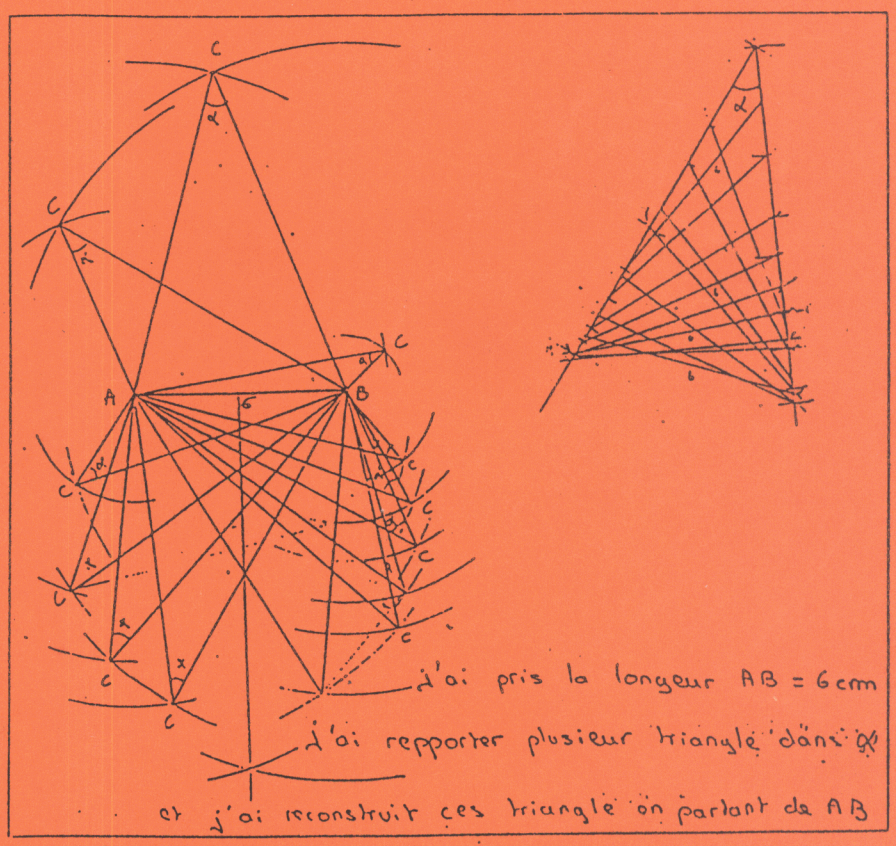
UNIVERSITÉ DE ROUEN

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

IREM de ROUEN
BP 138
76821 Mont Saint Aignan

Tél. et Fax.
35-14-61-41

# Autour de la notion d'activité




BERGUE Danielle – BORREANI Jacqueline – CHEVALLIER Michel – COLONNA Hélène

IREM DE ROUEN
AV DE BROGLIE
BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUE
76 MONT SAINT AIGNAN

## INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, les pratiques d'apprentissage mises en oeuvre dans les classes se modifient sous l'influence des recherches en psychologie, en sciences de l'éducation ou en neurosciences. En particulier, la construction du savoir, par l'action de l'individu lui-même sur les situations, est maintenant reconnue comme fondamentale, car constitutive de sens. Les commentaires associés aux programmes prennent en compte des résultats de ces recherches en recommandant un travail par activités.

De nombreux livres et publications (entre autres des I.R.E.M.) proposent des travaux à faire faire aux élèves sous la dénomination d' "activités". Si certains permettent effectivement une construction du savoir par les élèves eux-mêmes, pour d'autres on ne voit pas très bien quelles différences existent entre des exercices n'ayant pas cette dénomination.

Que met-on derrière ce mot à la mode d' "activité" ? Où trouver des activités qui ne soient pas seulement un qualificatif sans substance, voire une caricature ? En quoi cela peut-il amener un changement dans nos pratiques d'enseignement ? Comment en créer soi-même ?

Il nous a semblé nécessaire de faire le point.

Pour cela, nous avons d'abord fait un "état des lieux". Quelle image de la notion d'activité se font, avant toute information, les professeurs rencontrés lors de réunions ou stages ? Nous verrons que, si l'aspect psychosociologique a été bien compris, par contre, le contenu et la forme d'une activité sont perçus de façons très diverses et sont déformés par des conceptions plus ou moins béhavioristes de l'apprentissage. Ces déformations entraînent bien souvent la disparition même de l'essence de la notion d'activité.

Pour expliquer cette notion, nous nous sommes appuyés sur des textes écrits par divers didacticiens, en particulier dans la revue "*Repères*", en montrant que ce type de travail se situe dans une certaine conception de l'apprentissage généralement bien acceptée maintenant.

Nous explicitons dans cette brochure différentes étapes de réflexion nécessaires à la construction d'une activité, puis nous analysons quelques exemples d'activités. La notion de débat scientifique étant souvent présente dans ce type de travail, le texte d'un exposé sur le débat -déjà paru dans les actes de l' U.E. de Grenoble 93- a été inséré en fin de brochure.

Nous avons conscience que si nous n'avons réussi à donner que quelques pistes de réflexion, elles peuvent néanmoins servir de base pour enrichir les pratiques personnelles.

# I- De la représentation des stagiaires à la notion d'activité :

## I 1- Analyse des représentations des stagiaires :

Pour l'ensemble des stagiaires, le travail par activité ne s'inscrit pas dans le cours du travail habituel. Il doit prendre une, ou plutôt des formes différentes.

Parmi les caractéristiques perçues par les collègues, certaines d'entre elles ne sont absolument pas spécifiques ou même nécessaires au travail de groupe, d'autres déforment véritablement la notion d'activité en la réinsérant dans un fonctionnement très directif de la classe.

Par ailleurs, ce qui fait la spécificité de la notion d'activité dans sa forme n'est généralement pas exprimé sauf en ce qui concerne l'impact sur l'individu lui-même.

Voyons donc plus précisément ces représentations.

### I.1.1- Différences proposées qui ne sont pas spécifiques :

a/ *Dans les activités, on doit faire travailler sur de nouvelles notions.*

Nous verrons en précisant les différents types d'activités que celles-ci peuvent tout à fait ne proposer que des réinvestissements de notions déjà vues.

b/ *Le travail de groupe doit être systématiquement utilisé.*

Au travers des diverses publications proposant des exemples d'activité, le travail de groupe est la plupart du temps utilisé, d'où ce "théorème prof".

Il est vrai que le travail de groupe oriente fortement la gestion de la classe vers une conception de l'apprentissage où l'élève est davantage maître d'oeuvre dans la construction de son savoir.

c/ *Le contenu doit faire référence à des problèmes issus de la vie courante, ou du moins avec un "habillage" dit concret.*

Il semble donc que pour ces collègues l'activité corresponde à la modélisation mathématique d'un problème physique.

On peut rapprocher ce point de vue de celui qui lie l'activité à la notion de discipline d'éveil.

Il ne s'agit plus alors de faire des mathématiques mais des découpages, coloriages..., dont le lien avec la notion mathématique sous-jacente est fait par le professeur et non par l'élève. D'où de grandes difficultés de gestion lors de la synthèse.

d/ *Un travail par activité doit utiliser des supports différents.*

Il apparaît donc à nos collègues que l'on ne puisse pas mener une activité en travaillant sur un cahier de brouillon, voire un cahier d'exercices.

Il faut, bien sûr, lier cette idée aux types de production attendus après une activité et aux types de gestion de classe qui ont été évoqués ci-dessus.

De plus pour certains collègues, la notion d'activité est très liée à l'utilisation de l'outil informatique.

I.1.2- Représentations qui dénaturent sensiblement la notion d'activité :

a/ *Dans une activité, il faut mettre au point un questionnaire précis pour que tous les élèves soient actifs.*

Beaucoup de professeurs vivent mal le fait que les élèves "ne fassent rien", pensant qu'alors ils sont "passifs", contraire "d'actifs". On voit apparaître, au travers de cette angoisse, la confusion dénoncée par N. Bkouche entre activisme et activité.

b/ *Une activité n'est pas valable pour tous les élèves d'une classe hétérogène.*

Ceci sous-entend que des élèves en difficulté ne peuvent pas s'impliquer dans ce type de tâche. On en revient à l'idée d'un type d'apprentissage différent suivant le niveau des résultats des élèves.

Or les activités veulent proposer un même type d'apprentissage qui se différencie dans les stratégies mises en oeuvre par les élèves en fonction bien sûr de leurs connaissances, de leur mode de raisonnement (le stade formel étant plus ou moins disponible).

c/ *Une activité se déroule aussi bien hors classe qu'en classe.*

Si le travail hors classe est le prolongement de travail en classe, ceci peut être dû à des problèmes de gestion du temps. Mais après discussion avec les collègues, il apparaît que pour eux, les activités se situant soit à côté du travail de classe coutumier, soit en plus, c'est perdre du temps que de les faire faire en classe. Cela devient donc une sorte de devoir à la maison.

I.1.3- Aspect psychosociologique mieux perçu :

a/ *Dans ce type de travail, les élèves sont davantage motivés.*

Le contexte social actuel entraîne à l'intérieur de l'école un grand nombre de perturbations, en particulier dans le rapport au savoir (cf. B.Charlot). C'est une des raisons qui pousse les professeurs à modifier leur mode d'enseignement et en particulier à s'intéresser au travail par activité.

Par le regard porté sur le travail de l'élève (en particulier sur ses erreurs), par le type de questionnement qu'elle implique, l'activité va apporter un changement dans le rapport de l'élève à sa tâche. C'est ce changement qui modifie la motivation.

b/ *Ce type de travail valorise l'enfant, il lui restitue une meilleure image de lui.*

La possibilité de réussir, ne serait-ce que partiellement, une tâche est un aspect du travail par activité qui permet à un élève de ne plus être en échec. Il est reconnu que la "pédagogie de la réussite" est un élément important de la remédiation pour les élèves en difficulté.

c/ *Dans les activités, on utilise la "confrontation".*

La construction de connaissances passe par des phases de déstabilisation d'anciennes connaissances, puis d'accommodation. Un conflit socio-cognitif (cf. Doise-Mugny ) - "confrontation" - peut être à l'origine de cette déstabilisation.

Il faut souligner que ce conflit n'est pas systématiquement présent dans les activités.

a/ *Les élèves doivent tâtonner, chercher, se tromper, constater, manipuler, etc...*

Dans cette énumération, on retrouve bien des tâches qui sont le propre du travail scientifique.

b/ *L'activité doit permettre d'observer, remarquer, comparer, conclure, démontrer.*

I.1.5- Difficulté de la synthèse :

Pour la plupart de nos collègues, conclure une activité est une réelle difficulté. Partir des productions d'élèves écrites ou orales pour retrouver la notion, la méthode visée n'est pas un mode de fonctionnement connu. Ce n'est ni celui qu'ils ont vu fonctionner du temps où ils étaient élèves, ni un objet d'enseignement dans les formations des professeurs.

## I.2- Notion d'activité :

I.2.1- A travers les programmes :

Les objectifs des programmes parus depuis 1945, et en partie ceux de 1971, mettent l'accent sur l'activité de l'élève. En préambule des orientations de 1985, on peut lire : "l'Ecole doit faire acquérir des connaissances et des méthodes...La pédagogie ne permet de parvenir aux objectifs visés et aux connaissances essentielles que si elle favorise l'activité de l'élève."[1] . Méthode "active" et obligation de "prendre une part effective au travail" sont tout autant présentes dans les commentaires des divers programmes.

On retrouve les mêmes caractéristiques et la même conception des apprentissages : "L'enregistrement passif d'un certain nombre de notions et de faits"[2] n'est pas à privilégier, "il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui (l'élève) à partir de questions qu'il s'est posées, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes"[3]. La construction de connaissances se développe autour de la résolution de problèmes. Ici la notion de problème n'est pas à prendre dans son sens trivial, c'est une véritable problématique, au sens épistémologique, qui doit être mise en oeuvre. D'après Bachelard, "toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique". Véritable défi intellectuel, les activités doivent amener les élèves à se poser des questions, et doivent permettre au savoir mathématique de prendre sens. L'activité mathématique va donc être le vecteur entre la construction du sens et la constitution, certains diraient la capitalisation, du savoir.

Travailler par activité demande alors de savoir mobiliser des connaissances, de faire des choix, d'en tester les effets, de contrôler, de revenir sur certains choix. Les programmes ne sont plus seulement envisagés en terme de contenus mais aussi en termes d'objectifs et de compétences. La constitution de connaissances par l'élève s'appuie sur des savoirs déjà acquis. Cela s'inscrit dans un cadre de continuité et de progression des acquis. C'est donc à travers les diverses situations proposées aux élèves que les concepts se construisent progressivement et s'enrichissent mutuellement, que les compétences se développent.

Dans le programme de 1985 une conception de la notion d'activité est clairement établie. "Les activités doivent:

* Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que les consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises par tout le monde.
* Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures.
* Rendre possible la mise en jeu des outils prévus.
* Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons".

---

[1] Instructions du B.O. 1985
[2] Instructions du B.O. 1946
[3] Idem (1)

I.2.2- Vue par des didacticiens :

A quelques nuances près, cette conception se retrouve dans celles proposées par les IREM de Poitiers, du Mans et de Paris VII.

Voici la définition que l'équipe de Poitiers rappelle dans chacune de ses brochures.

*Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants (conformément aux programmes) :*

- *l'énoncé est court (en général) et compris de tous les élèves,*
- *la réponse n'est pas évidente,*
- *pour répondre l'élève devra :*
  - *soit découvrir la connaissance visée,*
  - *soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème,*
  - *soit mobiliser les notions antérieures en vue de les réorganiser.*

*Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou /et plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).*

Dans la brochure "Enseignement des Mathématiques par situations-problèmes" de l'IREM des pays de Loire, on peut lire : *La construction du savoir mathématique par les élèves suppose que soient respectés quelques principes fondamentaux.*

1. *Les contenus mathématiques doivent avoir un sens pour l'élève.*
2. *L'élève doit être mis en situation d'activité intellectuelle vis à vis des mathématiques.*
3. *L'élève doit pouvoir faire sien les termes du problème.*
4. *Les difficultés et les qualités des élèves doivent être observées et prises en compte.*
5. *L'enseignement par situations-problèmes repose sur la construction d'un champ de concepts à partir d'un champ de problème.*

*Les situations-problèmes visent à la construction des savoirs et des concepts contenus dans les programmes. Ce ne sont ni des situations-bricolage ou jeu (sans objectif de construction d'un savoir), ni des problèmes ouverts (simples réinvestissement d'un savoir acquis), ni des "activités dirigées" au sens scolaire traditionnel de l'expression. La situation-problème n'est pas une donnée intangible qui subsiste sous sa forme première tout au long du travail des élèves...*

*L'énoncé d'une situation-problème mérite beaucoup d'attention car il n'est pas toujours aisé de confectionner un "bon" énoncé. Qu'est-ce qu'un bon énoncé? Il est possible d'en donner immédiatement quelques critères :*

1. *être compris par tous les élèves,*
2. *être un énoncé ouvert à la recherche des élèves,*
3. *susciter chez les élèves un sentiment de défi intellectuel,*
4. *ne pas comporter de sous-entendus,*
5. *ne pas porter implicitement la solution de l'enseignant,*
6. *ne pas nécessiter pour être compris de connaître déjà la solution.*

*, La meilleure manière d'affiner et de préciser ces critères est de tester des énoncés auprès des élèves...*

*La motivation des élèves ne doit pas être cherchée à travers des énoncés contournés, pseudo-concrets ou pseudo-utiles, mais grâce à des énoncés -le plus souvent mathématiques- qui suscitent chez eux le sentiment de défi à relever...*

*La mise en oeuvre d'un enseignement par situations-problèmes implique une modification des pratiques professionnelles traditionnelles d'enseignement et la définition de stratégies pédagogiques nouvelles.*

C'est dans le suivi scientifique de 6ème que R.Douady donnent ses conditions sur les problèmes utilisés dans l'apprentissage.

*La résolution de problèmes joue un rôle fondamental dans l'apprentissage. Mais suivant les moments de l'apprentissage, les problèmes remplissent des fonctions différentes, essentiellement:*

** Favoriser la construction de nouvelles connaissances (à travers les diverses phases d'action, formulation, validation, institutionnalisation).*

** Fournir des occasions d'emploi diverses d'anciennes connaissances et ainsi cerner leur domaine d'efficacité et de validité.*

*Etant données les hypothèses sur la construction des concepts, nous choisissons, pour répondre à la première fonction, des problèmes remplissant certaines conditions :*

** L'énoncé est facile à comprendre et l'élève est capable d'envisager ce que peut être une réponse au problème ; ceci est indépendant de sa capacité à en proposer une (cette condition est valable pour tous les problèmes).*

** La réponse n'est pas évidente mais compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure de réponse partielle.*

** Pour répondre complètement au problème, l'élève devra construire la connaissance dont le maître vise l'apprentissage.*

** Le problème est riche ; le réseau de concepts impliqués est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité.*

** Le problème est suffisamment ouvert pour que l'élève puisse envisager des questions non formulées dans le texte et utiliser des procédures diverses. Cependant les possibilités qui lui sont offertes ne sont pas trop grandes de façon à ce qu'il puisse effectivement faire des choix. Ces conditions éliminent par exemple un découpage du problème en de trop petites questions pour lesquelles il n'y a qu'une procédure possible.*

** Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres, chacun ayant son langage, cadres entre lesquels on sait établir des correspondances.*

*Une situation d'apprentissage est caractérisée par un problème et une certaine organisation du travail adaptés aux objectifs visés. Les conceptions des élèves sont le résultat d'un échange avec les problèmes qu'ils ont à résoudre et avec les interlocuteurs en communication avec lui (autres élèves, maître, sans compter l'apport extérieur à la classe...). Au cours de ces échanges, les connaissances antérieures sont mobilisées pour être modifiées, complétées ou rejetées.*

## I.3- Différents objectifs d'une activité :

Les sciences cognitives ont depuis longtemps montré que les connaissances se forgent lentement avec des remises en cause du savoir antérieur. Devant chaque situation, l'élève se forge sa propre conception, élabore une représentation. A travers les images mentales qu'il se crée, sa réponse chemine plus ou moins lentement en passant par diverses erreurs, chacune étant une expression de ses représentations.

L'apprentissage va se jouer, alors, sur la durée, et les acquisitions vont se mettre en place au travers de divers champs de découverte et d'application. C'est dans ce cadre que les activités vont avoir à jouer leur rôle. Certaines activités peuvent être proposées à tous les stades de l'apprentissage. Certaines vont être transversales, transversales sur plusieurs concepts ou transversales dans le temps, au cours des années, sur un même concept, la proportionnalité en étant un exemple.

Les activités sont aussi riches et diversifiées que possible. Elles touchent les capacités de maîtrise, de transfert et de créativité de l'élève. Celui-ci doit apprendre à mobiliser ses savoirs et ses savoir-faire, réinvestir son savoir dans des situations nouvelles, décontextualiser son savoir pour le transférer face à un problème nouveau, faire et non plus que savoir faire, agir en restant critique.

Les activités vont permettre à l'élève de donner du sens au savoir mathématique et de développer ses capacités de construction et d'appropriation de ce savoir.

L'élève est alors acteur de son savoir, c'est à dire qu'au travers de l'action, il construit ses connaissances. Il n'est pas seulement actif comme on peut l'observer au travers de la résolution d'exercices.

Suivant leur place dans la construction du savoir, les activités vont répondre à un objectif ou plusieurs objectifs précisés ci-dessous.

Les activités peuvent correspondre à l'**apprentissage d'une connaissance**. C'est alors une activité de type découverte. Dans ce cadre entrent toutes les activités qui débouchent sur la découverte d'une notion, d'un théorème, d'une propriété, plus généralement d'un concept. Certaines des activités qui figurent dans les manuels souhaiteraient entrer dans cette catégorie. En fait, il y a confusion entre exercices de préparation et mise en oeuvre d'une recherche à organiser par l'élève. C'est dans ce genre de tâche proposée à l'élève qu'il existe le plus d'ambiguïté entre une activité réellement mathématique et un activisme détourné.

Les activités peuvent correspondre au **réinvestissement de nouvelles connaissances**. On trouve alors toutes les activités qui permettent de stabiliser le nouveau savoir, d'appliquer, d'approfondir. Là encore, il existe une différence entre les exercices d'application contextualisés et une recherche permettant de mettre en oeuvre une nouvelle connaissance pour la relier à d'autres. C'est la phase d'accommodation selon les théories piagétiennes.

Certaines activités sont construites pour **prendre en compte des difficultés**. Elles permettent alors de modifier les conceptions de l'élève.

D'autres activités débouchent sur un **apprentissage d'ordre méthodologique**. On peut distinguer :

- un apprentissage lié à certains algorithmes (apprendre à résoudre des équations, ...). Savoir s'organiser, savoir élaborer des fiches méthodes procède également de ce type d'activité.
- un apprentissage lié à la recherche. Pour savoir résoudre tel problème, il faut penser à tel théorème ou telle classe de problèmes. Toute activité qui relève de la démonstration entre dans cette catégorie, ainsi que toutes celles qui développent l'esprit critique.

L'activité ne peut pas donner lieu à une évaluation sommative au travers des productions élèves. L'enseignant se retrouve en observateur du travail de ses élèves, prenant en compte les procédures, leurs remises en cause, les erreurs, ... Au cours de ses interventions et de sa gestion de la phase de synthèse, il crée les conditions d'une évaluation formative.

## I.4- Caractères d'une activité :

Les instructions des programmes actuels soulignent "la cohérence et la progression de l'enseignement afin de faciliter la bonne structuration des savoirs et des méthodes". Un principe directeur du programme de mathématique est le suivant : "donner aux élèves des occasions de prendre conscience de ce qu'est une véritable activité mathématique, a travers la résolution de problèmes et la modélisation de quelques situations".

L'activité doit être construite pour que l'élève puisse se poser par lui-même des questions et y répondre, de la même façon que les notions mathématiques se sont d'abord construites comme des outils pour répondre à des problèmes avant de devenir des objets de savoir.

Devant la banalisation de la notion et du terme d'activité en mathématique, y compris dans les manuels, un questionnement s'impose. Quelles sont les caractéristiques d'une activité? A l'intérieur de nos classes, quand peut-on dire que nos élèves travaillent par activité?

### I.4.1- L'élève peut s'engager dans la résolution et trouver au moins partiellement des résultats.

Si l'activité prend la forme d'un véritable problème pour l'élève, pour autant celui-ci ne doit pas rester démuni face à l'énoncé. Cet énoncé doit être facilement compréhensible par tous. La situation proposée doit permettre de débuter des recherches, d'utiliser des connaissances antérieures, de conduire à des premiers résultats.

### I.4.2- L'énoncé permet à l'élève de choisir lui même sa stratégie et des outils de résolution.

L'élève n'est donc pas enfermé dans une seule stratégie déterminée à l'avance par une suite de questions qui le guide pas à pas. Il est le pilote de son action, c'est lui qui choisit sa stratégie dans l'exploration de la situation.

Différentes opérations mentales vont entrer en jeu. L'élève doit se construire une représentation du problème posé. C'est à dire qu'il doit, en prenant en compte les données, faire un parallèle avec des situations de référence, anticiper sur les stratégies possibles, voir quelles démarches, quels outils utiliser. Puis l'élève va décider d'une stratégie, la mettre en oeuvre et enfin contrôler sa démarche. C'est dans cette construction, dévolue à l'élève, que les concepts prennent sens.

### I.4.3- L'élève a besoin de convaincre et a les moyens de justifier ses propositions.

Une stratégie, étant déterminée, la résolution de l'activité devient une source de réflexions. Pour construire son savoir mathématique, l'élève a besoin, dans l'activité, d'un temps de recherches diverses, d'un temps de résistances. Si cette phase peut paraître, vue de l'extérieur, longue, vide, inutile, ce n'est pas pour autant une perte de temps.

La recherche permet de parvenir à des conclusions au moins partielles. Pour que ces conclusions deviennent des certitudes, il est nécessaire de passer par des temps de confrontation. Cette confrontation se situe à plusieurs niveaux. C'est d'abord une phase où il faut se convaincre, et pour cela confronter ce qui a été trouvé avec les savoirs déjà acquis. Pour cela, même si le temps en est réduit, une recherche individuelle est obligatoire.

Puis il existe une phase où les idées trouvées sont échangées que ce soit en petits groupes ou avec le groupe classe. Cet échange doit permettre d'avancer, de relancer la recherche, de vérifier si ce que l'on a trouvé est convenable ou pas, en s'appuyant sur les discussions à l'intérieur des groupes ou de la classe. L'enseignant est alors amené à gérer des débats, que ce soit des débats de groupes ou des débats de classe.

I.4.4- La connaissance mathématique à acquérir ou à approfondir, la méthode visée est un des outils les plus performants pour répondre aux questions qui se posent.

La situation créée doit permettre aux élèves de mettre en oeuvre des connaissances. Celles-ci sont à tester, à remettre en cause, à faire évoluer. Dans le processus, l'élève peut utiliser davantage de concepts, de méthodes que ceux qui sont visés par l'enseignant. L'essentiel est que l'activité permette de mettre en évidence le caractère de performance du concept ou de la méthode visée. De tous les cheminements empruntés par les élèves, celui-ci doit être le moins coûteux.

La réponse nouvelle ou l'approfondissement doit être considéré par l'élève comme un jeu ou un enjeu sur lesquels il a une réelle motivation à s'investir.

I.4.5- L'outil visé ne demande pas à être défini de manière explicite pour être accessible ou réinvesti.

C'est une démarche inverse du cours traditionnel où les notions sont d'abord définies avant d'être utilisées. Leurs décontextualisations empêchent souvent une prise de sens pour l'élève.

L'élève n'a donc pas à appliquer des formules toutes faites, délivrées par le maître, ou à répéter ce qu'il a appris.

En résumé, un problème devient une véritable activité mathématique si :

- L'élève peut s'engager dans la résolution et trouver au moins partiellement des résultats.
- L'énoncé permet à l'élève de choisir lui-même sa stratégie et des outils de résolutions.
- L'élève a besoin de convaincre et les moyens de justifier ses propositions.
- La connaissance mathématique à acquérir ou à approfondir, la méthode visée est un des outils les plus performants pour répondre aux questions qui se posent.
- L'outil visé ne demande pas à être défini de manière explicite pour être accessible ou réinvesti.

L'activité mathématique est un lieu où se mêlent divers concepts, où se posent des questions, avec des idées qui interfèrent, s'affrontent, se répondent. Cet ensemble participe à l'organisation du savoir de l'élève, savoir qui a pris sens au travers de sa mise en activité réelle. Travailler par activité n'est pas un choix neutre, il s'appuie sur une certaine conception de l'apprentissage.

## I.5- Pourquoi travailler par activité ?

Les commentaires associés au projet de programme pour la classe de 6ème du 30 mars 1995 proposent :

*"Il est en effet possible de se livrer à partir d'un stock limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre".*

On trouve aussi un peu plus loin :

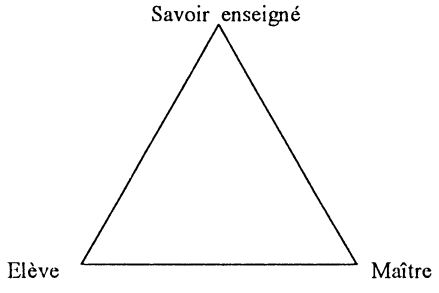
*"Dès lors les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des outils c'est à dire des techniques ou des notions déjà acquises afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles".*

L'idée de travail par activité est donc maintenant reconnue comme moyen d'apprentissage privilégié. Mais cela l'était aussi dans les programmes précédents peut-être de manière moins appuyée.

Qu'est-ce qui justifie un tel choix ?

Il existe plusieurs conceptions de l'apprentissage prenant en compte diverses influences de l'environnement, de l'activité de l'individu et de leurs interactions. Les frontières entre ces conceptions ne sont, bien entendu, pas étanches.

Il est maintenant banal de dire que l'apprentissage met en jeu trois pôles : le savoir enseigné, l'élève et le maître. L'ensemble constitue le triangle didactique autour duquel s'articulent les connaissances actuelles en épistémologie, psychologie, psychologie cognitive, etc...




Suivant la conception choisie, on privilégie l'un des trois axes.

Dans la première conception dite "de la tête vide", on pense que tout le savoir est apporté par le maître : *"Quand j'introduis une notion nouvelle, je préfère que mes élèves ne sachent rien, sinon ils mélangent tout".*

L'élève ne sait rien L'élève sait

Dans cette situation : le professeur explique, réexplique ;
l'élève apprend et reproduit.

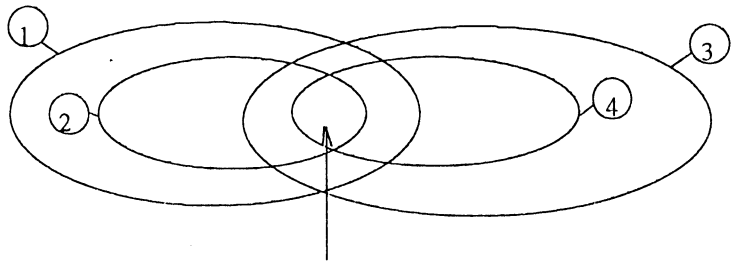
Une telle conception est confortable, pratique et rapide dans une certaine transmission du savoir. Beaucoup de professeurs bousculés par les programmes et le temps sont souvent amenés à travailler partiellement comme cela.

Mais cela ne fonctionne pas de façon aussi idéale pour plusieurs raisons dont trois principales.

1) La communication entre deux individus, ici le professeur et l'élève, n'est jamais parfaite.

Il y a : 1- ce qui est dit,
2- ce qui est conscient dans ce qui est dit,
3- ce qui est entendu,
4- ce qui est entendu consciemment.

Finalement la zone de communication commune est restreinte, il n'y a pas superposition des quatre zones.




Donc, il ne suffit pas de dire pour être entendu.

2) Quelle que soit la notion, l'élève a sinon des connaissances précises au moins des représentations a priori de ce qu'on veut lui enseigner : la tête n'est jamais "vide".

Cela entraîne la mise en place de règles souvent implicites. Cela peut prendre la forme de théorème-élève que les études de didactique ont pointé.

Par exemple : *"Tout problème a une solution."*, c'est ce type de théorème que veut débusquer un problème comme l'âge du capitaine.

3) Dans une telle présentation, les connaissances acquises le sont de part la volonté de l'institution, mais quel sens ont-elles ? L'élève est en droit de se poser la question : *"A quoi ça sert ?"*.

Une deuxième conception va faire intervenir des facteurs d'apprentissage extérieurs à l'individu, avec une modification de son comportement, soit par influence de la forme de la situation, soit par influences sociales (stimuli réponses).

Cela donne lieu à une forme d'apprentissage dite "des petites marches". Pour faire passer un élève d'un niveau à un autre, il suffit de créer un certain nombre d'étapes intermédiaires. Ces étapes doivent proposer des difficultés que l'élève peut surmonter sinon il suffit de les redécomposer.

Pour cette forme d'apprentissage, on utilise souvent des fiches, ou des fichiers informatiques type EXAO. La plupart des problèmes proposés dans les livres, dans les examens, sont des applications de cette conception de l'apprentissage.

Plusieurs difficultés sont liées à ce type d'apprentissage.

D'abord, le savoir est-il aussi facilement décomposable sans perdre son sens ?

Les élèves sont-ils à même de relier ces tâches parcellaires, pour ensuite résoudre des tâches complexes qui seront celles auxquelles ils se trouveront confrontés en pratique ?

Actuellement nous pratiquons souvent de cette façon, surtout lorsque les élèves sont en grande difficulté - nous avons l'impression que le fait de diviser en petites questions à réponses moins complexes les engage dans une possibilité de réussite - mais sont-ils à même de réussir lorsqu'ils se retrouvent face à la complexité ? N'est-ce pas construire des illusions à la fois pour le professeur et pour l'élève ?

La conception la plus récente est la conception constructiviste. Elle fait suite à la prise en compte des travaux de Piaget et évolue sous l'influence du développement de la psychologie cognitive.

Selon Piaget, l'enfant construit son propre savoir par interaction sur des situations en répondant aux stimulations. Il y a d'abord assimilation d'un savoir qui vient s'ajouter à ceux déjà connus. Puis, dans un deuxième temps, la coexistence provoquant un conflit cognitif, il y a réorganisation. C'est la phase d'accommodation. Cette phase est souvent plus délicate à réussir.

De plus, l'influence de l'environnement social est important dans l'accompagnement des situations.

D'une part entre pairs peuvent exister des conflits socio-cognitifs qui provoqueront une réorganisation locale du savoir. D'autre part des adultes peuvent aider un enfant dans sa progression

en proposant une médiation lui permettant de passer d'un niveau cognitif à un autre (cf. Vygotsky). On comprend donc qu'ici c'est en agissant que l'on apprend. L'élève passe donc d'un savoir initial (avec des conceptions spontanées et des connaissances) à des concepts nouveaux par des situations d'apprentissage. Il réalise un saut informationnel.

Trois questions se posent alors.

1 )Comment connaître les conceptions spontanées ( ou représentation) de nos élèves ?

2) Quelles situations mettre en place ?

3) Quelles sont les limites d'une telle conception?

1) Comment connaître les représentations ?

Ce sont les erreurs des élèves et leurs analyses qui permettent de faire émerger le sens qu'ils donnent à des concepts, ou à des notions.

Exemple : voir représentations des élèves dans cette brochure.

Ces conceptions premières sont issues de diverses connaissances :

- acquises dans les années précédentes (règles qui fonctionnent bien à un moment donné mais qui ne peuvent être généralisées),
- acquises dans le monde qui les entoure,
- acquises dans le contexte social.

2) Quels types de situations mettre en place ?

- Situation de construction de concept.

Il y a différentes étapes que nous retrouverons dans les activités.

* étape de recherche-action,
* étape de formulation,
* étape de validation.

Il appartient ensuite au professeur de donner au concept travaillé son statut d'objet de savoir.

- Situation de réinvestissement.

Ces situations permettent de mettre en jeu plusieurs connaissances et de les structurer les unes par rapport aux autres.

3 )Les limites.

De nombreux obstacles ont été étudiés, ils sont présents dans tous les types d'apprentissage mais le constructivisme s'y est particulièrement intéressé.

Les obstacles d'origine psychogénétique liés au développement de l'enfant qui ne se fait pas au même rythme d'un enfant à l'autre.

Exemples : * la non-conservation des longueurs,

* les problèmes de mimousahou.

Les obstacles d'origine didactique.

* liés à la forme d'introduction de la notion qui induit des conceptions erronées.

Exemple : les décimaux qui étaient vus à partir de mesure type 4m 34cm et n'étaient pas lus pour le nombre 4,34 m.

* liés à la coutume de la classe :

Exemple : on donne une seule réponse et pas deux.

Les obstacles d'origine épistémologique.

Ces obstacles souvent incontournables sont liés à la construction même du savoir.

Les obstacles d'origines diverses.

* sociales,

* sens des mots différents d'une discipline à l'autre,

* techniques.

Lorsque l'on travaille sur la mise en place de situations, il faut tenir compte de ces obstacles.

**Conclusion :**

Il est évident que le travail par activité s'inscrit dans cette théorie de l'apprentissage qui souhaite prendre l'enfant dans sa globalité pour qu'il puisse acquérir un savoir qui est sens pour lui.

Il faut remarquer qu'un tel type de travail est très gourmand en temps, ce qui n'est guère pris en compte dans les programmes.

C'est pourquoi, on mettra en place par activité, des situations qui prendront le statut de référence et qui seront réparties tout au long de l'année, mais en nombre forcément limité.

# II- Exemple de construction d'une activité :

Le plan ci-dessous propose un schéma directeur sous forme d'un questionnement pour construire une activité. La description et la mise en place supposent un déroulement spécifique à chacune des activités qui différent de ce schéma. Nous allons donner les différents points sur lesquels il faut réfléchir, les différents problèmes qui se posent.

Simultanément nous construisons une activité en exemple (*Les parties qui la concernent sont écrites en italique*). Elle n'est pas l'une de celles décrites dans la suite de la brochure et sa passation dans une classe n'est pas précisée.

## II.1- Avant de rechercher un support :

a) Quels objectifs sont visés ?

Plusieurs types d'objectifs sont visés dans l'enseignement. Les activités permettent d'introduire:

- un nouveau concept,
- un nouveau champ de problèmes,
- une nouvelle méthode,
- un lieu de réinvestissement de concept ou de méthode.

Souvent on réduit le champ d'action des activités au premier objectif.

*Réinvestir la propriété de Thalès et de la droite des milieux.*

b) Rôle de la notion.

Il s'agit d'analyser comment la notion s'inscrit dans un apprentissage spécifique.

*D'un point de vue méthodologique, montrer l'intérêt de l'utilisation de la démonstration par rapport à des stratégies " essai-erreur ".*

c) Comment la notion est elle apparue ?

L'épistémologie de la notion n'est pas indispensable à la construction de l'activité que ce soit du point de vue de l'histoire des mathématiques, ou du point de vue des diverses formes qu'elle a prises dans l'enseignement au fil des programmes.

Cependant ces apports peuvent éclairer d'une part l'analyse a priori, d'autre part la manière de concevoir l'activité.

*Légende ou vérité, Thalès (vers 640 - 546 av. JC) aurait montré comment trouver la hauteur d'une pyramide, grâce à l'ombre portée de celle-ci et à l'ombre d'un bâton vertical. Dans cette situation, géométrique et numérique cohabitent. Tant que les mesures restent sur des objets physiques, l'évidence, le modèle intuitif fonctionne. C'est le passage aux objets idéaux mathématisés et au discours argumenté (logos) qui engendre réflexions et problématiques sur les notions de mesures et de grandeurs, sur une définition de rapports de grandeurs.*

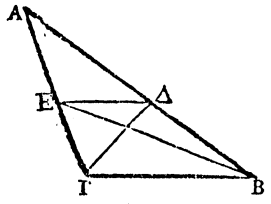
*Dès le début de la géométrie "argumentée", il y a référence à la théorie des proportions, travaux à la base du livre V des Eléments d'Euclide. Dans ce livre, Euclide ne définit pas la notion de grandeur mais présente diverses représentations possibles et définit la notion de raison (rapport) entre deux grandeurs homogènes. Le livre VI est une application à la géométrie plane du livre précédent.*

*La proposition 2 du livre VI est une première démonstration de la propriété de Thalès dans un triangle et de sa réciproque.*

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔE parallèle à un des côtés BΓ du triangle ABΓ ; je dis que BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA.

Joignons BE, ΓΔ.




*Le principe de la démonstration repose sur des comparaisons d'aires, mais dans son déroulement subsiste une confusion entre le nombre et la grandeur, et la difficulté d'irrationalité possible des mesures est gommée. Que veut dire, en effet, "mesurer" c'est à dire "comparer, compter combien de fois on peut reporter l'unité" ? Et que veut dire : "Une grandeur est un certain nombre de fois une autre", avec toute l'ambiguïté de la notion de nombre qui, dans les Eléments d'Euclide, disparaît ? Euclide définit alors l'égalité entre deux rapports sans définir l'objet rapport. Comment va-t-on pouvoir comparer, mesurer, c'est à dire chercher une partie commune? C'est la théorie des figures semblables qui va être alors le point central de la géométrie, avec le théorème de Thalès qui est un critère pour dire s'il y a proportionnalité des grandeurs.*

*D'autres conceptions du théorème de Thalès vont évoluer au cours des siècles et en particulier, la conception d'Arnauld au 17 ème, utilisant des bandes parallèles coupées par des sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles.*

*Le flou entre grandeur, nombre, mesure, qui a subsisté longtemps au cours des siècles donne une indication sur les difficultés auxquelles vont se heurter les élèves. Ce sont les nombres réels qui ont permis de résoudre le problème de la mesure. Enseigner une théorie de la mesure reste une difficulté, la théorie est inaccessible pour beaucoup d'élèves, les difficultés de l'histoire se renouvelant alors. Sans doute est-ce, ce qui a fait de la propriété de Thalès, la terreur des élèves.*

*Que ce soit dans l'histoire ou pour des raisons didactiques, diverses conceptions de la propriété de Thalès cohabitent ou entrent en conflit. Chaque présentation possède un domaine où elle est le plus performant.*

d) Les pré-requis.

Ce sont les outils mathématiques et méthodologiques nécessaires pour que les élèves puissent s'engager dans la recherche.

*Suivant les stratégies utilisées, les propriétés sont:*

- *les propriétés du triangle rectangle isocèle,*
- *la symétrie axiale,*
- *les propriétés des quadrilatères,*
- *la propriété de Thalès, la propriété des milieux puisqu'elles sont l'objet de réinvestissement dans la situation.*

## II.2- Construction-description de l'activité :

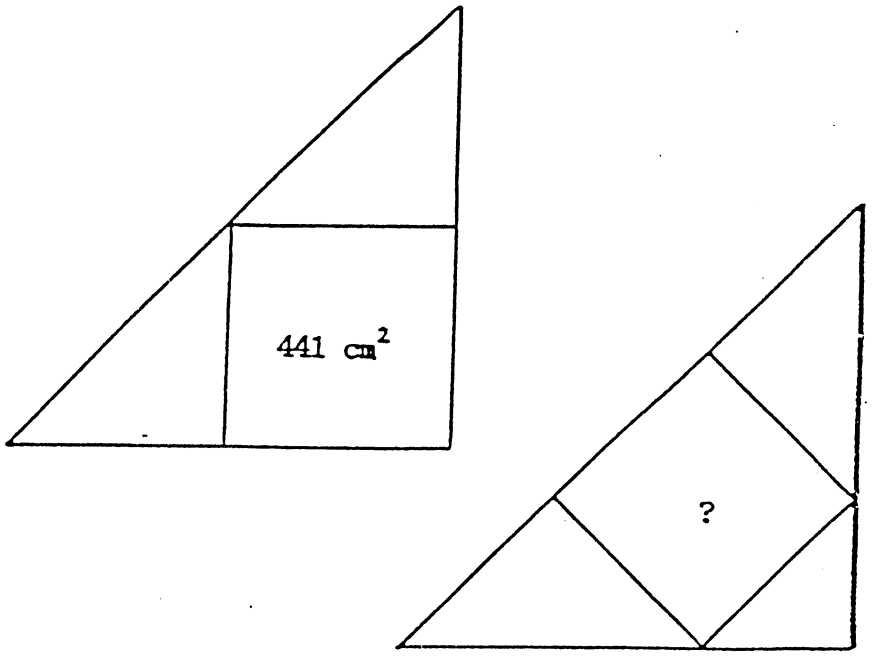
a) Choix du support.

* Le support peut être choisi dans différents documents :
  - manuels scolaires mathématiques ou d'autres disciplines,
  - fascicules IREM,
  - publications MAFPEN,
  - publications CRDP,
  - textes historiques,
  - situations de la vie courante ( extraits de journaux, supports audiovisuels, publicités etc...).

* Les documents choisis donnent l'idée du support de l'activité. Toute l'analyse de l'activité et les types de tâche qui seront alors choisis sont à élaborer.

*L'idée de base est issue d'un fascicule sur un concours mathématique de l'IREM de Reims.*

*** * * L'AIRE DES INSCRITS.**




Dans un triangle rectangle isocèle, on a inscrit deux carrés. Sachant que le premier carré a une aire de 441 cm², quelle est l'aire du second carré ?

*Telle qu'elle est proposée, cette activité n'implique pas l'explication de l'analyse de la figure par l'élève. C'est pourquoi nous proposons de travailler dans un cadre purement géométrique. Le problème posé par Reims permettant un changement de cadre, devient alors un prolongement de notre situation.*

* La Situation :

*A partir de deux dessins ci-dessus, dans un premier temps nous avons pensé supprimer la donnée numérique. Il s'agit alors d'expliquer comment ont été construits les deux carrés.*

*Cependant la donnée des deux dessins induit l'utilisation comme outil de preuve de la propriété des milieux dans un cas et de Thalès dans l'autre. Il n'y a donc pas alors réellement de problème quant à la construction de carrés inscrits. Cela restreint l'intérêt de la situation.*

*Donc, dans un deuxième temps, nous avons pensé donner le problème sans proposer de dessins, en demandant sous forme langagière la construction d'un carré inscrit dans un triangle rectangle isocèle.*

b) Les variables didactiques :

Qu'est ce qu'une variable didactique ?

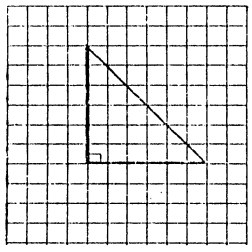
La situation comporte un certain nombre d'éléments variables qui peuvent concerner les supports proposés, le mode de travail aussi bien que des valeurs numériques des données, leur ordre, la taille et la position des figures, ...

Une analyse de la situation permet de les identifier et de voir leur influence sur les procédures. Des variations minimes de ces éléments peuvent modifier profondément la situation. Cela permet d'adapter et de réguler les apprentissages. L'enseignant peut alors différencier la situation aussi bien du point de vue de la difficulté des tâches que de la variété des procédures pouvant émerger.

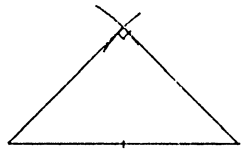
*Dans le cas proposé les variables didactiques sont liées aux supports matériels :*

*1- le type de papier utilisé a de fortes chances d'influencer la position que les enfants vont choisir pour le triangle.*

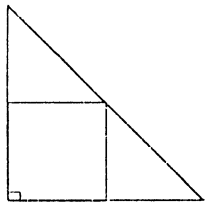
*Papier quadrillé*

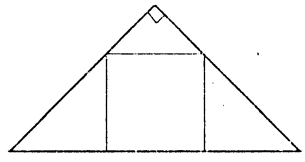


*Papier blanc*



*2- cette position elle même induit l'une ou l'autre des solutions*





*Par contre la taille du triangle n'est pas une variable didactique. Elle n'influence pas la recherche.*

c) Libellé soigné de la consigne.

Pourquoi la rédaction de la consigne a-t-elle autant d'importance ?

La consigne est centrale dans la mise en oeuvre de l'activité.

Chaque terme doit en être pesé car il peut favoriser ou non l'émergence d'une stratégie particulière.

La consigne doit être simple et compréhensible par tous sans pour autant donner une vision réductrice de la tâche.

Au cours de la mise en place d'une activité, on peut se rendre compte que la consigne n'était pas convenable et la modifier. Mais changer une consigne peut avoir des conséquences catastrophiques sur les productions élèves en particulier lorsque l'on détourne l'activité vers un travail plus "guidé".

La présence d'une question sous forme d'enjeu est indispensable à la motivation des élèves.

*La consigne choisie est sous forme langagière :*

*" Inscrire un carré dans un triangle rectangle isocèle."*

*Le mot "inscrire" peut être difficile à comprendre par certains élèves.*

*Un travail avec la classe avant de démarrer l'activité permet de préciser le vocabulaire et le sens de la phrase.*

*L'ordre des mots "isocèle "et "rectangle" peut introduire une modification de stratégie (cf. analyse a priori).*

## II.3- Analyse a priori de l'activité :

a) Les stratégies possibles.

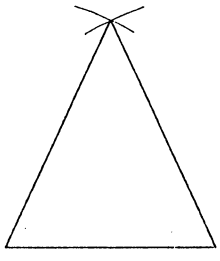
L'analyse a priori est un point important de la construction d'une activité qui va souvent s'enrichir a posteriori des productions des élèves.

Il faut rechercher un maximum de solutions sans éliminer celles obtenues par des techniques type "essai-erreur" ou celles erronées issues de théorème-élève par exemple.

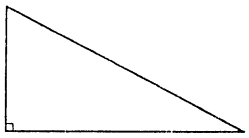
C'est souvent cette recherche qui fait évoluer la consigne. Elle permet aussi la mise en place d'aides et une réflexion sur le type d'interventions que l'on se permettra.

*1) On peut penser que la coutume de la classe peut influencer la position du triangle sur la feuille, quel que soit le support.*

*En effet la construction du triangle isocèle est souvent présentée sous la forme:*



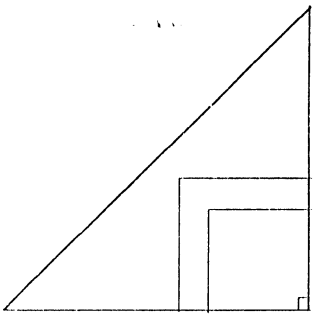
*et celle du triangle rectangle sous la forme :*



*Donc dans la lecture de la consigne l'enfant peut privilégier plutôt le mot rectangle ou plutôt le mot isocèle suivant des critères affectifs, d'habileté, de présence d'instruments etc...*

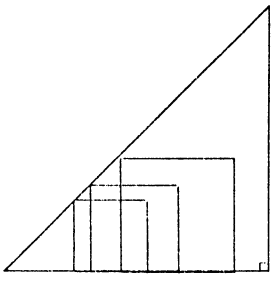
*2) Construction du carré dans la position 1.*

*stratégie 1*



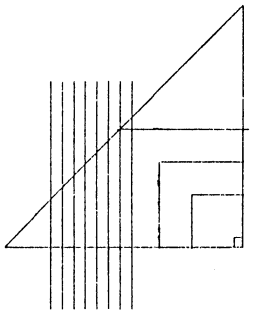
*Essai-erreur avec le carré placé "dans l'angle droit".*

*stratégie 2*



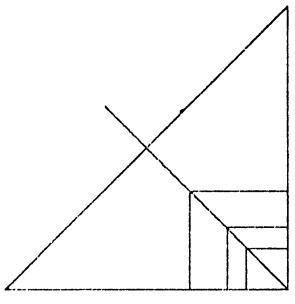
*Essai-erreur avec le carré ayant un sommet sur l'hypoténuse.*

*stratégie 3*



*Utilisation d'un réseau de parallèles et mesure de deux cotés consécutifs et ajustage.*

*stratégie 4*



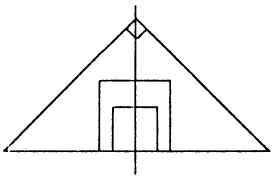
*Repérage visuel de l'alignement axe de symétrie comme lieu des sommets.*

*stratégie 5*

*Utilisation directe de la propriété des milieux : il y a simultanément construction et validation.*

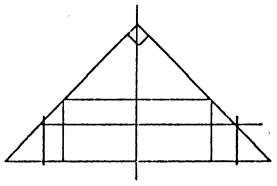
*3) Construction du carré dans la position 2.*

*stratégie 1*



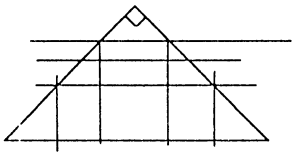
*Essai-erreur, l'axe de symétrie du carré ne sera pas décalé par rapport à celui du triangle.*

*stratégie 2*



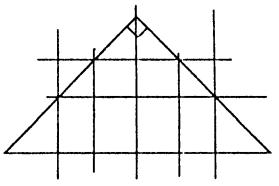
*Essai-erreur avec des rectangles dont 2 sommets sont sur les côtés de l'angle droit.*

*stratégie 3'*



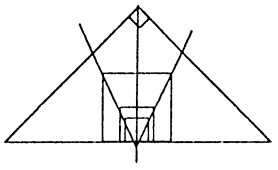
*Réseau de parallèles à la base avec mesures et ajustages.*

*stratégie 3''*



*Réseau de couples de parallèles symétriques avec mesures et ajustages.*

*stratégie 4*

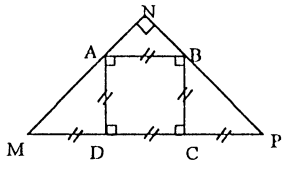


*Repérage visuel de l'alignement et tracé des lieux des sommets.*

*stratégie 5*

*Utilisation de la propriété de Thalès: là encore il y aura simultanément construction et validation.*

*Néanmoins la validation soulève une des grandes difficultés de raisonnement du premier cycle.*




*En effet pour pouvoir commencer le raisonnement, il faut supposer que ABCD soit un carré.*

*Ce type de formulation a la forme d'une amorce de raisonnement par l'absurde.*

*Ceci est très rarement utilisé dans le cadre du premier cycle. La réciproque de la propriété de Pythagore et de celle de Thalès fonctionnent sur le même modèle et on en connaît les difficultés.*

*D'autre part les conditions d'obtention du carré ayant été trouvées, il faut que l'élève accepte de démontrer qu'effectivement il a bien construit un carré. Psychologiquement, c'est un fonctionnement très difficile.*

b) La connaissance visée est elle la plus performante ?

Dans une activité, plusieurs stratégies sont utilisées pour résoudre le problème. La notion ou la méthode qui est l'objet d'enseignement visé doit se révéler la plus économique pour franchir l'obstacle.

Les autres stratégies doivent être plus coûteuses en temps ou en réflexion, sans permettre pour autant de contourner le problème (solution "court-circuit").

*Dans tous les cas la démonstration doit être faite. Par conséquent le temps de passage par l'outil essai-erreur est plus coûteux ( mais bien sûr porteur de sens ).*

c) La validation.

La solution au problème posé peut être validée à l'aide de connaissances déjà acquises.

Pourtant cela est parfois difficile lorsque qu'il s'agit de nouveaux concepts. La validation peut être le fait du maître, garant du savoir dans la classe.

*La situation est auto-validante. L'obtention du carré inscrit est visuellement correcte ou non.*

## II.4- Synthèse de l'activité :

C'est une phase nécessaire. Elle peut prendre des formes variées suivant l'organisation du travail proposé :

- travail individuel,
- mise en commun collective avec transparents,
- exposés, dossiers.

Les gestions de l'ordre de passage des productions, du temps de parole, des diverses interventions sont gérées par les professeurs. Il s'appuie sur son analyse a priori pour planifier l'ordre d'exposition des travaux d'élèves et faire émerger la notion visée, ainsi éventuellement que divers types d'erreurs ou diverses présentations.

*Les diverses stratégies de constructions sont regroupées sur des transparents. On fait expliciter par des élèves la méthode utilisée en soulignant le côté "essai-erreur". On propose en dernier les stratégies de type 5 qui ont été ou non trouvées dans la classe en montrant leur intérêt en rapidité et exactitude de la construction.*
*La démonstration elle même est écrite dans le cahier.*

## II.5- Suite possible :

Le travail par activité ne supprime pas un nécessaire réinvestissement sur des tâches permettant à la nouvelle notion de s'ancrer dans les savoirs et savoir-faire, mais il est possible de proposer un prolongement à l'activité, par modification des variables didactiques, par changement de cadre, etc... Il convient pourtant de se méfier d'une certaine lassitude de la part des élèves.

*En reprenant la situation proposée par Reims, on peut retravailler à partir des conclusions obtenues, mais en axant la recherche vers une utilisation des racines carrées. Le nombre choisi pour l'aire du carré devient la variable didactique de la nouvelle situation.*

## III.1- L'angle échappé en classe de 3ème :

### 1- Objectifs de la situation :

Découvrir la notion d'angle inscrit et la propriété associée.

Remarque : Cette activité est proposée comme un moyen de découvrir l'angle inscrit mais en aucun cas comme un travail sur l'arc capable qui est hors programme :

*La comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc fera l'objet d'activités mais aucune compétence n'est exigible sur ce point. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc,* ***mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné autre qu'un angle droit est hors programme*** [1].

### 2- Description de la situation :

2.1 Pré-requis :

* La somme des angles d'un triangle.
* La propriété des angles correspondants.
* La symétrie axiale.
* Le cercle circonscrit à un triangle.
* La proportionnalité.

2.2 Consigne :

Consigne écrite[2] :

*Construire un triangle ABC tel que* $\hat{C} = \hat{\alpha}$ .

*Y a-t-il plusieurs solutions ?*

Au cours de la séance une consigne orale est ajoutée individuellement au fur et à mesure qu'un élève a construit au moins cinq points C qui conviennent :

*Où se trouvent tous les points C possibles ?*

2.3 Mise en oeuvre :

Matériel :

Support : la feuille de papier distribuée avec la consigne écrite.
Matériel individuel : tous les instruments usuels et la calculatrice.
Du papier calque est déposé sur le bureau.

Gestion du temps :

Le travail se fait sur deux séances d'environ une heure chacune.
La première séance est sous forme de travail individuel.
La seconde repose sur le débat de classe et la capitalisation.

---

[1] Instructions officielles pour la classe de 3ème.

[2] Cf. annexe 1.

## 3- Analyse a priori :

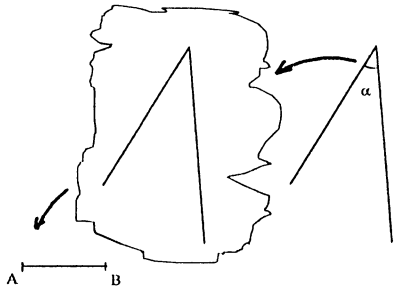
La seule variable didactique est la mesure de l'angle $\hat{\alpha}$ qui est proposé aigu aux deux tiers de la classe et obtus aux autres.

L'angle obtus constitue une difficulté supplémentaire en rendant plus confuses les constructions. Il permet cependant d'éviter certaines démarches qui s'avèrent bloquantes (voir ci-dessous).

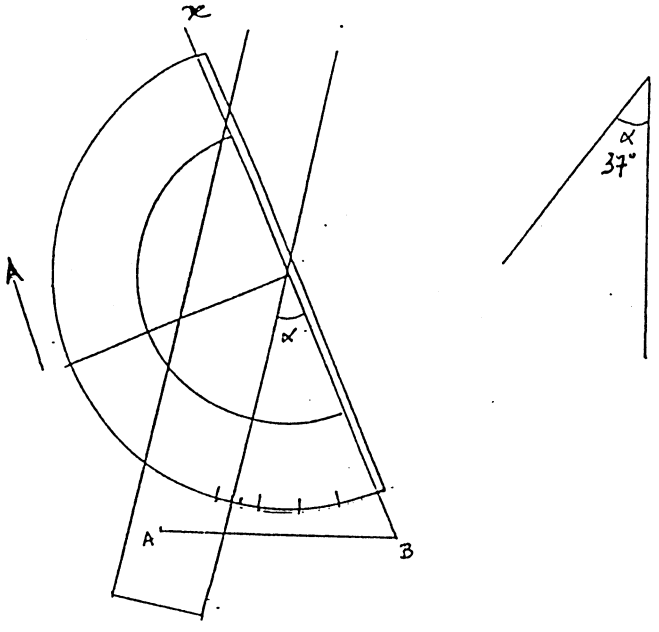
a- Les stratégies :

Huit stratégies sont possibles qui conduisent à l'obtention d'au moins un point C répondant au problème posé.

### a.1 Le report de l'angle au papier calque.

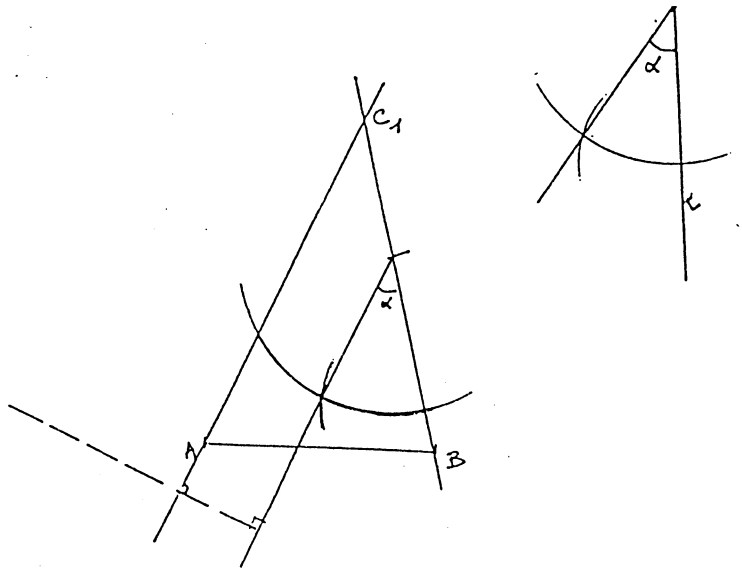



### a.2 Le glissement du rapporteur après la mesure de l'angle $\hat{\alpha}$ [Bx) est placé quelconque.



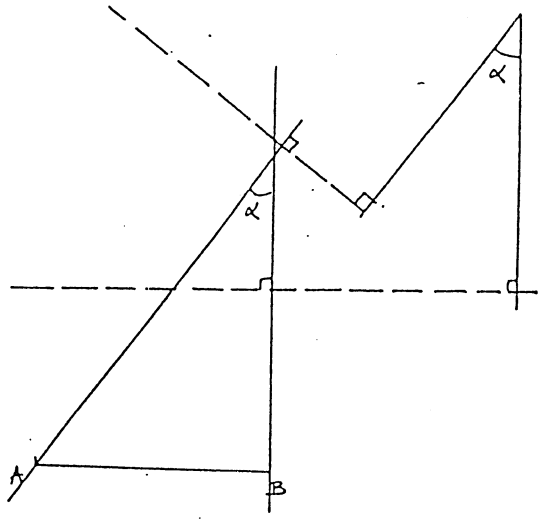
**a.3 Le report de l'angle $\hat{\alpha}$ au compas puis l'utilisation de la propriété des angles correspondants.**

La gestion du travail devient alors difficile dès le deuxième point C car les traits de construction rendent vite le dessin illisible.




**a.4 Les parallèles aux côtés de l'angle $\hat{\alpha}$.**

L'élève est bloqué après la construction du second point C et ne peut continuer que s'il accepte de changer de stratégie au cours du travail et s'il en a la capacité.




**a.5 Les triangles particuliers.**

* Cas du triangle isocèle :

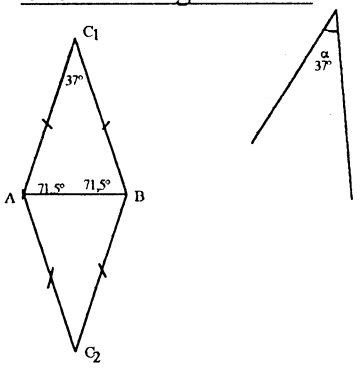
L'angle $\hat{\alpha}$ est mesuré puis l'élève calcule (180 - 37) : 2 et construit au rapporteur le triangle isocèle de base [AB].

* Cas du triangle rectangle :

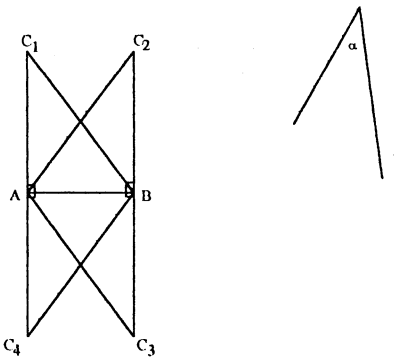
L'angle $\hat{\alpha}$ est mesuré puis l'élève calcule 180 - (90 + 37) et construit avec l'équerre puis le rapporteur un triangle rectangle en A ou B. Cette stratégie ne peut pas être développée dans le cas de l'angle obtus.

Ces deux stratégies mènent à une construction finie de points. Evoluer par rapport à ces visions initiales du problème est nécessaire pour envisager la construction de points supplémentaires.

Cas du triangle isocèle




Cas du triangle rectangle

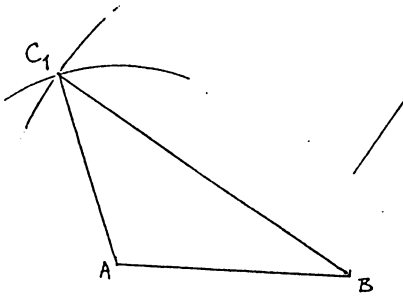


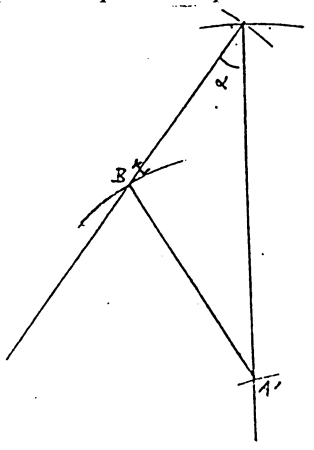

**a.6 L'utilisation de la propriété "somme des angles d'un triangle".**

L'élève a d'emblée la vision des éléments fixes et des éléments variables du triangle et calcule 180 - 37 = 143 puis 143 - ... = ... en attribuant une valeur quelconque au 2ème angle du triangle qui est construit ensuite avec le rapporteur. Cette stratégie permet d'obtenir de nombreux points C.

**a.7 Le segment [AB] est reporté à la règle ou au compas "dans l'angle $\hat{\alpha}$.**

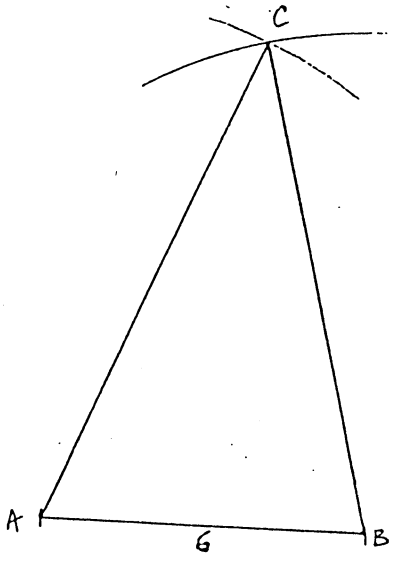
Le triangle obtenu est reporté au compas à partir de A et B. Cette stratégie permet, comme la précédente, la construction de nombreux points C. Une exception cependant pour les élèves qui confondent demi-droite et segment.

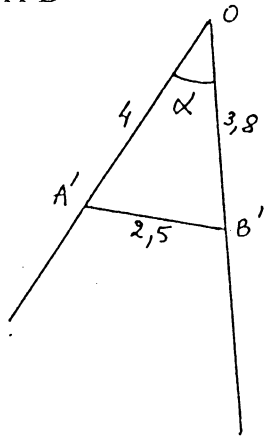



**a.8 La proportionnalité.**

Un triangle est construit sur l'angle $\hat{\alpha}$ puis on utilise le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ pour construire le triangle ABC au compas.




$\frac{6}{2,5} = 2,4$

$BC = 3,8 \times 2,4$

$AC = 4 \times 2,4$

b- La gestion du temps :

Deux temps de travail successifs sont envisagés qui conduisent à la découverte du lieu du point C :

* la recherche d'un maximum de points dans un demi-plan,
* l'utilisation de la symétrie axiale.

## 4- Analyse des productions élèves :

98% d'entre eux ont tracé au moins un triangle répondant à la question posée.

Les premières interventions se font auprès d'élèves ayant situé $\hat{\alpha}$ en A ou B. Il suffit alors de leur faire relire la consigne.

L'invariant [AB] est parfaitement identifié mais l'angle $\hat{\alpha}$ est moins clairement perçu comme autre invariant du problème.

a- Les stratégies utilisées :

Le tableau suivant fait le bilan des stratégies utilisées.

L'activité a été testée sur quatre classes de troisième.

Le codage est celui de l'analyse a priori.

| Stratégie utilisée | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % d'élèves | 0 | 5 | 0 | 16 | 22 | 20 | 30 | 5 |

**a.1** Aucun élève n'a utilisé le papier calque posé sur le bureau mais une élève écrit ceci après avoir construit un point C avec la méthode 7 ;

*(1°) elle commence un travail qui n'aboutit pas et le barre,*
*(2°) elle décrit sa construction,*
*(3°) elle décrit le tracé du symétrique.*

49 : Je dessine sur une feuille à part un angle c"
que je découpe et que je reporte sur AB → $C_4$

Elle n'a pas choisi le papier calque qui fait trop "bricolage de petites classes". Elle se censure par rapport à un outil qui n'est pas mathématique.

**a.2** Le "glissement du rapporteur" est utilisé par quelques élèves faibles n'ayant pas fait encore la différence entre "bricolage" et construction raisonnée. A la question : "*Un lecteur ne saura pas ce que tu as pensé et fait ! Comment peux-tu t'y prendre pour réaliser une construction dont les différentes étapes sur ta feuille seront compréhensibles ?*".

Ces quelques élèves ont évolué vers une explication verbalisée.

Je trace une droite partant de a
Puis par rapport à cette droite je pose mon
rapporteur et je trace un Angle de 37° passant par B

Ceux-là ont tracé plusieurs triangles dont un seul est une solution recevable.

Aucun d'entre eux n'a abouti au tracé prévu en 3 ; la translation n'est pas encore un outil disponible pour eux.

Les instruments classiques de dessin du premier cycle sont la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur. Ces deux derniers étant pour ces élèves "les instruments qui glissent". On voit qu'ils utilisent le rapporteur comme ils utilisent l'équerre. Ils n'attribuent pas à chaque instrument son fonctionnement propre mais ils font des regroupements par économie de moyens.

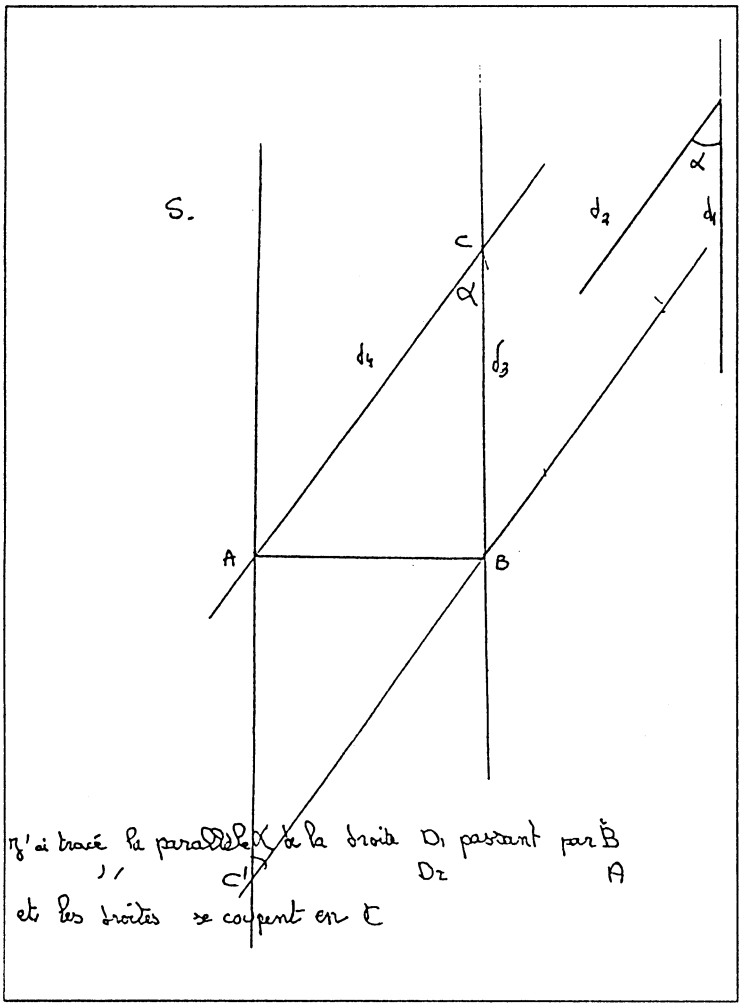
**a.3** Personne n'a utilisé cette construction (report de l'angle au compas puis propriété des angles correspondants).

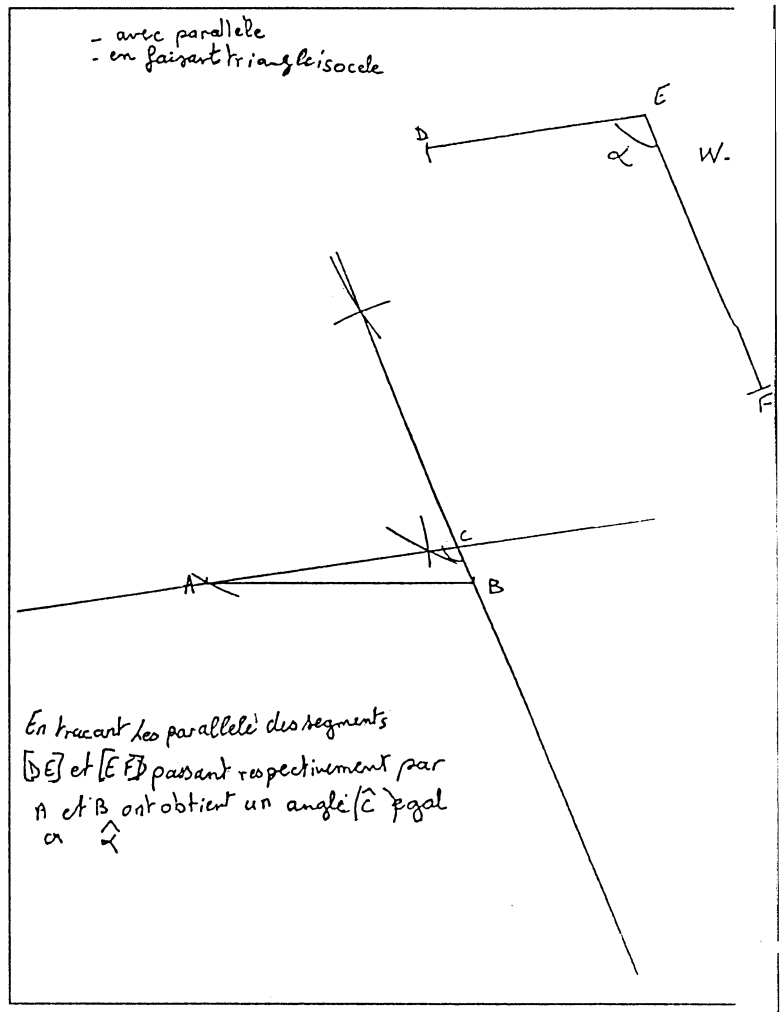
Il est nécessaire ici de mobiliser différentes connaissances datant des classes de 6ème et 5ème. Sont-elles oubliées, car éventuellement trop peu utilisées ou bien la démarche devient-elle trop compliquée ?

En effet, elle nécessite l'utilisation d'une demi-droite auxiliaire que les élèves ne s'autorisent pas à construire. La construction d'objets supplémentaires ne fait pas partie du travail habituel dans la classe.

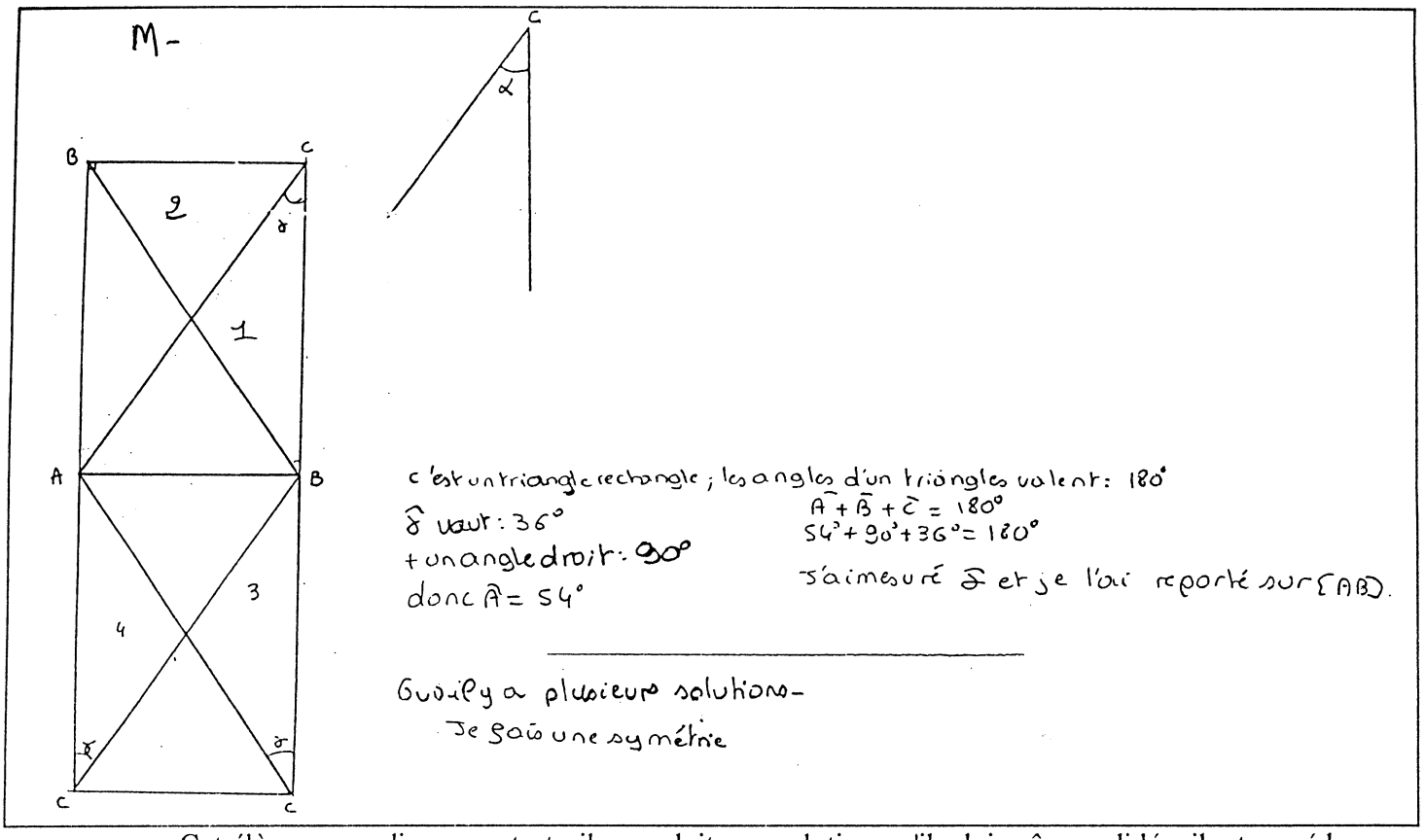
**a.4** La technique des parallèles permet la construction de deux points C uniquement. Il faut donc changer sa stratégie pour poursuivre.

Ces élèves ayant réussi partiellement la tâche n'ont pas eu un sentiment d'échec et ont poursuivi leur réflexion jusqu'à la fin de la séance sans changer de point de vue.



**a.5 et a.6** La propriété "somme des angles d'un triangle" est utilisée par 42% des élèves, mais un sur deux reste bloqué sur les cas des triangles particuliers.



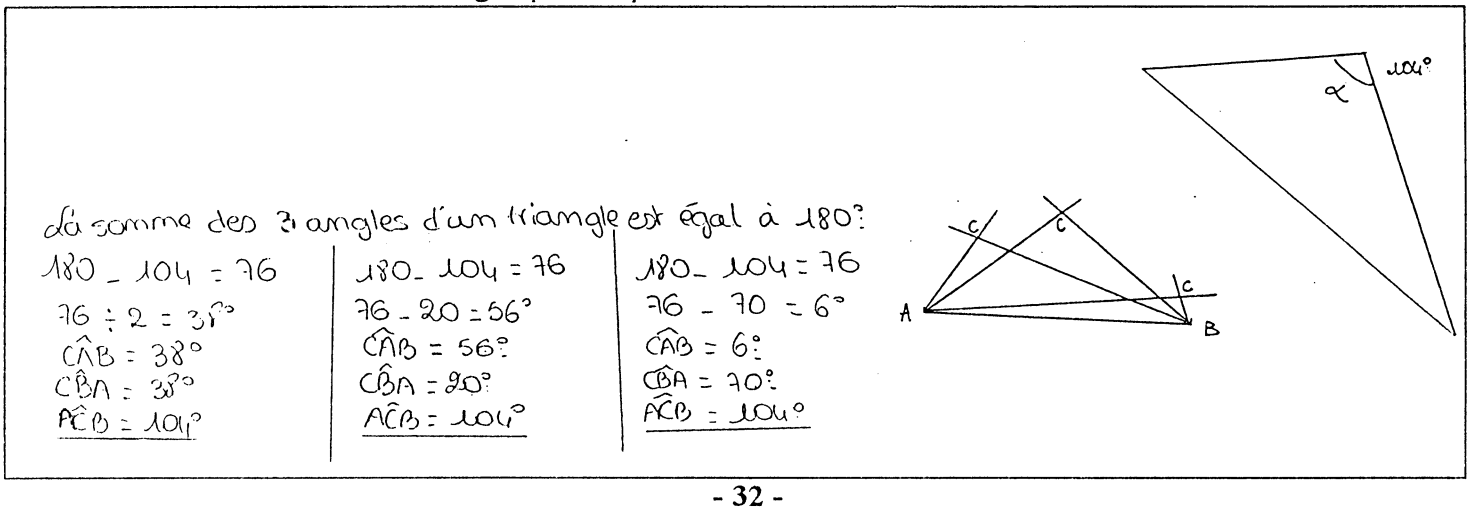

Cet élève a rempli son contrat : il a produit une solution qu'il a lui-même validée, il a trouvé la symétrie. Il a donc fait le tour de la question selon un "théorème-élève" implicite : *"tout problème admet une solution ou un nombre limité de solutions"*. Cette attitude est confortée par les exercices habituels proposés en classe.

D'autres élèves restent bloqués sur le triangle isocèle de base [AB].

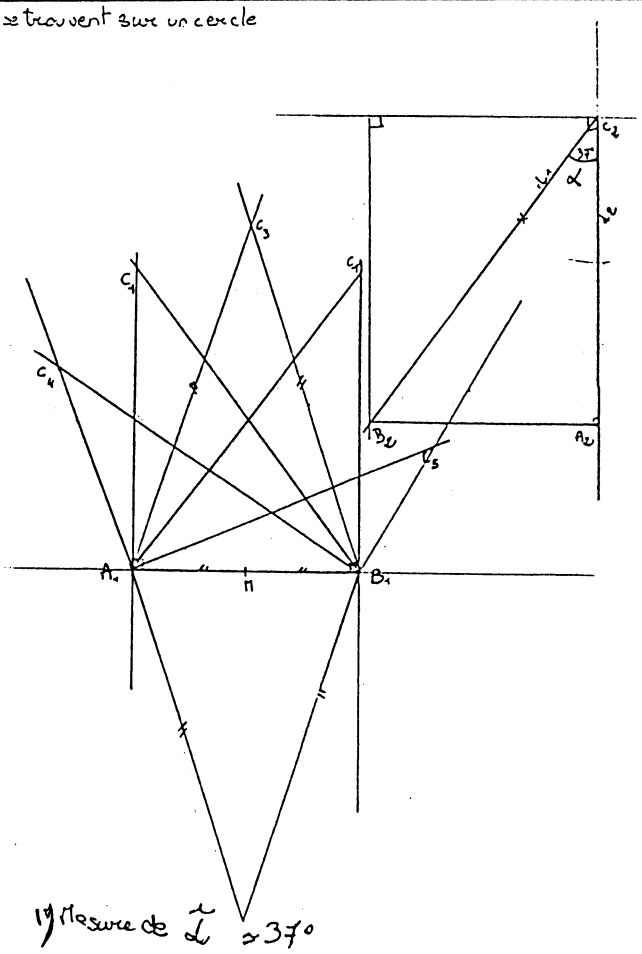
Pour les aider à dépasser cette idée d'une construction finie de points, liée à des propriétés qu'ils imposent à la figure, on pose la question : *"Quel type de triangle as-tu tracé ? Relis la consigne : ce type de triangle est-il expressément demandé ?"*.

Là encore, quelques uns ne parviennent pas à modifier leur approche du problème mais pour autant ils ne partent pas avec l'impression de n'avoir rien pu faire.

Le passage systématique par les triangles particuliers a été nécessaire à beaucoup d'autres élèves avant d'arriver au triangle quelconque.



Ils se trouvent sur un cercle



1°) Mesure de $\widehat{L} \simeq 37°$

Si le triangle est rectangle en A alors $\widehat{B} = 90° - 37° = 53°$

On construit, on vérifie $\widehat{C} \simeq 37°$ (le triangle peut aussi être rectangle en B) $C_1$

2°) ~~On estime que $d_1$ est une diagonale d'un rectangle. Car ABC rectangle en $\widehat{A}$~~
On trace une $\perp$ à $d_2$. On mesure 6cm pour que le côté opposé (côté AB du triangle)
soit égale à 6cm lorsque le rectangle sera entièrement construit

3°) Si le triangle est isocèle de sommet C alors $\widehat{A} + \widehat{B} = 180° - 37 = 143°$
$\widehat{A} = 71,5°$ $\widehat{B} = 71,5°$
On construit, on vérifie $\widehat{C} \simeq 37°$

4°) Si $\widehat{A} = 110°$ alors $\widehat{B} = 33°$

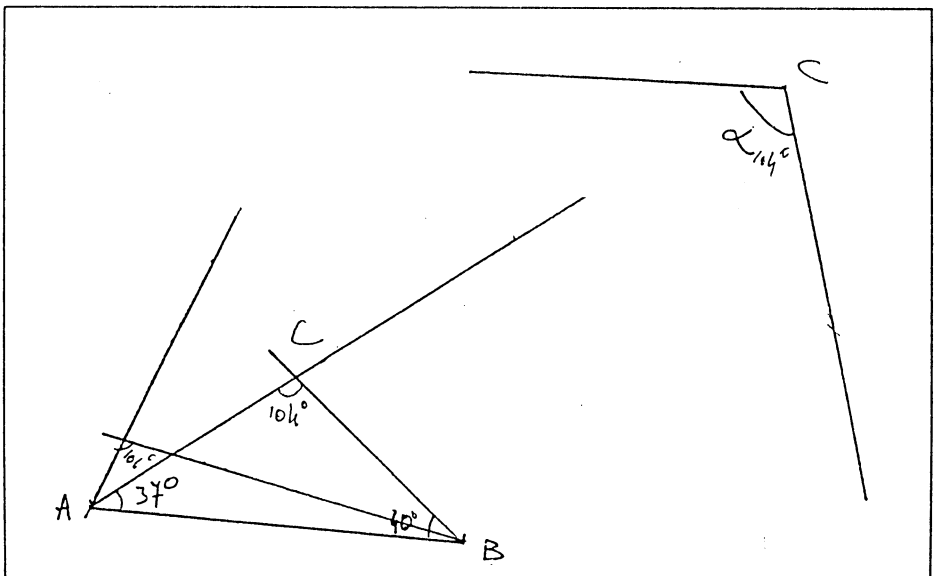
5°) Si $\widehat{B} = 120°$ alors $\widehat{A} = 23°$

6°) . Image de $C_3$

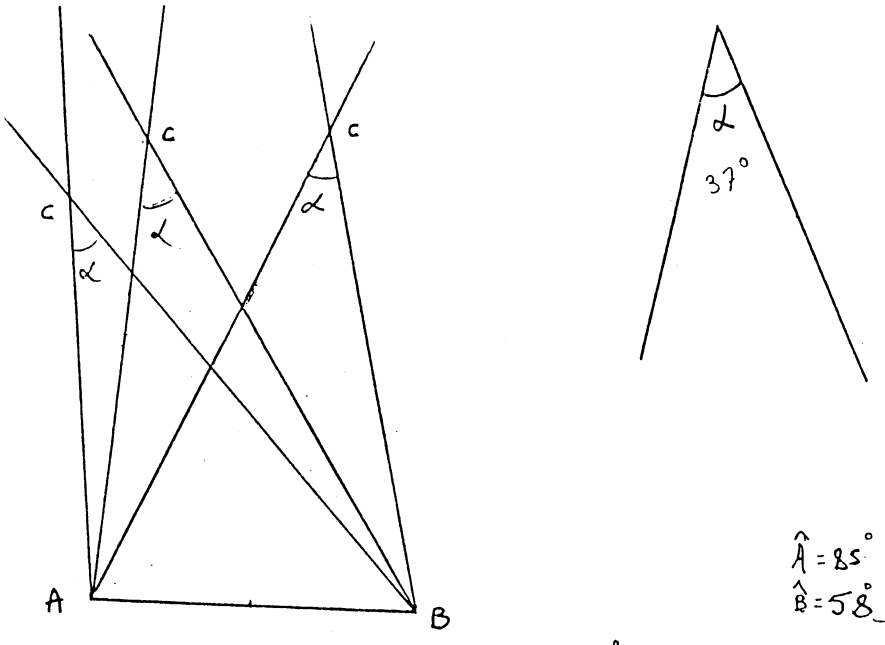
Le triangle générique n'est pas perçu comme un objet géométrique.

On constate ici la puissance du cas particulier sur le cas général. Il est plus facile, pour ces élèves, d'imaginer une valeur particulière qu'une valeur quelconque ; c'est une liberté de pensée qu'ils ne s'accordent pas. Est-ce un effet d'enseignement ? Ou bien la régularité de ces triangles est-elle source de stabilité pour eux ? Cette résistance peut être de même nature que celle que l'on rencontre sur les quadrilatères où le carré est toujours plus aisément obtenu.

Seuls 10% des élèves utilisant cette propriété construisent plusieurs points C sans passage par les triangles particuliers.




j'ai fait 180 − 104 = 76
alors j'ai fait des triangle avec ex 37 + 40 = 76°







La somme des angles d'un triangle est 180°
Si $\hat{\alpha}$ = 37° alors 180° − 37° : $\hat{A}$ et $\hat{B}$
$\hat{A}$ et $\hat{B}$ = 143°

$\hat{A}$ = 65° } au hasard
$\hat{B}$ = 78° }

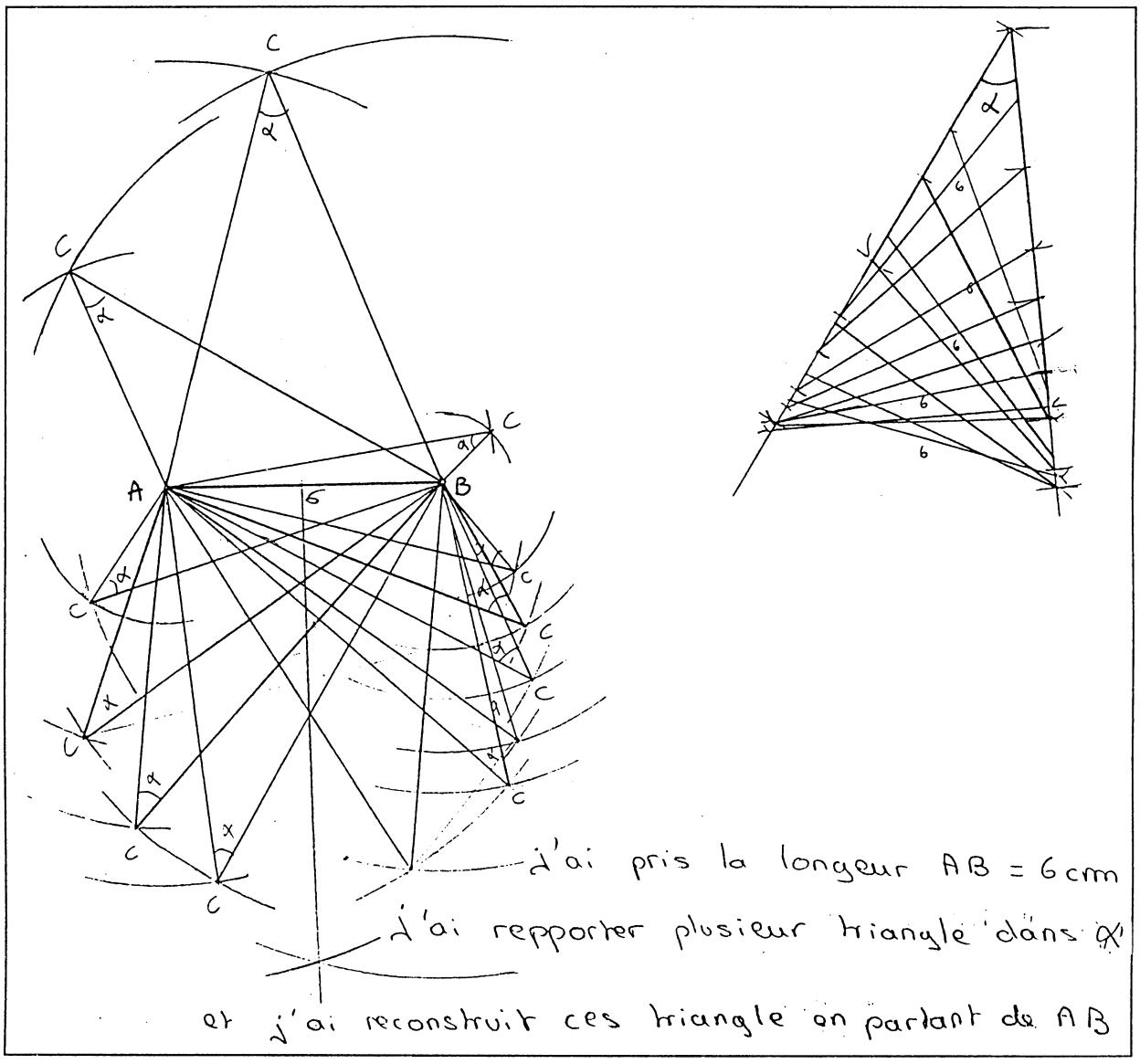
$\hat{A}$ = 85° }
$\hat{B}$ = 58° }

$\hat{A}$ = 95° }
$\hat{B}$ = 48° }

$\hat{A}$ = 110° }
$\hat{B}$ = 33° }

Notons que $\hat{\alpha}$ obtus, éliminant de fait le cas du triangle rectangle, a permis aux élèves qui avaient cette valeur de ne pas avoir de blocage même si le triangle isocèle a été construit.

**a.7** Le report du segment [AB] "dans l'angle $\hat{\alpha}$ " a été utilisé par près de un tiers des élèves. Le report du triangle obtenu a été majoritairement fait au compas. On note cependant que quelques élèves ont mesuré les angles du triangle obtenu pour les reporter en A et B.




1er type de blocage :

Certains élèves restent bloqués dès la première construction et il est nécessaire de les aider à envisager un autre point C : *"Où as-tu piqué le compas ? Pourquoi ?"*.

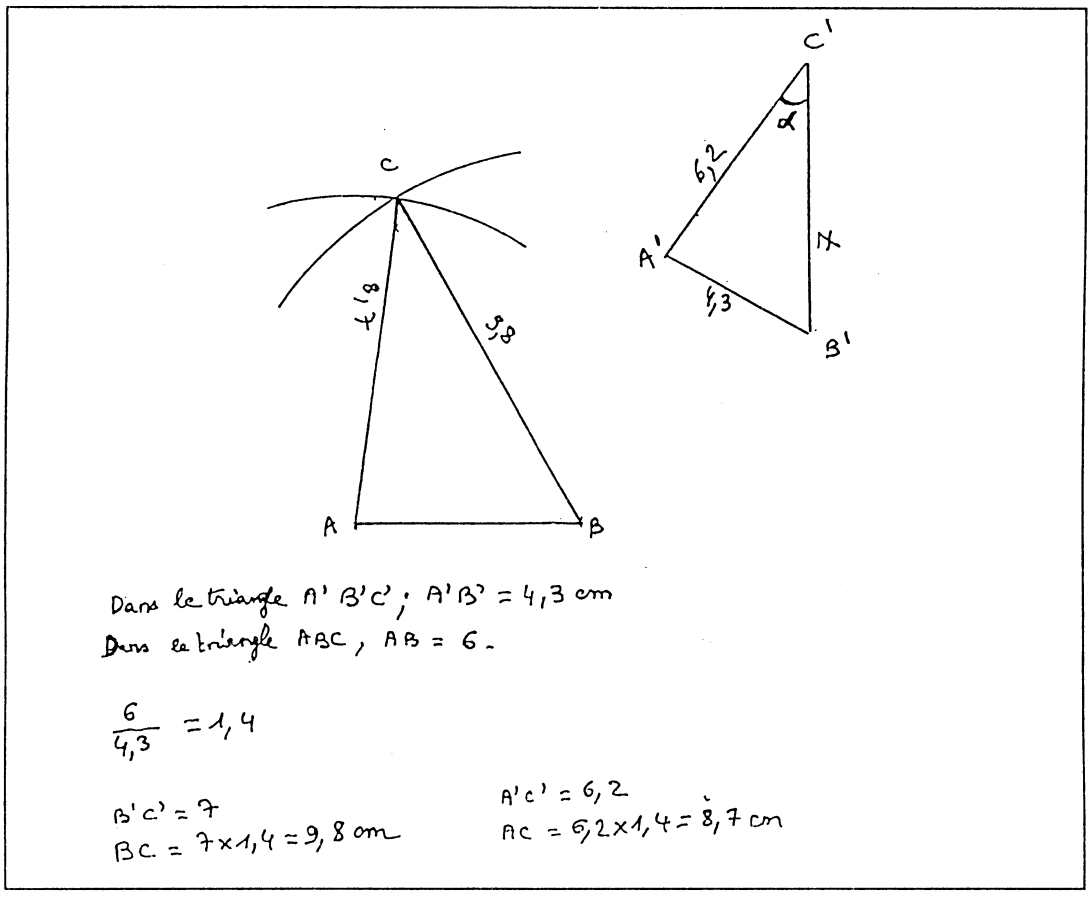
2ème type de blocage :

Certains piquent d'abord le compas à "l'extrémité" d'un côté de $\hat{\alpha}$ donné, puis font la même démarche à l'autre "extrémité". Le côté de l'angle n'a pas le statut de demi-droite mais de segment. Après ces deux tracés, ces élèves considèrent qu'ils ont fait le tour de la question puisqu'il n'y a que deux triangles possibles pour eux.

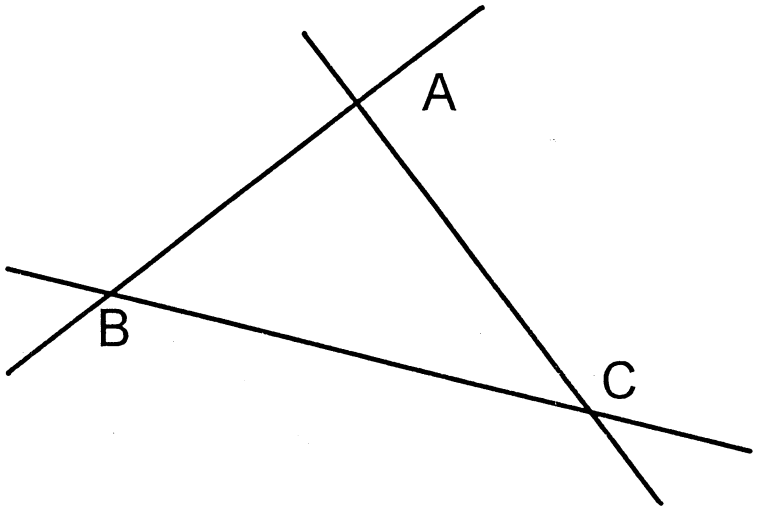
Ce type d'activité est particulièrement déstabilisant sur un tel "théorème-élève".

**a.8** La proportionnalité ne peut être utilisée que sous son aspect fonctionnel. Le coefficient de proportionnalité est trouvé et utilisé sans erreur par ces élèves qui ne sont pas représentatifs des classiques "bons élèves".

Cette stratégie est utilisée par 5% des élèves seulement ; faut-il y voir la difficulté du passage du cadre géométrique au cadre numérique ?




On retrouve ici la même erreur qu'en a.7 : le côté de l'angle est considéré comme segment selon l'idée "qu'un angle est un triangle à qui il manque un côté". Mais il est effectivement rare que le professeur dessine un triangle comme ci-dessous en classe :

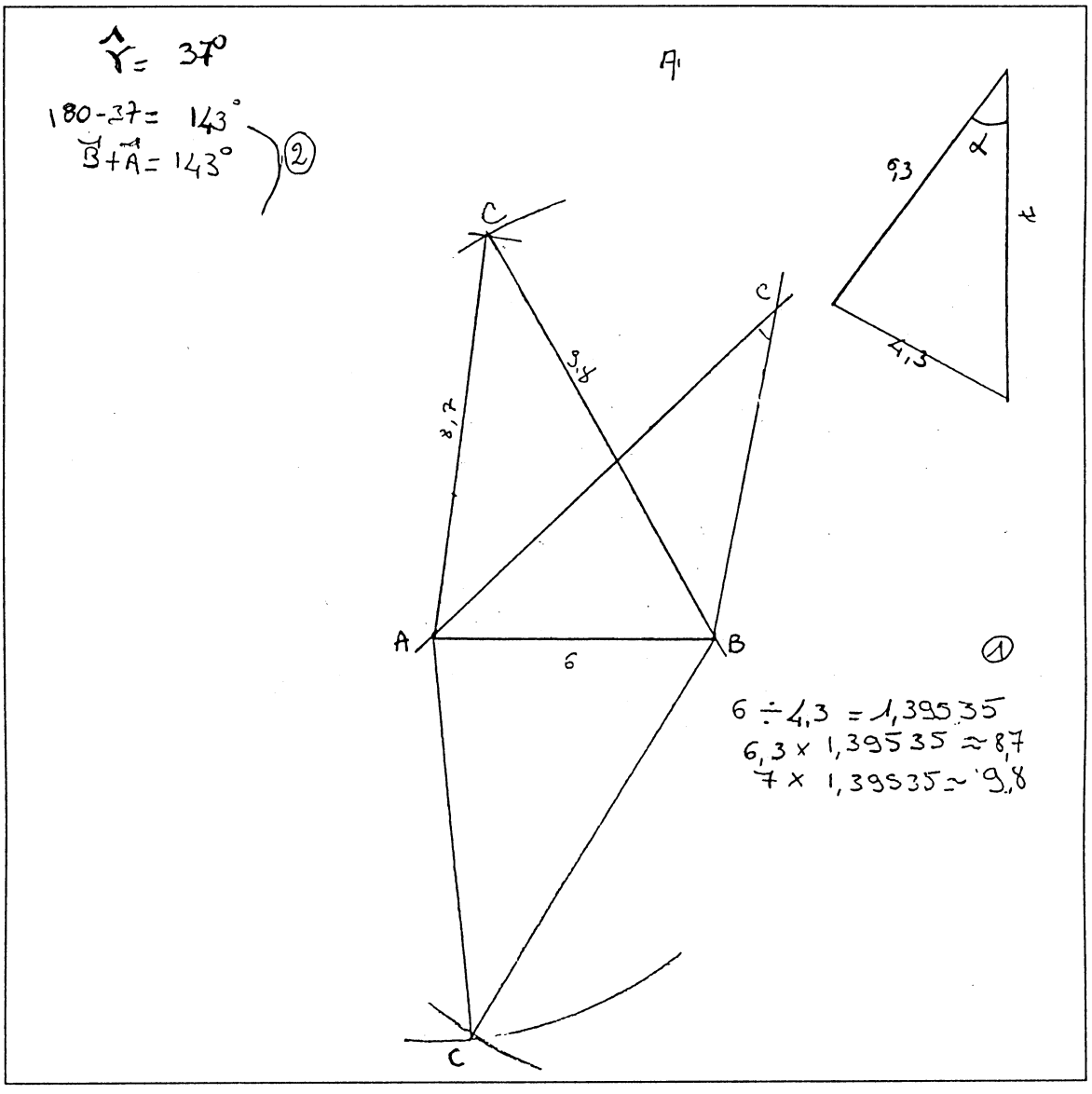


b- Les changements de stratégies :

Après avoir analysé ces huit démarches, intéressons-nous aux élèves qui ont changé ou tenté de changer de stratégie au cours de la séance : ils sont 20% environ.

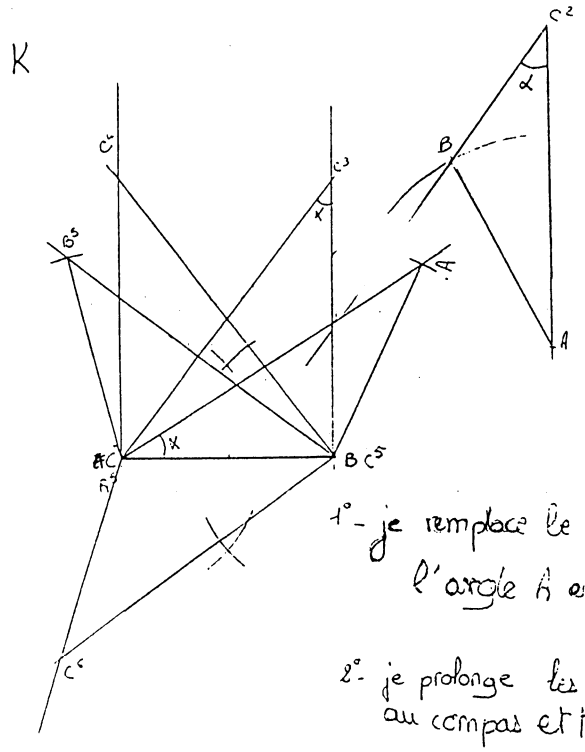
Deux raisons différentes les ont amenés à cela :

**b.1** Tout d'abord une nouvelle procédure est recherchée parce que l'élève pense que celle qu'il vient d'utiliser ne permet pas la construction d'un autre point C.




Cet élève utilise le coefficient de proportionnalité pour une première construction, trace le symétrique du triangle obtenu puis change de démarche pour trouver un autre point C : il utilise la propriété du a.6.

**b.2** Une autre procédure peut être recherchée parce que la question posée "*Y a-t-il plusieurs solutions ?*" est comprise comme *"Y a-t-il plusieurs méthodes de construction ?"*.




1°- je remplace le point A par le point C et trace l'angle $\hat{x}$ à la place de l'angle A en considérant que le triangle est isocèle.

---

2°- je prolonge les traits de l'angle $\hat{x}$, fixe le point A, prend la longueur AB au compas et trace le point B

---

3° si je considère le triangle ABC rectangle en B

j'ai donc $\hat{B} = 90°$

$\hat{C} = 37°$ (mesure que j'ai trouvé à au rapporteur)

$\hat{A} = ?$

$\hat{A} = 180° - (90° + 37)$

$= 180 - 127°$

$A = 53°$

---

4° m̂ démarche avec triangle rectangle en A

---

5° démonstration semblable à la n°1 mais je remplace non pas le point A par C mais le point B

---

6° je donne à l'angle $\hat{ABC}$ une valeur quelconque, sachant que $\hat{C}$ vaut 37° et que ds un triangle la somme des 3 angles = 180°

$A = 180 - (\hat{B} + \hat{C})$

On note que, pour cet élève, construire avec l'angle droit de sommet A représente une autre méthode que la construction avec l'angle droit de sommet B. En fait, il utilise les stratégies a.6 et a.7.

c- La validation :

Certains élèves ont validé leur travail en mesurant l'angle $\hat{C}$ obtenu.
Il est très rare de rencontrer ce genre de validation :

Dans le triangle A'B'C' ; A'B' = 4,3 cm.
Dans le triangle ABC, AB = 6.

$\frac{6}{4,3} \simeq 1,4$

B'C' = 7
BC = 7 × 1,4 = 9,8 cm.

A'C' = 6,2
AC = 6,2 × 1,4 = 8,7 cm

$\hat{C} = \hat{\alpha} = 37°$

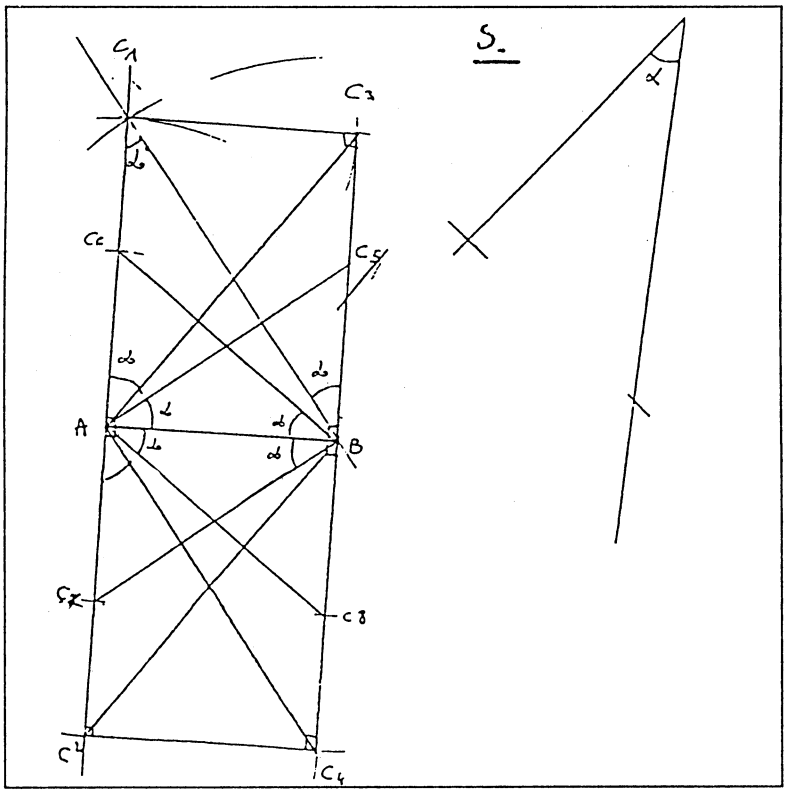
---

CAH
TOA
SOH

Dans A'B'D'
$\tan \hat{\alpha} = \frac{A'D'}{C'D'}$
$\tan \hat{\alpha} = \frac{3,7}{5} = 0,74$
$\tan \hat{\alpha} \simeq 37°$.

Dans ABD.
$\tan \hat{C} = \frac{AD}{CD}$
$\tan \hat{C} = \frac{5,2}{7}$
$\tan \hat{C} \simeq 37°$.

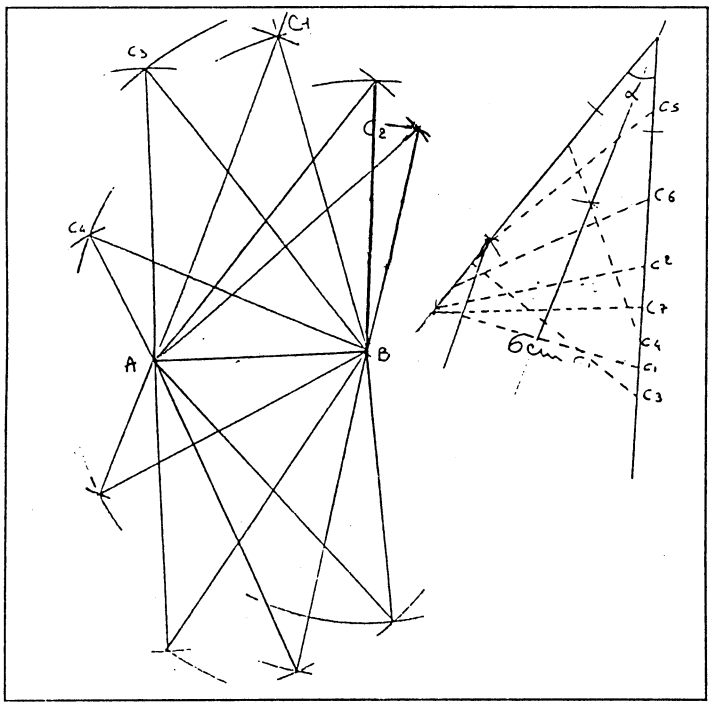
Le cas particulier du triangle rectangle est si prégnant que certains élèves organisent toute leur réflexion autour des perpendiculaires en A et B à (AB). Là encore, la demande de validation par la mesure les déstabilise.

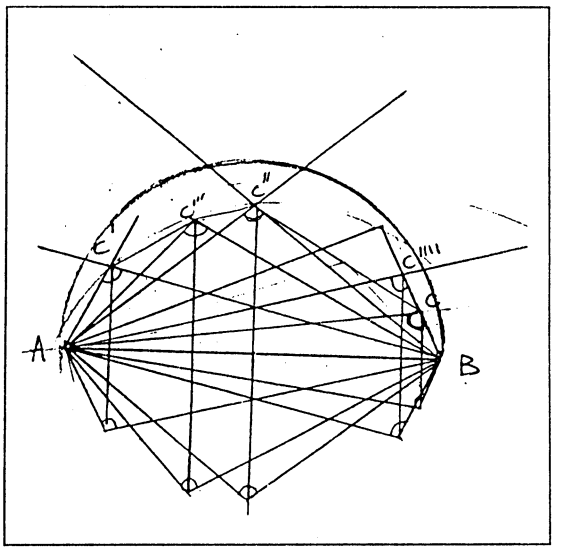


d. La symétrie axiale :

Aucune indication n'est donnée pendant la séance et on constate que 52% des élèves l'utilisent. La symétrie axiale se révèle être un obstacle important pour la découverte de l'ensemble des points.

Certains élèves tracent systématiquement le symétrique de chaque point C construit. D'autres l'envisagent comme une nouvelle méthode de construction. Elle est le plus souvent tracée au compas.



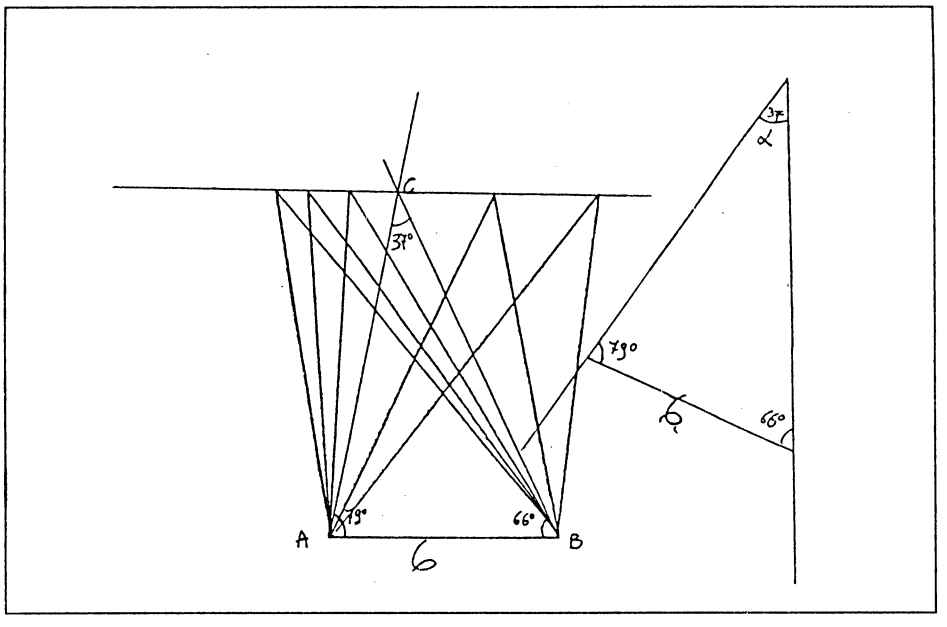




e. L'ensemble des points :

26% des élèves font au moins une tentative de construction de l'ensemble des points au cours de la première séance.

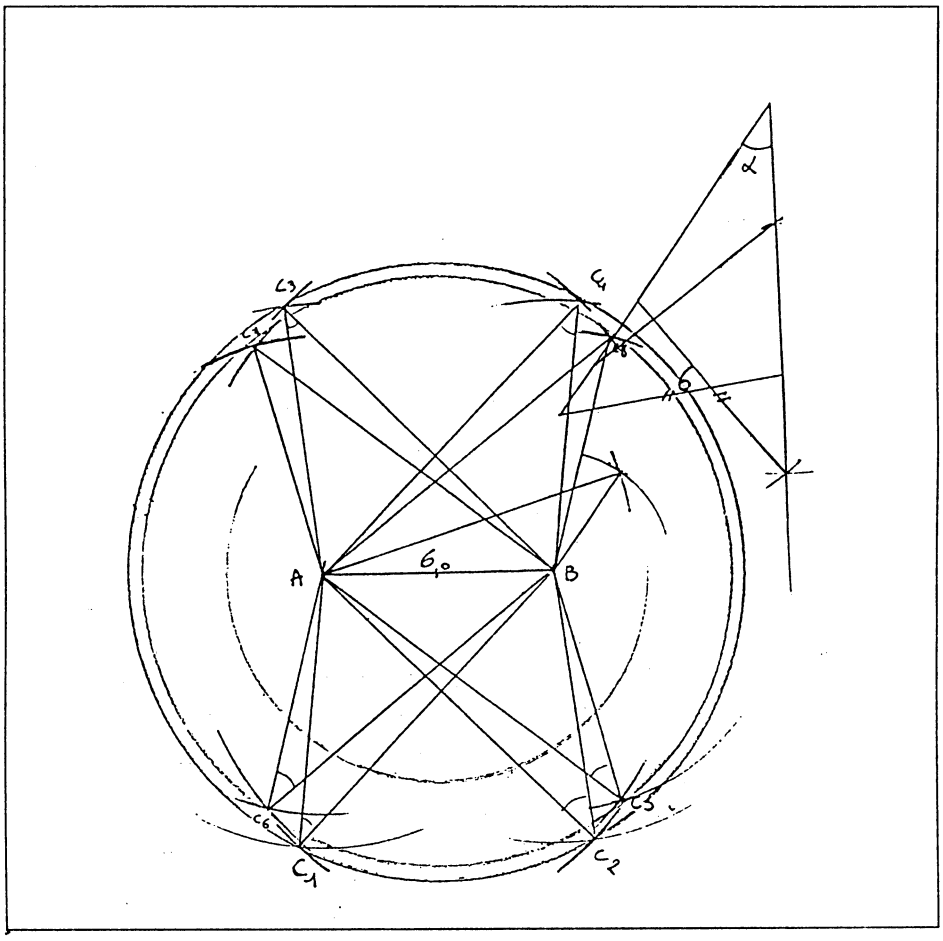
Quelques uns ont une vision a priori de la solution.

Un élève est certain d'avoir trouvé tous les points C sur la parallèle à (AB) passant par $C_1$. Quand il lui est demandé de mesurer ses angles, il rejette les points ainsi construits. Il reste bloqué par cette première démarche et ne peut pas trouver un second point recevable.

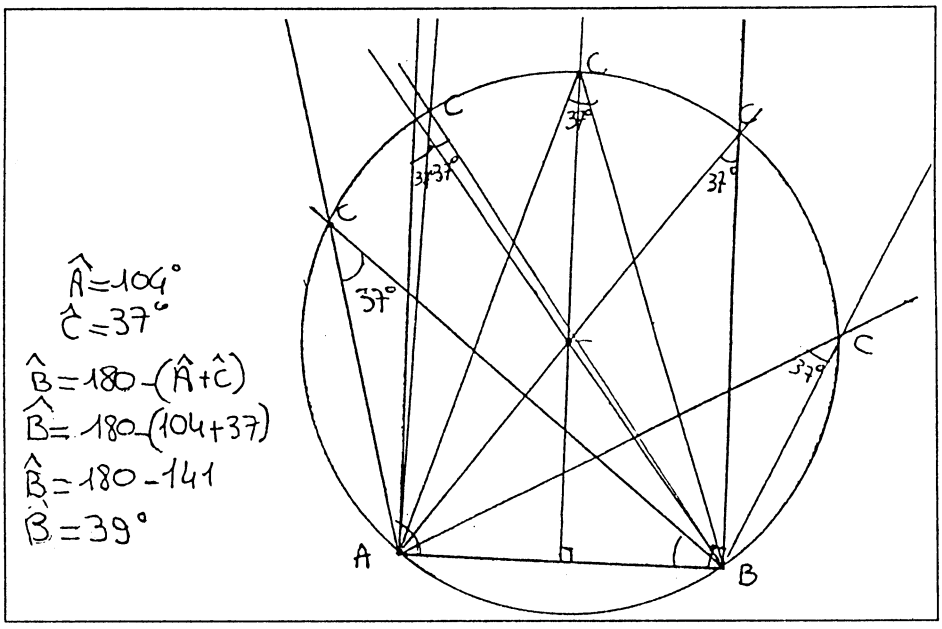


La majorité de ceux qui réfléchissent pour trouver la forme de l'ensemble des points sont persuadés qu'il s'agit d'un cercle et tâtonnent pour trouver son centre.

*Le centre est le milieu de [AB] :*




Lorsque le centre du cercle est trouvé, c'est grâce aux triangles rectangles, même si la médiatrice de [AB] est souvent tracée.



**5- La deuxième séance :** mise en commun et capitalisation.

Les productions des élèves ont été analysées. Une photocopie sur transparent de chacune des stratégies a été réalisée. On projette ces travaux d'élèves, l'auteur étant appelé à commenter son travail et répondre aux questions de ses camarades.

De ces discussions, on dégage la notion d'angle inscrit et la conjecture ainsi formulée par les élèves : *"Quand un triangle est dans un cercle et qu'on bouge juste un sommet sur le cercle, l'angle est toujours pareil."*

La capitalisation se fait sur :

* les différents procédés de construction,
* le vocabulaire,
* la conjecture qui est démontrée par le professeur et devient ainsi une propriété.

**6- Conclusion :**

Le texte de la consigne est court : il facilite à la fois la mise en activité et la prise en compte de la variable didactique.

L'ensemble des dessins réalisables permet une grande diversité de dessins réalisés par les élèves. Lors du travail individuel et/ou d'une synthèse collective, les propriétés communes à tous les points C sont dégagées.

Cette activité permet une gestion différenciée de la classe : le démarrage ne pose pas de problème et l'élève peut s'engager dans des voies diverses :

* la recherche de plusieurs points C,
* la recherche de différentes méthodes de construction,
* la recherche de l'ensemble des points.

Au cours de sa recherche, l'élève rencontre des difficultés. En le déstabilisant sur ce qui fait obstacle, on arrive à lui faire prendre conscience de ce qui pose problème et à l'amener à modifier ses stratégies, voire, localement, son savoir.

Les principales difficultés rencontrées sont :

- Se dégager des cas particuliers.
- Changer de méthode. La présentation sur transparent du travail d'un autre suffit alors à faire évoluer la vision qu'ils ont du problème.
- Organiser la réflexion. Cette difficulté apparaît lorsqu'on demande une construction lisible ou la restitution d'une démarche à l'ensemble de la classe. L'élève est alors obligé de structurer sa pensée pour pouvoir la communiquer.
- Repérer les invariants de la figure. La position du segment [AB] n'a pas besoin d'être modifiée sur la feuille alors que la multiplicité de constructions du point C entraîne de nombreuses représentations de l'angle. Or, l'élève ne fait pas la distinction entre l'angle et sa mesure, il confond l'objet et la mesure de grandeur de l'objet. Cette confusion est de même nature que celle que l'on rencontre dès la 6ème entre le segment et sa mesure.
- Passer du dessin à la figure.

Une constatation est évidente : les élèves s'investissent aisément et un tiers d'entre eux marquent leur dépit de devoir s'arrêter lorsque la cloche retentit.

La richesse des productions montre que les activités permettent à chacun de s'investir et de participer à la construction de connaissances communes. Valoriser ces productions donne à tous les élèves une motivation pour s'investir dans le travail en mathématique.

## III.2 Une activité pour découvrir cosinus en 4ème :

L'enseignement de la trigonométrie a subi de nombreux changements depuis quelques décennies.

Dans les nouveaux programmes de 1986, on parle maintenant :

* en collège : - de cosinus en 4ème,
  - des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle en 3ème,
* au lycée : - de cercles trigonométriques et de fonctions trigonométriques en seconde.

Cette étude se poursuit en 1ère et terminale, selon les séries de baccalauréat, avec l'introduction des fonctions exponentielles et des nombres complexes.

Ainsi d'outil au collège, la trigonométrie devient progressivement objet d'enseignement en lycée.

Qu'en a-t-il été au cours de l'histoire ? La progression actuelle dans les programmes correspond-elle à une réalité historique ? Quelle(s) activité(s) proposer au collège pour introduire ce concept ?

Nous exposerons à ce propos deux pistes qui nous ont servi de base de recherche et expliquerons pourquoi nous avons été amenés à abandonner l'une au profit de l'autre : piste qui a abouti à la construction d'une activité de découverte de la notion de cosinus en classe de 4ème que nous décrirons d'une façon plus précise.

### A- Un regard sur l'histoire :

Le mot trigonométrie (du grec trigonos : "triangle" et metron : "mesure") est apparu au début du XVII° siècle, mais l'histoire de la trigonométrie est beaucoup plus ancienne. Certains la font remonter au III° siècle avant notre ère, d'autres bien avant.

En effet, une tablette de l'époque babylonienne datant d'environ 2 000 av. J.C. (la tablette Plimpton 322), basée sur les triplets pythagoriciens, a été interprétée comme étant une table de cosécante[1]. Cette interprétation est actuellement contestée.

Par contre, les papyrus de Rhind (écrit par le scribe Ahmès vers 1 650 av. J.C.) et de Moscou (vers 1 850 av. J.C.) qui contiennent de nombreux problèmes, présentent incontestablement des problèmes de calcul de "seqt"[2]. Cette valeur de la "seqt" correspond à notre cotangente de l'angle de la pente des faces : cet angle vaut pratiquement toujours 52° dans les pyramides égyptiennes.

Que ce soit chez les Egyptiens avec le calcul de la "seqt" ou chez les Babyloniens (ils avaient accumulé de nombreuses données astronomiques et astrologiques aux V° et IV° siècles av. J.C.), la trigonométrie n'a pas encore le statut de branche des mathématiques mais demeure un outil utilisé ponctuellement.

Chez les Grecs, les travaux des astronomes (en particulier Aristarque de Samos au III° siècle av. J.C.) deviennent de plus en plus poussés et obligent les mathématiciens de l'époque à pratiquer une étude plus systématique des lignes trigonométriques, en particulier en étudiant les relations entre les angles au centre dans un cercle (ou plutôt les longueurs des arcs interceptés) et les longueurs des cordes sous-tendues.

C'est Hipparque de Nicée (II° siècle av. J.C.), considéré comme le père fondateur de la trigonométrie, qui est à l'origine d'une table des cordes annonciatrice des tables de sinus. Avec Ptolémée (II° siècle de notre ère) et son ouvrage, l'Almageste, on trouve un contenu trigonométrique qui n'évoluera pratiquement plus en Occident jusqu'au XV° siècle.

---

[1] cosécante : sécante de l'angle complémentaire, la sécante d'un angle étant égale à l'inverse du cosinus de cet angle.

[2] La "seqt" était le rapport entre la demi-base horizontale d'une pyramide et sa hauteur.

Vers le IV° siècle, les astronomes hindous innovent en remplaçant la correspondance arc/corde par une correspondance demi-arc/demi-corde (équivalent à notre sinus).

Les savants de l'islam s'inspirent davantage des mathématiques hindoues que de celles des Grecs et basent leur trigonométrie sur la fonction sinus. Dès le IX° siècle, al-Huwarizmi utilise des tables de sinus et de cotangentes. Avec al-Battâni (Albategnius pour les Européens : 850 - 929), apparaissent des tables de tangentes ainsi que des relations entre sinus et sinus d'angles complémentaires (c'est-à-dire "co-sinus"). Au X° siècle également, Aboûl-Wafâ propose un système déductif de la trigonométrie dans lequel figurent les six fonctions trigonométriques ainsi que les relations entre elles. Enfin, Nasir al-dîn (1201 - 1274) sera le premier à présenter un exposé systématique sur la trigonométrie lui conférant ainsi le statut de branche particulière des mathématiques.

Il faudra attendre le XV° siècle et la renaissance européenne pour qu'en Occident la trigonométrie se transforme de servante de l'astronomie en composante des mathématiques.

Regiomontanus (1436 - 1476) est le premier à produire un ouvrage sur la résolution des triangles et marque ainsi la renaissance de la trigonométrie.

Le célèbre astronome Nicolas Copernic (1473 - 1543) reprend les idées de Regiomontanus et rédige un traité d'astronomie contenant des notions trigonométriques.

Rhaeticus (1514 - 1576), disciple de Copernic, innove en définissant pour la première fois les fonctions trigonométriques en termes de rapports des côtés d'un triangle rectangle.

La fin du XVI° siècle voit apparaître le vocabulaire (sinus et tangente) et les abréviations "sin", "tan", "sec" et "sin. com", "tan. com", "sec. com" pour les angles complémentaires. Au début du XVII° siècle, se forment les mots : trigonométrie, cosinus et cotangente.

Enfin, avec Euler (1707 - 1783), la trigonométrie cesse d'être une branche indépendante des mathématiques en reliant les fonctions trigonométriques aux fonctions exponentielles.

Au cours des siècles, la trigonométrie s'est profondément modifiée.

Pour les astronomes babyloniens puis grecs, pour les arpenteurs et architectes égyptiens, elle constituait un **outil** au service d'une meilleure appréhension du Monde.

Elle ne s'est dissociée de l'astronomie pour s'intégrer aux mathématiques qu'au XIII° siècle en Orient et au XV° siècle en Occident. Elle prit alors le statut d'**objet** mathématique.

Elle ne redevient **outil** pour élaborer d'autres concepts mathématiques qu'à partir du XVIII° siècle avec en particulier les travaux d'Euler.

## B- Un retour sur les programmes actuels :

L'évolution dans l'histoire **outil-objet-outil**, décrite ci-dessus, se retrouve nettement dans les programmes actuels. En effet, en 4ème et 3ème, l'apprentissage de l'**outil** trigonométrique prédomine. Au lycée, la trigonométrie s'intègre progressivement dans l'ensemble des connaissances mathématiques et devient ainsi **objet**. Elle permet ensuite d'introduire certaines propriétés dans de nouveaux contextes comme celui des fonctions exponentielles ou des nombres complexes.

Ce schéma classique outil-objet-outil, commun à l'histoire des mathématiques et à son enseignement s'explique surtout par le fait qu'il s'agit là d'une démarche scientifique. On le retrouve dans l'introduction de nombreux concepts et il a résisté aux différents changements de programmes[3].

Excepté cette similitude dans la démarche, l'enseignement de la trigonométrie a pris une certaine distance par rapport à son histoire.

---

[3] A l'exception des programmes de 1971 basés davantage sur une approche axiomatique des connaissances et une construction première de l'objet.

Deux différences importantes existent actuellement : l'une dans la configuration géométrique utilisée pour introduire les rapports trigonométriques, l'autre dans l'ordre même d'apparition de ces rapports.

En effet, jusqu'au XVI° siècle, les relations trigonométriques étaient étudiées dans le cercle sous forme de correspondances entre longueurs des cordes (ou demi-cordes) et longueurs des arcs ou mesures des angles au centre(ou demi-arcs, demi-angles). L'expression utilisée encore récemment de "lignes trigonométriques" provient d'ailleurs de cette approche : les valeurs des tables de l'époque indiquaient des mesures de longueurs de "**lignes**" dans un **cercle** de rayon donné. Quant aux programmes actuels de collège, ils précisent de présenter cosinus, sinus et tangente comme des **rapports**[4] dans le **triangle rectangle**.

D'autre part, le sinus a précédé historiquement le "co-sinus", défini bien après comme sinus de l'angle complémentaire. On retrouve d'ailleurs cet ordre sur les calculatrices : sinus - cosinus - tangente. Actuellement le cosinus doit être introduit en premier en classe de $4^{ème}$ indépendamment de la notion de sinus. Cette notion n'apparaît qu'en $3^{ème}$, construisant une difficulté dans la compréhension du lien entre ces deux rapports.

Que proposent précisément les instructions officielles sur la trigonométrie en collège ?

Classe de 4ème :

*Quant à la proportionnalité des longueurs entre segments et projetés, elle sera expérimentée dans le seul cas de la projection orthogonale et conduira à la définition du cosinus d'un angle aigu comme coefficient de proportionnalité.*

*Compétences exigibles :*

*Savoir utiliser, dans le triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle et les longueurs des deux côtés adjacents.*

*Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :*

* *du cosinus d'un angle aigu donné,*
* *de l'angle aigu de cosinus donné.*

Classe de 3ème :

*La définition du cosinus d'un angle aigu a été mise en place en $4^{ème}$. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront présentés comme des rapports dans le triangle rectangle.*

*Compétences exigibles :*

*Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :*

* *du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné,*
* *de l'angle aigu de sinus ou de tangente donnés.*

*Connaître et utiliser, dans le triangle rectangle, les relations entre le cosinus, ou le sinus, ou la tangente, et les longueurs de deux côtés du triangle.*

L'objectif principal d'une activité pour introduire la trigonométrie au collège est donc de faire découvrir le lien entre mesure d'angle et proportionnalité de longueurs dans un triangle rectangle.

## C- Des activités pour introduire la trigonométrie au Collège :

Pour faire découvrir ce lien entre mesure d'angle et proportionnalité de longueurs, deux stratégies sont possibles :

- partir d'une mesure d'angle et faire découvrir la proportionnalité entre les longueurs,
- proposer une situation de proportionnalité pour aboutir à une mesure d'angle commune.

[4] Ce qui explique l'emploi actuel de l'expression "rapports trigonométriques" préférable à celle de "lignes trigonométriques".

L'idée de la première situation provient de l'observation d'une fiche[5] utilisée par certains professeurs et qu'on trouve également dans quelques manuels. On trouve d'ailleurs dans ce type de travail proposé aux élèves une morcellisation de la tâche, conception très béhavioriste de l'apprentissage, déjà signalée dans cette brochure.

La première partie de cette fiche (dite *"activité n° 1"*) permet de découvrir l'égalité des rapports de longueurs avec un angle fixé.

La deuxième partie (dite *"activité n° 2"*) permet de visualiser la variabilité du rapport en fonction de la mesure d'angle. Le rôle de la touche "cos" de la calculatrice est également introduit.

A partir de cette fiche, une **activité**, au sens où nous l'entendons, a été construite qui permet d'atteindre ces différents objectifs par une gestion adaptée de la classe.

[5] cf. Annexe 2.

**Première version de l'activité :**

L'analyse présentée ci-dessous en est très sommaire ; l'accent est principalement mis sur les difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre de l'activité et les raisons pour lesquelles elle a évolué vers une deuxième version (cf. page 50).

Nous avons souhaité présenter cette version pour montrer la difficulté de l'élaboration d'activités et la nécessité de l'expérimentation.

**1- Description :**

La consigne suivante est notée au tableau :

*Construisez des triangles ABC rectangles en A dont l'un des angles mesure .....*
*Mesurez les côtés.*
*Organisez vos constructions et vos résultats.*
*Quelles remarques pouvez-vous faire ?*

Chaque élève dispose d'une feuille blanche sur laquelle figure la consigne avec l'une des cinq mesures d'angles suivantes : 26°, 30°, 37°, 45°, 60°.

Ces cinq mesures permettent une vision plus ou moins aisée de la proportionnalité et sont donc réparties en fonction du niveau des élèves. En effet :

* avec 30° ou 60°, un rapport de longueurs est égal à 0,5,
* avec 45°, on obtient un triangle iso-rectangle et cos 45° $\approx$ 0,7,
* avec 37°, on a cos 37° $\approx$ 0,8 et cos 53° $\approx$ 0,6,
* avec 26°, cos 26° $\approx$ 0,9.

La recherche individuelle dure environ 35 min.

Lors de cette phase, la consigne suivante est précisée à l'oral :

* *Vous disposez de nombres ; pour formuler des remarques, essayez d'effectuer des calculs sur ces nombres.*

* *Vous effectuez aujourd'hui une démarche expérimentale, vous utilisez des valeurs approchées. Vous donnerez donc les résultats des calculs en valeurs approchées à $10^{-2}$ près.*

Cette première étape a pour objectif de faire émerger les égalités de rapports.

Ensuite, des groupes de cinq élèves ayant travaillé avec des mesures d'angles différentes sont constitués. Cette phase d'échanges revêt plusieurs formes : entraide, analyse et comparaison des résultats.

Elle doit permettre :

* de déstabiliser les élèves (*le coefficient de proportionnalité n'est pas toujours le même*),
* de les amener à réorganiser leurs connaissances (*le coefficient de proportionnalité dépend de la mesure d'angle choisie).*

A ce moment de l'activité, la consigne suivante est ajoutée :

*A quoi cela correspond-il sur vos calculatrices ?*

Ce travail en groupe dure environ 20 min.

Lors de la synthèse en classe entière (environ 15 min), les différents groupes présentent leurs résultats et les comparent. De toutes les égalités de rapports de longueurs caractéristiques des angles qui émergent, on ne retient alors que celui que l'on souhaite introduire : le cosinus.

La phase de capitalisation permet de définir cette notion nouvelle.

**2- Analyse :**

La mise en oeuvre de cette activité dans des classes de 4ème en 1992-93 a fait apparaître deux difficultés importantes :

* Comment faire émerger une situation de proportionnalité lorsque les valeurs numériques sont approchées ? Deux problèmes se posent ici : celui de l'exact et de l'approché et celui de l'incertitude relative d'un résultat.

* Comment gérer au sein d'une classe un grand nombre de productions ?

2.1- Proportionnalité et valeurs approchées :

Dans les problèmes habituellement proposés sur la proportionnalité, les élèves se trouvent confrontés à des valeurs numériques exactes. Ils disposent alors de nombreux outils pour vérifier s'il y a ou non-proportionnalité :

* calcul d'un coefficient de proportionnalité éventuel.
* Les produits en croix sont-ils égaux ?
* Les rapports sont-ils égaux ?
* Peut-on passer d'une colonne du tableau à une autre avec un coefficient scalaire ? Par décomposition additive ?

Dans cette activité, les valeurs numériques proviennent de mesurage sur des dessins et sont donc approchées. Il n'y a pas proportionnalité au sens propre. En effet, lorsque les élèves calculent les rapports de longueurs, voire même les produits en croix, ils n'obtiennent pas d'égalités (au sens mathématique).

S'il est indispensable de mettre en lumière au collège ce conflit entre "réalité physique" et "modèle mathématique", entre concret et abstrait, celui-ci risque ici d'occulter l'objectif principal : introduire la notion de cosinus.

D'autre part, le nombre d'outils utilisés pour faire apparaître une situation de proportionnalité est plus limité : les procédures analytiques étant de fait éliminées. C'est pourquoi on retrouve le calcul des rapports dans 90% des cas observés. Si on considère qu'une incertitude absolue de 2 mm sur les longueurs mesurées est raisonnable compte tenu de la précision des dessins, l'erreur relative sur les rapports calculés peut atteindre 20%, ce qui ne permet plus de découvrir la proportionnalité.

Enfin, l'utilisation de la calculatrice apporte une difficulté supplémentaire. Elle semble provoquer la modification du statut des nombres dans l'esprit des élèves. Ils perdent de vue l'origine des valeurs numériques utilisées qui, de valeurs approchées à "l'entrée dans la calculatrice" deviennent valeurs exactes à "la sortie". Ils s'attendent donc vraiment à trouver des rapports égaux.

2.2 Gestion des productions :

20% des élèves parviennent à faire émerger cette situation de proportionnalité lors de la phase de recherche individuelle, 35% grâce au travail de groupe avec les élèves qui disposent de mesures d'angles facilitant cette découverte.

Les coefficients trouvés sont variés, ils dépendent des mesures d'angles et sont généralement des "valeurs simples".

* Pour 26° : la cotangente (cotan 26° $\approx$2) et plus rarement la tangente (tan 26° $\approx$ 0,5).
* Pour 30° : la cosécante (cosec 30° = 2) ou le sinus (sin 30° = 0,5).
* Pour 37° : la tangente (tan 37° $\approx$ 0,75), rarement le sinus ou le cosinus.
* Pour 45° : la tangente ou la cotangente (tan 45° = cotan 45° = 1).
* Pour 60° : la sécante (sec 60° = 2) ou le cosinus (cos 60° = 0,5).

On retrouve ici les six rapports de longueurs possibles. Privilégier dans cette liste un rapport particulier (le cosinus), qui n'a pas toujours une "valeur simple", paraît très arbitraire aux élèves.

La synthèse de cette recherche est très difficile à effectuer dans ce contexte.

Cette diversité peut représenter un intérêt certain en classe de 3ème. En effet, elle permet de découvrir les six rapports et introduire ainsi les notions de sinus et tangente et les relations entre sinus, cosinus, tangentes pour des angles complémentaires.

C'est pourquoi cette activité a été testée sous la même forme en classe de 3ème, toujours en 1992-93. Les élèves s'y sont trouvés confrontés à la même difficulté : la démarche expérimentale (mesurage et calcul de rapports de valeurs approchées) permet difficilement de reconnaître un modèle mathématique connu, la proportionnalité.

Par contre, la connaissance du cosinus ne facilite pas l'émergence des autres égalités de rapports. Au contraire, elle constitue un réel obstacle car l'enjeu de l'activité s'en trouve sensiblement réduit : les élèves ne ressentent pas la nécessité de trouver d'autres coefficients de proportionnalité.

En conclusion, *le réseau de concepts impliqués dans cette activité semble trop important pour que les élèves puissent en gérer la complexité. La connaissance visée n'est pas non plus indispensable pour répondre complètement au problème*[6].

C'est pourquoi, afin de réduire le nombre de concepts abordés, une deuxième version a été construite en :

* proposant des mesures exactes pour les longueurs,
* limitant les mesures de longueurs données à celles de deux côtés des triangles rectangles (hypoténuse et un côté de l'angle droit).

[6] cf. définition d'un problème donnée par R. Douady dans le suivi scientifique Inter Irem 6ème.

**Deuxième version de l'activité :**

## 1- Objectifs de la situation :

### 1.1 Objectifs disciplinaires :

Introduire la notion de cosinus en faisant découvrir :

- l'invariance du rapport $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypotenuse}}$ pour un angle aigu donné dans un triangle rectangle,
- la variabilité de ce même rapport en fonction de l'angle,
- le lien entre ce rapport et la mesure d'angle à partir de la calculatrice.

### 1.2 Objectifs méthodologiques :

Savoir organiser :

- la lecture de données numériques,
- la lecture des dessins.

## 2- Description de la situation :

### 2.1 Pré-requis :

* Construction de triangles rectangles.
* Reconnaissance d'une situation de proportionnalité.

### 2.2 Consigne :

** Construire des triangles OAB rectangle en A tels que OA = ..... et OB = .....*
** Organiser les constructions et écrire toutes les remarques possibles.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $OA = 3$ $OB = 5$ | $OA = 3,2$ $OB = 6,4$ | $OA = 3,5$ $OB = 5$ | $OA = 2$ $OB = 5$ |
| $OA = 4,2$ $OB = 7$ | $OA = 3,8$ $OB = 7,6$ | $OA = 4,2$ $OB = 6$ | $OA = 2,6$ $OB = 6,5$ |
| $OA = 4,8$ $OB = 8$ | $OA = 4,3$ $OB = 8,6$ | $OA = 2,8$ $OB = 4$ | $OA = 3,2$ $OB = 8$ |
| $OA = 2,7$ $OB = 4,5$ | $OA = 2,9$ $OB = 5,8$ | $OA = 7$ $OB = 10$ | $OA = 4,2$ $OB = 10,5$ |
| ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** |

### 2.3 Mise en oeuvre :

Matériel :

* Pour la classe : rétro projecteur, transparents et feutres,

* pour les élèves : une feuille blanche sur laquelle figure une série de données numériques, une calculatrice et le matériel habituel de géométrie.

1ère séance d'une heure :

Il est indispensable de :

- prévoir la constitution des groupes afin que les élèves d'un même groupe disposent de données différentes,
- préciser aux élèves de ne travailler que sur un côté des feuilles (pour faciliter ainsi d'éventuels découpages et réorganisation des dessins).

La consigne est écrite au tableau et les élèves disposent d'une feuille blanche sur laquelle figure leur série de données (série 1, 2, 3 ou 4).

Une première phase de recherche individuelle d'environ 30 min doit permettre aux élèves de:

- construire les quatre triangles rectangles demandés,
- d'émettre des hypothèses sur l'égalité des mesures d'angles et sur la proportionnalité des mesures de longueurs.

Lors du travail en groupe (25 min environ), les élèves confrontent leurs résultats et vérifient que tous les cas proposés représentent des situations de proportionnalité où les coefficients trouvés dépendent des mesures d'angles.

Avec la consigne annexe suivante : "*A quoi cela correspond-il sur la calculatrice?*", les élèves sont amenés à découvrir le rôle de la touche "cos" de leurs calculatrices.

2ème séance : la capitalisation.

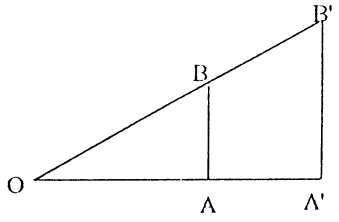
Les élèves se confrontent de nouveau à la situation en réalisant un transparent par groupe pour présenter leurs résultats à l'ensemble de la classe.

Les transparents sont ensuite projetés dans un ordre déterminé afin d'institutionnaliser la notion de cosinus.

2.4 Prolongements de l'activité :

- Superposer, à partir d'un angle aigu, les quatre triangles rectangles correspondants à une même série de données permet de définir le cosinus comme rapport de projection orthogonale et de réinvestir les propriétés de linéarité.

Exemple :




Si $OA = k \times OB$ et $OA' = k \times OB'$ alors $OA' - OA = k \times (OB' - OB)$

- Faire représenter graphiquement la fonction cosinus pour un angle compris entre 0° et 90° paraît nécessaire. Cette construction permet, d'une part, de réutiliser les valeurs de cosinus rencontrées au cours de l'activité et d'autre part utiliser la touche cosinus de la calculatrice. Elle provoque aussi un nouveau changement de cadre : l'activité se déroule à la fois dans le cadre numérique et dans le cadre géométrique et cette représentation de la fonction constitue une nouvelle approche du cosinus dans le cadre graphique.

## 3- Analyse a priori :

3.1 A propos des variables didactiques :

Les données numériques constituent, autant sur la forme que sur le fond, les principales variables didactiques de l'activité.

La présentation des données doit rester la plus neutre possible : l'utilisation d'un tableau induirait fortement la recherche d'une situation de proportionnalité (dans l'esprit des élèves, les mots "tableau" et "proportionnalité" sont souvent associés).

Le choix des valeurs numériques et des coefficients de proportionnalité influence également le déroulement de l'activité et permet une gestion différenciée.

- La série 2 fait apparaître deux coefficients décimaux simples : 0,5 et 2.

- La série 4 fait également apparaître deux coefficients décimaux : 0,4 et 2,5.

- La série 3 permet d'obtenir des triangles rectangles et isocèles (au sens expérimental) et le coefficient décimal 0,7.

- La série 1 est plus difficile : le coefficient 0,6 admet un inverse non décimal ($\frac{5}{3}$).

Les séries 1 et 3 peuvent permettre un travail sur l'exact et l'approché (valeurs approchées de $\frac{10}{7}$ et $\frac{5}{3}$).

Les quatre séries comportent à la fois des mesures entières et décimales et ne présentent pas de régularité : les nombres ne sont rangés dans aucun ordre et les écarts entre eux ne permettent pas de visualiser une décomposition additive simple.

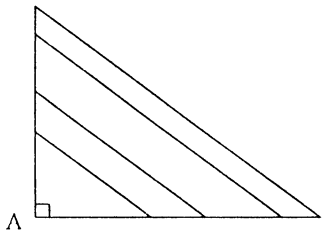
3.2 A propos de la consigne :

Une aide ponctuelle peut être apportée aux élèves ne parvenant pas à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ont des longueurs données.

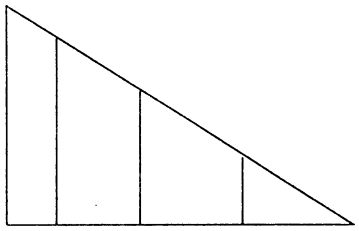
3.3 A propos de l'organisation des constructions :

* La première solution consiste à disposer les dessins successifs les uns sous les autres.

* Une autre solution consiste à empiler les quatre triangles rectangles à partir de l'angle droit.



* Une dernière possibilité, moins naturelle, consiste à anticiper le résultat (les angles aigus des quatre triangles sont de même mesure) et à superposer les triangles rectangles à partir d'un angle aigu.



3.4 A propos des procédures :

* Toutes les propriétés liées au triangle et au triangle rectangle en particulier peuvent apparaître.

* L'égalité des angles aigus peut apparaître soit par mesurage, soit par superposition des angles aigus des triangles, soit par observation du parallélisme des hypoténuses dans le cas d'une construction avec l'angle droit en commun.

* Dans le cadre numérique, les élèves disposent des procédures analogiques et analytiques pour reconnaître la situation de proportionnalité.

| OA | a | a' |
|---|---|---|
| OB | b | b' |

Pour les procédures analogiques :

* Egalité des rapports $\frac{a'}{a}$ et $\frac{b'}{b}$ qui aboutit au calcul d'un coefficient scalaire.

* Application de l'opérateur scalaire $\frac{a'}{a}$ : $a \times \frac{a'}{a} = a'$ et $b \times \frac{a'}{a} = b'$.

* Décomposition additive.

Pour les procédures analytiques :

* Egalité des rapports proportionnels $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$ qui permet de calculer un coefficient de proportionnalité.

* Application de l'opérateur fonctionnel $\frac{b}{a}$.

* Egalité des "produits en croix" $a \times b'$ et $a' \times b$.

* Utilisation de la fonction linéaire.

La procédure graphique peut être également envisagée.

3.5 A propos de la consigne annexe :

Cette consigne n'est pas indispensable pour mener à bien l'activité mais elle peut offrir une recherche supplémentaire aux élèves plus rapides.

3.6 A propos du temps de gestion de l'activité :

La recherche individuelle permet d'établir que : **s'il y a proportionnalité des mesures de longueurs alors il y a égalité des mesures d'angles.**

La phase de travail en groupe montre que : **s'il n'y a pas proportionnalité alors les mesures d'angles sont différentes.**

En utilisant donc la contraposée, on peut dire que : **si les angles ont même mesure alors les rapports de longueurs sont égaux.**

On construit ainsi une correspondance terme à terme entre mesure d'angle et coefficient de proportionnalité, d'où l'intérêt de la représentation graphique proposée comme prolongement.

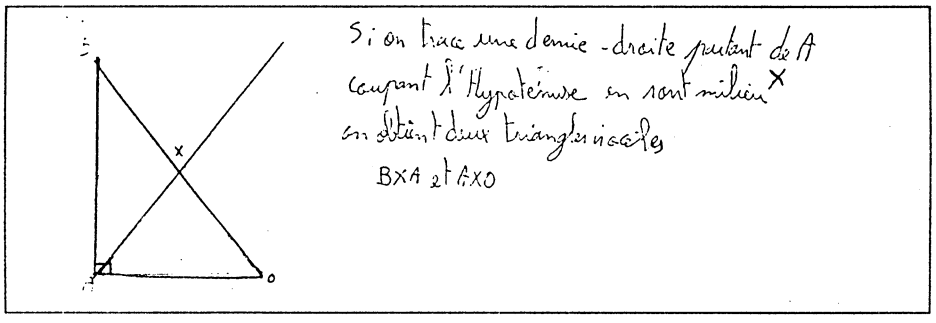
## 4- Analyse des réponses en classe de 4ème :

Cette activité a été testée en 1993-94 et 1994-95 sur 85 élèves.
Tous ont réalisé les quatre dessins et formulé des remarques.
Aucun n'a organisé ses constructions en superposant les triangles rectangles.
8% des élèves se sont limités au cadre géométrique en énonçant des propriétés.
Tous les autres sont parvenus à découvrir la proportionnalité et l'égalité des mesures d'angles.
Quelles sont les procédures mises en oeuvre par ces élèves?
Comment organisent-ils leurs données ?
Comment formulent-ils le lien entre mesure d'angles et coefficients de proportionnalité ?

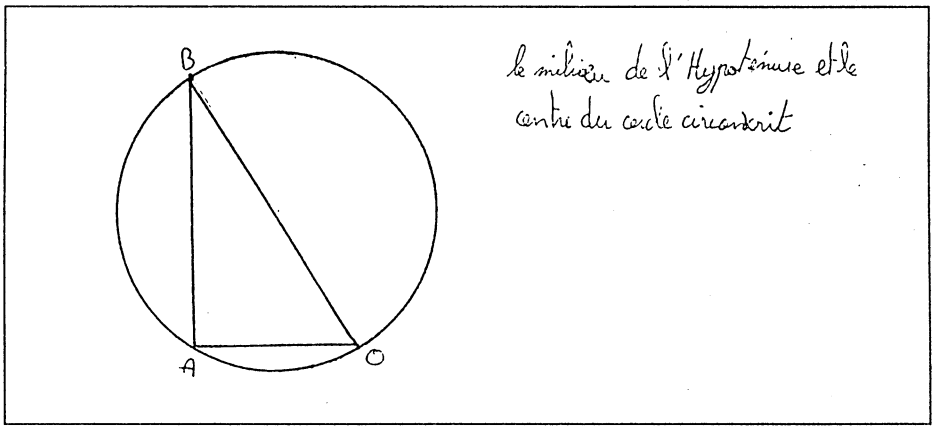
### 4.1 Productions limitées au cadre géométrique :

Après avoir réalisé les quatre dessins demandés, certains élèves oublient les données numériques, se limitent à une recherche des propriétés du triangle rectangle et anticipent même sur des propriétés non encore étudiées en classe.

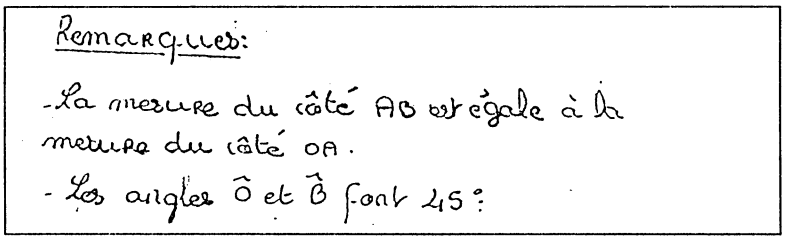
*Propriété de la médiane du triangle rectangle.*




*Propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle.*




Pour quelques élèves qui disposent de la série n° 3, la nature particulière du triangle rectangle masque la situation de proportionnalité, le cadre géométrique est ici trop prégnant.



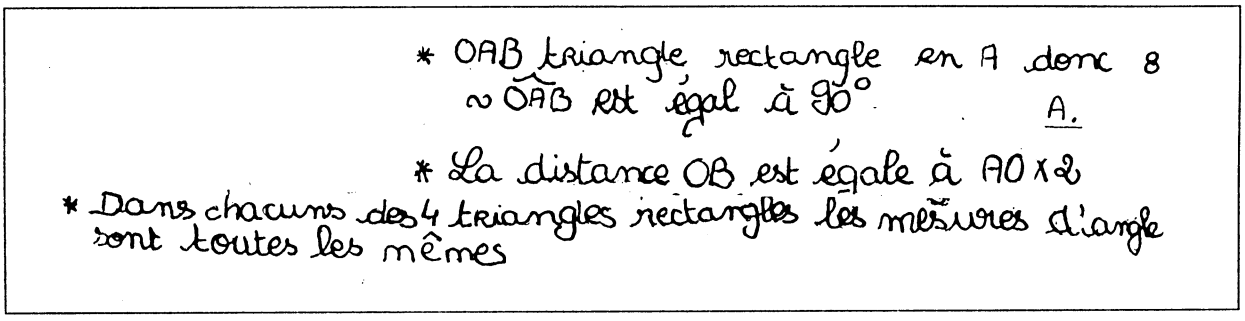
4.2 Procédures utilisées pour reconnaître la proportionnalité :

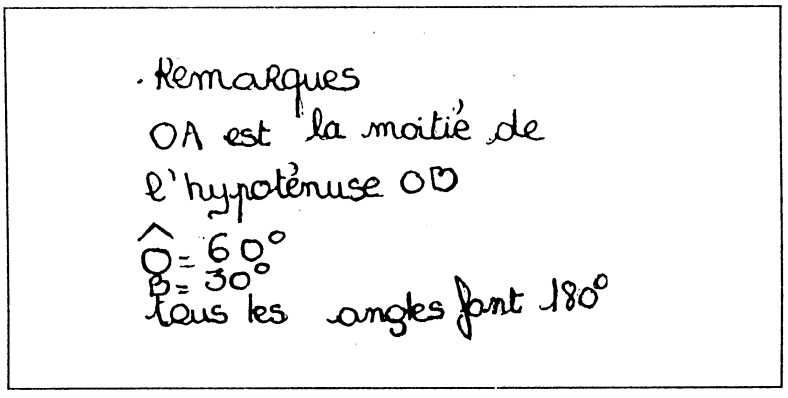
L'aspect fonctionnel de la proportionnalité apparaît dans toutes les productions analysées. Les élèves calculent les rapports des mesures ou mettent en évidence un coefficient de proportionnalité.

Les élèves n'utilisent pas les procédures analytiques qu'ils mettent pourtant plus facilement en oeuvre dans une situation de proportionnalité.

Ils conçoivent chaque triangle comme une situation isolée. Pour chacun d'eux, ils calculent de manières diverses un des rapports $\frac{OA}{OB}$ ou $\frac{OB}{OA}$ et ils cherchent un lien entre les valeurs trouvées. Comme ils n'organisent pas leurs constructions en superposant leurs quatre dessins, ils ne peuvent pas y associer une organisation des données (tableaux ...) qui permette une procédure analytique.

Voici quelques réponses pour la série de données n° 2 (coefficient : 0,5 ou 2) :

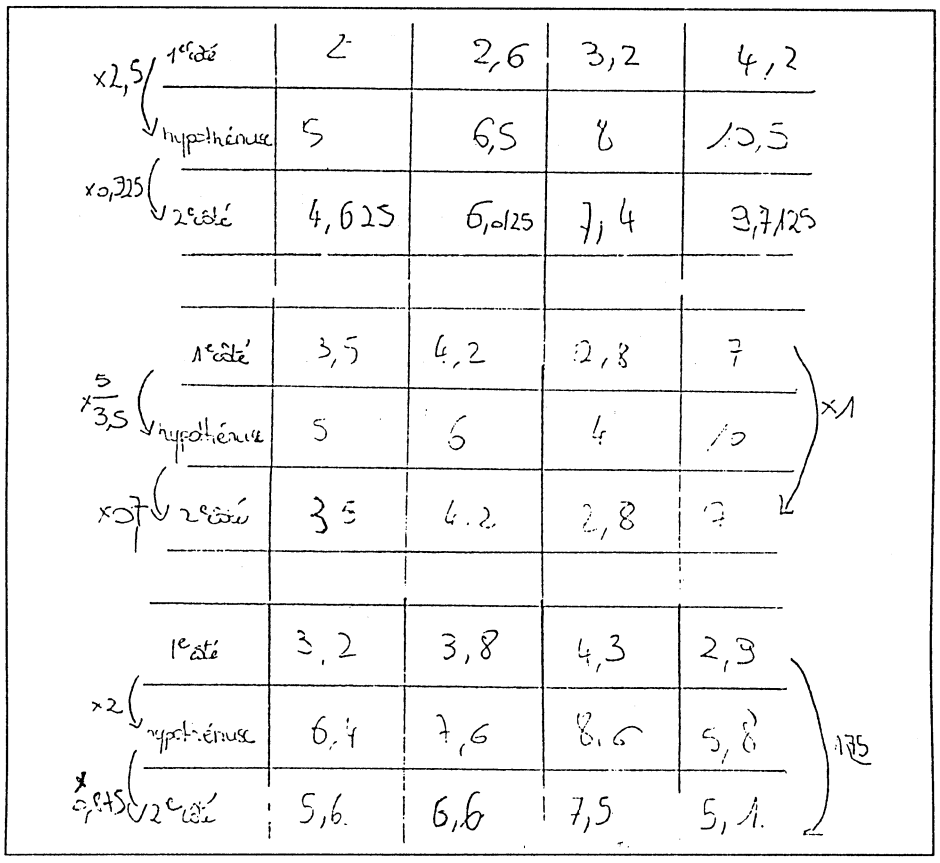


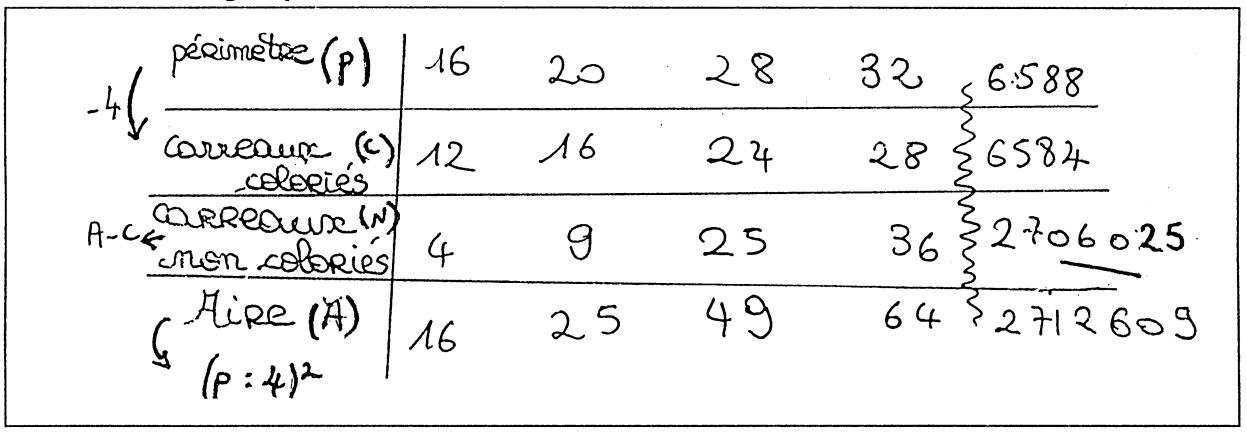
4.3 Organisation des données numériques :

7% des élèves présentent leurs données sous forme de tableaux.

Voici le travail présenté par un groupe sur lequel apparaissent différents coefficients de proportionnalité.




On pourrait penser que cette organisation en tableaux induit systématiquement la découverte d'une proportionnalité. Or, ces mêmes élèves, confrontés à une situation dans le cadre numérique très différente, utilisent également la présentation des données en tableaux et découvrent très rapidement des relations entre les différentes grandeurs qui ne sont pas en proportionnalité comme le montre ici le travail du même groupe.




L'utilisation des tableaux pour la gestion de données ne semble pas être un savoir faire acquis en 4ème.

Lorsque le tableau est utilisé, il ne génère pas obligatoirement l'utilisation de la proportionnalité contrairement à l'opinion généralement répandue. Par contre, il est un support de raisonnement pour émettre des hypothèses en permettant des rapprochements visuels des données.

4.4 Formulation des réponses :

Sur les réponses reproduites ci-dessous, on peut noter que les élèves ont une conception naturelle de la similitude.

L'angle $\widehat{BOA}$ a la même mesure dans les 4 triangles

* Les triangles sont agrandis toujours avec la même mesure.

*Notion d'agrandissement*

* Si on divise OA par OB ont trouve toujours le même résultat.

*Notion de "forme"*

Ils sont tous de la même forme il n'ya que les mesures qui changent
Les angles $\widehat{AOB}$ mesure 51°.
Les angles ABO mesure 47°.
Si on divise OA par OB ont trouve toujours le même résultat

Enfin, le lien entre mesures d'angles et coefficients de proportionnalité est souvent verbalisé dans les bilans de groupes :

Remarque :
- $\widehat{AOB} + \widehat{OBA} = 90°$
La somme des angles d'un triangle rectangle est égale à 180°
Les mesures sont à l'origine de la difference des valeurs des angles.

mesure de la longueur ⟷ angles
La touche correspondante de la calculatrice est cos
Dans chacun des 4 triangles rectangles les mesures d'angles sont toutes les mêmes

## 4.5 Prolongements :

Des élèves prolongent le travail avec une recherche sur le 3ème côté.

*Calcul exact pour le 3ème côté avec le coefficient 0,6.*

$AB = \frac{OB + OA}{2}$.

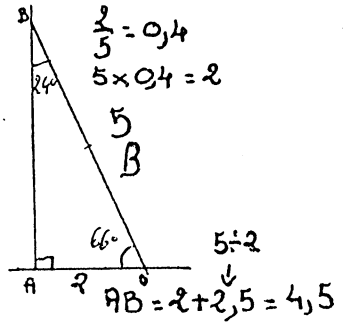
$\widehat{AOB} + \widehat{OBA} = 90°$.

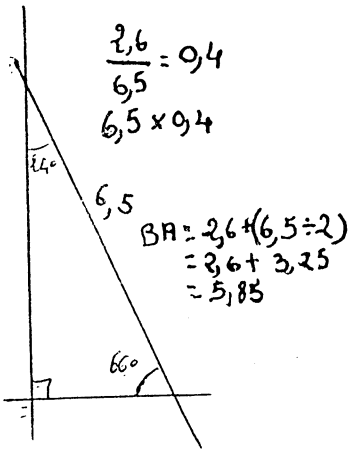
La somme des angles dans un triangle rectangle = 180°.

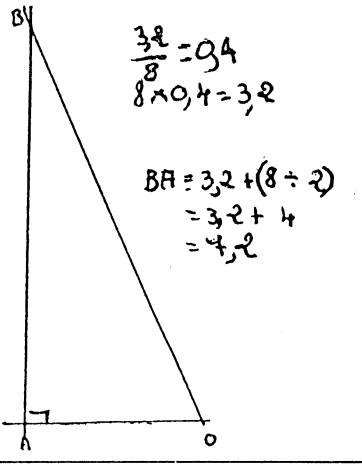
Sur mes figures $AB = \frac{OA + OB}{2}$

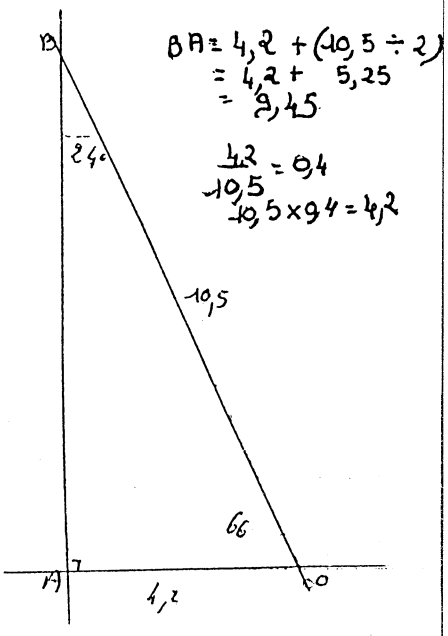
Un élève découvre, avec le coefficient 0,4 (série n° 4), une formule approchée intéressante. Elle complète ensuite son travail en appliquant l'outil cosinus qu'elle vient de découvrir.

*Calcul du rapport* $\frac{OA}{OB}$




*Calcul du 3ème côté avec la formule :*

$AB = OA + \frac{OB}{2}$

Les angles $\hat{B}; \hat{O}; \hat{A}$ ont les mêmes mesures dans tous les triangles

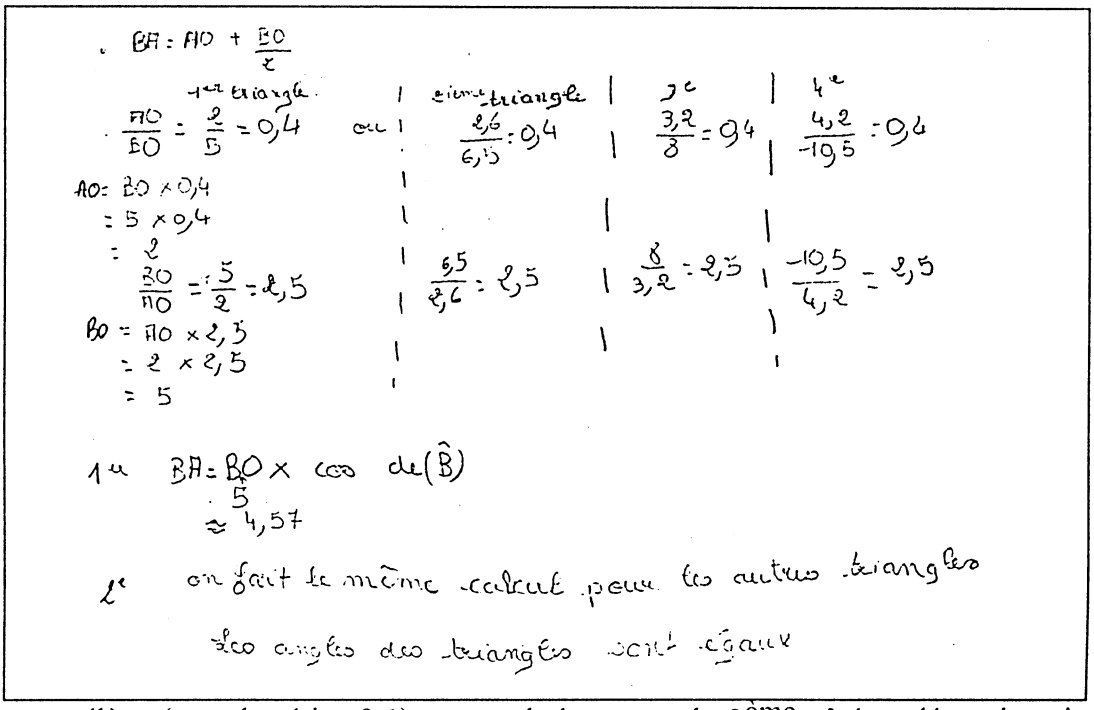
*Calcul de la longueur AB avec cos $\hat{B}$*

$BA \approx 5 \times \cos de (\hat{B})$
$\approx 5 \times$
$\approx 4,6$

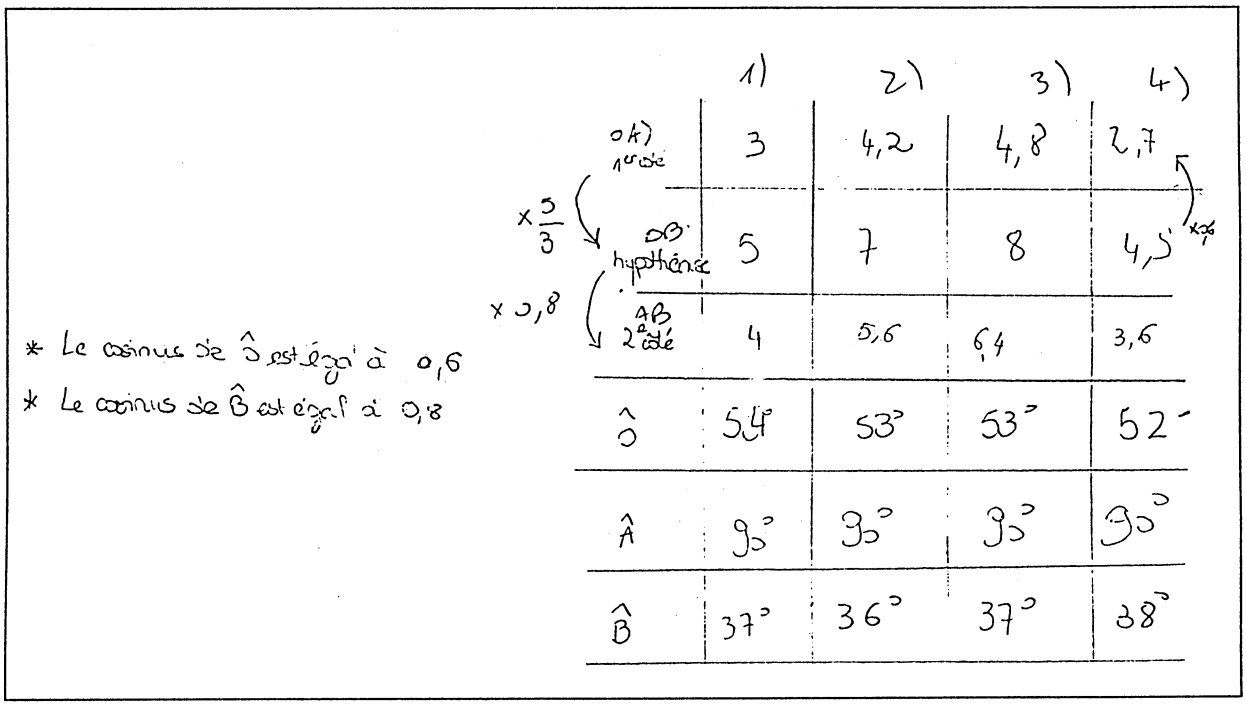
$BA = 6,5 \times \cos de (\hat{B})$
$\approx 5,93...$

$BA = 8 \times \cos de (\hat{B})$
$\approx 8 \times 0,913545457$
$\approx 7,30836...$

$BA \approx 10,5 \times \cos de (\hat{B})$
$\approx 9,572227306...$




Un autre élève (avec la série n° 1) mesure la longueur du 3ème côté et détermine ainsi les cosinus des deux angles ( $\cos\hat{O} = 0{,}6$ et $\cos\hat{B} = 0{,}8$ ). Il fait apparaître le coefficient 0,6 et son inverse dont il donne l'écriture exacte $\frac{5}{3}$.



## 5- Analyse des réponses en classe de 3ème :

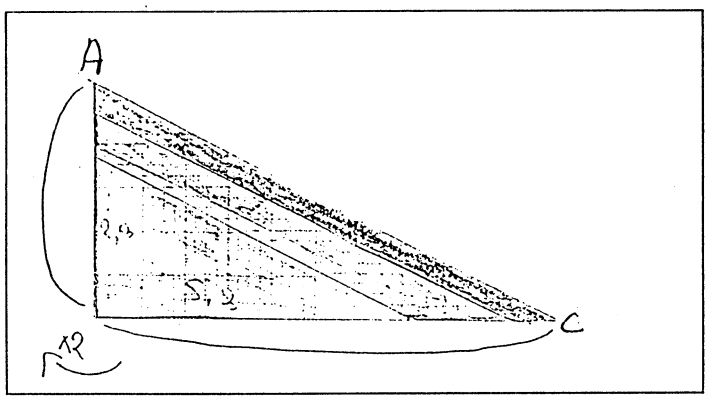
Cette activité a été également proposée dans des classes de 3ème en 1993-94 et 1994-95 en modifiant la consigne : *Le triangle OAB est rectangle en O.*

Ainsi OA et OB deviennent les longueurs des deux côtés de l'angle droit et la notion visée est alors la tangente.

### 5.1 Organisation des dessins :

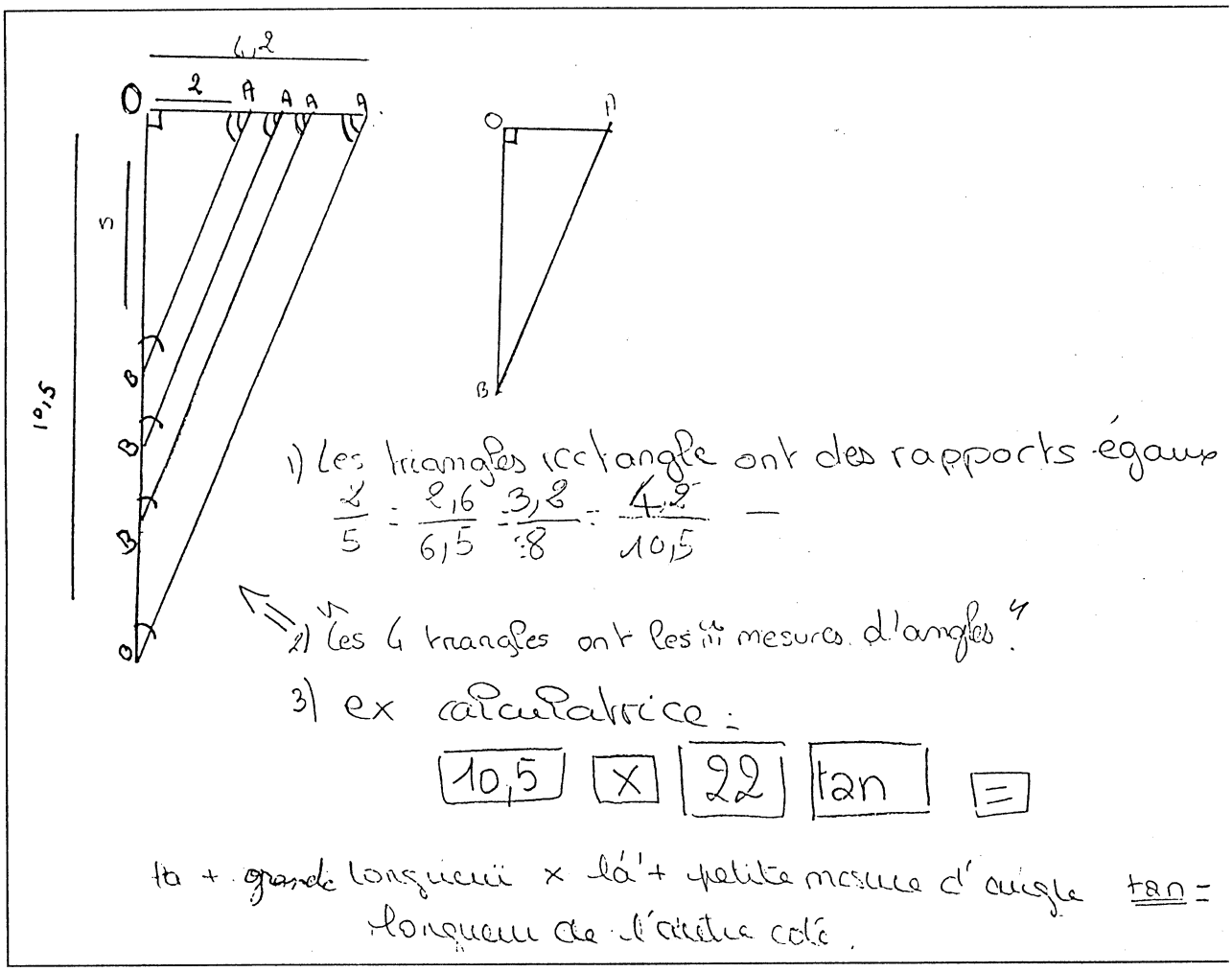
La modification de la consigne et l'apprentissage des propriétés de Thalès induisent une organisation des dessins. En effet, 71% des élèves superposent les triangles rectangles.

* 53% sur l'angle droit :

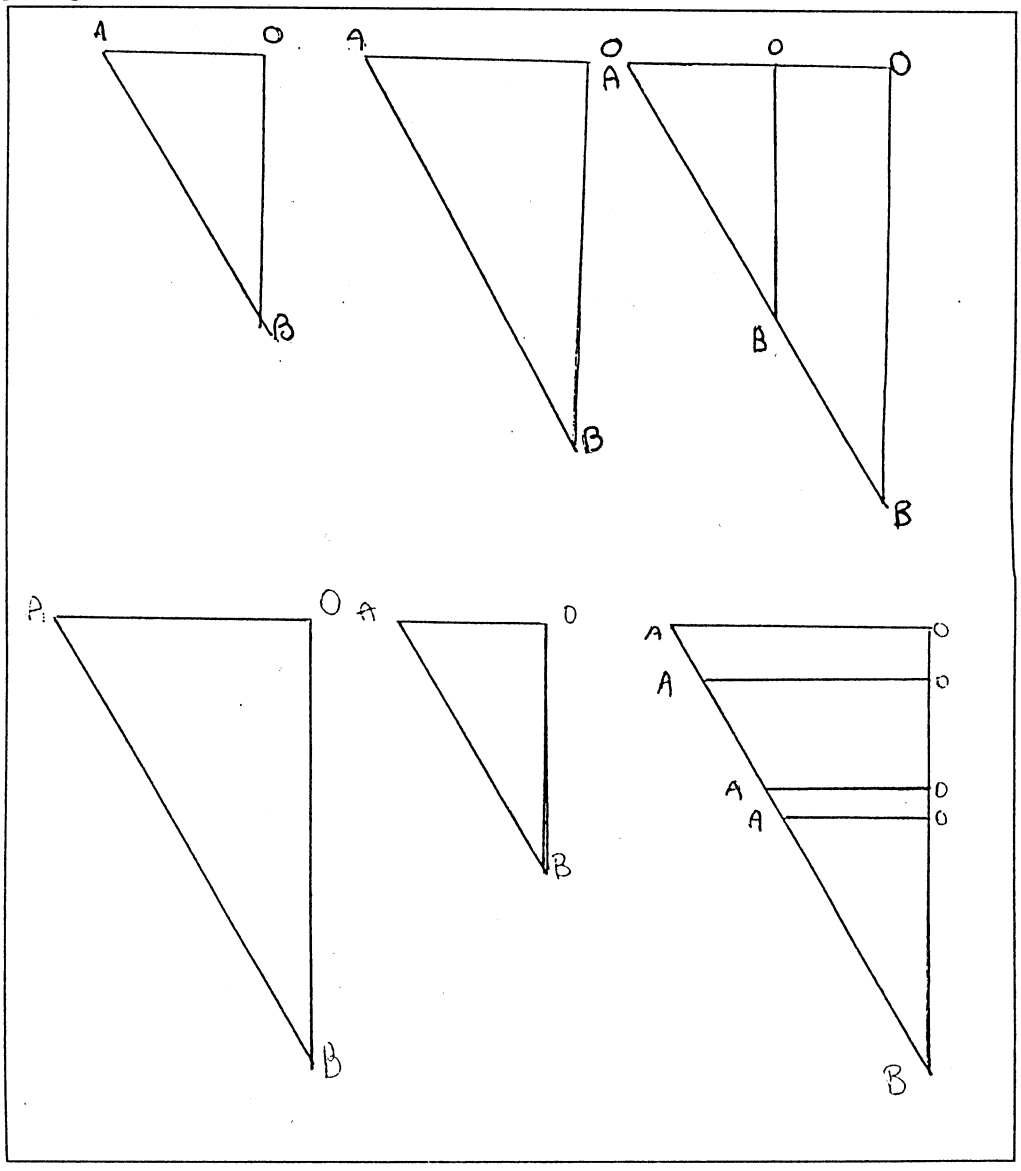



***Découpe des triangles rectangles et superposition des angles droits.***

Certains élèves les superposent sur l'angle droit Ô dès la construction.



* 18% avec un angle aigu :

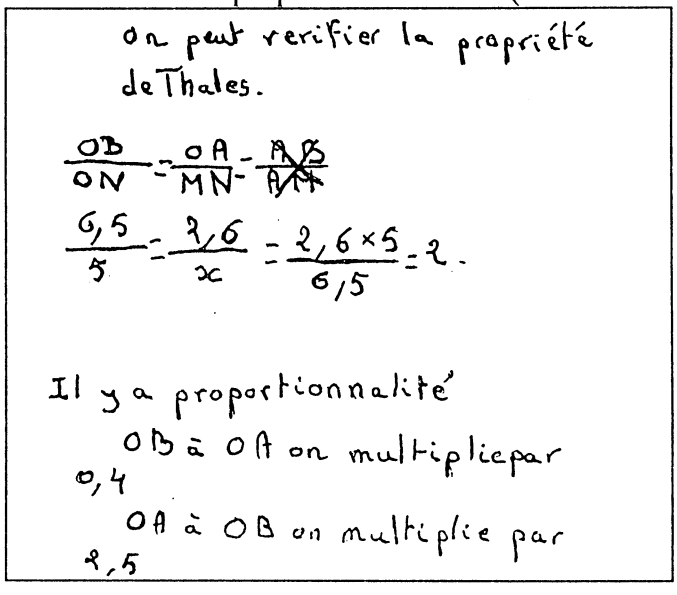


*Superposition sur l'angle aigu $\hat{B}$ après avoir réalisé les constructions et essayé de les superposer sur l'angle $\hat{A}$.*

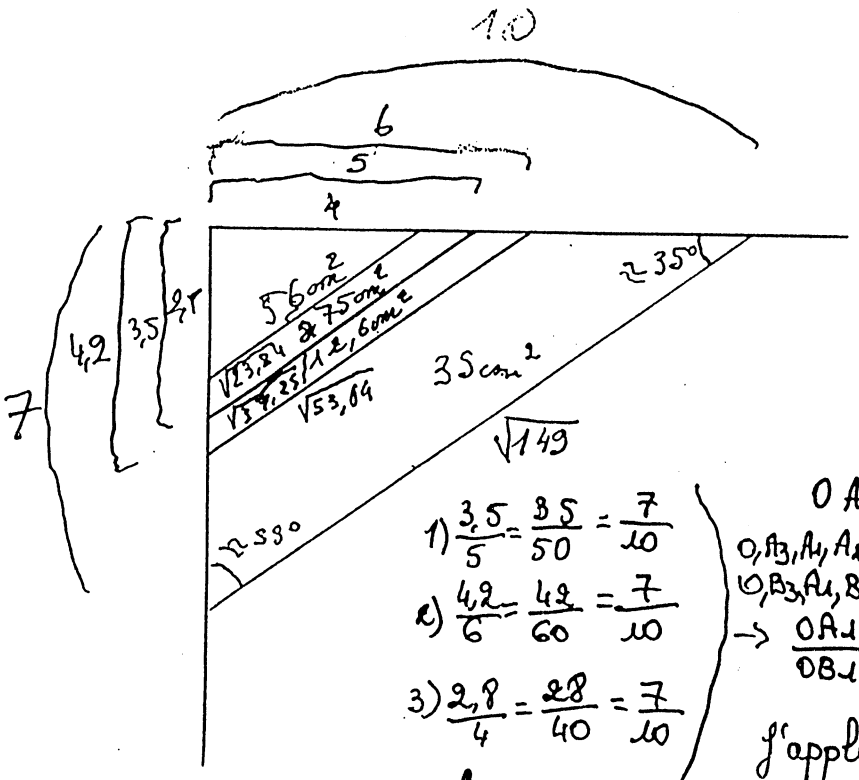
5.2 Analyse des procédures :

Cette reconnaissance de la situation de Thalès induit la découverte de la proportionnalité avec l'utilisation des différentes procédures analogiques ou analytiques. Leur répartition en pourcentage est sensiblement la même que celle décrite dans la brochure "Vers la propriété de Thalès" (I.R.E.M. de Rouen 1994).

*Calcul d'une quatrième proportionnelle et ensuite apparition de coefficients de proportionnalité.*



25% des élèves utilisent les propriétés de Thalès dans les calculs comme cet élève qui démontre le parallélisme des hypoténuses et l'égalité des mesures d'angles en utilisant la réciproque.




$\cos \hat{B_4} = \frac{10}{\sqrt{149}}$ $\left(\frac{10}{\sqrt{149}}\right)^2 = \frac{100}{149}$

$\cos \hat{B_2} = \frac{6}{\sqrt{53,64}}$ $\left(\frac{6}{\sqrt{53,64}}\right)^2 = \frac{36}{53,64} = \frac{100}{149}$

$\cos \hat{B_1} = \frac{5}{\sqrt{37,25}}$ $\left(\frac{5}{\sqrt{37,25}}\right)^2 = \frac{25}{37,25} = \frac{100}{149}$

$\cos \hat{B_3} = \frac{4}{\sqrt{23,84}}$ $\left(\frac{4}{\sqrt{23,84}}\right)^2 = \frac{16}{23,84} = \frac{100}{149}$

Les carrés sont égaux et de même signe, donc ils sont égaux

1) $\frac{3,5}{5} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

2) $\frac{4,2}{6} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$

3) $\frac{2,8}{4} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$

4) $\frac{7}{10}$

$OA_1B_1$ Triangle

$O, A_3, A_1, A_2, A_4$ alignés ds cet ordre

$O, B_3, A_4, B_2, B_4$ alignés ds cet ordre

$\rightarrow \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{OA_4}{OB_4}$

J'applique la réciproque de TR2 :

$(A_3B_3) // (A_1B_1) // (A_2B_2) // (A_4B_4)$

$\frac{OA}{AB} = \cos \hat{A}$ $\frac{OA}{AB} = \sin \hat{B}$ $\frac{OA}{OB} = \tan \hat{B}$

$\frac{OB}{AB} = \cos \hat{B}$ $\frac{OB}{AB} = \sin \hat{A}$ $\frac{OB}{OA} = \tan \hat{A}$

## 6- Conclusion :

Cette activité en 4ème permet d'introduire la notion de cosinus en faisant prendre conscience de la proportionnalité des longueurs pour un angle donné. La définition du cosinus n'est introduite qu'à la fin de l'activité et est présentée comme un codage d'un coefficient de proportionnalité.

La variation du cosinus d'un angle en fonction de sa mesure est mise en évidence lors du travail de groupe et peut être visualisée dans le cadre graphique par la construction d'une courbe.

La gestion de cette activité permet une différenciation du travail. Les élèves qui éprouvent quelques difficultés disposent de mesures simples et peuvent donc découvrir la proportionnalité plus rapidement. Ils sont souvent amenés à aider leurs camarades et voient ainsi leur travail valorisé.

Cette activité peut être certainement améliorée. On peut modifier les données numériques par exemple :

- supprimer la série n° 3 qui donne un angle de 45°,
- introduire une deuxième série faisant apparaître un coefficient déjà donné (0,4 par ex.),
- introduire une série de données avec le coefficient 0,8 qui donnera ainsi des triangles rectangles semblables à ceux de la série n° 1 (coefficient 0,6) et permettra une confrontation sur les cosinus des deux angles aigus du triangle rectangle.

## III.3 Une approche de racine carrée

Le concept de racine carrée est un objet d'enseignement qui est reconnu "à problème". Connaître l'origine d'un concept, les obstacles de construction qui ont été rencontrés au cours de l'histoire, permet de comprendre en quoi les difficultés d'ordre didactique se nourrissent des difficultés épistémologiques. Avant d'envisager la notion de racine carrée comme un savoir à enseigner, puis un savoir enseigné, la connaissance de cette problématique aide à cerner les difficultés propres à ce concept et à créer des situations qui gomment les obstacles.

### A- Conceptions de l'histoire

La première grande rupture de l'histoire des mathématiques a été provoquée par l'échec de la recherche d'une "commune mesure" entre le côté d'un carré et sa diagonale. En effet, si on considère la diagonale d'un carré de côté 1, l'application du théorème de Pythagore permet de faire apparaître une longueur dont le carré est 2. Pour les Grecs, au 5 ème siècle avant J.C., les nombres sont seulement entiers ou fractionnaires, toutes les conceptions sur le nombre en sont bouleversées : il n'y avait pas de nombre dont le carré soit 2 ! Ce qui revient à dire qu'il n'y avait pas assez de nombres pour mesurer certaines grandeurs, qu'il n'existait aucune unité de mesure qui soit susceptible de mesurer les deux longueurs, le côté et sa diagonale. Diverses tentatives[1] ont été produites pour déterminer des réponses rationnelles à la mesure de la diagonale. L'échec de ces tentatives a déclenché la découverte de nouveaux objets auxquels on n'accorde pas le statut de nombres et a conduit à une véritable crise, "la crise des irrationnels". Ces nouveaux nombres, que l'on dit "inexprimables" (alogos) se sont finalement imposés, surtout parce que, au sens de la géométrie grecque, ils sont constructibles à la règle et au compas.

L'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré est une remise en cause "dramatique" de la rationalité du rapport de certaines grandeurs, remise en cause dont le pas a été franchi lentement. Ce problème se ramène, en fait, à un problème de duplication du carré. On trouve trace de ce problème de duplication dans le Ménon de Platon où Socrate demande à un jeune esclave si l'on peut obtenir "un espace carré qui serait le double d'un espace carré de quatre pieds".

Au 5ème siècle avant J.C., l'existence d'une solution arithmétique est encore inacceptable, la solution ne peut être que géométrique, et encore, cela nécessite de distinguer longueur physique et longueur mathématique. En effet, si l'on considère des dessins, tous les segments sont commensurables puisqu'on peut physiquement les mesurer. A contrario, si l'on considère le côté du carré comme un objet idéal, et non celui qui est dessiné, on arrive à l'incommensurabilité avec la diagonale. Pour démontrer l'incommensurabilité, il faut avoir l'idée de son existence, ce qui était loin d'être une évidence pour l'époque.

Hippocrate de Chios transforme le problème de la duplication du carré en la recherche de la construction géométrique[2] de la moyenne proportionnelle de deux segments. Ce qui se traduit en langage littéral par : $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ $x^2 = a\,b$ et avec $a = 1$ $b = 2$ $x^2 = 2$.

En ce qui concerne les nombres eux-mêmes, la preuve par l'absurde, avec la méthode du pair et de l'impair[3], conduit à montrer que $\sqrt{2}$ ne peut être rationnel. C'est chez Aristote (Analytiques I) que l'on trouve pour la première fois trace de ce raisonnement par l'absurde. On peut sans doute y voir l'influence d'Euclide (Livre X sur les quantités irrationnelles) et de la dialectique platonicienne ("Tout est nombre"). La reconnaissance de l'incommensurabilité est,

---

[1] Szabo "Les débuts de la mathématique grecque"
[2] Euclide "Les éléments" Livre VI Proposition 13.
[3] Voir "Histoire des Mathématiques pour les collèges, CEDIC pp. 68-69

en germe, la distinction entre nombre et grandeur, entre arithmétique et géométrie. Au départ, comme dans le problème du Ménon, "la diagonale est reconnue dans son être puisqu'elle devient côté du nouveau carré, mais ce n'est qu'un être de géométrie et non arithmétique". La définition du nombre est un obstacle épistémologique (au sens de Bachelard) à la construction des incommensurables.

Depuis l'Antiquité et pour répondre à des besoins de calcul, diverses réponses ont été apportées pour déterminer les racines carrées de nombres. Les Babyloniens ont donné des approximations : si N est un naturel, $N= a^2 + r$, $a + \frac{r}{2a}$ est une valeur approchée de $\sqrt{N}$. Les Grecs ont donné des encadrements de racines carrées. Héron propose un algorithme de calcul : si un carré a pour aire N et son côté x, chercher x tel que $x^2 = N$, revient à chercher x tel que $x = \frac{N}{x}$. Après avoir choisi une valeur approchée pour x, on trouve une autre approximation en prenant $\frac{1}{2}(x + \frac{N}{x})$ soit la moyenne arithmétique, puis on réitère la démarche.

De meilleurs procédés d'approximations ont été établis par les mathématiciens arabes dès Al Khawarizmi (780-830).

Au 13ème siècle se développent des techniques de résolution des équations et les fractions continues sont découvertes, ce qui permet d'améliorer encore les techniques de calculs approchés.

Le calcul de Bombelli (16ème) permet d'obtenir une plus grande approximation de $\sqrt{2}$, comme développement de fraction continue.

$$f_1 = 1 + \frac{1}{2} \qquad f_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad f_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + f_n}$$

Au cours de l'histoire, on voit donc le cheminement de la pensée :
- existence de nombres autres que rationnels.
- recherche d'approximations numériques.
- calculs sur les radicaux (plus tardivement).

Dans ces trois registres le statut de la racine carrée apparaît comme différent :
- nombre pouvant être rationnel ou irrationnel.
- valeur approchée par des nombres existants.
- objet d'opération.

La reconnaissance de l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré se traite dans deux cadres différents, géométrique et arithmétique et débouche sur l'idée d'existence de nouveaux nombres. C'est ce problème de duplication "existe-t-il un carré double de celui qui est donné" qui a servi de base à l'élaboration d'une activité.

## B- Et les programmes?

La première vision de la racine carrée par les élèves se fait à travers la calculatrice. La notion n'apparaît pas en 6ème - 5ème. Mais dans la majorité des cas la touche $\sqrt{\ }$ figure sur une simple calculette. La manipulation de cette touche peut conduire l'élève à se poser ou à nous poser des questions. A moins que ce ne soit un questionnement intérieur plus insidieux pour la suite des années et l'élaboration du concept racine carrée.

En quatrième, l'usage de la touche $\sqrt{\ }$ s'officialise. Le programme précise "calculer en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\ }$ un côté d'un triangle rectangle à partir de la

donnée des deux autres côtés". On peut voir là des traces de l'histoire. D'abord la relation entre le géométrique et le numérique : ce que l'on trouve est une mesure d'un segment, puis l'affichage de la calculatrice donne une valeur approchée de cette mesure.

Dans l'esprit des élèves, l'usage de la calculatrice ne risque-t-il pas de laisser la trace de la vision de $\sqrt{\ }$ comme étant un opérateur? L'action se fait sur des nombres et même sur le carré de nombres, ces nombres étant des valeurs approchées obtenues par le théorème de Pythagore, valeurs qui sont en fait des grandeurs. L'élève risque d'opérer sur ces nombres comme lors de la vision première de la notion de fraction, vue en tant que fraction d'une grandeur, vision qui risque de provoquer la non-compréhension lors du passage au nombre rationnel. De la même façon, se borner à utiliser la touche $\sqrt{\ }$ comme étant une touche opératrice manipulatoire, peut occulter le fait que dans sa globalité $\sqrt{a}$ est un nombre. En ce sens on peut parler d'obstacles épistémologiques pour les élèves.

Les commentaires du programme de 3ème sont en ce sens plus explicites " la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice utilisée dès la 4ème fournit une valeur approchée d'une racine carrée". Le savoir exigible demande de savoir que "si a est un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a". Puis les règles de calcul sont mises en place.

Racine carrée de a devient un objet sur lequel des opérations sont faites. Toute la question est de savoir si les opérations, sur ces objets racines carrées, suffisent à l'élève pour qu'il leur donne le statut de nombres.

Au collège, le seul problème d'enseignement du concept de racine carrée réside dans l'acceptation de l'existence de tels nombres et par là pose le problème de l'extension des ensembles de nombres qu'un élève a à sa disposition, sans qu'il soit fait référence à la rationalité ou l'irrationalité de tels nombres.

## C- Une activité pour introduire racine carrée

### 1- Les savoirs mathématiques

Le concept de racine carrée est rattaché à de nombreux problèmes que l'on peut traiter dans des cadres différents[4].

Cadre algébrique : résolution de l'équation $x^2 = a$.

Cadre des fonctions : vision de la fonction réciproque de la fonction "carré" $x \rightarrow x^2$.

Cadre graphique : recherche graphique des antécédents de a dans la fonction "carré".

Cadre géométrique : construction d'un carré d'aire a.

Au collège, seuls les cadres géométriques et algébriques subsistent dans les programmes de manière explicite. Les élèves risquent de se heurter à deux sortes de difficultés.

Un premier obstacle se situe au niveau des nombres disponibles. Même si l'élève a rencontré des écritures fractionnaires ou décimales, pour certains, la seule conception qu'ils ont du nombre est une conception de nombre entier. Pour ces élèves, racine carrée de a ne peut donc avoir d'existence que si a est un carré parfait.

Une deuxième difficulté réside dans la définition elle-même de la racine carrée de a. Même si ce n'est pas explicité, la définition de $\sqrt{a}$ implique une utilisation implicite de fonction réciproque, d'où des risques de confusion entre $\sqrt{a}$ et $a^2$ pour certains.

Pour les élèves de collège, le savoir sur la racine carrée ne se situe pas au niveau de la rationalité ou de l'irrationalité du nombre mais au niveau de l'existence de l'objet $\sqrt{a}$ lui-même. La construction d'un carré d'aire donnée pose le problème de l'existence de la mesure de la longueur du côté du carré. Une fois la construction réalisée, la mesure a-t-elle pour autant le statut de nombre? Dans un premier temps, il suffit peut-être que la mesure ait une existence pour les élèves.

---

[4] Bronner "Connaissances d'élèves Maliens à propos de la racine carrée" in Petit x n°28 pp.19-55.

## 2- Objectifs

Introduire la notion de racine carrée en passant d'un cadre géométrique à un cadre numérique. Faire évoluer les conceptions sur le nombre.

## 3- Description de la situation

3-1 Pré requis

- Le théorème de Pythagore.
- Constructions à la règle et au compas de triangles rectangles, de carrés.
- La notion de cosinus.
- Les propriétés du triangle rectangle isocèle.

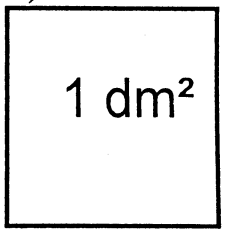
3-2 Consigne

Quatre formulations différentes :

*1°) Est-il possible d'obtenir un carré d'aire 2 dm² ?*

*2°) Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double d'un carré de 1 dm² ?*

*3°)*




*Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double ?*

(Le carré ci-dessus est celui de la consigne donnée aux élèves.)

*4°) Est-il possible d'obtenir un carré d'aire double? ( le carré qui accompagne la consigne est en grandeur réelle).*

3-3 Mise en oeuvre

Matériel

Chaque élève reçoit une consigne différente écrite sur une petite feuille et une feuille blanche. Les consignes 2 et 4 qui contiennent dans leurs formulations des aides (aire double, figure tracée en grandeur réelle) sont distribuées aux élèves d'un niveau moyen ou faible.

Des feuilles blanches ou de couleur seront distribuées par groupe.

L'usage de la calculatrice n'est pas suggéré mais fait partie du bagage scolaire du collégien de 3ème.

Déroulement

1ère séance

Une première phase individuelle de recherche dure environ 10 minutes. Elle permet aux élèves de s'approprier la consigne, d'émettre des hypothèses sur l'existence du carré, de commencer des constructions, d'utiliser la calculatrice.

Lors d'un deuxième temps, les élèves sont regroupés à trois ou quatre ayant tous des consignes différentes. Très vite, les élèves se rendent compte que les consignes, bien que différentes dans leur formulation, posent en fait un même problème d'existence ou de construction d'un carré.

La phase de travail de groupe dure environ 30 minutes, pendant laquelle les élèves comparent leurs résultats et constructions, font évoluer leurs procédures. Ils constituent un dossier avec leurs feuilles individuelles et un document rédigé en commun par le groupe,

document présentant la méthode sur laquelle ils se sont mis d'accord. Il peut aussi leur être demandé de présenter le document sur transparent, s'il y a un rétroprojecteur en classe.

Comme aide éventuelle, on peut suggérer de construire le carré et rappeler que 1 dm est égal à 10 cm. Pour les groupes les plus rapides, on peut demander de trouver d'autres méthodes pour obtenir le carré.

2ème séance

Le professeur fait exposer par un élève de chaque groupe les différentes méthodes trouvées ou projette chaque transparent. L'ordre de passage est déterminé à l'avance : d'erreurs manifestes de raisonnement vers des méthodes de plus en plus élaborées.

Une synthèse permet de définir $\sqrt{2}$ et d'élargir à $\sqrt{a}$ avec a positif.

Une distinction est établie entre valeur exacte et valeur approchée.

Le reste de la séance est basé sur la mise en place des différents aspects de racine carrée de a liés à la définition :

- on souligne l'aspect opératoire, $\sqrt{a}$ est un nombre b tel que $b^2 = a$.
- on souligne le domaine de validité, a est positif ou nul.
- la situation permet de mettre en relief la condition $\sqrt{a}$ est positif ou nul, et le caractère d'unicité b est le seul nombre positif tel que $b^2 = a$.

Des exemples numériques sont donnés et les élèves travaillent sur des exercices liés à la définition.

**4-Analyse a priori**

Cadres de résolution

La situation permet de faire cohabiter deux cadres différents, numérique et géométrique. Les élèves sont regroupés avec différentes consignes pour que les confrontations dans les deux cadres soient possibles. La différenciation des consignes donne des renseignements supplémentaires. Chaque mot, chaque dessin des consignes a son importance. Par exemple, la consigne 2 part d'un carré de 1 dm² et le mot double suggère l'idée de construire un deuxième carré. La consigne 3 ou la 4 concrétise le carré de départ et ce carré dessiné suggère l'idée de travailler sur cette figure, de faire éventuellement des constructions annexes. La différenciation des consignes aide à la remise en cause des conceptions "le nombre $\sqrt{2}$ n'existe pas, pourtant le carré est constructible".

Le premier cadre de résolution du problème, le cadre numérique, est lié à une problématique d'extension des ensembles de nombres : il n'y a pas assez de nombres pour mesurer certaines grandeurs. Dans ce domaine l'existence ou la non-existence de $\sqrt{a}$ risque de se heurter à certaines conceptions des nombres chez l'élève :

- Une conception carré parfait.

De nombreux élèves restent avec une conception d'existence des seuls nombres entiers. Pour ces élèves les seules racines carrées existantes sont $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \ldots$ $\sqrt{2}$ n'existe pas et il y a alors rejet de l'existence du carré.

- Une conception approximation.

En liaison avec l'usage de la calculatrice, $\sqrt{a}$ existe. L'écran de la calculatrice donne une valeur numérique, pour autant le statut de $\sqrt{a}$ en tant que nombre irrationnel n'est pas clair.

- Une conception nombre.

$\sqrt{a}$ sert à mesurer une grandeur. $\sqrt{a}$ est un nombre, qui existe et dont une valeur approchée est fournie par la calculatrice. $\sqrt{a}$ est solution d'une équation $x^2 = a$. Le choix de a, lié au caractère du nombre est donc une première variable didactique, les calculs doivent rester simples pour les élèves et en même temps permettre la déstabilisation par rapport à la conception carré parfait.

Le deuxième cadre de résolution du problème est un cadre géométrique. $\sqrt{a}$ sert à mesurer une grandeur, $\sqrt{a}$ est la longueur du côté du carré d'aire a. Le problème se transforme en la construction d'un carré. L'appréhension de la figure par les élèves met en oeuvre différentes approches et procédures.

- Approche globale du carré.

Les élèves s'essaient à construire un carré en voyant le carré dans son ensemble. C'est à dire qu'ils utilisent toutes les propriétés du carré : côté, angles, diagonales.

- Approche opératoire du carré.

Les élèves ont la possibilité de "casser la figure" et de la reconstituer autrement. Le carré est une figure obtenue par réorganisation de sous-figures, les sous-figures étant des triangles rectangles isocèles. L'approche du carré peut être alors une approche séquentielle d'organisation des sous-figures ou une approche discursive en tenant un raisonnement basé sur les propriétés des triangles rectangles.

Démarches possibles

1°) Dans le cadre numérique diverses approches et réponses sont possibles.

- Rejet a priori de l'existence du carré.
- Les élèves peuvent utiliser la machine à calculer et obtenir une valeur approchée de la solution. De manière implicite, cela suppose la recherche de la résolution de l'équation $x^2 = 2$. La calculatrice impose le passage par la touche $\sqrt{\ }$, naturellement les élèves sont conduits à l'écriture $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{\ }$ suivant l'ordre de frappe des touches de la calculatrice. Cependant la distinction entre valeur exacte du nombre $\sqrt{2}$ et sa valeur affichée par la calculatrice risque de ne pas se faire.
- A un autre niveau, certains peuvent poser la problématique de résolution de l'équation $x^2 = 2$. La recherche se fait uniquement par tâtonnement et par encadrements successifs.

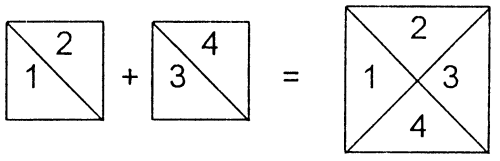
Cela demande de faire fonctionner le théorème en acte " si $a^2 < x^2 < b^2$ alors $a < x < b$ ", c'est à dire d'utiliser la fonction réciproque de la fonction "a pour carré". Là encore l'existence du nombre à chercher est prise en compte. Sa remise en cause en tant que nombre non décimal semble difficile, l'élève n'ayant pas le moyen de le prouver.

- Dans ce cadre, l'unité imposée peut être une difficulté. Le $dm^2$ n'étant pas une unité d'usage courant pour les élèves, ils risquent de passer au $cm^2$, avec toutes les erreurs de changement d'unité que cela implique. Les procédures signalées plus haut sont les mêmes pour $\sqrt{200}$ que pour $\sqrt{2}$.

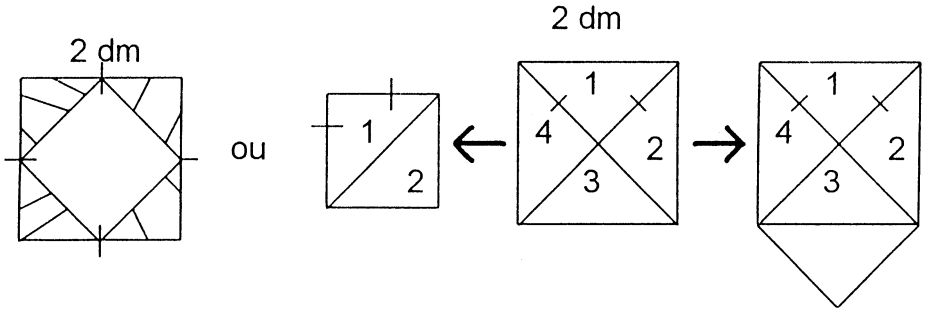
2°)Dans le cadre géométrique, la réponse peut être obtenue de plusieurs façons.

- Des découpages du carré de départ ou tracé par les élèves peuvent permettre de trouver des preuves de l'existence du carré d'aire 2 $dm^2$. L'obtention du carré se fait par tâtonnement ou par des raisonnements plus ou moins élaborés.

* A partir de deux carrés d'aire 1 dm :

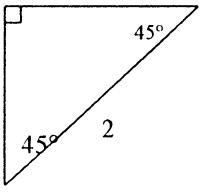



* A partir d'un carré de côté 2 dm, on peut obtenir au moins trois constructions :

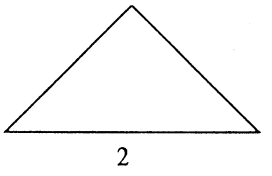



- Les élèves sont à la recherche d'un carré d'aire 2 dm². Les procédés sont les mêmes que précédemment par découpage mais obtenus par calcul. Ils ont à construire des triangles rectangles isocèles, tels que les 1-2-3-4 précédents :

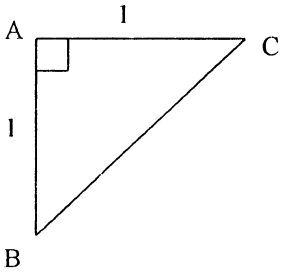
* L'hypoténuse mesure 2 et l'angle de base est 45°.




* L'hypoténuse mesure 2 et on trace le triangle à la règle et au compas.




* Les côtés de l'angle droit mesurent 1 et par utilisation du théorème de Pythagore on obtient l'hypoténuse de mesure $\sqrt{2}$ .




$1^2 + 1^2 = 2$

$BC^2 = 2$

**5-Analyse des réponses élèves**

Cette activité a été testée en 92/93, 93/94, 94/95 avec 81 élèves.

Toutes les réponses obtenues relèvent des deux cadres numérique et géométrique, ces cadres étant le plus souvent reliés par les élèves. Très souvent ils transforment 2 $dm^2$ en 200 $cm^2$.

Procédures numériques

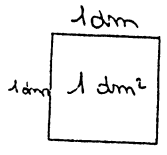
a- Certains élèves (5%), écrivent d'emblée que ce n'est pas possible. Ceux-là ont une conception des nombres existant uniquement entiers ou fractionnaires. $\sqrt{2}$ ne peut exister puisque 2 n'est pas un carré parfait.

Puisque l'aire d'un carré, c'est le côté multiplié par le côté et que les côtés ont la même mesure On ne peut pas faire l'aire de 2 $dm^2$

b- 18,5% des élèves utilisent leur calculatrice et travaillent sur la valeur affichée de $\sqrt{2}$ ou de $\sqrt{200}$. La différenciation entre valeur exacte et valeur approchée ne se fait que lentement par les élèves.

La moitié d'entre eux se contentent de construire un carré de côté 14,1 cm en prenant 14,1 comme valaur approchée de $\sqrt{200}$. Certains remettent en cause la valeur affichée par la calculatrice.

Exemple 1




1,4142136² = 2

Le résultat ne tomberait pas juste.

Il est donc impossible d'obtenir un carré d'aire double, les mesures ne seront pas exact

c = 1,4142136 dm

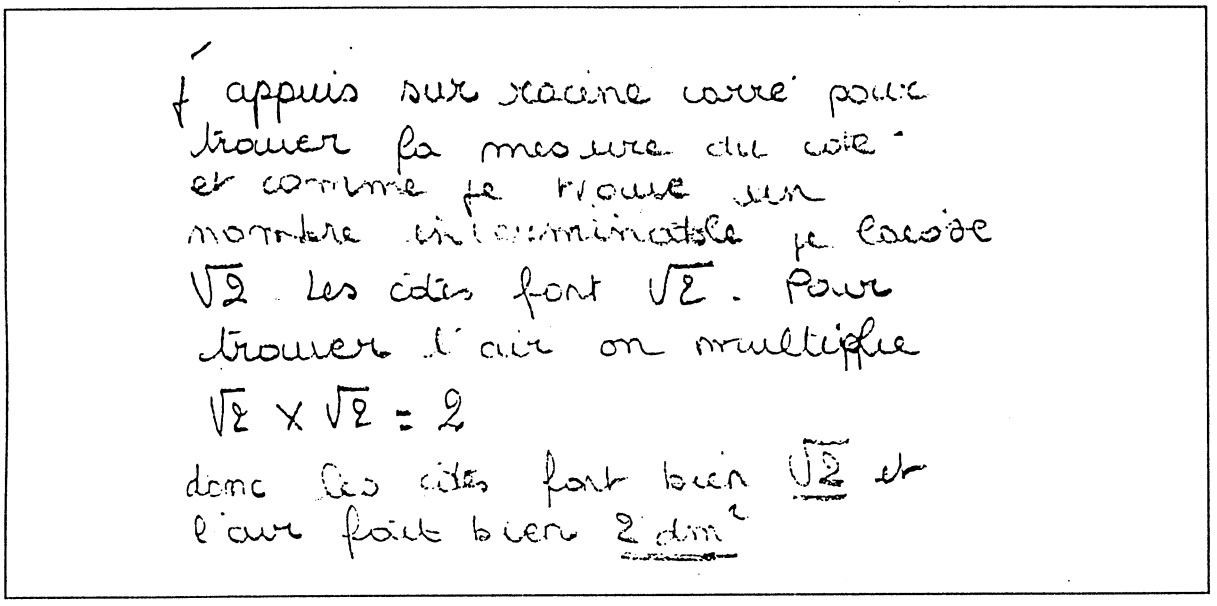
Exemple 2

$\sqrt{200} = 14$ ($\simeq 14{,}1$)

aire d'un carré = c²

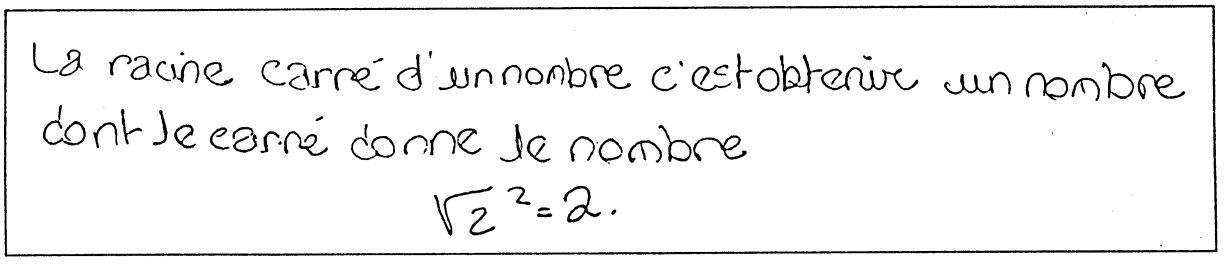
J'ai construit un carré de 14 cm mais son aire est de 196

Parmi ces élèves, quelques-uns retournent à une conception "carré parfait" et rejettent l'existence du carré, comme dans la première procédure. D'autres cherchent des procédés de construction géométrique et préconisent l'usage de $\sqrt{2}$ .

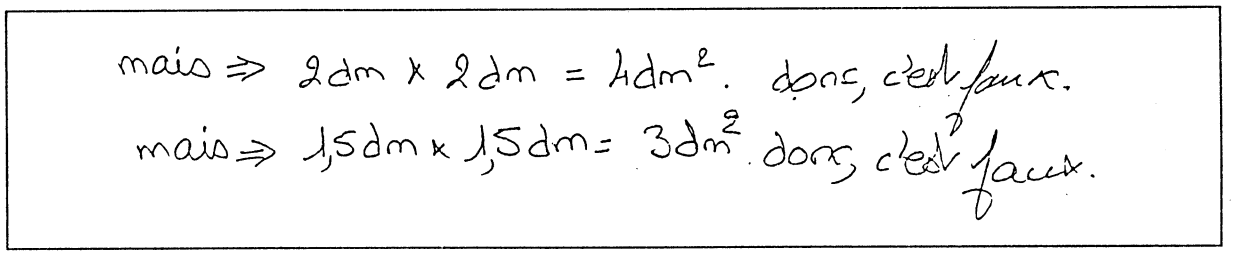

j'appuis sur racine carré pour trouver la mesure du coté et comme je trouve un nombre interminable je laisse $\sqrt{2}$ Les côtés font $\sqrt{2}$. Pour trouver l'air on multiplie
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
donc les côtés font bien $\sqrt{2}$ et l'air fait bien 2 dm²

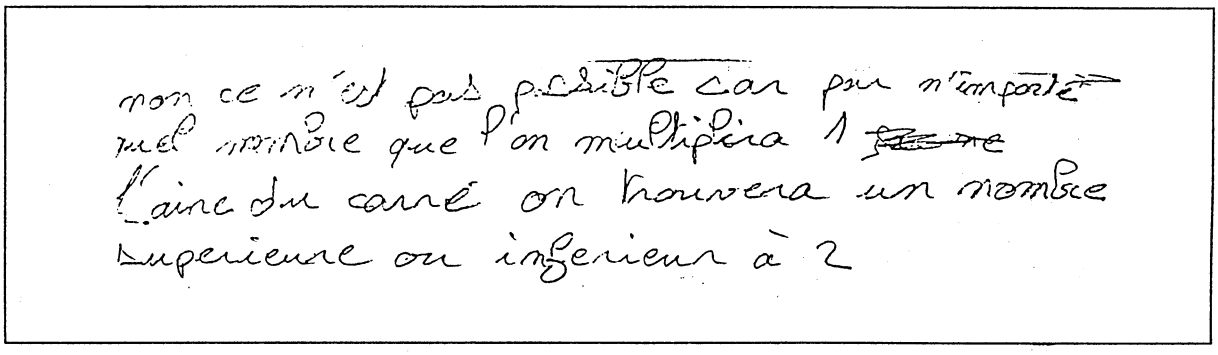
Même si les élèves écrivent $\sqrt{2}$, racine carrée est une opération que l'on fait sur le nombre 2 par l'intermédiaire de la touche $\sqrt{}$. $\sqrt{2}$ n'est pas compris par ces élèves comme étant un nombre.

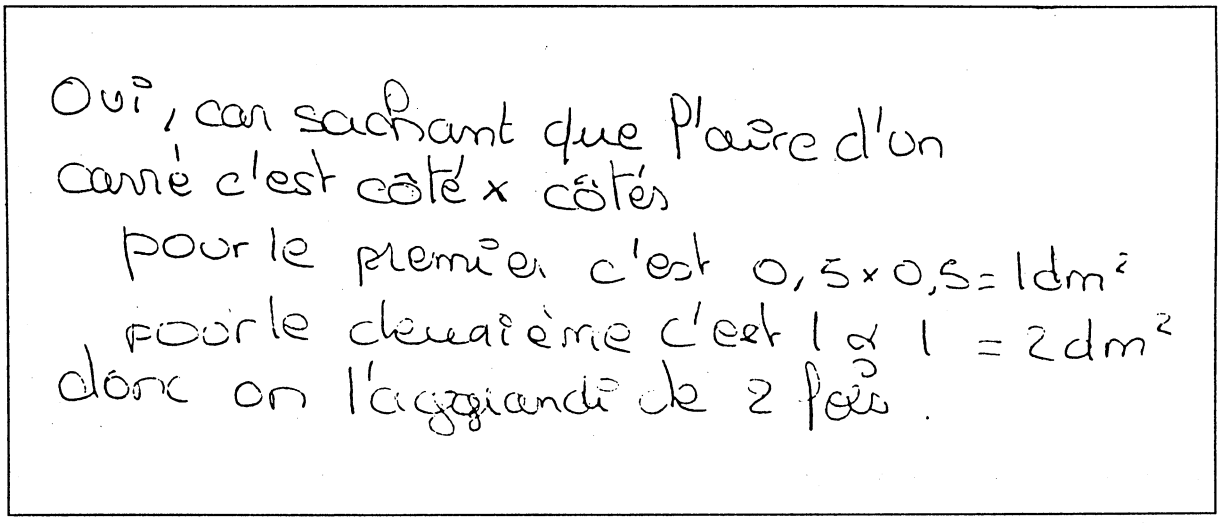
c- Sans que ce soit écrit de façon explicite, 13,5% des élèves cherchent une solution à l'équation $x^2 = 2$. En fait, ils restent plus dans une approche numérique que dans une approche algébrique. Deux d'entre eux se contentent de l'écriture $\sqrt{2}^2 = 2$.


La racine carré d'un nombre c'est obtenir un nombre dont le carré donne le nombre
$\sqrt{2}^2 = 2$.

Les autres procèdent par tâtonnement avec plus ou moins de réussite.


mais ⇒ 2dm x 2dm = 4dm². donc, c'est faux.
mais ⇒ 1,5dm x 1,5dm = 3dm² donc, c'est faux.

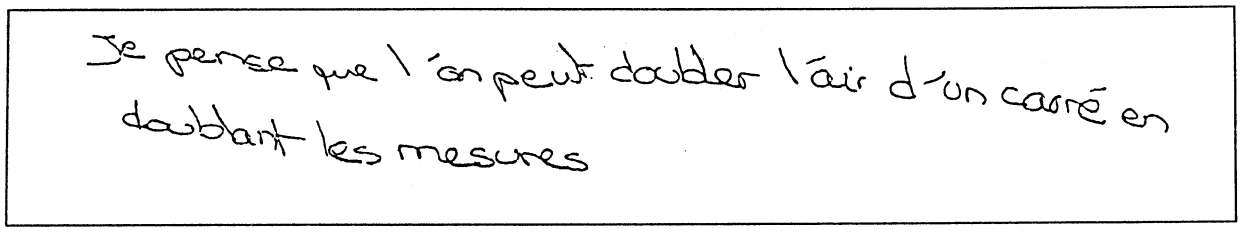



Devant l'obstacle de $\sqrt{\ }$, il y a résurgence de la confusion entre × et + , la différence entre les deux opérations n'est pas stable.

Souvent ces élèves butent sur une confusion de variation entre les aires et les périmètres, et mettent en oeuvre le théorème en acte suivant "si le périmètre augmente alors l'aire augmente".

d- Dans le même registre de confusion : pour 6,5% des élèves, si l'aire double, le côté double. Ils en restent là sans remise en cause de leur raisonnement même après avoir construit pour certains le carré de côté 2 dm.




Cette confusion est du même ordre que celle qui existe entre aire et périmètre et celle qui existe entre × et + . Cela est sans doute lié à un problème de proportionnalité dans la notion de double.

Les élèves qui ont utilisé des procédures numériques sont ceux qui rejettent le plus souvent l'existence du carré. En effet le cadre numérique ne permet pas d'obtenir facilement une preuve acceptable. Ils ont conscience qu'ils butent sur une difficulté qui les dépasse. Il leur faudrait remettre en cause leur conception du nombre. Ce sont ceux-là qui sont en plein dans leur "crise des irrationnels".

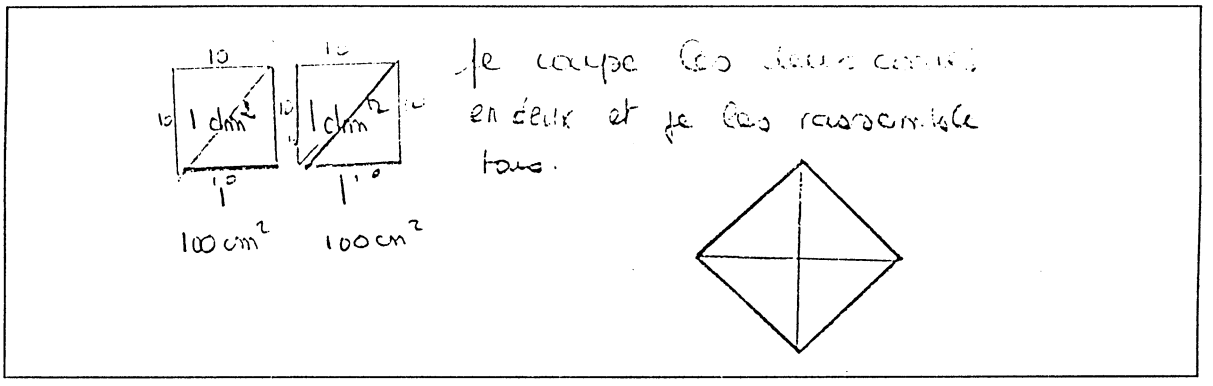
Procédures géométriques

Les procédures géométriques sont préférées par près des 3/4 des élèves et même si certains restent dans un cadre numérique, souvent des figures sont tracées.

Suivant leur analyse du problème, leur façon d'appréhender la figure, les recherches sont différentes. Certaines sont obtenues par décomposition et recomposition de figures, d'autres par des raisonnements plus élaborés.

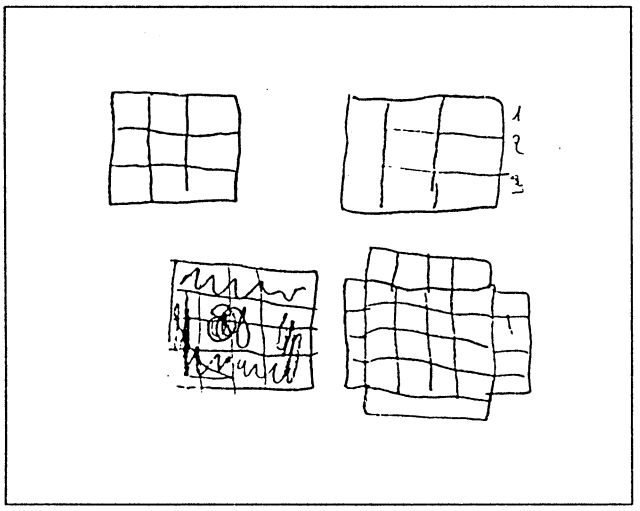
a- 19,5% des élèves utilisent des preuves à base de découpage. Souvent en classe de 4ème, le théorème de Pythagore est introduit en découpant et en reconstituant des figures. L'effet d'enseignement est sensible ici.

Certains découpent deux carrés d'aire 1 dm² par la diagonale puis les assemblent pour former un carré d'aire 2 dm² (cf. annexe 3).

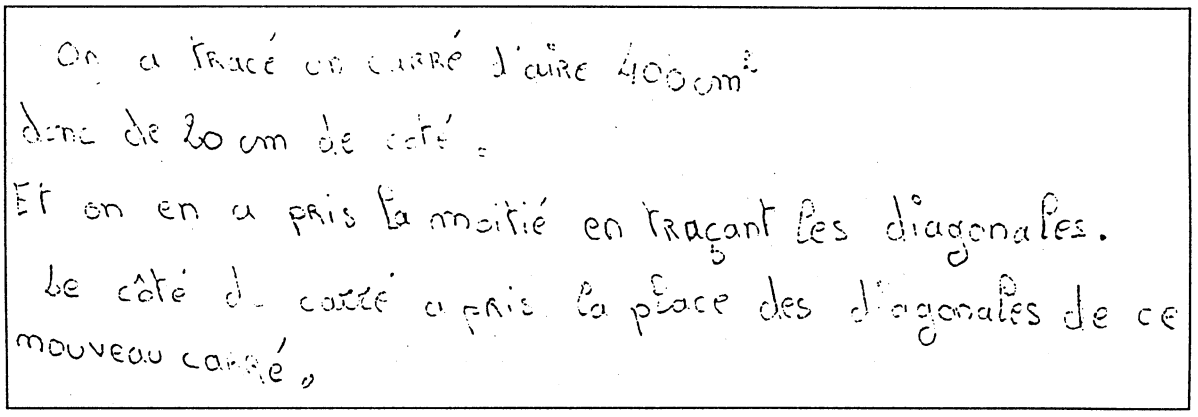


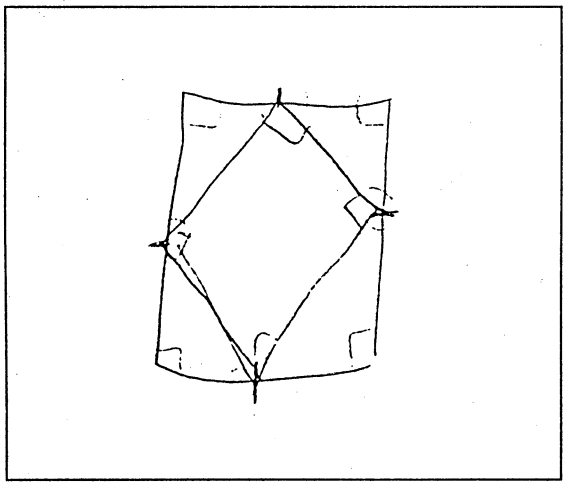

Ces élèves ne doutent pas de l'existence du carré, ils ne se posent aucune question sur la mesure du côté. On retrouve ici la solution contenue dans le Ménon de Platon.

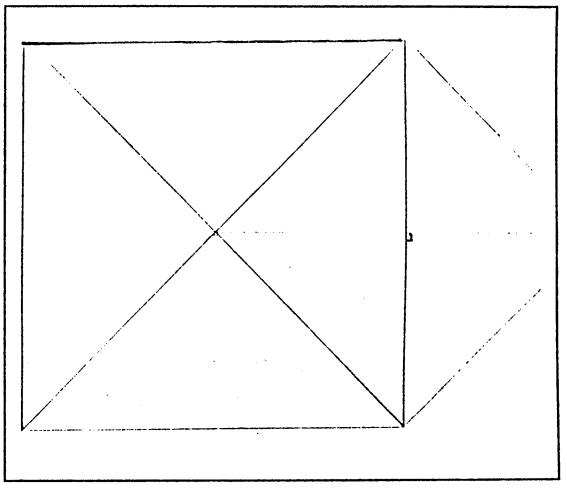
D'autres quadrillent deux carrés d'aire 1 dm² avec une unité de mesure d'aire qu'ils font évoluer suivant leur recherche et reconstituent un nouveau carré d'aire 2 dm². Certains le font sur quadrillage mais d'autres vont jusqu'à découper physiquement et assemblent les morceaux. Cinq élèves ont utilisé ce procédé, sans réussite. Ils sont dans l'impossibilité de trouver une unité commune pour mesurer avec des nombres rationnels le côté et la diagonale du carré. C'est la recherche de la commune mesure des Grecs de l'Antiquité.



b- Pour 22% des élèves, c'est une construction fausse qui leur permet de trouver une solution. Ils commencent par tracer un carré de côté 2 dm, puis par différents procédés cherchent à faire apparaître un carré d'aire moitié.

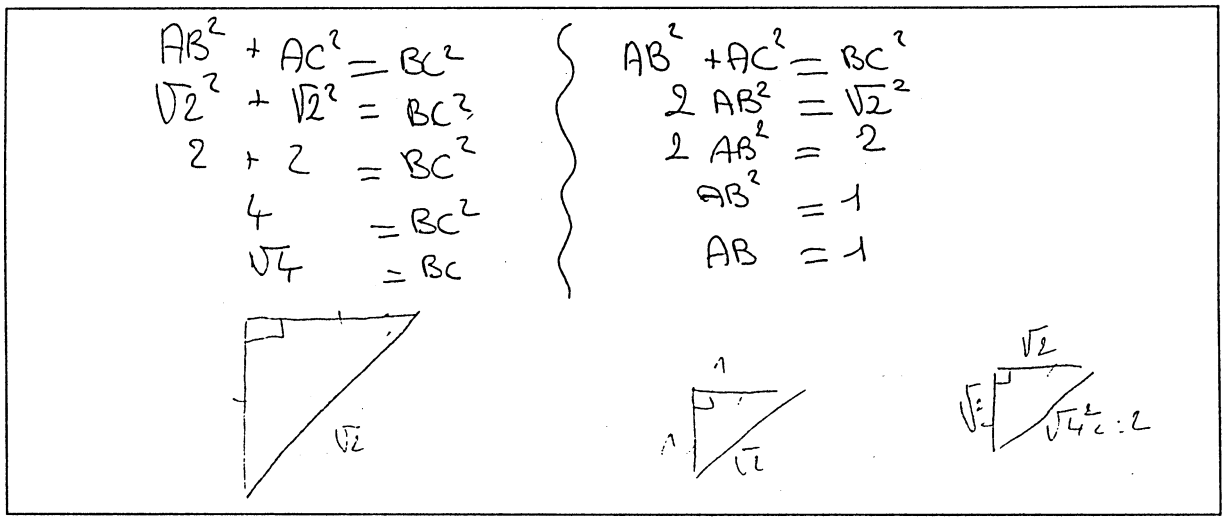


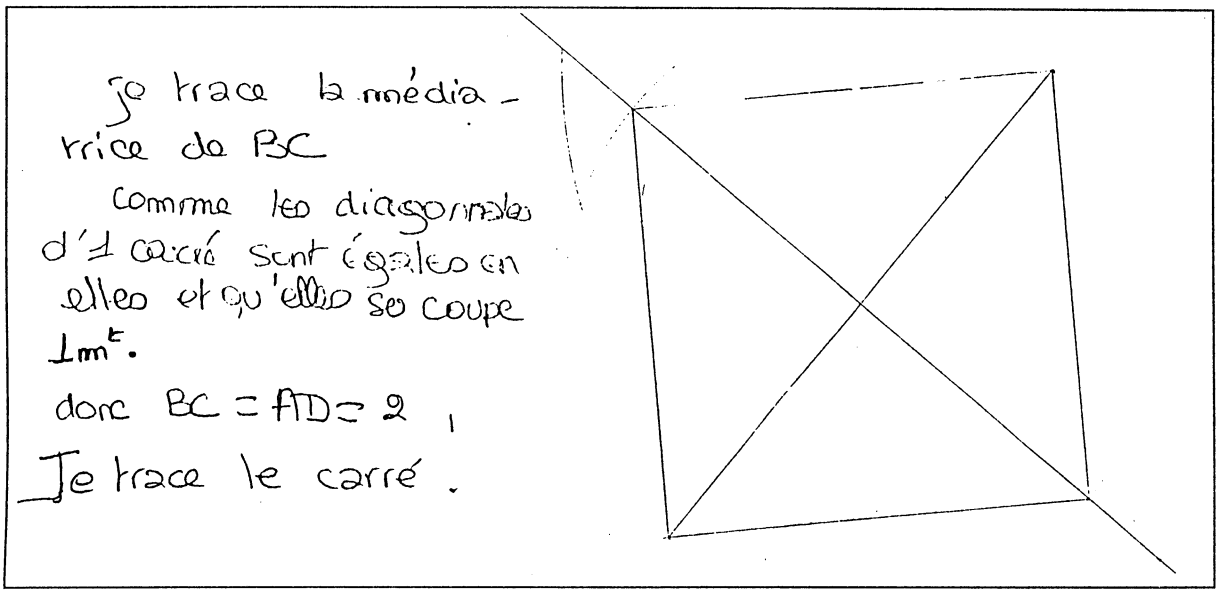


Seule l'existence du carré est atteinte, la valeur numérique de la mesure du côté n'est pas recherchée. La consigne permet en effet de s'arrêter là.

c- 17,5% des élèves utilisent les propriétés des triangles rectangles isocèles. Ils cherchent à construire un triangle rectangle isocèle soit de côté mesurant $\sqrt{2}$, soit d'hypoténuse mesurant $\sqrt{2}$.



Certains construisent le carré à la règle et au compas.




Pour ces élèves, aucun doute n'est possible, le carré existe et la mesure de la longueur du côté est un nombre à valeur exacte. La distinction entre le dessin et la figure est réalisée. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre irrationnel mais c'est un nombre considéré comme la mesure idéalisée du segment idéal.

Les élèves qui ont utilisé les propriétés des triangles rectangles isocèles n'ont qu'une vision locale de la figure. C'est une approche plus abstraite du problème, cependant c'est cette approche qui permet d'obtenir une preuve formalisée de l'existence du carré. Ce ne sont pas forcément les meilleurs élèves qui pensent à cette solution, ce sont plutôt ceux qui maîtrisent parfaitement la technique de l'utilisation du théorème de Pythagore et de sa réciproque.

Le travail dans le cadre géométrique permet une réussite plus grande quant à l'exhibition d'une preuve de l'existence du carré.

Résumé des procédures

La répartition des démarches utilisées par les élèves est la suivante :

| **Procédures numériques** | | | | **Procédures géométriques** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Rejet du carré | Existence du carré | | Existence du carré | |
| Conception carré parfait | 5 % | | | Découpage de deux carrés | 19,5 % |
| Confusion valeur exacte valeur approchée | 6 % | 12,5 % | | Carré double | 22 % |
| Essai de résolution de $x^2 = 2$ | | 13,5 % | | Propriétés des triangles rectangles | 17,5 % |
| L'aire augmente, le périmètre augmente | | 6,5 % | | | |

L'existence du carré repose sur des preuves par réalisation de dessins. Tout le travail de validation et de formalisation va consister à faire prendre conscience aux élèves de l'approximation de la solution trouvée.

## 6 - Conclusion

Racine carrée est un concept lié à différentes notions mathématiques complexes qui ont cheminé lentement dans l'histoire avant d'être acceptées et définies.

Pour les élèves, racine carrée est source de nombreuses erreurs et nécessite de changer de point de vue sur les nombres. La conception carré parfait est un obstacle qui produit des réponses exactes dans certaines situations et des réponses invalidées dans d'autres. C'est une conception qui réapparaît souvent, même après de nombreuses erreurs et remises en cause. En ce sens, c'est un véritable obstacle épistémologique et didactique.

L'activité créée permet d'introduire $\sqrt{2}$ comme le nombre positif dont le carré est 2 . Les domaines de validité de $\sqrt{2}$ sont internes à la situation par le support d'une aire qui ne peut être que positive et de la mesure d'un côté, elle aussi positive.

Le travail de groupe, avec des consignes différentes permet de faire cohabiter des démarches dans des cadres différents. La remise en cause des conceptions premières sur la non-existence du carré semble alors plus facilement admise. De la même façon, ces différentes approches dans des cadres différents enrichissent le concept et doivent permettre de voir l'utilité de celui-ci.

Face à la situation du carré d'aire 2, les élèves s'investissent et leurs recherches sont riches et variées. La situation elle-même donne sens aux propriétés incluses dans la définition de $\sqrt{2}$ . C'est une étape entre le modèle "pythagoricien" de l'élève, lié au carré parfait, et le modèle mathématique, réciproque de la fonction carré. Il en reste d'autres à franchir, mais il semble que le pas de la définition soit franchi.

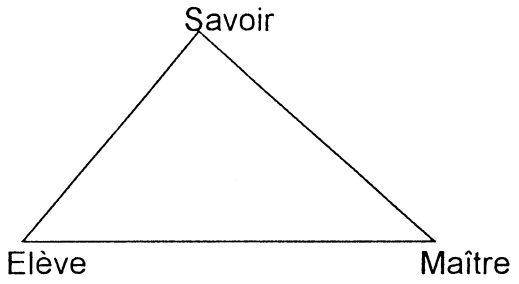
Les réponses des élèves sont très liées à leurs connaissances sur les nombres. Cette situation renseigne sur l'état cognitif des élèves par rapport aux nombres. Le niveau opératoire formel, dans la théorie piagétienne, permet une appréhension des nombres compatible avec la construction des irrationnels. Mais est-ce atteint par les élèves en fin de 3ème ?

# IV- DEBAT DE CLASSE

## IV.1- Le débat de classe. Pourquoi ? Comment ?

a) Qu'est-ce qu'un débat de classe ?

En classe on trouve, habituellement, la structure didactique connue :




Un débat scientifique permet de mettre en place une autre coutume où peut s'établir une problématique commune au niveau de la classe ainsi que des confrontations explicites entre les différentes significations que les élèves attribuent aux concepts traités.

Au cours du débat :

- Dans une première partie, il y a la production d'énoncés.
- Dans une deuxième partie, il y a DEBAT. Les élèves doivent se prononcer sur la validité des énoncés.
- Enfin il y a démonstration des énoncés validés. Les autres prenant le statut d'énoncés dont il faut se "méfier", "qu'on aimerait bien être vrais" comme dit M. Legrand.

b) Pourquoi un débat en classe de collège?

*** Pour ne pas répondre avant que les questions aient pris du sens.**

La compréhension (et la mémorisation) des situations qu'elles soient "découvertes" de concepts ou leurs mises en action demande que l'élève ait déjà activé d'autres connaissances (rappel de propriétés, de figures voisines ) pour organiser l'ensemble (cf. M. Mante). Les élèves en difficulté en mathématiques (et ailleurs) sont souvent des enfants qui mettent difficilement en oeuvre des facultés d'anticipation (vision globale des dessins, attitudes d'attentisme une fois le dessin réalisé). Ils vivent plus dans l'immédiateté.

Souvent les explications du professeur ou les propositions de réponses d'autres élèves arrivent trop tôt et ces élèves en difficulté n'en voient, n'en comprennent pas la raison. Ils ne font qu'enregistrer l'aspect technique des solutions proposées.

*Le sens donné par le professeur à ses explications n'est pas compris par l'élève, seule la "recette" passe.*

Exemple : l'aspect algorithmique des équations est retenu indépendamment des règles de calcul qui sont utilisées pour les résoudre :

" Tu fais passer de l'autre côté et tu changes le signe ".

*** Pour avoir peut être "accès" aux représentations que l'élève est en train de se construire de la notion visée.**

Que sait-on de ce que l'élève comprend au moment où le professeur expose une notion ou lorsqu'il travaille les activités proposées dans les livres ? Quelles représentations significatives de ces notions sont présentes pour les élèves ?

En l'absence d'expressions immédiates des conceptions de la notion (au travers d'un débat par exemple), telle que l'élève les a acceptées, ce n'est que par les erreurs faites ou par les stratégies

mises en oeuvre pour répondre à un problème, que le sens donné par cet élève émergera. Mais alors les connaissances visées, comprises correctement ou non, seront déjà relativement stabilisées car acceptées et organisées par l'élève dans son univers cognitif. Il est alors plus difficile de convaincre un élève de son erreur.

On peut citer comme exemple la construction des décimaux.

*Le professeur, bien que produisant des explications justes et "claires", n'est pas sûr du niveau de compréhension réel des élèves.*

*** Pour construire une cohérence dans ce que l'élève apprend.**

On sait que pour être utiles, c'est à dire mises en oeuvre, les connaissances doivent être significatives, c'est à dire mises en place par un travail de réflexion qui fixe leurs finalités et leurs limites. Si les élèves pensent qu'il n'est utile d'apprendre telles ou telles notions que parce qu'elles font partie des contrôles, des examens, il ne leur est pas alors nécessaire de se préoccuper du sens et surtout de la cohérence de ce qu'ils apprennent. Quel savoir se construisent-ils ? Ce sont des connaissances scolaires vite oubliées pour la plupart.

C'est pourquoi, il est intéressant de proposer très tôt des situations où après que diverses stratégies de solution aient été trouvées individuellement, les élèves puissent confronter leurs points de vue. Des outils de preuve divers sont alors proposés pour convaincre les autres (et non le professeur). Le statut de la preuve change de nature dans le débat avec des pairs : il s'agit de faire comprendre à des interlocuteurs qui n'ont pas compris et non de montrer que l'on fonctionne avec le niveau de codage et de connaissance requis par l'institution pour le niveau d'étude.

Le débat est l'occasion de réutiliser des connaissances ou d'en mettre en place de nouvelles avec l'aide du professeur. Elles prennent alors sens du fait de leur utilisation immédiate et nécessaire pour répondre à une difficulté posant question, pour construire une solution convaincante.

c) Mise en place de débat en classe.

*** Conditions matérielles.**

Les élèves doivent en principe pouvoir se voir aisément les uns les autres. La meilleure disposition est donc en large rectangle, mais ceci n'est guère réalisable, d'où des dispositions en petits groupes ou même la structure habituelle de la classe.

Dans la situation présentée, le professeur a à sa disposition un ordinateur et une tablette rétroprojectable (data show).

Il utilise CABRI géomètre comme logiciel.

*** Quelle coutume met-on en place ?**

Il s'agit d'établir un autre contrat didactique que celui habituellement présent en classe : l'enjeu n'est pas d'avoir raison seul mais de convaincre le groupe qui peut alors s'approprier le savoir.

*Le rôle du professeur :*

* Il initialise la situation.
* Il distribue la prise de parole en veillant à une équitable répartition des prises de parole.
* Il laisse se développer toutes les argumentations y compris celles qui sont fausses.
* Il entretient la dynamique en soulignant les incertitudes, les contradictions.

*Le rôle de l'élève :*

* Il utilise son savoir local pour proposer une preuve.
* Il explique sa solution.
* Il conteste.

Il y a une situation de co-dévolution du problème.

Le groupe sert d'intermédiaire entre l'élève et le savoir institutionnalisé.

*** Les apports.**

*Débat et conflit socio-cognitif :*

On pense souvent que débat implique conflit socio-cognitif.

Il n'y a pas forcément conflit socio-cognitif dans un débat.

Dans le conflit socio-cognitif (cf. Gilly) deux réponses sont présentes dans l'esprit de l'élève et il a conscience de la contradiction. C'est la résolution de cette contradiction qui amène une réorganisation des connaissances mobilisables pour la résolution d'autres problèmes.

Exemple :

Le débat est plus la source d'interaction entre pairs :

1) "Je comprends ..." 2) "Je ne comprends pas."

1) "J'explique ..." 2) "Tu précises ..."

Il y a opposition argumentée de points de vue avec déstabilisation au moment de la mise en oeuvre du mode de résolution puis contrôle sous forme d'acquiescement ou de reformulation par les élèves.

Dans tous les cas, même si les réponses immédiates sont différentes des justifications qui seront fournies ultérieurement, il y a progrès cognitif: Le sens de la nouvelle connaissance visée se construit par rapport au savoir mis en action par l'apprenant.

Au cours du débat peuvent naître chez des élèves des conflits socio-cognitifs que ce même débat permettra ou non de résoudre.

*Quels autres apports peut-on attendre d'un débat ?*

* Des connaissances en maths.
* Des connaissances de méthodes.
* La prise de conscience du plaisir de la recherche.

* **Les inconvénients.**

*Le problème du temps nécessaire est essentiellement dénoncé.*

Mais c'est le fait de professeurs qui n'ont jamais essayé ce type de travail car très souvent ceux qui se "lancent" sont séduit dès le premier essai. Outre la motivation plus importante, la conscience d'un travail réellement productif des élèves modifie profondément le climat de la classe. Les élèves prennent aussi conscience que ne pas comprendre n'est pas significatif de passivité en face de la difficulté. Certains persuadés d'être "faibles" se révèlent aussi capables que les "forts" de proposer des arguments intéressants pour tous.

*Un autre inconvénient est celui de la structure scolaire:*

Ergonomie des salles.

Durée limitée des séquences.

Réactions des élèves par rapport aux autres cours.

## IV.2- Différents types de débat. L'apport d'un outil supplémentaire : le logiciel.

a) Comment apparaissent les débats dans la classe ?

C'est toujours le professeur qui va lancer le débat mais l'initialisation peut se faire :

- en prenant au rebond dans les classes un questionnement d'un ou plusieurs élèves. Ce débat improvisé est celui qui est le plus difficile à gérer car aucune analyse a priori n'a été faite par le professeur. Mais c'est souvent celui qui répond à une vraie curiosité de la part des élèves.
- en proposant un problème en réponse à une difficulté pointée (lors d'un autre mode de fonctionnement ).
- en proposant un problème dont la solution permettre d'institutionnaliser une nouvelle connaissance.

b) L'apport de cabri géomètre.

Il se fait dans trois directions :

*** Il permet de poser le problème** :

L'utilisation de la dynamique de l'image va permettre la multiplicité des constructions et par la même une modification des cadres dans lesquels peut se poser le problème.

Le débat fonctionne au niveau des représentations.

*** Il sert d'outil de preuve** :

Les arguments qu'il permet de proposer entraînent souvent l'émergence de conjectures et une orientation du débat vers la démonstration.

Il fonctionne alors au niveau des procédures de résolution.

*** Il permet de "vérifier" des propositions de conjectures.**

Il permet à l'élève angoissé dans la recherche de se rassurer.

Il fonctionne alors comme outil de contrôle de l'activité.

## V.3- Des exemples :

a) En 5ème, autour de la somme des angles d'un triangle.

Cette situation montre comment le logiciel va servir comme outil de preuve.

*** Description de la situation initiale**.

*Objectif initial :*

Une observation de la position de l'orthocentre suivant la forme d'un triangle.

*La situation :*

Au cours de la formalisation des résultats par les élèves, les deux phrases suivantes sont écrites au tableau :

* "Lorsqu'un triangle a ses angles aigus, l'orthocentre est à l'intérieur."

* "Lorsqu'un triangle a ses angles obtus, l'orthocentre est à l'extérieur."

Je demande aussitôt aux élèves de préciser les angles aigus et les angles obtus du triangle dessiné. Ils montrent un angle obtus mais sont tous convaincus qu'on peut en obtenir un deuxième.

*** Déroulement du débat.**

Un élève encouragé par tous les autres va donc venir déplacer les sommets du triangle pour obtenir un angle obtus supplémentaire. Devant la transformation simultanée du premier angle obtus en angle aigu les élèves sont déçus mais ne sont pas convaincus que cela est impossible. Ils sont persuadés ne pas avoir choisi le bon angle et vont donc réessayer avec le troisième angle du triangle. Le nouvel échec va les amener à se poser seuls la question : " Pourquoi ne peut-on avoir qu'un angle obtus ?".

*** Intérêt dans cette classe.**

C'est une classe de cinquième en difficulté pour laquelle la notion de démonstration n'a guère d'attrait. Dans ce cas, ils vont aller chercher avec intérêt les propriétés et s'exprimer ainsi : "Un triangle ne peut pas avoir deux angles obtus car il n'y aurait plus de place pour le troisième".

C'est la confrontation avec l'ordinateur qui a provoqué le conflit et l'intérêt pour la preuve mathématique. Il est certain que l'enjeu n'est pas le même si j'avais demandé de démontrer qu'un triangle ne peut avoir qu'un angle obtus ou pour faire plus "ouvert" : "combien un triangle peut-il avoir d'angle obtus ? ".

La résistance du milieu informatique est la source du conflit cognitif.

b) En 4ème, à propos de l'inégalité triangulaire.

Cette situation a été mise en place pour donner un intérêt à cette propriété qui apparaît comme une évidence aux élèves de 4ème.

*** Description de la situation initiale.**

*Objectif :*

Une recherche de l'inégalité triangulaire comme solution de la situation proposée.

*La situation :* (voir annexe 4)

Un triangle est donné dont on peut faire varier la longueur des côtés qui sont donnés par des segments dont on peut déplacer les extrémités grâce à CABRI. Lors des changements de longueurs, un sommet disparaît. Pourquoi ?

*** Déroulement du débat.**

Quand un élève passe à la manipulation de la souris sur l'un quelconque des côtés, le point disparaît : " Tiens ! Tiens!"

Alors trois problèmes sont posés :

- "Disparaît-il aussi pour des changements sur les autres côtés ?
- Peut-on prévoir quand il va disparaître ?
- Peut-on le faire réapparaître d'un côté ou de l'autre en agissant sur les trois côtés ?"

Les élèves vont essayer de répondre en utilisant l'ordinateur et en proposant l'idée de leur groupe. Ils viennent manipuler la souris suivant leurs besoins.

Finalement tout le monde est d'accord : "Cela dépend des mesures mais comment ?"

Certains groupes vont chercher en faisant varier simultanément les trois côtés.

D'autres vont faire varier une seule mesure (idée de séparation des variables).

Ils vont tous fabriquer un tableau où apparaissent les trois longueurs. Mais dans leur recherche de relations entre ces grandeurs, ils ne privilégient pas l'addition : "c'est trop simple pour des élèves de quatrième".

Lorsqu'un élève va aller afficher une proposition juste concernant la somme de deux côtés, tous les autres vont la refuser. Il va donc être amené pour les convaincre à reproduire sa solution pour toutes les paires de deux côtés consécutifs.

D'autres groupes s'intéressent à la différence :

Certains vont systématiquement calculer : "AB-AC". Ils vont donc trouver des valeurs positives ou négatives.

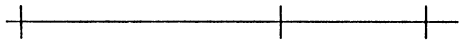
D'autres vont calculer, soit "AB-AC", soit "AC-AB" pour trouver toujours des valeurs positives.

Les deux groupes trouvent finalement le même résultat : "La différence est toujours plus petite que BC !!"

Le débat aura lieu mais autour de : "A-t-on le droit d'écrire : AB - AC négatif ?"

Dans le cas plus simple où les points sont alignés, un élève demande :

A B C



"Dans ce cas, si on écrit AB - AC =

Qu'est-ce qu'on écrit BC ou CB ? Lequel est positif ? Sont-ils égaux ?"

Les élèves ont dans cette discussion finalement mis en oeuvre deux questions importantes :

* la mesure algébrique,

* la valeur absolue.

Ils ne peuvent d'eux-mêmes trancher, le professeur peut alors soit leur dire que la solution leur sera donnée dans les classes suivantes, soit apporter des éléments de notation (par exemple, celle de la valeur absolue ). C'est aussi l'occasion de préciser les différences entre mesure et distance.

*** Intérêt pour cette classe.**

La dynamique de l'image a permis de poser un véritable problème pour cette propriété.

Les positions du point A sur le segment [BC] sont sûrement à l'origine des problèmes qui vont se poser pour les groupes qui s'intéressent à la différence.

c)Heuristique et démonstration en quatrième : un travail autour du statut des énoncés. (Présenté à l'U.E. de Grenoble avec une vidéo).

Cette situation permet de faire prendre conscience que ce qui se voit sur un dessin prend en géométrie différents statuts au sein d'un problème. Dès qu'on associe au dessin un texte, un tri est possible entre les éléments de dessin de base (ce sont les hypothèses) qui permettent de le construire et le reste des "configurations" visibles qui deviennent les conclusions à démontrer. De plus certaines d'entre elles peuvent ne pas résister à des déplacements des points de base, elles sont liées à des cas particuliers (que l'on pourra étudier après).

Le logiciel CABRI permet ce jeu de l'utilisation des points de base et aussi permet de reconstruire l'énoncé du problème par l'utilisation de la fonction "historique".

*** Description de la situation initiale.**

*objectif :*

Travail sur le statut du dessin et de la figure et sur le statut des énoncés indépendamment de toute démonstration.

*La situation :* (voir en annexe 5 et 6 dessin et texte associé).

Un dessin est projeté sur lequel les élèves vont avoir à proposer des énoncés qui leur semblent visuellement vrais.

En déformant le dessin puis avec la donnée du texte du problème (sans les questions), ils vont avoir à effectuer un tri faisant travailler leur appréhension visuelle puis discursive de la figure.

*** Déroulement du débat.**

La première étape de propositions d'énoncés n'est pas sujet à débat puisque justement chacun doit pouvoir dire ce qui lui semble vrai.

Un travail important est fait sur les énoncés qui vont rester implicites et qui sont explicités. Cette différenciation est très difficile pour les débutants en géométrie par exemple :

Est-il nécessaire d'écrire : "C est un cercle." ?

Vaut-il mieux écrire : "N est un point de la droite (AM)."

ou "A, M, N sont alignés."

ou "Ne rien n'écrire, car ça se voit bien." ?

Comprendre ce qui doit rester ou non au niveau de l'implicite demande donc un apprentissage spécifique.

Dans une deuxième étape, un tri va s'effectuer dans les énoncés proposés : certains vont se trouver éliminés.

Sont éliminés sans débat, ceux qui ne résistent pas à un déplacement de certains points.

Sont éliminés avec débat, ceux que les élèves estiment retrouver dans le texte fourni, chacun venant expliquer où se retrouve l'énoncé choisi dans le texte.

Quels sont ceux qui sont nécessaires ?

En oublie-t-on ?

Le débat a lieu autour d'énoncés tels que :

"C et C' sont tangents" : ce n'est pas écrit ainsi dans le texte du problème mais on sait par le texte qu'ils ont un point commun. Autrement dit certains considèrent l'utilisation de la définition des cercles tangents comme nécessaire, d'autres comme implicite. On trouve ici une origine aux difficultés de compréhension des démonstrations de propriétés considérées comme évidentes par les élèves.

La fonction "historique" de CABRI va permettre de vérifier si la liste des énoncés qui ont pris statuts d'hypothèse est suffisante pour obtenir le dessin proposé au départ.

*** Intérêt pour cette classe.**

Dans ce débat, les mathématiques prennent leur aspect social. Il s'agit de convaincre ses pairs du bien fondé de sa proposition en fonction de règles acceptées par la communauté.

Le rôle du logiciel CABRI est ici fondamental pour faire comprendre aux élèves la différence entre le dessin et la figure. La dynamique de l'image permet de voir les cas particuliers. L'historique montre que c'est l'association étroite entre un dessin et un texte qui permet de parler de figure sur laquelle on peut faire des conjectures.

Enfin les questions qui étaient posées dans le problème sont les énoncés qui étaient après modification du dessin les plus controversés.

## IV.4- Conclusion.

Beaucoup de points sont encore à préciser dans cette utilisation du débat en classe de collège.

Mais dans le travail sur la géométrie, l'utilisation de CABRI avec tablette rétroprojectable permet une visualisation rapide des propositions des élèves introduisant un rythme dans le débat. De plus l'interaction entre la proposition et la réponse du logiciel est un moyen efficace et plus "neutre " de susciter des conflits cognitifs remettant en cause les représentations que l'élève est en train de se créer.

## CONCLUSION

Travailler par activité nécessite donc une réflexion suivie d'une mise en place soignée, ce qui demande de notre part une modification de notre comportement et de notre problématique de travail.

En effet, l'influence de ce type de travail sur l'ensemble de nos pratiques est énorme : accepter de fonctionner par activités -même si ce n'est que ponctuellement- nous oblige à rendre conscient les gestes professionnels que nous mettons en oeuvre dans notre pratique de classe.

Pour les élèves, un travail par activité permet une diversité de démarches et de fonctionnements, diversité fondamentale pour une différenciation pédagogique. L'enjeu -même s'il est mathématique- motive davantage, y compris des élèves plutôt a-scolaires qui acceptent d'entrer dans ce "jeu" intellectuel. Ils peuvent être acteurs de la construction de leur savoir, d'où un phénomène d'assimilation-accomodation facilité.

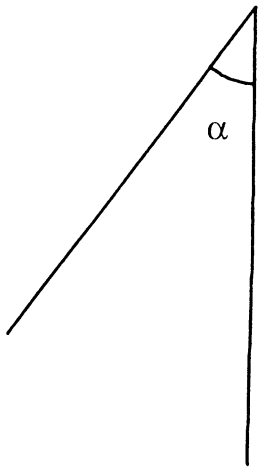
Rechercher simultanément, pour l'élève un problème et pour l'enseignant un bon fonctionnement pédagogique, devient source de plaisir pour les deux.

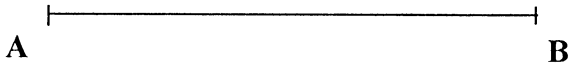
## ANNEXE 1 :

Feuille distribuée aux élèves.

***Construire un triangle ABC tel que*** $\hat{C} = \hat{\alpha}$.

***Y a-t-il plusieurs solutions ?***



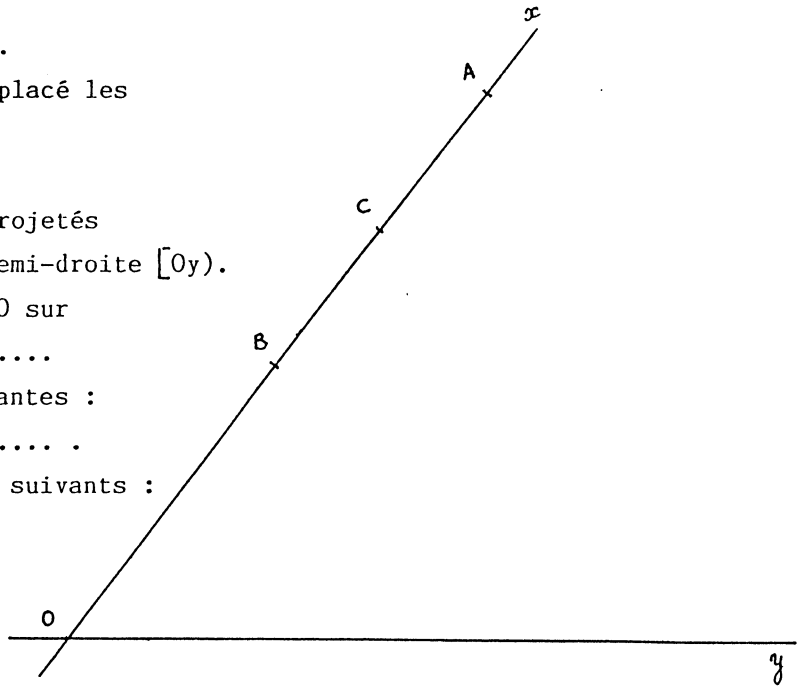



# ANNEXE 2 :

Projection orthogonale et cosinus :

## Activité 1 :

On considère l'angle $\widehat{xOy}$ ci-contre.




1°) Sur la demi-droite [Ox), on a placé les points A, B et C tels que :
OA = 10 cm, OB = 5 cm et OC = 7,5 cm.

**Construire** les points A', B', C' projetés orthogonaux des points A, B, C sur la demi-droite [Oy).

Quel est le projeté orthogonal de O sur la demi-droite [Oy) ? .....

**Mesurer**, en cm, les longueurs suivantes :
OA' = ..... ; OB' = ..... ; OC' = ..... .

**Calculer**, à 0,1 près, les rapports suivants :
$\frac{OA'}{OA}$ = ..... ; $\frac{OB'}{OB}$ = ..... ;
$\frac{OC'}{OC}$ = ..... ; $\frac{B'C'}{BC}$ = .....
$\frac{A'B'}{AB}$ = ..... ; $\frac{A'C'}{AC}$ = .....

2°) **Placer** sur la demi-droite [Ox) le point D tel que OD = 4 cm et **construire** le point D' projeté orthogonal du point D sur la demi-droite [Oy).

**Compléter** : OD' = ..... ; $\frac{OD'}{OD}$ = ..... ; $\frac{C'D'}{CD}$ = ..... ; $\frac{A'D'}{AD}$ = .....

3°) **Placer** le point H sur [Oy) tel que OH = 9 cm et **construire** le point K projeté orthogonal de H sur [Ox).

**Compléter** : OK = ..... ; $\frac{OK}{OH}$ = ..... .

4°) **Mesurer** l'angle $\widehat{xOy}$ en degrés. $\widehat{xOy}$ = .....

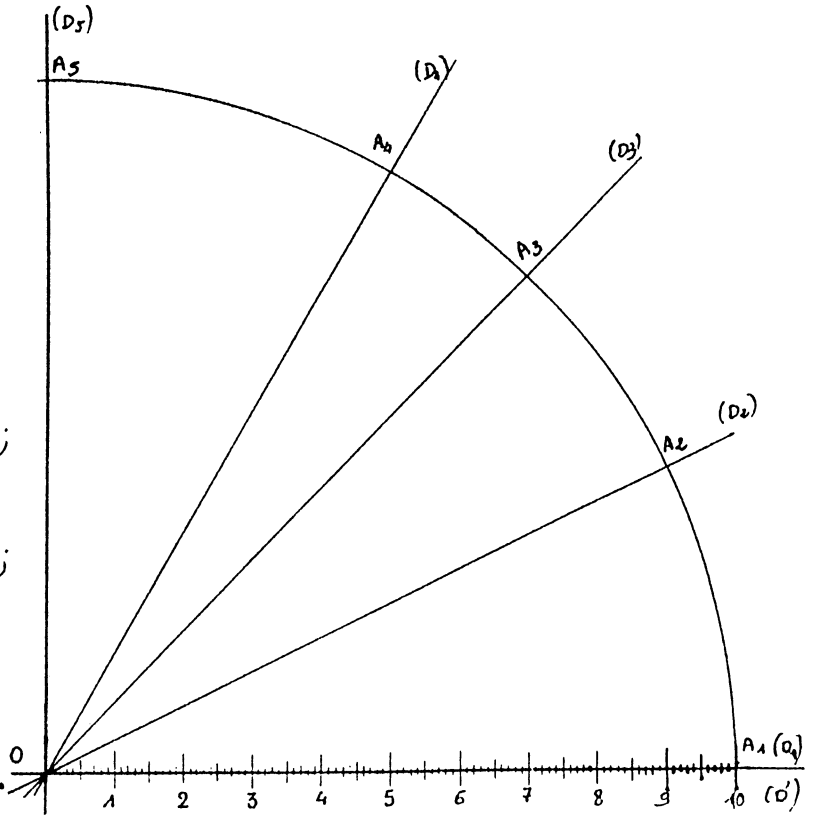
Sur la calculatrice, **taper** ..... COS : .....

valeur mesurée pour $\widehat{xOy}$

## Activité 2 :

Sur les droites $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$, $(D_4)$ et $(D_5)$ on a placé les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ tels que :
$OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = OA_5$ = 10 cm.

Construire avec soin les projetés orthogonaux des points $A_1$.....$A_5$ sur la droite (D').




**Compléter** :

$\frac{OA'_1}{OA_1}$ = ; $\frac{OA'_2}{OA_2}$ = ; $\frac{OA'_3}{OA_3}$ = ; $\frac{OA'_4}{OA_4}$ = ;
$\frac{A'_5}{OA_5}$ =

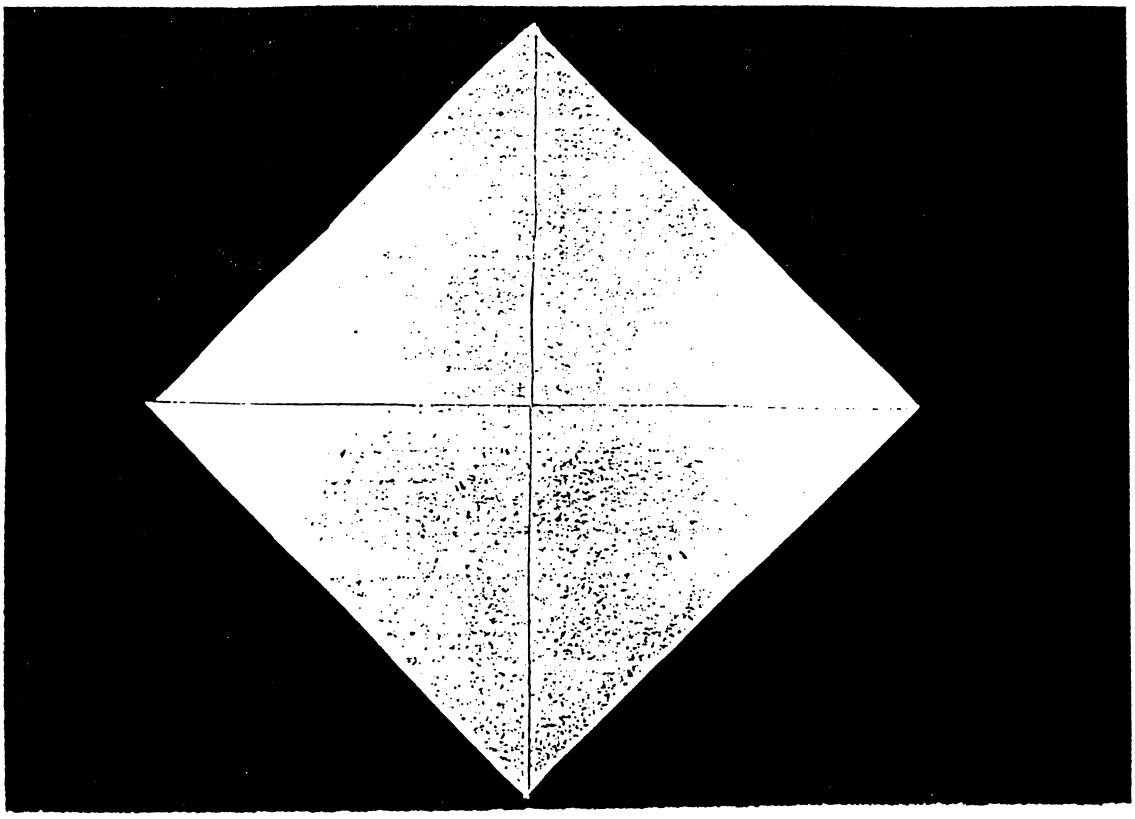
•**Mesurer** les angles suivants :

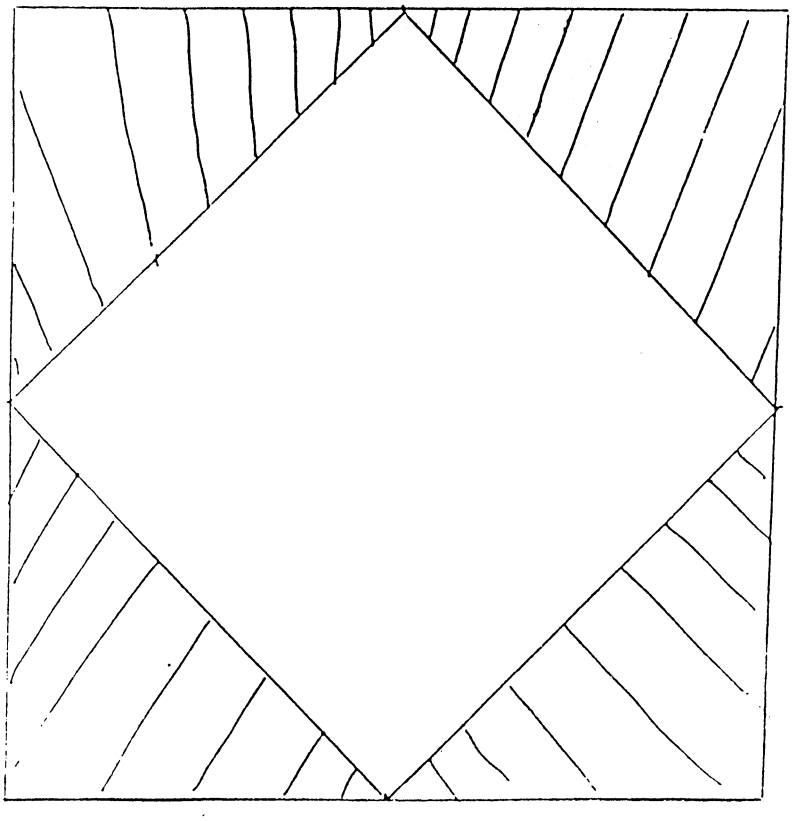
$\widehat{A_1OA'_1}$ = ; $\widehat{A_2OA'_2}$ = ; $\widehat{A_3OA'_3}$ = ;
$\widehat{A_4OA'_4}$ = ; $\widehat{A_5OA'_5}$ = .

**Calculer**, à la calculatrice, les cosinus de ces angles :

$\cos\widehat{A_1OA'_1}$ = ; $\cos\widehat{A_2OA'_2}$ = ;
$\cos\widehat{A_3OA'_3}$ = ; $\cos\widehat{A_4OA'_4}$ = ; $\cos\widehat{A_5OA'_5}$ = .

## ANNEXE 3 :



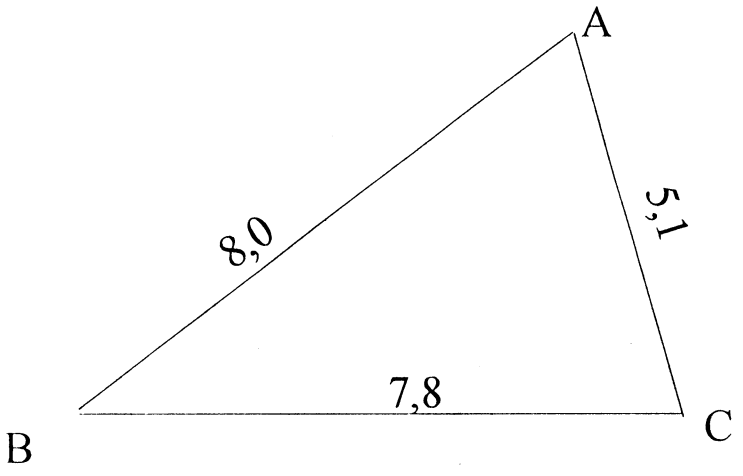


## ANNEXE 4 :

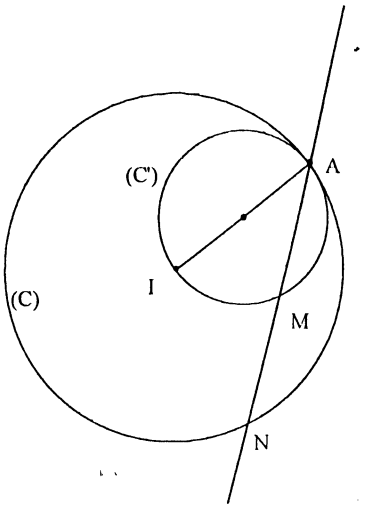
7 , 8

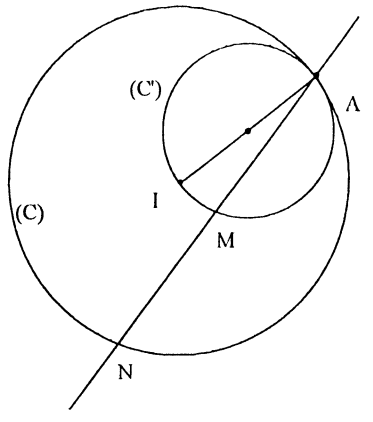
8 , 0

5 , 1




## ANNEXE 5 :




## ANNEXE 6 :

Tracer un cercle (C) de centre I, puis placer un point A sur ce cercle.
Tracer le cercle (C') de diamètre [IA].
Tracer une droite passant par A et ne passant pas par I qui coupe (C') en M et (C) en N.

## BIBLIOGRAPHIE :


* BOULAHIA Nejib, *Algorithmes et Approximations*, Tunis, Maghreb Editions, 1987.

* COLLETTE Jean-Paul, *Histoire des mathématiques*, ERPI-Vuibert, 1979.

* DAHAN Amy - PEIFFER Jeanne, *Une Histoire des Mathématiques : Routes et Dédales*, Ed. Seuil, Col. Points Sciences, 1986.

* *Histoire des Mathématiques pour les collèges*, CEDIC, 1980.

* SZABO Arpad, *Les débuts de la Mathématique grecque*, Paris, Vrin, 1977.

* ASSUDE Teresa, *Ecologie de l'objet racine carrée et analyse du curriculum*, in : Petit x n° 35, pp. 43-58.

* BKOUCHE Rudolph, *L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique* in : Repères-IREM n° 9, 1992, pp. 5-13.

* BROUSSEAU Guy, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques vol. 7.2, Grenoble : La Pensée Sauvage.

* BROUSSEAU Guy, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4.2, 1983.

* CHARLOT Bernard, BAUTIER Elisabeth, ROCHEX Jean-Yves, *Ecole et savoir dans les banlieues ... et ailleurs*, Armand Colin, 1992.

* CHEVALLARD Yves, *La transposition didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage, 1985.

* *Condition nécessaire et suffisante. Savoir procédural dans le débat en classe de mathématiques*, La Feuille à problème n° 59, pp. 1-6, 1994.

* DOISE W., MUGNY G., *Le développement social de l'intelligence*, Paris, Interéditions, 1981.

* DOUADY Régine, *Hypothèses pour la construction de séquences d'apprentissage* in : Suivi scientifique classe de 6ème, 1986. Bulletin inter-IREM premier cycle, nouveaux programmes de 6ème, pp. 239-244.

* LEGRAND Marc, *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse* in : Repères-IREM n° 10, 1993, pp. 123-159.

* MANTE Michel, *Autour de la notion de situation-problème* in : Suivi scientifique classe de 6ème, 1986. Bulletin inter-IREM premier cycle, nouveaux programmes de 6ème, pp. 226-238.

* PIAGET Jean, *Psychologie et épistémologie*, Denoël.

* *Programmes et instructions, collège*, B.O. n° 44 du 12-12-85, CNDP 1985.

* Repères-IREM n° 8, Topiques Editions, 1992.

* Université, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Pays de Loire, *Enseignement des mathématiques par situations-problèmes*, 1986.

## SOMMAIRE :

**Introduction** ..... p. 1

**I- De la représentation des stagiaires à la notion d'activité**

I.1 Analyse des représentations des stagiaires ..... p. 2

I.2 Notion d'activité ..... p. 5

I.3 Différents objectifs d'une activité ..... p. 8

I.4 Caractères d'une activité ..... p. 10

I.5 Pourquoi travailler par activité ? ..... p.12

**II- Exemple de construction d'une activité**

II.1 Avant de rechercher un support ..... p.17

II.2 Construction-description de l'activité ..... p.19

II.3 Analyse a priori de l'activité ..... p.21

II.4 Synthèse de l'activité ..... p.24

II.5 Suite possible ..... p.25

**III- Des activités**

III.1 L'angle échappé en classe de 3ème ..... p.26

III.2 Une activité pour découvrir cosinus en classe de 4ème ..... p.43

III.3 Une approche de racine carrée ..... p.64

**IV- Débat de classe**

IV.1 Le débat de classe. Pourquoi ? Comment ? ..... p.78

IV.2 Différents types de débat. L'apport d'un outil supplémentaire : le logiciel ..... p.80

IV.3 Des exemples ..... p.81

IV.4 Conclusion ..... p.84

**Conclusion** ..... p.85

**Annexes** ..... p.86

**Bibliographie** ..... p.90

**REF : R 106** **AUTOUR DE LA NOTION D'ACTIVITE**

**Auteurs :** Danielle BERGUÉ Jacqueline BORREANI
Michel CHEVALLIER Hélène COLONNA

**Public concerné :** Professeurs de collège

**Niveau :** Classes de 4 ème - 3 ème

**Résumé :** Travailler par activités en mathématiques pose un certain nombre de questions. La première partie de la brochure vise à circonscrire la notion d'activité, que préconisent les programmes, en s'appuyant sur des travaux de recherche en didactique. La deuxième partie développe des exemples sur l'élaboration d'une activité et sa gestion en classe. Des exemples de travaux élèves permettent de montrer comment émergent diverses approches d'une notion mathématique et comment se mettent en place des savoirs ayant fait sens.

**Mots clefs :** - Activité - Consigne - Gestion de classe - Débat de classe
- Grandeur - Mesure

**Date :** Juillet 1995 **Prix :** 50 F
**Nb de pages :** 91 pages **Format :** $A_4$
**N° ISBN :** 2-86239 064 X **Dépôt légal :** 3 ème trimestre 1995

**Publication :** IREM de ROUEN
Av. de Broglie
BP 138
76821 Mont-Saint-Aignan

**********

Bon de Commande

M, Mme, Melle :
Adresse :

| Libellé : | Prix | Quantité | Total |
|---|---|---|---|
| AUTOUR DE LA NOTION D'ACTIVITE | | ..... | ..... |
| Frais d'envoi : 15 F pour le 1er livre et 5 F par livre supplémentaire (France) | | | ..... |
| Frais réel pour l'étranger | | | ..... |
| | | Somme due | ..... |

Les chèques de règlement sont à libeller à l'ordre de :

**L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN**

Et adressés directement à l'IREM - BP 138 - 76130 MONT-SAINT-AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tel. : 35.14.61.41.
RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 0004400405681

**********

Date : Signature :