AB\Omega$ est isocèle tel que $\Omega A = \Omega B$

Ici, on a l'avantage de pouvoir traiter de façon relativement élégante le problème par équivalence, comme suit:



On choisit le repère (O,Ω,J) orthonormal de sorte que $(O\Omega)$ soit la médiatrice de $[A,B]$ (cf figure ci-contre).

On peut alors poser:

$$A(e^{i\alpha}), B(e^{-i\alpha}), \Omega(1), M(\lambda e^{i\theta}) \text{ avec } \theta(\theta^2 - \alpha^2) \neq 0[2\pi].$$

puis écrire:

$$\begin{aligned} AM\Omega &= \Omega MB \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1 - \lambda e^{i\theta}}{e^{i\alpha} - \lambda e^{i\theta}}\right) &= \arg\left(\frac{1 - \lambda e^{i\theta}}{e^{-i\alpha} - \lambda e^{i\theta}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{(1 - \lambda e^{i\theta})^2}{(e^{i\alpha} - \lambda e^{i\theta})(e^{-i\alpha} - \lambda e^{i\theta})} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

"Il suffit" alors de développer patiemment la partie imaginaire (*nulle*) du complexe ci-dessus, et après les spectaculaires simplifications souhaitées obtenir la factorisation et l'équation suivantes:

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(\lambda \cdot \cos\alpha - \lambda + \lambda^3 - \lambda^3 \cdot \cos\alpha) &= 0 \\ i - e^{-i\theta} \cdot \lambda \cdot \sin\theta \cdot (1 - \cos\alpha)(\lambda^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Les cas $\alpha = 0$ (*disparition du triangle ΩAB*); et $\lambda = 0$ (*M à l'origine!*) ne présentant aucun intérêt particulier, cette équation donne les solutions:

$\lambda = 1$ (λ est le module de M, en tant que tel, positif!), qui donne les points du cercle circonscrit à Ω , A et B.

$\theta = 0$ [π], qui donne la médiatrice de $[A,B]$.

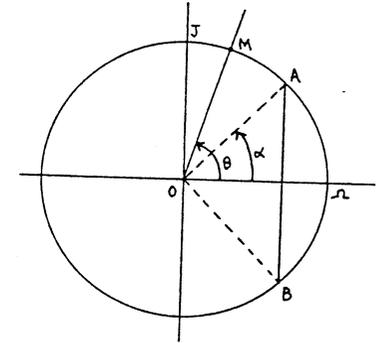
Remarque: On a pu se rendre compte au 1.1 que démontrer directement que le cercle C circonscrit à Ω , A et B était dans l'ensemble des solutions du problème posé, était plutôt trivial. Ici, le calcul en termes complexes, est également plus simple que celui qui précède pour la raison essentielle que dans l'étude directe, on peut choisir $\lambda = 1$. Plus précisément, on vérifie que:

$$\frac{(1 - e^{i\theta})^2}{(e^{i\alpha} - e^{i\theta})(e^{-i\alpha} - e^{i\theta})} = \frac{(2i \cdot \sin \frac{\theta}{2})^2}{2(\cos\theta - \cos\alpha)} = 2 \frac{(\sin \frac{\theta}{2})^2}{\cos\alpha - \cos\theta}.$$

ce qui prouve bien que le rapport en question est réel, et par là que:

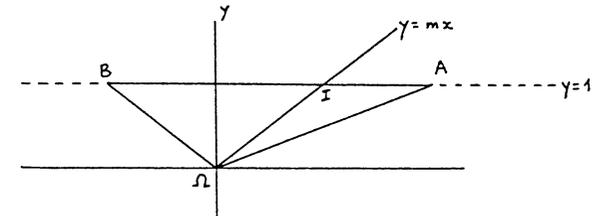
$$\arg\left(\frac{1 - e^{i\theta}}{e^{i\alpha} - e^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{1 - e^{i\theta}}{e^{-i\alpha} - e^{i\theta}}\right) \quad [\pi].$$

autrement dit que, à partir du moment où M est sur le cercle C, les angles ΩAM et $BM\Omega$ sont égaux à π près. L'étude aisée du signe du rapport réel trouvé donne en prime que (ΩM) est la bissectrice intérieure de AMB (*cela correspond à la positivité du dit-rapport*) si et seulement si $\cos\alpha > \cos\theta$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \in]-\pi; -\alpha[\cup \alpha; \pi[$ modulo 2π (cf figure: M est du bon côté!)



1.3 Cas général: approche analytique.

Dans ce paragraphe, que l'on raccourcira délibérément, on veut aborder le cas où le triangle ΩAB est quelconque. On choisit, pour simplifier, un repère centré en Ω et qui nous permet de donner aux points A et B les coordonnées $(a;1)$ et $(b;1)$ (cf figure), le problème étant bien entendu toujours résoluble à une homothétie près.



On considère ensuite la droite D d'équation $y = mx$ de coefficient directeur m , laissant de côté le cas d'une droite parallèle à l'axe des y . On définit ensuite I comme point d'intersection de cette droite avec (AB) : il a donc pour coordonnées $(1/m; 1)$.

On ramène le cercle $\gamma = \left\{ P / \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IB} \right\}$ à son équation qu'on peut écrire:

$$(*) MA^2 \cdot IB^2 - MB^2 \cdot IA^2 = 0.$$

En fait, comme on le pressent, suite à l'étude faite auparavant dans le cas particulier du triangle isocèle, rechercher les points M du plan tels que (ΩM) soit bissectrice de ΔMB revient à déterminer l'intersection de γ avec la droite variable D .

En remplaçant dans (*), y par mx, on obtient l'égalité:

$$\left[(mx-1)^2 + (x-a)^2 \right] (bm-1)^2 - \left[(mx-1)^2 + (x-b)^2 \right] (am-1)^2 = 0.$$

qui, une fois simplifiée et factorisée se ramène à:

$$(mx-1)(b-a) \left[x(m^2+1)(m(a+b)-2) + (a+b)(m^2+1) + 2m(1-ab) \right] = 0.$$

On retrouve bien sûr le point I ($mx-1=0$) et a,b étant différents, on découvre que x, et par suite y, peuvent s'exprimer en fonction du paramètre m:

$$x(m) = \frac{(m^2+1)(a+b) + 2m(1-ab)}{(m^2+1)(2-m(a+b))} = \frac{k \cdot m^2 + m(1-ab) + k}{(m^2+1)(1-k \cdot m)}$$

$$y(m) = m \cdot x(m)$$

$$\text{avec } k = \frac{a+b}{2}.$$

Avec la réserve m différent de $2/(a+b)$! Mais, dans le cas contraire I est au milieu de $[A,B]$ et on doit avoir :

$$(m^2+1)(a+b) + 2m(1-ab) = 0 \text{ avec } m = 2/(a+b).$$

ce qui s'écrit: $8 + (a-b)^2 = 0$!!!!

Dans le cas général, on obtient une superbe cubique qui, quand on fait varier a et b de sorte à se rapprocher de l'égalité $a=b$, se déforme jusqu'à obtenir le cercle C et la droite Δ du cas particulier où ΩAB est isocèle.

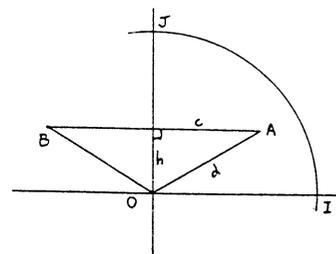
1.4 Application au billard circulaire.

Revenons à l'énoncé initial du problème: étant donnés deux points A et B (*simulant les fameuses boules de billard*) dans un disque limité par le cercle Γ (le bord du billard) de centre O et de rayon R (*qu'on choisit généralement égal à 1*), comment choisir un point M sur Γ de sorte que (OM) soit bissectrice de ΔMB (*(A,M,B) constituant ainsi ce qu'il est convenable d'appeler une "trajectoire de billard"*)?.

Les paragraphes précédents nous donnant l'ensemble S des points M tels que (OM) soit bissectrice de ΔMB , il suffit de construire l'intersection de S avec Γ : dans le cas qui nous préoccupe, à savoir quand $OA=OB$, on trouve naturellement deux solutions évidentes correspondant aux points d'intersection de Γ avec la médiatrice de $[A,B]$. Ainsi le problème a-t-il toujours au moins deux solutions; si de plus le cercle C circonscrit à ΔAB est sécant à Γ , alors il en a quatre. (*notons subrepticement qu'il n'en a jamais trois puisque, si les deux cercles sont tangents, on obtient un point-solution triple*)

Dès lors, il paraît cohérent de rechercher...

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles C et Γ soient sécants.



A partir de maintenant, on considérera le repère orthonormal (O,I,J) tel que (cf figure):

Les coordonnées de A et B soient respectivement $(c;h)$ et $(-c;h)$;

Le cercle Γ ait pour équation: $x^2 + y^2 = 1$.

On notera d la distance $OA (= OB)$; d'où $d^2 = c^2 + h^2$.

Dans le repère ainsi choisi, le cercle C a pour équation (*puisque'il passe par O, A et B*):

$$x^2 + y^2 - \frac{d^2}{h}y = 0.$$

On en déduit que Γ et C sont sécants si et seulement si le système:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{d^2}{h}y = 0. \end{cases}$$

a des solutions.

Une condition nécessaire et suffisante est que la solution $y_0 = h/d^2$ soit dans l'intervalle $[-1;1]$, ce que l'on peut écrire:

$$\frac{h}{d} \leq \frac{d}{R} \quad (\text{avec } R=1!..).$$

En remplaçant d par son expression en fonction de c et h, on obtient cette autre condition:

$$\boxed{\frac{h}{c} \leq \frac{c}{R-h}}$$

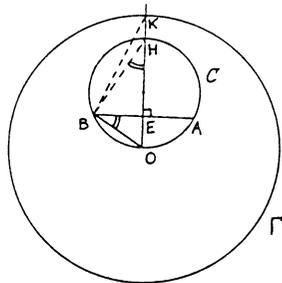
La figure qui suit montre que la première condition relève plutôt d'une affaire de sinus, tandis que la seconde est à l'évidence une histoire de tangente; quoiqu'il en soit, on peut retrouver aisément plus géométriquement ces conditions.³

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ et } C \text{ sécants} &\Leftrightarrow EH \geq EK \Leftrightarrow \tan EHB \leq \tan EKB \Leftrightarrow \tan OBE \leq \tan EKB \\ &\Leftrightarrow \frac{EO}{EB} \leq \frac{EK}{EK} \Leftrightarrow \frac{h}{c} \leq \frac{c}{R-h}. \end{aligned}$$

ou encore:

³ Les choses étant ce qu'elles sont sur la figure, donc bien faites, les angles EHB et EKB sont à valeurs dans l'intervalle $[0, \pi/2[$. Laissons au lecteur rigoureux le soin de vérifier ce qu'ils se passe quand par exemple, on place les boules A et B tout près du bord du billard.

$$\Gamma \text{ et } C \text{ sécants} \Leftrightarrow OH \geq OK \Leftrightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OB}{OH} \leq \frac{OB}{OK} \Leftrightarrow \frac{h}{d} \leq \frac{d}{R}$$

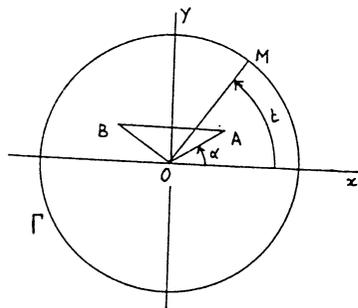


2ème partie:

Dans cette partie, on cherche à résoudre le problème des trajectoires "de lumière", ainsi dénommées pour les distinguer a priori de celles déterminées dans la première partie, c'est-à-dire:

Etant donné un cercle Γ de centre O et deux points A et B à l'intérieur du disque limité par le cercle, chercher les points de ce cercle qui minimise la distance MA+MB. On se limitera au cas où le triangle OAB existe effectivement et est isocèle.

2.1 Approche analytique directe.



On reprend le même repère et les mêmes notations qu'au 1.4. On pose de plus:

$$\alpha = \arg(A) \text{ (d'où } \arg(B) = \pi - \alpha) \text{ et } t = \arg(M)$$

La formule d'al-Kashi appliquée aux triangles OAM et OBM nous permet d'écrire:

$$AM+BM = \sqrt{d^2 + R^2 - 2dR \cdot \cos(t - \alpha)} + \sqrt{d^2 + R^2 - 2dR \cdot \cos(\pi - t - \alpha)}$$

On peut appeler $g(t)$ cette fonction. Sa dérivée est:

$$g'(t) = dR \left(\frac{\sin(t - \alpha)}{AM} - \frac{\sin(t + \alpha)}{BM} \right)$$

Si, maintenant on applique la formule des sinus dans les mêmes triangles, on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\sin(t - \alpha)}{AM} = \frac{\sin \text{AMO}}{AO} = \frac{\sin \text{AMO}}{d} \\ \frac{\sin(t + \alpha)}{BM} = \frac{\sin \text{BMO}}{BO} = \frac{\sin \text{BMO}}{d} \end{cases}$$

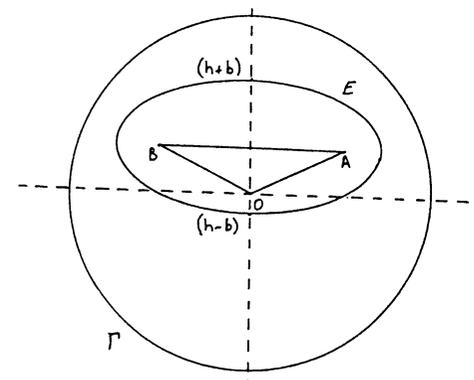
ce qui nous autorise à simplifier $g'(t)$ sous la forme:

$$g'(t) = R(\sin \text{AMO} - \sin \text{BMO})$$

Hélas, cette forme ne permet pas de discuter le signe de $g'(t)$ en fonction de t . On peut toutefois en profiter pour annoncer que toute "trajectoire de lumière" est une "trajectoire de billard"; en effet, si g atteint un extrémum en M , alors sa dérivée s'annulant, on a $\sin \text{AOM} = \sin \text{BOM}$, ce qui aurait tendance à prouver l'égalité des deux angles, modulo π ...

2.2 Utilisation de la ligne de niveau $MA + MB = k$.

On se propose de considérer les ellipses de foyers A et B, données par conséquent par leur équation caractéristique bifocale $MA+MB=k$ avec k un réel au moins égal à $2a$. Plus précisément, l'idée qui nous guide est ici est la suivante: pour les valeurs de k voisines de $2a$, on imagine sans difficulté que l'ellipse en question est toute entière comprise dans le disque ouvert limité par Γ (elle colle au segment $[A,B]$, tout simplement!.); pour des valeurs suffisamment grandes de k , on envisage tout aussi bien que l'ellipse sort complètement du cercle Γ . Le passage du premier état au second nécessite, continuité oblige, une prise de contact, une tangence entre le cercle et l'ellipse qui doit nous amener à la résolution du problème posé.



*Posons, le choix du repère n'étant plus à faire, les équations de Γ et de l'ellipse qu'on aura le bon goût d'appeler E voire $E(k)$, si précision indispensable:

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad (E_k) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } b^2 = a^2 - c^2.$$

On s'intéresse alors à la fonction qui mesure la distance de l'origine O à un point de l'ellipse par rapport à son ordonnée⁴, c'est-à-dire:

$$\text{Pour } M \in (E_k), \quad OM^2 = x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}(y-h)^2 + y^2.$$

Ce qui nous incite à étudier la fonction:

$$f(y) = \frac{1}{b^2}[-c^2y^2 + 2a^2hy + a^2(b^2 - h^2)].$$

sur l'intervalle $[h-b; h+b]$. (Il s'agit tout simplement d'une portion de parabole!..)

$$\text{La dérivée de } f \text{ est: } f'(y) = \frac{2}{b^2}(ha^2 - c^2y).$$

*Engageons la discussion, qui promet d'être assez large compte tenu du nombre de paramètres présents⁵, en cherchant les signes des dérivées aux extrémités:

$$f'(h-b) = \frac{2}{b^2}[h(a^2 - c^2) + c^2b] = \frac{2}{b}[hb + c^2].$$

Ce premier nombre est toujours positif puisque h et b sont des réels strictement positifs. Ainsi, la parabole est-elle ascendante à partir du point situé en (0; h-b), ce qui n'était pas trop difficile à prévoir, en rejetant un coup d'oeil du côté de la figure...

$$f'(h+b) = \frac{2}{b^2}[h(a^2 - c^2) - c^2b] = \frac{2}{b}[hb - c^2].$$

Si on tient pour fixes les points A et B, alors les réels h et c sont constants et le signe de f(h+b) ne dépend à l'évidence que du bon vouloir de b, c'est-à-dire en fait, ne nous cachons pas la vérité, de celui de a! On voit bien que pour b voisin de zéro (autrement dit a voisin de c, k voisin de 2c; l'ellipse est voisine du segment [A,B]...), ce nombre est négatif, et à l'inverse, si b est suffisamment grand (dans ce cas de figure, l'ellipse a tendance à se "circulariser"), qu'il est positif, la valeur critique étant $\frac{c^2}{h}$.

Notons dès maintenant que: $b = \frac{c^2}{h} \Leftrightarrow a = \frac{cd}{h}$. Résultat qu'on peut une nouvelle fois retrouver trigonométriquement.

*Intéressons nous enfin au maximum de la fonction f, il est tout simplement égal à f(b+h) quand b est au delà de la valeur critique ci-dessus, et il vaut:

$$f\left(\frac{ha^2}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2 - c^2} \left[h^2 \frac{a^4}{c^2} + a^2(a^2 - c^2 - h^2) \right] = \frac{a^2 a^2}{c^2}.$$

quand la dérivée s'annule sur l'intervalle $[h-b; h+b]$ en $\left(\frac{ha^2}{c^2}\right)$. Il ne nous reste plus

qu'à nous demander si ce maximum est plus grand ou plus petit que 1, rayon du cercle Γ et si oui, à quel condition sur a!

or, on peut vérifier que:

$$f\left(\frac{ha^2}{c^2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{c}{d}$$

⁴ Vu qu'on a choisi, comme cela se fait habituellement, une ellipse étirée dans le sens des x, les calculs s'avèrent plus simples si on prend y comme variable.

⁵ Rappelons nous que h et c sont les paramètres de position de A et B; d est fonction de c et h; a est le paramètre qui mesure la "dilatation" de l'ellipse; b est fonction de a et c;

Récapitulons!

On positionne les points A et B, autrement dit on fixe les réels c et h. On fait croître le paramètre a à partir de la valeur c (b lui, démarre à zéro). Au début, l'ellipse est toute entière dans le disque ouvert limité par Γ , c'est-à-dire en fait que le maximum de la fonction f est plus petit que 1. En faisant croître le paramètre a, on est sûr que ce maximum va atteindre la valeur 1: la question est de savoir si ce maximum aura la forme f(h+b) ou la forme $f\left(\frac{ha^2}{c^2}\right)$. Ce qui revient à comparer les valeurs $\frac{c}{d}$ et $\frac{cd}{h}$. En effet, la première correspond au fait que le maximum vaut 1, la seconde correspond au fait qu'il est atteint avant h+b (le sommet de la parabole est compris dans l'intervalle $[h-b; h+b]$). Or, on peut écrire:

$$\frac{c}{d} \leq \frac{cd}{h} \Leftrightarrow \frac{h}{d^2} \leq 1.$$

Ce qui doit se traduire de la manière suivante, après s'être reporté à la condition nécessaire et suffisante établie au 1.4: Le maximum vaut 1 et est atteint avant que y ne prenne la valeur h+b si et seulement si les cercles Γ et C soient sécants.

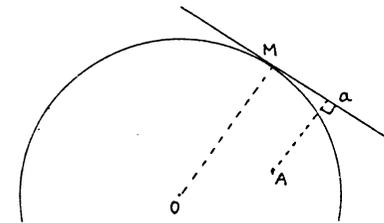
Concluons...

Quand les cercles Γ et C sont sécants, on peut construire une solution non-triviale au problème initial (rappel: MA+MB minimum avec M sur Γ) à l'aide de l'ellipse MA+MB = k = 2a en choisissant la valeur a = c/d. Une autre solution s'obtient évidemment par symétrie. On sait que dans ce cas, il existe également deux solutions symétriques non triviales au problème étudié dans la partie 1. On a eu l'occasion de remarquer que les "trajectoires de lumière" étaient des "trajectoires de billard"; une histoire de dénombrement nous laisse la possibilité d'affirmer alors et enfin que les solutions non-triviales aux deux problèmes posés coïncident... On peut aussi ajouter que les trajectoires de billard fabriquées à partir des points de Γ situés sur la médiatrice de [A,B], ne sont pas nécessairement des trajectoires de lumière!

3ème partie:

Elle se réduira à la donnée de l'énoncé d'un exercice (dont l'objectif est d'introduire le problème de la symétrisation des trajectoires de billard comme il est fait dans le cas du billard rectangulo-ordinaire) sous une forme condensée:

Montrer que la podaire par rapport au cercle Γ d'un point est une cardioïde⁶.



⁶ Occasion nous est ainsi donnée de rappeler que la podaire d'un point par rapport à une courbe digne de ce nom, est le lieu des projetés orthogonaux du point sur les tangentes à la courbe.

Introduire les complexes en terminale S.

Cette intervention s'est articulée autour de trois points:

Premier point : il s'agit d'une confrontation au problème, à savoir résolution d'équations à partir de problèmes concrets.

Cela permet également de faire des rappels concernant :

- la mathématisation d'un problème,
- les formules de résolutions d'équations du 2d degré,
- les études de fonctions et le lien avec la résolution d'équations,
- la cohérence des solutions,
- les méthodes autres.

On peut donner des exemples intéressants qui enrichissent la culture mathématique des élèves (Nombre d'Or, Nombres premiers...).

Deuxième point : Référence historique.

- . Construction des ensembles de nombres depuis \mathbb{N} .
- . Démonstration par quelques textes d'époque des réticences qui sont apparues pendant plus d'un siècle.
- . Passage de l'univers des mathématiques d'aujourd'hui à celles du passé : comment l'énoncé du théorème de D'Alembert occulte des siècles de recherche, d'interrogations.

Il s'agit d'une mise en condition des élèves pour les replacer dans le contexte de l'époque.

Troisième point : Etude d'un exemple d'"imaginaires" au sens propre, sans relation particulière avec nos imaginaires, c'est-à-dire les complexes.

Il s'agit d'un exemple développé par Galois en 1830. On considère le corps fini $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et son extension $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[i]$ où i est tel que $i^2 = 2$ ainsi que la résolution d'équations dans \mathbb{F}_9 .

Intérêts : Etude d'un corps fini et, de plus :

Intérêts : Etude d'un corps fini et, de plus :

- culturellement : GALOIS et sa géométrie algébrique.

- mathématiquement : les élèves vont construire la table d'addition et la table de multiplication de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (révision des calculs, mécanismes identiques à ceux de \mathbb{C}).
- scientifiquement : déconditionnement des élèves. Le théorème de D'Alembert ne s'applique pas dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Importance de l'émergence d'une intuition s'appuyant sur une pratique.

Il ne s'agit pas d'imaginer n'importe quoi¹ !

Annexe 1: Texte de Gauss traduit par A.Dubuc et D Reist (Irem Dijon).

« Notre arithmétique générale, qui dépasse si largement la géométrie antique, est dans sa totalité la création de l'époque moderne. Partie du concept de nombres entiers, elle a progressivement élargi son domaine. Aux nombres entiers sont venus s'ajouter les nombres fractionnaires, aux nombres rationnels les nombres irrationnels, aux nombres positifs, les nombres négatifs, aux nombres réels, les nombres imaginaires. Cette progression s'est cependant toujours effectuée d'un pas craintif et hésitant. Les premiers algébristes appelaient encore fausses racines les racines négatives des équations (et elles le sont effectivement là où le problème auquel elles réfèrent, est présenté de telle façon que la nature de la grandeur cherchée n'admet pas d'opposé). Mais de même qu'on a peu de scrupules à accueillir les nombres fractionnaires au sein de l'arithmétique générale, alors qu'il existe une multitude de choses dénombrables pour lesquelles un nombre fractionnaire est dénué de sens, de même on ne devrait pas refuser aux nombres négatifs des droits identiques à ceux des nombres positifs, sous prétexte qu'une infinité de choses n'admettent pas d'opposés. La réalité des nombres négatifs est amplement justifiée, puisqu'ils trouvent en mille autres occasions un support adéquat. En vérité, depuis longtemps, un fait est désormais établi : seules les grandeurs imaginaires qui s'opposent aux grandeurs réelles (grandeurs imaginaires jadis, et parfois encore aujourd'hui appelées de façon maladroite impossibles) n'ont toujours pas acquis droit de cité ; elles sont seulement tolérées ; elles ressemblent donc davantage à un jeu de signes vides de contenu réel, auxquels on refuse résolument un support imaginable, sans vouloir pour autant dédaigner le riche tribut que ce jeu de signes verse en fin de compte au trésor des relations entre grandeurs réelles. »

¹ Bibliographie: Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques. dont sont tirés les textes qui suivent et qui furent utilisés comme matériel pédagogique.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

x	0	1	2	i	2i	1+i	2+i	1+2i	2+2i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	i	2i	1+i	2+i	1+2i	2+2i
2	0	2	1	2i	i	2+2i	1+2i	2+i	1+i
i	0	i	2i	2	1	2+i	2+2i	1+i	1+2i
2i	0	2i	i	1	2	1+2i	1+i	2+2i	2+i
1+i	0	1+i	2+2i	2+i	1+2i	2i	1	2	i
2+i	0	2+i	1+2i	2+2i	1+i	1	i	2i	2
1+2i	0	1+2i	2+i	1+i	2+2i	2	2i	i	1
2+2i	0	2+2i	1+i	1+2i	2+i	i	2	1	2i

Quelques questions?

Cette présentation a suscité un débat très nourri qui a montré l'intérêt qu'elle provoquait chez les différents collègues. Voici une liste (non exhaustive) des remarques et des questions soulevées.

Faut-il faire ce type de présentation, avant ou après le cours sur les complexes²?

Cette introduction met surtout la lumière sur le problème de la fermeture algébrique des ensembles considéré (de façon très pertinente).

Un autre choix de lettre pour i s'imposerait puisque $i^2 = -1$. Ce point est sujet à polémique, d'autres intervenants estimant qu'au contraire, en gardant la même lettre, on affirme la liberté du mathématicien (i comme imaginaire...).

On pense que la table d'opération dans le corps fini prépare et motive les élèves pour les substitutions dans les expressions complexes.

Un collègue remarque que ce n'est pas la définition algébrique qui pose beaucoup de difficultés aux élèves, mais au contraire "l'interprétation géométrique"⁴. Une réflexion sur ce sujet s'imposerait.

² Cette rubrique est de la responsabilité de l'éditeur.

³ Une collègue a rappelé que l'introduction "classique" des complexes par la problématique sur les équations du troisième degré (équation de Bombelli etc.) permettait de conserver la "fraîcheur" de la réaction des élèves et

leur émerveillement de constater qu'effectivement $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$.

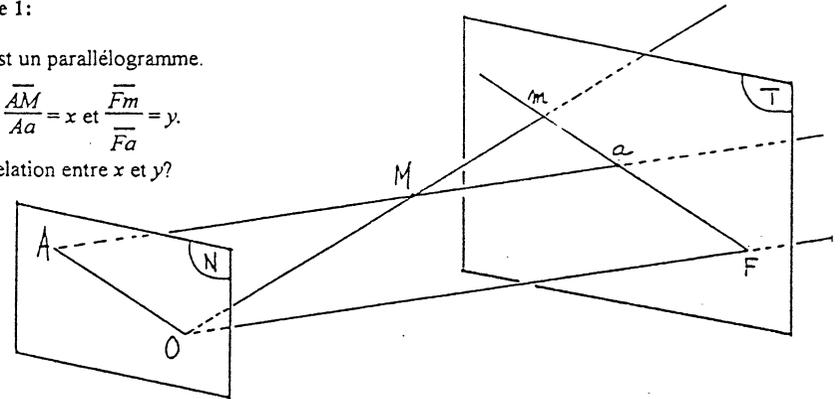
⁴ Il est à ce propos intéressant de constater que la plupart des notations utilisées pour les complexes (affixes, images etc.) datent de l'époque où l'on voulait clairement séparer l'algèbre naissante, en quête d'un statut, de la géométrie. Elles témoignent donc des restes fossilisés des angoisses passées sur le statut et la nature de l'algèbre.

Exercice 1:

$OFaA$ est un parallélogramme.

1) $\frac{\overline{AM}}{\overline{Aa}} = x$ et $\frac{\overline{Fm}}{\overline{Fa}} = y$.

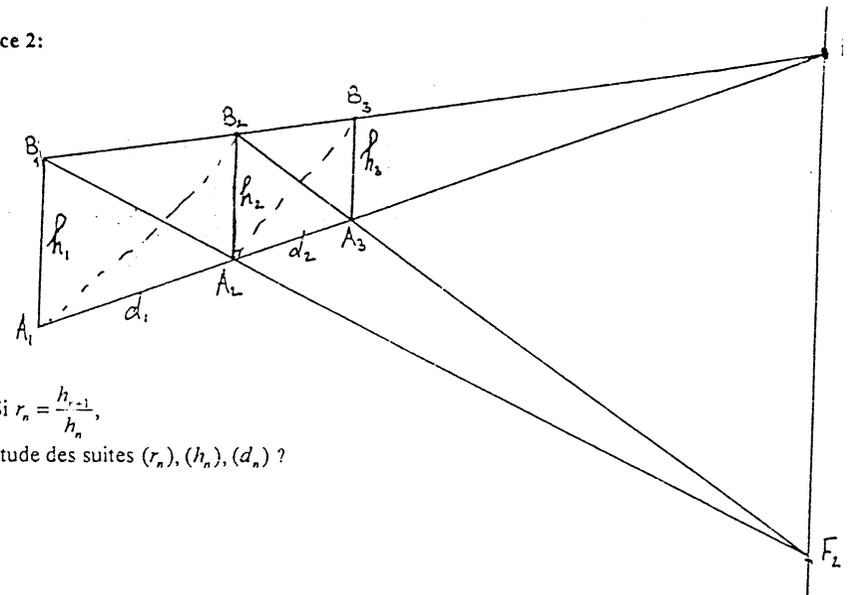
Relation entre x et y ?



2) P et Q étant fixés sur $]Aa)$, p et q leurs projections de centre O sur T.

Relation entre $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$ et $\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}}$?

Exercice 2:



Si $r_n = \frac{h_{n-1}}{h_n}$,

étude des suites (r_n) , (h_n) , (d_n) ?

Titre : Aimer encore faire des maths 2

[R.104]

Auteurs : Frédérique BOUTEAUD, Bertrand FORT, Thierry HAMEL, Jean Claude JOVET, François PREVOST, Luc SINEGRE.

Public concerné : Professeurs de Lycée, collèges, Post-Bac.

Résumé

Actes du stage P.A.F 94-95 "Aimer encore faire des maths".

Mots clés : Théorème de Pascal
conique, cubique
Nombre complexe
billard circulaire
statistiques
Pôle et polaire
loi du Sup, Inf, étendue.
Géométrie
projective

Editeur : IREM de ROUEN.

Date : Juin 1995

Nombre de pages : 58

Format : A4.

Prix : 25.00 F.

Publication : ISBN : 2-86239-060-7
Dépôt légal : JUIN 1995

Bon de commande

M. , Mme, Mlle : _____

Adresse : _____

Libellé AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2 [R104]

Prix 35F

Quantité

Total

Frais d'envoi : 15 F pour le 1^{er} livre et 10 F par livre supplémentaire (France)

Frais réels pour l'étranger

SOMME DUE :

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN

Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

DATE :

SIGNATURE :