I.R.E.M.
1, rue Thomas Becket
76130 Mont-Saint-Aignan

I.U.F.M. de Haute-Normandie
2, rue du Tronquet
76130 Mont-Saint-Aignan

IREM

LA MACHINE A PARTAGER

FRACTIONS ET DECIMAUX AU COURS MOYEN

Catherine HOUDEMENT
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Rouen

Marie-Lise PELTIER
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Rouen

I.R.E.M.
1, rue Thomas Becket
76130 Mont-Saint-Aignan

I.U.F.M. de Haute-Normandie
2, rue du Tronquet
76130 Mont-Saint-Aignan

IREM

LA MACHINE A PARTAGER

FRACTIONS ET DECIMAUX AU COURS MOYEN

Catherine HOUDEMENT
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Rouen

Marie-Lise PELTIER
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Rouen

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'enseignement des décimaux à l'école n'est pas une question simple, si tant est que peut être simple un enseignement. Si la simplicité de la manipulation usuelle des décimaux fait oublier qu'ils n'ont été introduits en Europe qu'au 16$^{\text{ième}}$ siècle et utilisés couramment au 18$^{\text{ième}}$, les obstacles resurgissent dans les questions d'enseignement.

Les nombres décimaux (et leur écriture à virgule) sont remarquables parce qu'ils prolongent à certains nombres non entiers les règles algorithmiques de notre numération décimale écrite, et par conséquent permettent l'extension sans coût (de mémorisation de nouveaux algorithmes) des algorithmes de calcul sur les entiers. Mais leur existence n'est pas nécessaire, ni pour les mathématiciens (du moins jusqu'au 18$^{\text{ième}}$ siècle), ni dans la société (nos voisins anglo-saxons ont conservé longtemps leur système de mesure non décimal). On s'est intéressé à eux parce qu'ils homogénéisent les codages numériques (donc les symboles) des entiers et ceux de certains rationnels (ceux qui s'écrivent sous forme de fractions décimales) et qu'ils permettent des approximations particulièrement lisibles des réels.
Par contre la nécessité de nombres inférieurs à 1 s'est fait sentir historiquement très tôt (chez les Egyptiens -3 000 avant Jésus-Christ- et les Babyloniens -5 000 avant Jésus-Christ-) : elle s'est traduite par l'écriture de fractions de numérateur 1.
L'introduction des décimaux à grande échelle dans la société française participe à une volonté politique d'uniformisation des mesures et de contrôle central (parisien) des transactions.

Un enseignement qui ne prend pas suffisamment en compte le sens de ces codages et qui donc ne les met pas en relation directe avec les fractions décimales, a fortiori avec les rationnels (nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction), risque d'engendrer chez les élèves les erreurs typiques :

$3{,}12 > 3{,}5$	car $12 > 5$
$5{,}7 + 2{,}3 = 7{,}10$	car 5 et 2 font 7 et 7 et 3 font 10
$4{,}2 \times 2{,}3 = 8{,}6$	car 4 fois 2 font 8 et 2 fois 3 font 6

car ceux-ci se seront construit une conception des décimaux erronée, comme juxtaposition de deux entiers dont le traitement se fait indépendamment.

Pourquoi cette brochure ?

Malgré les recherches menées depuis quelques années déjà sur l'enseignement des décimaux (Brousseau 1987- Douady-Perrin-Glorian 1986), les nombres décimaux restent méconnus pour plus d'un tiers des élèves de sixième, comme en témoignent les résultats des évaluations nationales (cf. page suivante).

Nous avons donc décidé de construire et d'expérimenter dans les classes une progression sur la construction des nombres autres qu'entiers et l'introduction des nombres décimaux, en nous inspirant des ouvrages déjà cités (Brousseau et al, Douady et al). Cette progression s'appuie sur les outils de la didactique et sur les hypothèses d'apprentissage actuelles.

Résultats nationaux de l'évaluation 6ème de septembre 1991 (source Direction de l'Evaluation et de la Prospective, *Education et Formation*, janvier 1992)

Exercice	réponse exacte	autre réponse	pas de réponse
Sur chaque ligne, entoure le plus petit des deux nombres			
203,95 204,25	91,6 %	5,9 %	2,5 %
4253,2 425,32	85,6 %	10,9 %	3,5 %
150,65 150,7	63,5 %	33,1 %	3,4 %
Réécris les quatre nombres du plus petit au plus grand			
2731 2364 2759 2345	94,4 %	5,1 %	0,5 %
19,9 19,19 1,991 9,191	58,8 %	24,3 % (1) 16,2 % (2)	0,7 %
Dans la case vide écris un nombre compris entre			
64 et 68	95,8 %	2,4 %	1,8 %
64,2 et 64,47	83,7 %	12,7 %	3,6 %
64,6 et 64,7	66,9 %	6,8 % (3) 17,6 % (4)	8,7 %

(1) réponse fausse : 1,991 9,191 19,9 19,19
(2) autre réponse fausse
(3) l'élève a donné une des bornes 64,6 64,60 64,7 64,70
(4) autre réponse erronée

Pour une plus grande commodité de lecture immédiate, nous ne ferons pas figurer in extenso nos analyses didactiques. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages précédemment cités pour une lecture complémentaire.

Cette progression bénéficie également des régulations que nous y avons introduites suite aux expérimentations effectives. Nous remercions chaleureusement les maîtres qui ont contribué à cette expérimentation.

Nous souhaiterions que cette brochure contribue à apporter une aide pour l'enseignement des décimaux :
- à nos étudiants déjà sensibilisés à ce type d'approche ;
- aux maîtres en exercice, demandeurs d'une progression en accord avec les recherches actuelles ;
- aux professeurs des collèges, soucieux de redonner du sens aux décimaux et aux fractions.

Nos choix pour la progression

Elle vise à l'enseignement des nombres décimaux et des fractions aux cours moyens. Elle permet de redonner du sens à ces nombres, éventuellement de les introduire, si ce travail n'a pas été fait dans les classes antérieures, dans les classes de sixième des collèges.
Prévue sur un long terme, elle traite simultanément d'autres notions, telles que des grandeurs (longueur et aire) et de leur mesure, de la graduation d'une droite (difficile passage du discret au continu).
Elle est axée sur la mise en place de phases de recherche, suivies de phases de synthèse, puis d'institutionnalisation, suivies elles-mêmes de phases de réinvestissement (notamment pour la lecture et l'écriture des nouveaux symboles).

La part laissée aux exercices d'entraînement dans la brochure est relativement faible. Ceci ne signifie pas que nous considérons ces exercices sans utilité, bien au contraire ! Mais, considérant que cette partie est en général bien maîtrisée par les maîtres, nous laissons à ceux-ci le soin de la traiter plus en détail.

Les étapes de la progression

1- Les fractions sont introduites par la nécessité (induite par les contraintes d'une situation de message) de coder des longueurs plus petites que l'unité. C'est à la charge du maître d'introduire le codage usuel des fractions, en liaison avec des longueurs.

2- Les fractions sont ensuite réinvesties (ou "réintroduites", puisqu'elles s'attachent alors à une autre grandeur) pour coder des aires de mesure inférieure à celle de l'étalon. Ce sens des fractions relativement aux aires est ensuite étendu à des fractions supérieures à l'unité, toujours à partir des aires.

3- La conjonction des deux supports (longueur et aire) permet de donner du sens à ces nouveaux codages. Une aller et retour entre ces deux grandeurs supports le conforte.

4- La pratique régulière et permanente du calcul mental, alternant lecture et écriture, permet progressivement de décontextualiser les fractions, par la mise en place d'automatismes s'appuyant sur les propriétés numériques et la signification du code.

5- Le passage à la graduation d'une droite, permettant l'intercalation de fractions entre les entiers, accentue cette décontextualisation.

6- Les fractions ont été contextualisées par rapport à des grandeurs continues. Il s'agit de les référencer à des quantités discrètes, pour contribuer à leur donner un statut de nombre. Le choix d'une situation (plaquette de chocolat), permettant de changer de cadre (la plaquette est modélisée par une surface et un nombre de carreaux) facilite le transfert du continu au discret. Un travail spécifique est alors à mener sur fractions (inférieures ou supérieures à 1) de quantités discrètes.

7- Les fractions ont été travaillées sous plusieurs de leurs aspects, contribuant à leur donner du sens et à les inclure dans la grande famille des nombres. Un temps particulier peut être consacré aux fractions décimales, permettant de constater la simplicité de leur manipulation et d'augmenter les habilités calculatoires.

8- Le passage au codage usuel du nombre décimal sous forme d'écriture à virgule est l'aboutissement de cette suite de séances. La convention d'écriture est analysée avec les élèves, il s'agit alors de la faire fonctionner. L'enfant doit, à tout moment, tant que les automatismes adéquats ne sont pas en place, faire référence à une fraction décimale égale au nombre à virgule proposé.

9- Notre progression se termine par un choix de problèmes permettant de réinvestir décimaux et fractions et d'amorcer une réflexion sur les techniques opératoires usuelles.

Présentation et analyse de l'activité	**Intentions pédagogiques**
Par l'intermédiaire d'un problème de saut en longueur, les élèves vont représenter différentes longueurs par des segments partant d'un même point. La notion de graduation d'une demi-droite n'est pas naturelle : il est nécessaire de donner du sens à une représentation des longueurs proportionnelle aux écarts des abscisses.	- Faire reporter des longueurs et graduer une demi-droite. - Introduire la notion d'abscisse.

Préalable

Au cours d'une séquence d'EPS, proposer aux enfants de sauter en longueur, mesurer les sauts avec un étalon choisi par le maître qui n'est pas le mètre habituel (au maître d'inventer pourquoi il ne trouve pas le mètre !), calculer les écarts entre les sauts.

Matériel

Pas de règle (graduée)
Pour chaque enfant une représentation dessinée de l'étalon choisi et du bac à sable.

Déroulement

Calcul mental

A l'écrit, sur l'ardoise par le procédé La Martinière ou sur le cahier à la suite : trouver les quotients entiers de 25 par 10, 47 par 10, 345 par 10, 476 par 10.
Synthèse sur l'égalité entre ce quotient et le nombre de dizaines contenus dans le nombre. Recherche des restes.
Réinvestissement à l'oral, à tour de rôle, par recherche du quotient et du reste de nombres entiers de 2 et 3 chiffres par 10.
Passage à des quotients par 100.

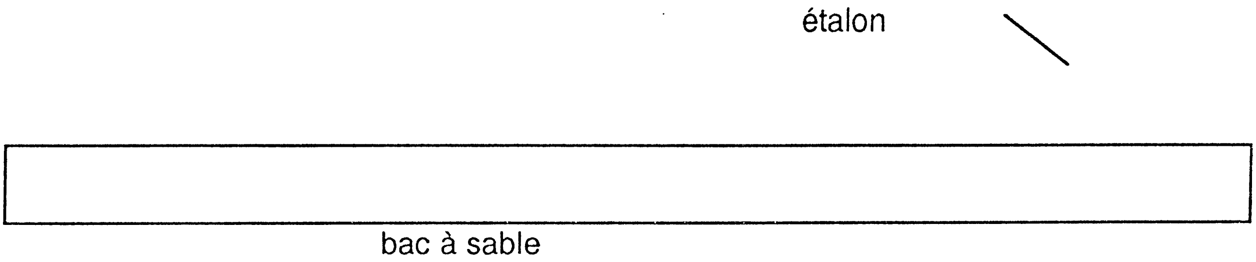
Organisation

Travail individuel dans un premier temps.

Consigne 1

Laisser lire le texte de problème suivant et suivre les méthodes des élèves.

> Arnaud, Betty, Céline et David ont mesuré leurs sauts en longueur dans le bac à sable avec un morceau de ficelle. Arnaud a reporté 5 fois la ficelle, Betty 4 fois, Céline, qui est très forte 9 fois et David 7 fois.
> Voici une représentation du bac à sable et du morceau de ficelle.
> Dessine les marques de chaque enfant.
> Si on constitue deux équipes, filles contre garçons, et qu'on ajoute les longueurs, qui gagne ? Place les scores des deux équipes sur le dessin.



Types de méthodes et résultats possibles :
- reporter une unité à l'aide d'une bande de papier, de calque, du compas, de la règle ;
- placer, régulièrement et sans écart proportionnel les quatre mesures 4, 5, 7 et 9 ;
- placer correctement les points correspondants.

Mise en commun deux par deux des résultats, discussion et si nécessaire proposition par le maître de calculs d'écarts entre les longueurs pour invalider les espacements réguliers entre 4 et 5 et 5 et 7.

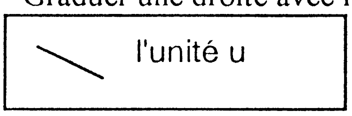
Synthèse
Le morceau de ficelle constitue un étalon de mesure des longueurs. Il représente l'unité de longueur. Connaissez-vous d'autres unités de longueur ? (pour faire le lien avec les connaissances antérieures).

Consigne 2
"Placez sur votre dessin les marques correspondant à Pierre qui a sauté 11 unités, Anne 1 unité (parce qu'elle a raté son départ)."

Temps d'écriture et de confrontation

Institutionnalisation
Reporter une unité de longueur sur une droite se dit *graduer une droite*. Le nombre associé au point de la droite s'appelle *l'abscisse* du point. L'abscisse d'un point correspond à la longueur du segment de l'*origine* jusqu'à ce point.

Réinvestissement et entraînement
Exercice individuel : exemple de questionnement possible.
- Graduer une droite avec l'unité u donnée.



- Placer les points A, B, C, D, E d'abscisses respectives .7, 3, 4, 11, 1.
- F est un point situé au milieu du segment BD. Donner son abscisse.
- Calculer la distance entre les points A et D, entre les points D et B.
- Placer un point G à une distance de 6 de C. Donne l'abscisse de G.
- Devinette avec le maître : le maître pense à un point de la demi-droite ; pouvez-vous le deviner ? (pour faire formuler des questions en termes d'encadrement d'abscisse)

Présentation de l'activité

Activité de communication sur des longueurs de segments :
- dans une première phase (émission), les élèves dessinent un segment sur une feuille blanche, puis ils le mesurent avec un étalon donné après coup pour transmettre à leurs camarades une indication de mesure qui devrait leur permettre de dessiner un segment de même longueur que celui de départ;
- dans une deuxième phase (réception), les élèves recevant le message le décodent et construisent le segment associé à la mesure proposée.

Le couple des deux enfants, d'abord émetteurs tous deux, puis récepteurs tous deux, a réussi si les segments produits dans la deuxième phase ont la même longueur que ceux produits dans la première phase ; un temps est donc prévu pour que les couples analysent leurs productions réciproques et émettent des hypothèses sur les causes d'erreurs. Le maître se centrera sur l'analyse des messages pour amener le codage $\frac{1}{2}$.

Intentions pédagogiques

- Rendre nécessaire d'autres nombres que les entiers

- Proposer un codage de tels nombres

Matériel

- Des bandes étalons rectangulaires cartonnées de même longueur (entre 6 et 7 cm), une pour chaque enfant, mais de largeurs différentes
- Deux demi-feuilles blanches pour chaque enfant

Déroulement

Calcul mental

A l'oral, à tour de rôle, trouver les quotients entiers et les restes de :
856 par 10, 856 par 100, 2300 par 100, 2300 par 10, 789 par 10, etc.
A l'oral, trouver le quotient et le reste de la division par 2 de 18 ; 25 ; 50 ; 63; 86 ; 70 ; 75 ; etc.
A l'oral, trouver le quotient et le reste de la division par 5 de 25 ; 32 ;53 ; 64; 75 ; 83 ; 105 ; 234 ; etc
Le constat que le quotient par 5 est égal au double du quotient par 10 ou à ce double plus 1 peut émerger. Sinon, le maître ne le pointera pas encore.

Organisation

Constitution d'équipes de deux nommées par le maître et dont les deux noms apparaisssent sur les deux feuilles, le nom de celui qui écrit étant souligné. En cas de nombre impair de présents, le maître constitue une équipe de trois (A passera son message à B qui le passera à C qui le passera à A).

Les enfants en équipe ont des places suffisament lointaines pour qu'ils ne voient pas leur coéquipier.

Consigne 1
Faire dessiner aux enfants chacun sur une demi-feuille blanche un segment à la règle, au feutre (pour éviter l'effaçage pendant la mesure).
Faire ranger les règles graduées.
Demander de rédiger sur l'autre demi-feuille un message, sans dessin, sans règle, pour permettre au coéquipier de réaliser un segment de même longueur. Fournir sur demande les étalons en faisant contrôler que tous ont bien la même référence (la longueur de la bande étalon).

Temps de rédaction.
Temps d'échange, géré par le maître.

Consigne 2
"Chacun dessine le segment qui correspond au message reçu."

Temps de réalisation.

Consigne 3
"Vous confrontez vos réalisations, en essayant de voir pourquoi ça a ou ça n'a pas marché."

Temps de confrontation, souvent un peu agité, mais nécessaire à la pertinence globale de l'activité.

Synthèse
- "Comment avez-vous pour vérifier l'égalité des longueurs ?"
(par transparence, utilisation du compas, d'un calque, de la règle graduée, d'une bande de papier,...)
- "Est-ce que ça a marché ? Pourquoi ?"
(mal mesuré, le petit bout c'est pas précis, il en manque un morceau,...)
- "Comment avez-vous écrit vos messages ?"
(recensement des diverses façons texte, numérique,...)

Types de messages possibles
2 bandes et un peu plus, 1 et un petit bout, un peu moins que 1 unité, 1 unité et un demi, 1 unité dans la longueur et 2 largeurs, une fois la bande et monpouce,...
Certains indiquent la position du segment dans la feuille.
Quelquefois la mesure peut être exactement un nombre entier d'unités, mais ce n'est pas le cas général, dans la mesure où la bande a été distribuée après le dessin du segment.

Le maître avec les élèves repère les messages n'ayant pas permis d'aboutir et engage une discussion sur la précision. Il s'arrête sur l'expression "un demi" en demandant sa signification : soit l'élève la connaît (mesure de longueur de la bande exactement pliée en 2), soit le maître l'introduit, notamment si elle n'a été synonyme que de "moins d'une unité").
Il peut tester la connaissance d'une écriture chiffrée de "un demi" : en général apparaissent 1/2 plus rarement $\frac{1}{2}$.

Institutionnalisation

En mathématiques on note un demi ainsi : $\frac{1}{2}$. La mesure $\frac{1}{2}$u correspond à la mesure de la bande u exactement pliée en deux dans le sens de la longueur.

Remarque
Si les messages ne font pas (ou très peu) apparaître d'utilisation du demi, proposer aux élèves de "rejouer" une seconde fois après la phase d'institutionnalisation. Le "demi" sera réinvesti et de plus, les élèves pourront réussir leus échanges.

Présentation et analyse de l'activité

Une unité de longueur étant choisie (la même que dans la séance n° 1), les enfants vont avoir à la partager équitablement en 2, en 4, puis en 8..

Il s'agit ensuite de donner un sens aux fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, pour cela nous souhaitons adopter deux points de vue complémentaires:

- lorsque l'on plie en deux parties exactement superposables la bande unité, chaque partie a pour longueur $\frac{1}{2}$ de u
- si l'on reporte deux fois un segment de longueur $\frac{1}{2}$ de u, on obtient un segment de longueur u.

Ce sont ces deux aspects que nous souhaitons faire émerger des manipulations proposées.

Puis, pour renforcer l'aspect fonctionnel de ces codages fractionnaires de longueurs, nous proposerons aux enfants de mesurer des segments donnés à l'aide de l'unité u, puis de dessiner des segments de longueur donnée en unité u.

Intentions pédagogiques

- Introduire des codages fractionnaires lors de partages d'une unité de longueur par pliage.

- Amener les enfants à utiliser ces codages pour décrire la longueur de divers segments, et pour construire des segments de longueur donnée.

Matériel

- 30 à 40 petites bandes de papier cartonné léger d'environ 7 cm de longueur, ayant exactement la même longueur, mais de largeurs variées (entre 5 mn et 1 cm), qui vont servir d'unité de longueur.
- Feuilles individuelles sur lesquelles sont dessinés des segments dont les longueurs en unité u sont du type $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 3, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$ etc.

Déroulement

Calcul mental

Recherche de quotients entiers par 10; 100; 1000; 2; 5 etc.

Exemple : le maître demande le quotient entier de 375 par 10, de 56 par 10, de 64 par 10, de 541 par 100, de 24 par 5, de 33 par 2, de 50 par 6 ...les enfants répondent oralement à tour de rôle et justifient rapidement leur réponse.

Même exercice, les enfants devant cette fois écrire le quotient sur leur ardoise ou leur cahier.

Organisation de la classe

Travail individuel.

Rappel collectif de la séance 2

Consigne 1

"Aujourd'hui, avec la bande unité dont la longueur est notée 1u, vous allez mesurer la longueur du segment [AB] qui est dessiné sur la feuille".

Travail individuel puis mise en commun les propositions des enfants :
pliage en deux , pliage en 4, encadrement, estimations diverses, éventuels codages fractionnaires.

Consigne 2

Activité collective pour affiner les propositions et obtenir diverses égalités entre des écritures utilisant des fractions:
Demander à chacun de plier la bande unité en 2 parties exactement superposables, de dire ce que représente chaque partie, de donner la mesure de la longueur de chaque partie en unité u , de noter cette mesure, puis enfin , d'observer la bande, après l'avoir ouverte, et de compléter les égalités :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\ldots$ en constatant que deux segments de longueur $\frac{1}{2}$ mis bout à bout forment un segment de longueur 1.

$2\times\frac{1}{2}=\ldots$ en constatant que si l'on reporte deux fois le segment $\frac{1}{2}$ on obtient le segment 1.

Proposer le même travail en pliant la bande unité en 4 parties exactement superposables.
Conclure sur les différentes manière de coder la longueur du segment [AB], en unité u:

$$AB = 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=1+1+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\ldots$$

Synthèse

- Si on partage le segment choisi pour unité en 2 parties exactement superposables, en pliant la bande unité, chaque partie a pour longueur un demi de u, que l'on note $\frac{1}{2}$. On a les égalités :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$
$$2\times\frac{1}{2}=1$$
$$\frac{1}{2}\times 2=1$$

- De même si on partage le segment unité en 4 parties exactement superposables, chaque partie mesure un quart de u, et l'on note sa longueur $\frac{1}{4}$, et l'on a les égalités :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \qquad 4\times\frac{1}{4}=1$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \qquad 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Consigne 2
"Mesurez avec l'unité u les autres segments de la feuille".

Travail individuel

Mise en commun des procédures de mesurage (report de la bande unité, report au compas....) et des résultats. Les enfants peuvent peut obtenir plusieurs écritures pour la longueur de chacun des segments, il est indispensable de leur faire dire les manipulations qui les ont conduits à proposer ces écritures.

Correction collective en recensant et en justifiant toutes les propositions : par exemple :

$CD = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}u$

$EF = \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}u$

$GH = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$

$IJ = 3$

$KL = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

$MN = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$

Remarques
Nous acceptons l'écriture $\frac{1}{2}u$ *aussi bien que l'écriture* $\frac{1}{2}$ *car pour les élèves il est souvent plus clair de conserver la trace de l'unité dans l'écriture proposée.*
L'écriture $\frac{3}{2}$ *est proposée pour raccourcir l'écriture* $3 \times \frac{1}{2}$ *et se lit " trois demi".*

Consigne 3
Construire des segments ayant en unité u, une longueur exprimée à l'aide de fractions. Exemples :

$2 + \frac{1}{4}$ $\quad \frac{5}{4}$ $\quad 2$ $\quad 2 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{7}{4}$ $\quad 1 + \frac{1}{2}$ $\quad 1 + \frac{3}{4}$

Travail individuel.
Correction individuelle à l'aide d'un calque par exemple.

Consigne 4
Réinvestissement dans le cas de partage de l'unité en 8 parties exactement superposables:
Travail individuel .

Synthèse collective

Si on partage l'unité en 8 parties exactement superposables chaque partie mesure $\frac{1}{8}$u, (on lit "un huitième de u") et l'on a :

$8\times\frac{1}{8}=1$ car lorsque l'on reporte 8 fois le segment $\frac{1}{8}$u, on obtient le segment 1u,

et $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ car si l'on met bout à bout les 8 parties qui mesure chacune $\frac{1}{8}$u on obtient encore 1u.

Entraînement

Avant la séance suivante proposer quelques exercices de codage et décodage de longueurs en utilisant des écritures fractionnaires faisant intervenir les demis, quarts et huitièmes.

Remarques

Nous dirons indifféremment unité ou étalon bien que ces deux termes ne soient pas exactement synonymes, étalon renvoyant à l'objet bande de papier servant à effectuer les mesures, unité renvoyant à la longueur de l'étalon. De même nous emploierons indifféremment segment et bande bien que que l'un renvoie à l'objet géométrique et l'autre à l'objet physique.

On peut cependant demander aux enfants de tracer un trait au feutre sur la longueur de la bande afin que le segment unité ne soit pas confondu avec le rectangle que constitue nécessairement la bande.

Présentation et analyse de l'activité

Une unité de longueur étant choisie, (ici il est intéressant de choisir un segment mesurant entre 11 et 12 cm par exemple 11,3 cm), les enfants vont devoir la diviser en 2, 4, 3, 6 puis 5 et 7 parties exactement superposables.
Les premiers partages demandés peuvent être réalisés par pliage, il s'agit là de réinvestir la méthode utilisée lors de la séance précédente. Pour les divisions en 5 ou 7, les enfants vont rencontrer les limites de la manipulation par pliage. Le maître distribuera à ce moment là un réseau de parallèles équidistantes (voir annexe 1) qui sera nommé "machine à partager les segments" et en montrera l'utilisation.
Les enfants devront produire des écritures rendant compte des manipulations effectuées prolongeant les résultats obtenus en séance n°3. Il s'agit pour le maître d'insister sur les deux points de vue :
- lorsque l'on partage l'unité en 5 parties exactement superposables, chaque partie a pour longueur $\frac{1}{5}$.
- si l'on reporte cinq fois un segment de longueur $\frac{1}{5}$, on obtient un segment de longueur 1.
Cette séance est une séance de réinvestissement de la séance 3, avec l'introduction d'un nouvel outil pour diviser les segments.

Intentions pédagogiques

- Introduire de nouvelles fractions lors de partage d'une unité de longueur, soit par pliage, soit en utilisant un réseau de parallèles équidistantes.

- Amener les enfants à produire des égalités entre les différentes écritures obtenues à l'issue des manipulations.

Matériel
- Bandes de papiers de longueur 11,3 cm représentant la longueur unité. Il est souhaitable de faire passer au feutre rouge ou vert la longueur de chaque bande pour que les enfants visualisent bien le segment unité.
- Feuilles de papier calque sur lesquelles sont dessinés des segments unités.
- Photocopies du réseau de parallèles équidistantes, les droites seront numérotées de 0 à n, une photocopie par élève. (cf annexe 1)
- Plusieurs bandes unités "maître" pour le tableau par exemple 4 fois plus grande que l'unité choisie pour les élèves
- Une machine à partager sur une grande affiche correspondant à un agrandissement par 4 de la machine à partager des élèves.

Déroulement

Calcul mental
Servant de rappel de la séance antérieure.

Proposer des exercices de calcul :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ $2\times\frac{1}{2}=$ $2\times\frac{1}{4}=$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ $4\times\frac{1}{4}=$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=$ etc.

ainsi que des exercices de comparaison de fractions :

$\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ 1 et $\frac{4}{4}$ 1 et $\frac{5}{4}$ etc.

Les questions sont posées oralement, les enfants sont interrogés individuellement, oralement et à tour de rôle, si un enfant ne sait pas répondre il peut passer son tour, la validation se fait par retour à la situation de codage de longueur en utilisant une bande unité "maître".
Cette première séance de calcul mental sur les fractions doit être rapide et a pour fonction de sensibiliser les enfants aux fractions "décontextualisées".

Organisation de la classe
Travail individuel ou à deux. tous les échanges entre les élèves sont permis et même suggérés.

Consigne 1
Après avoir distribué aux élèves les bandes unités et fait tracer sur celles-ci le segment unité au feutre sur la longueur de la bande, demander au enfants de dessiner des segments mesurant pour [AB] : $\frac{1}{2}$u, pour [CD] : $\frac{1}{4}$u, pour [EF] :$\frac{1}{3}$u, puis de comparer deux à deux les segments tracés. Noter au tableau les mesures des segments tout en disant "un segment [AB] mesurant un demi de u, un segment [CD] mesurant un quart de u, un segment [EF] mesurant un tiers de u". Laisser les enfants proposer une interprétation de l'expression un tiers.

Mise en commun
Les enfants expliquent la façon dont ils ont interprété "un tiers" et la méthode qu'ils ont utilisée pour construire un segment de cette longueur.
Généralement les enfants interprètent correctement "un tiers" en faisant une analogie entre les écritures $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.et $\frac{1}{3}$. Les méthodes utilisées sont, soit le pliage en trois par tâtonnement en accordéon ou non, soit le mesurage à l'aide de la règle graduée qui pose à beaucoup un problème difficilement surmontable (division de 11,3 par 3)

Première synthèse
- Lorsque l'on divise le segment unité en trois parties exactement superposables, chaque partie a pour longueur un tiers de u que l'on note à l'aide de la fraction $\frac{1}{3}$ dans cette fraction le nombre 1 qui est au dessus du trait de fraction s'appelle le *numérateur* de la fraction, il indique que le segment que l'on divise est le segment unité, le nombre 3 qui est situé sous le trait de fraction s'appelle le *dénominateur*, il indique en combien de parties exactement superposables on a divisé le segment unité.
- Une méthode pour diviser une bande unité en trois consiste à faire un pliage, le plus facile est un pliage en accordéon.
On peut écrire les égalités suivantes:
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ 1 et 3 x $\frac{1}{3}$.= 1 et encore 1 : 3 = $\frac{1}{3}$.

Consigne 2
"Construisez un segment mesurant un sixième de u, c'est-à-dire dont la longueur en unité u est notée $\frac{1}{6}$".

Confrontation des procédures de partage du segment unité en 6 parties exactement superposables : certains enfants essaient de réaliser un pliage accordéon en 6, généralement cette procédure est inefficace en raison de la difficulté d'un tel pliage, d'autres prennent le pliage en trois puis replient en deux, d'autres plient d'abord en deux puis en trois
Les différents segments construits sont comparés soit en utilisant un papier calque soit par report au compas.
Les manipulations sont décrites et traduites par toutes les égalités possibles proposées par les élèves :
Exemple
- un sixième c'est la longueur d'une partie quand on a divisé en 6, on peut écrire
$\frac{1}{6} = 1 : 6$
- si on reporte 6 fois cette longueur on obtient un segment de longueur une unité, on peut donc écrire

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$ ou encore $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

- un sixième c'est la moitié du tiers, on peut écrire
$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

- un sixième c'est une moitié divisée en trois, ou encore c'est le tiers de la moitié: on peut écrire
$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

Consigne 3
"Construisez un segment de longueur un cinquième de u (sa longueur s'écrit $\frac{1}{5}$)".
Demander aux enfants la signification de cette nouvelle fraction, préciser à nouveau, si cela est nécessaire, que le nombre 5 qui se trouve sous le trait de fraction s'appelle le dénominateur et qu'il indique en combien il faut diviser l'unité.
Après un petit temps de recherche du cinquième de u par pliage, constater que la manipulation est très difficile et proposer aux élèves "une machine à partager les segments".

Consigne 4
Distribuer les machines à partager individuelles et afficher la grande sur le tableau. Distribuer également de nouvelles bandes unité aux enfants (les premières étant en général à ce moment de la séance relativement inutilisables tant elles ont été pliées !)
Demander aux enfants de décrire cette machine : droites parallèles, numérotées, espacées toujours de la même manière, introduire le terme *parallèles équidistantes* c'est-à-dire qui sont à la même distance les unes des autres.
Laisser un petit temps de recherche de la manière dont cette machine pourrait être utilisée pour diviser le segment unité par exemple en deux..

Il se peut que quelques enfants trouvent la solution, mais, si ce n'est pas le cas, expliquer alors comment se servir de la machine pour partager le segment unité en deux, en exécutant ce partage au tableau avec une bande unité "maître" et la machine à partager du tableau:
- repérer la droite portant le numéro 0, puis la droite portant le numéro 2
- placer une extrémité du segment unité sur la droite portant le numéro 0
- en faisant pivoter le segment unité sans faire bouger l'extrémité déjà placée, amener la seconde extrémité du segment unité sur la droite numérotée 2
- placer sur le segment unité un petit repère au point d'intersection du segment avec la droite numérotée 1.

Lorsque chaque enfant a exécuté ce premier partage, comparer la longueur obtenue avec le segment de longueur $\frac{1}{2}$ construit en début de séance.

Consigne 5
Demander ensuite aux enfants de répondre maintenant à la consigne 3, c'est à dire de, tracer un segment de longueur un cinquième de u, en utilisant la machine à partager.
Laisser les enfants travailler par deux, mais chacun doit construire son propre segment.

Mise en commun des procédures utilisées et comparaison des segments tracés.
Au cours de cette mise en commun, quelques enfants viennent exécuter le partage au tableau avec le matériel du tableau, en précisant à nouveau clairement les différentes étapes : repérage des lignes 0 et 5, positionnement des extrémités du segment sur ces deux lignes, repérage sur le segment unité des intersections avec les lignes 1; 2; 3; 4 , c'est à dire avec les lignes qui se trouvent entre les lignes 0 et 1.

Institutionnalisation

Cette institutionnalisation porte d'une part sur le vocabulaire d'autre part sur les deux types de propriétés donnant du sens aux écritures fractionnaires.

1- Quand on divise le segment unité en deux segments superposables, chaque partie a pour longueur un demi que l'on note $\frac{1}{2}$.
Le nombre 1 indique que l'on divise le segment unité (de longueur 1), c'est le *numérateur* de la fraction. Le nombre 2 situé en dessous du trait de fraction est le *dénominateur* de la fraction, il indique en combien de parties on divise le nombre 1.

- Lorsque l'on divise équitablement le segment unité en trois parties, les segments obtenus ont pour longueur un tiers que l'on note $\frac{1}{3}$.
- De même si on partage l'unité en quatre segments exactement superposables, chacun mesure un quart de u que l'on note $\frac{1}{4}$.
- Quand on partage l'unité en 5 les cinq parties mesurent $\frac{1}{5}$ et on lit " un cinquième" ;
- Si on partage l'unité en 6, les parties mesurent $\frac{1}{6}$ et on lit " un sixième".

- Quand le dénominateur de la fraction est un nombre supérieur à 4, pour lire la fraction il suffit de lire le nombre qui est écrit au numérateur, suivi du nombre écrit au dénominateur auquel on adjoint le suffixe "ième".

Exemple : la fraction $\frac{1}{12}$ se lit "un douzième", la fraction $\frac{5}{7}$ se lit "cinq septième".

2- Quand on divise le segment unité en cinq parties exactement superposables chaque partie a pour longueur $\frac{1}{5}$ et l'on peut écrire $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = 1$ ou $5 \times \frac{1}{5} = 1$ car si on reporte bout à bout cinq fois un segment de longueur $\frac{1}{5}$ on obtient un segment de longueur 1.

Remarque

Le maître fera noter quelques éléments de cette phase d'institutionnalisation dans le cahier, ainsi que sur une grande feuille qui sera affichée pendant quelques jours dans la classe..

Entraînement

Faire construire des segments de différentes longueurs (les longueurs étant données sous forme fractionnaire et l'unité étant toujours celle de la séance).

Présentation et analyse de l'activité

Proposer aux élèves une situation de construction de segments de différentes longueurs exprimées par des écritures fractionnaires.
La situation comprend deux parties. Au cours de la première partie, les enfants vont devoir établir par écrit une commande de matériel pour réaliser des réglettes de différentes longueurs, en respectant certaines contraintes. Dans la seconde partie les enfants valideront leurs prévisions en réalisant effectivement les réglettes.
Ici les longueurs choisies vont provoquer l'abandon des méthodes de pliage au profit de l'utilisation de la machine à partager.
Les contraintes imposées vont amener les élèves à effectuer des comparaisons et des additions de fractions.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- réinvestir la notion de fraction pour désigner des longueurs, une unité ayant été choisie,
- utiliser la machine à partager pour effectuer des divisions équitables du segment unité.
- comparer des fractions.
- donner du sens à l'addition de fractions.

Matériel
- De nombreuses bandes de papier légèrement cartonné, de longueur 18 cm.
- Les machines à partager.
- Du papier calque.
- Des feuilles de papier blanc.
- Des crayons ou des feutres fins de couleur.
- Une affiche sur laquelle est inscrit ceci:

"Voici les réglettes dont j'aurais besoin pour chaque élève de CP.
Toutes les bandes que je vous envoie ont la même longueur.
J'ai choisi cette longueur pour unité pour exprimer les longueurs des réglettes.

réglette	a	b	c	d	e	f	g	h
longueur	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$

J'aimerais bien, pour économiser le matériel, que vous vous organisiez pour utiliser le moins de bandes possibles".

Déroulement

Calcul mental
Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{4}$ et 1, $\frac{3}{8}$ et 1, $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ et 1, etc.
Même mode d'interrogation qu'à la séance précédente.

Organisation
Travail par groupe de deux.

Consigne 1
"Le maître de la classe de CP a récupéré chez un imprimeur des bandes de carton de même taille. Il m'a confié toutes les bandes pour que vous l'aidiez à préparer le matériel nécessaire à la leçon sur les longueurs qu'il veut faire avec ses élèves.
Il a préparé une feuille sur laquelle il a inscrit les longueurs des réglettes qu'il souhaite que vous découpiez,
Je vais l'afficher au tableau".

Afficher la feuille sur laquelle sont inscrites les longueurs des réglettes à construire, distribuer éventuellement une photocopie de cette feuille aux enfants qui le souhaitent.
Faire lire l'affiche, insister sur le choix de l'unité.

"Vous allez, par groupe de deux, préparer le matériel pour un élève de CP, mais vous allez d'abord chercher comment vous y prendre pour utiliser le moins de bandes possibles.
Je distribue tout d'abord une seule bande unité à chacun de vous pour que vous puissiez réfléchir au nombre de bandes dont vous aurez besoin pour réaliser les réglettes demandées. Vous ne devez pas couper cette bande unité mais vous pouvez inscrire dessous tous les repères que vous voulez, vous pouvez pour cela utiliser des repères de différentes couleurs.
Après avoir discuté et vous être mis d'accord, vous établirez votre "commande", c'est à dire que vous noterez sur une feuille le nombre de bandes dont vous pensez avoir besoin ainsi que la manière de procéder que vous avez choisi d'utiliser.
Vous m'apporterez votre commande et je vous donnerai le matériel que vous aurez demandé".

Faire reformuler la consigne afin que les enfants comprennent bien que dans le premier temps de l'activité il ne s'agit pas de couper les réglettes, mais de préparer la commande de bandes de carton nécessaires à leur réalisation, rappeler que l'on cherche à utiliser le moins de bandes possible.

Si les enfants ont du mal à s'organiser, leur proposer de partager la bande unité à l'aide de la machine, sans la couper, mais en plaçant des repères de différentes couleurs suivant le partage effectué (par exemple, rouge pour le partage en 4, vert pour le partage en 3, etc), puis de se servir de ces repères pour construire sur une feuille des segments ayant la longueur des réglettes demandées, puis de chercher comment agencer les segments ainsi construits pour utiliser le minimum de bandes unités.

Au fur et à mesure que les enfants apportent leur commande, leur donner le nombre de bandes qu'ils souhaitent, et leur demander de préparer le matériel en suivant la méthode qu'ils ont prévue.
Si la commande n'est pas clairement formulée, le maître pourra apporter à ce moment une aide individualisée, en évitant toutefois de donner une solution, ou de faire le travail à la place des élèves !

Mise en commun
- des méthodes utilisées pour effectuer les partages,
- des procédures utilisées pour chercher à utiliser le moins de bandes possibles

Comparaison des morceaux obtenus, ainsi que du nombre de bandes utilisées pour construire les réglettes demandées.
Pour cela recenser au tableau les longueurs des différents segments que les enfants ont pu construire dans chaque bande utilisée, introduire des écritures additives et discuter sur les différentes propositions.
Recenser les remarques :

- les réglettes a et d ont la même longueur car $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

- la réglette f a pour longueur $\frac{1}{2}$

- en mettant bout à bout les réglettes e et g ou les réglettes a et h, on obtient exactement une bande.

Remarque
Le minimum de bandes est 4 :

- *une bande pour les réglettes a et h car* $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$
- *une bande pour e et g car* $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=\frac{7}{7}=1$
- *une bande pour b, d et f car* $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$
- *enfin une bande pour la réglette c. Il reste alors une petite partie mesurant* $\frac{1}{5}$

Il n'est absolument pas exigible que les enfants trouvent cette répartition, l'important étant de les amener à comparer les longueurs des réglettes à construire avec les longueurs des chutes obtenues.

Après cette mise en commun faire refaire les réglettes qui ne conviennent pas puis les faire ranger de la plus longue à la plus courte et faire noter le rangement obtenu.

Consigne 2
"Comment faire pour construire une réglette de longueur $\frac{9}{7}$?"
Travail par deux puis mise en commun des propositions.
Il est nécessaire de coller deux bandes, on peut prendre une bande entière et $\frac{2}{7}$ d'une autre, on peut aussi après avoir attaché bout à bout deux bandes avec du scotch, reporter 9 fois un segment de longueur $\frac{1}{7}$.
Conclure :

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}.$$

Institutionnalisation

Elle va dépendre des propositions faites par les enfants lors des mises en commun des consignes 1 et 2
Elle peut porter sur les résultats suivants :

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Quand on a $\frac{1}{3}$, pour obtenir 1, il faut ajouter $\frac{2}{3}$.

On peut exprimer cela en disant que le complément à 1 de $\frac{1}{3}$ est $\frac{2}{3}$.

Prolongement possible

Consigne 3
Si vous savez que les bandes de cartons mesurent toutes 18 cm peut-on savoir, sans les mesurer les longueurs en cm des réglettes construites?
Demander aux enfants d'écrire leur prévisions sur une feuille puis ensuite faire vérifier les prévisions en demandant au enfants de mesurer les différentes réglettes avec leur règle graduée.

Synthèse
Conclure que la division de 18 par 2, par 3 et par 6 "tombe juste" , il est alors facile de trouver la longueur en cm des réglettes a, b, d, f, h .
Noter au tableau les résultats suivants :

$\frac{1}{3}\times 18=6$ $\frac{1}{6}\times 18=3$ $\frac{4}{8}\times 18=9$ $\frac{1}{2}\times 18=9$

Dans les autres cas, il est plus facile d'utiliser la machine à partager que d'essayer de trouver la longueur en cm des réglettes.

Présentation et analyse de l'activité

Les élèves vont fabriquer, comparer, classer des surfaces en fonction de l'aire, ce qui va permettre d'introduire le concept d'aire. Puis ils vont coder les classes obtenues, après choix d'une classe unité, ce qui introduit la notion de mesure et la nécessité de codages numériques inférieurs à 1.
D'où un réinvestissement des fractions dans le contexte de nouvelles grandeurs, les aires.
Cette séance et les suivantes sont les premières d'une progression possible sur les aires.

Intentions pédagogiques

- Introduire le concept d'aire d'une surface.

- Donner du sens aux écritures fractionnaires avec une autre grandeur.

Matériel
- En grande quantité des feuilles entières format A4 (grand format classique 21 x 29,7), par exemple des feuilles d'annuaire téléphonique.
- Des ciseaux, le matériel usuel de géométrie.
- Des affiches pour coller des exemples de surfaces fabriquées (mémoire visuelle de la classe).

Déroulement

Calcul mental
Interrogation orale, les enfants lèvent le doigt, le maître interroge.
- Recherche de compléments à 1 : quelle fraction faut-il ajouter à 1/3 pour obtenir 1, à 1/2 pour obtenir 1, à 3/4 pour obtenir 1, à 2/5 pour obtenir 1,....
- Recherche de fractions égales à : 4/8, 3/3, 2/8, 3/6, 16/16,...

Organisation
Enfants par groupe de quatre, pour échanger et disposer du matériel

Consigne 1
"Vous avez à votre disposition des feuilles d'annuaire. Vous devez partager une feuille en deux parties, exactement superposables, sans perte de papier, ni collage. Ce qui veut dire qu'avec les deux morceaux on peut toujours reconstituer la feuille entière."

Temps de reformulation (superposables, de même quantité de papier,...), puis recherche, premières réalisations : les rectangles classiques 10,5 x 29,7 et 14,3 x 21

Consigne 2
Le maître montre les premiers partages, les deux classiques, on vérifie par superposition et juxtaposition qu'ils conviennent bien, puis il propose aux élèves de trouver le plus de partages possibles qui répondent à la consigne de départ.

Temps de recherche, qui peut être assez long (prévoir un minimum d'une demi-heure).
Rappeler éventuellement que tous les instruments sont autorisés, dans la mesure où la consigne est respectée.
Les partages par une droite (qui passe par le centre du rectangle, le point de rencontre des diagonales) sont trouvés relativement vite, dans la mesure où ils correspondent à un seul pliage de la feuille, mais la ligne brisée n'apparaît que plus tardivement souvent à la suite de pliages réguliers en 8, puis en 16, ou par construction de segments de même longueur partant de deux sommets diagonalement opposés, ou par constat du rôle particulier que peuvent jouer les diagonales et les médianes.

Remarque
De nombreux essais n'aboutissent pas, mais permettent à leurs auteurs d'affiner leurs hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage.

Synthèse

Quand le maître considère que le nombre de formes de surfaces différentes est conséquent (ou que le temps de recherche a dépassé trois quarts d'heure), il organise la synthèse en recueillant, sur chaque groupe de tables, des surfaces (chacune des deux parties) : cf. annexe 2.
Les élèves ont un temps d'observation, peuvent demander une vérification de visu, que le groupe responsable vient faire au tableau.

1 - Réflexion collective sur le mode de partage

Le maître génère une discussion sur les façons que les élèves ont eu de trouver les bons découpages (et sur les hypothèses fausses) :
- il est nécessaire de prendre les mêmes mesures de part et d'autre,
- il est nécessaire de "partir de deux coins opposés",
- quand on a plié en huit, on prend les plis en sens inverses des deux côtés,
etc.

Pour le maître, rappelons la propriété nécessaire et suffisante vérifiée par la ligne de partage : être symétrique par rapport au centre du rectangle et de passer par ce centre.
Il peut être possible d'approcher cette notion d'invariance de la ligne par symétrie centrale sans toutefois l'institutionnaliser.

2 - Introduction des mots mathématiques de référence

Certaines morceaux de feuille au tableau sont superposables, d'autres non. Mais ils représentent tous la même quantité de papier, ils ont toutes la même étendue, celle qui correspond à la moitié d'une feuille. En mathématiques on dit que ces morceaux qu'on appelle surfaces, ont la même aire.
Questions
- Pouvez vous montrer des surfaces de même aire que celle-là ? en désignant une surface affichée au tableau.
- Ces deux surfaces (la feuille entière et un morceau obtenu) ont-elle la même aire ?
- Je décide que l'aire de la surface feuille entière est 1 (une unité). Quelle est alors l'aire des surfaces fabriquées ?
(réponse attendue : la moitié, un demi,... que le maître, sous proposition éventuelle des élèves, code au tableau aussi $\frac{1}{2}$)

Institutionnalisation

Deux surfaces superposables ont la même aire ; mais deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement la même forme.
Si l'aire de la surface feuille entière est 1, la feuille entière s'appelle l'étalon d'aire et l'aire des surfaces fabriquées est $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $\qquad$ $2 \times \frac{1}{2} = 1$

Remarque
Cette séance renforce le sens de la fraction développé précédemment et prépare simultanément la progression sur la grandeur aire, indépendamment des mesures unidimensionnelles (longueurs). La grandeur aire est donc perçue non pas comme dérivée des longueurs, mais comme une grandeur à part entière, spécifiquement attachée aux surfaces.

Consigne de fin de séance
"Vous allez coder les surfaces d'aire 1/2 et les ranger dans votre chemise. Nous les réutiliserons lors des prochaines séances."

Présentation et analyse de l'activité

Cette séance, qui conserve la structure de la précédente, permet :
- d'une part de réinvestir le principe du partage en deux parties superposables, donc de permettre aux élèves de trouver des lignes de partage plus sophistiquées ;
- d'autre part de fabriquer des surfaces d'aires différentes.

Cette séance se limite à l'étude de surfaces d'aire $1/2^n$, l'étalon étant toujours la feuille entière.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à
- créer des collections de surfaces de même aire et de formes différentes et fabriquer des surfaces d'aires différentes ;
- réutiliser les codages fractionnaires pour coder ou décoder des mesures d'aire ;
- associer des surfaces à des mesures d'aires exprimées sous forme fractionnaire ; en déduire des égalités de fractions.

Matériel
- En grande quantité des feuilles entières format A4 (grand format classique 21 x 29,7), par exemple des feuilles d'annuaire téléphonique.
- Les surfaces fabriquées précédemment, conservées dans la chemise individuelle..
- Des ciseaux, le matériel usuel de géométrie.
- L'affiche avec les surfaces sélectionnées lors de la séance précédente au tableau (famille 1/2).
- Des affiches pour les nouvelles classes.

Déroulement

Calcul mental
A l'oral, comme dans la séance 6.
- Quelle fraction est le complément à 1 de : 2/3,:4/5, 1/8, 3/3,...
- Trouvez d'autres fractions égales à : 6/4, 5/5, 6/8, 6/3,....

Remarque
Le calcul mental permet de dépasser le champ étudié pour tester l'aptitude des élèves à étendre correctement les propriétés de certaines fractions. Bien entendu, ces constats de propriétés ne sont pas encore institutionnalisés, a fortiori considérés comme connaissances exigibles par tous.

Organisation
Enfants par groupe de quatre, pour échanger et disposer du matériel

Rappel
"Nous avons fabriqué des surfaces comme celles-ci (les surfaces fabriquées et sélectionnées sont conservées par le maître et affichées de nouveau à cette occasion).
Que peut-on dire de ces surfaces ?"
(réponse attendue : elles ont toutes même aire, parce qu'elles représentent la moitié de la feuille entière exactement ; leur aire est un demi qui s'écrit $\frac{1}{2}$)

"Quelles égalités connaissez-vous pour traduire ce partage en 2 ?"
(réponses attendues :
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ou $2\times\frac{1}{2}=1$ ou $\frac{1}{2}\times 2=1$)

Consigne 1
"Il s'agit aujourd'hui de fabriquer encore des surfaces, avec les mêmes contraintes qu'hier (les faire rappeler), partager en deux parties superposables, sans perte de papier ni collage
Mais aujourd'hui partez d'une demi feuille de papier de cette forme", et le maître montre le rectangle classique 14,8 x 21."

Un temps court de recherche est laissé aux enfants et les premières réalisations sont montrées à tous.

Consigne 2
"Essayez de fabriquer des surfaces un peu plus sophistiquées"

Temps de recherche. Le maître circule pour encourager les élèves à tenter des lignes de partage plus sophistiquées et ainsi, appliquer en acte l'invariance d'une courbe par symétrie centrale.

Synthèse après collage de certaines surfaces sur une nouvelle affiche placée à côté de celle des demi-feuilles, sur un questionnement du type :

- "Comparez les aires de ces nouvelles surfaces."
(elles ont toutes la même aire car elles représentent toutes la moitié d'une demi-feuille)

- "L'aire de la feuille entière est 1, l'aire des surfaces d'avant est $\frac{1}{2}$, quelle est l'aire de cette nouvelle surface (en désignant le rectangle 14,8 x 10,5) ?"
Réponses possibles des élèves :
la moitié de $\frac{1}{2}$, un demi de un demi,......que le maître écrit aussi au tableau sous la forme
$\frac{1}{2}: 2$ $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$

"Combien de surfaces telles que celles-là sont nécessaires pour refaire la feuille entière ?"
réponse attendue 4

Le maître réintroduit alors, si nécessaire, le codage $\frac{1}{4}$, et sa lecture "un quart".

Consigne 2

Le maître demande quelles écritures on peut écrire, qui décrivent mathématiquement ce que l'on vient de faire, par exemple :

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ $4 \times \frac{1}{4} = 1$ $\frac{1}{4} \times 4 = 1$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

Remarque
Dans la communication, le maître utilise indifféremment le même mot pour les objets physiques (les morceaux de feuille de bottin) et les objets géométriques (les surfaces), de même qu'on avait confondu bandes de papier pris sur une dimension et segments.

Consigne 3
"Fabriquez des surfaces d'aire $\frac{1}{8}$. Associez des écritures à cette nouvelle fraction."

Temps de recherche et *synthèse* des essais (avec une nouvelle affiche pour cette famille) :
moitié d'une surface mesurant $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$ $8 \times \frac{1}{8} = 1$ $\frac{1}{8} \times 8 = 1$ etc

Le maître essaie de recueillir, d'écrire au tableau et de justifier toutes les écritures proposées par les élèves.
Figurent également des écritures du type :
2 huitièmes, c'est un quart ;
4 quarts, c'est un (une unité) ; etc....

Consigne 4
"Que se passe-t-il si on poursuit les découpages avec les contraintes de départ ?"

Réponses attendues : on obtient de nouvelles surfaces, d'aire $\frac{1}{16}$, puis d'aire $\frac{1}{32}$, etc.

On peut obtenir "théoriquement" des surfaces d'aire $\frac{1}{2^n}$, ce que peuvent remarquer les élèves sous leur forme explicite. Des écritures peuvent également être obtenues avec ces fractions de "grand" dénominateur.

Institutionnalisation

Une surface unité partagée exactement en deux a comme aire $\frac{1}{2}$.

Une surface unité partagée exactement en quatre a comme aire $\frac{1}{4}$.
C'est un demi partagé exactement en deux.

Une surface unité partagée exactement en huit a comme aire $\frac{1}{8}$.
C'est un quart partagé exactement en deux.
C'est un demi partagé exactement en quatre.

On peut écrire les égalités suivantes entre les fractions :
(et le maître choisit certaines égalités parmi celles rencontrées)

Remarque
L'institutionnalisation ne peut être que liée aux productions des élèves
La mémoire de ces écritures peut être conservée sur une affiche qui servira de référence plus tard. Cette affiche sert aussi d'institutionnalisation. Elle figure au mur de la classe pendant un bon mois, ce qui permet aux enfants ayant momentanément "perdu" le sens des écritures de trouver des indices, attachés à du vécu, le leur rappelant.

Entraînement

Les élèves codent tous leurs découpages par la mesure de l'aire ad hoc, le maître veille aux codages corrects. Les surfaces codées et non collées sont ensuite rangées dans leur chemise individuelle.

Présentation et analyse de l'activité

Dans cette séance il s'agit pour les enfants de fabriquer de nombreuses surfaces d'aire 1 et de formes différentes, par divers procédés :
- l'utilisation judicieuse des surfaces codées lors des séances précédentes et leur juxtaposition ;
- le découpage d'une feuille entière en quelconques morceaux et le recollage, sans perte ni chevauchement, de ces morceaux, ce qui permettra de leur faire prendre conscience :
    * de l'invariance de l'aire par réorganisation des morceaux constituant la surface ;
    * de la possibilité de transformer une surface en une autre de même aire et de forme différente.

Cette séance introduit donc un nouveau procédé de fabrication de surfaces, par juxtaposition et collage, ou par découpage et recollage sans perte ni chevauchement (principe de conservation des aires).

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- travailler l'invariance de l'aire d'une surface par découpage et recollement ;
- produire des égalités de fractions.

Matériel
- En grande quantité des feuilles entières format A4 (grand format classique 21x29,7), par exemple des feuilles d'annuaire téléphonique.
- Les surfaces codées par leur aire fabriquées lors des séances précédentes.
- Des ciseaux, du scotch, le matériel usuel de géométrie.
- Les affiches correspondant aux différentes classe de surfaces déjà construites.
- Une affiche pour la nouvelle classe.

Déroulement

Calcul mental
A tour de rôle, dans l'ordre des places dans la classe, oralement, un jeu du furet :
chaque enfant ajoute 1/4 à la fraction dite par l'enfant d'avant.
Le maître explique le principe et amorce :
"0 1/4 2/4 qu'est ce que je peux dire aussi pour cette fraction....1/2, à vous maintenant....
et il arrête la récitation de la liste pour toute fraction ayant une autre écriture possible.
C'est l'occasion notamment de préciser que :
4/4 c'est 1, que 5/4 c'est aussi 1+1/4, que 6/4, c'est 1+2/4, ou 1+1/2, ou 3/2, etc.

Organisation
Enfants par groupe de quatre, pour échanger et disposer du matériel

Rappel
Nous allons continuer à fabriquer des surfaces comme dans les séances précédentes. L'étalon est toujours la feuille entière, nous avons déjà des surfaces d'aire (rappeler les aires dont on a des exemplaires)

Consigne 1
"Il s'agit aujourd'hui de fabriquer des surfaces d'aire 1 : est-ce que vous en connaissez déjà ? (la feuille entière). Il s'agit donc de fabriquer des surfaces d'autre forme que la feuille entière, mais de même aire."

Temps de recherche.
Méthodes attendues :
- juxtaposer des surfaces déjà obtenues pour constituer une surface d'aire 1 : par exemple deux surfaces de la famille demi-feuille, ou quatre surfaces de la famille quart de feuille,...
- découper de façon aléatoire une feuille de bottin et juxtaposer les morceaux de façon différente sans chevauchement ni perte de papier.

Remarque
Pour cette séance, le maître aura préparé des surfaces obtenues par juxtaposition
- de deux surfaces de même forme et d'aire $\frac{1}{2}$,
- de deux surfaces de formes différentes et d'aire $\frac{1}{2}$ (toutes les surfaces ayant été obtenues par le procédé des séances précédentes),
- de quatre surfaces d'aire $\frac{1}{4}$,
- d'une surface d'aire $\frac{1}{2}$ juxtaposée à deux surfaces d'aire $\frac{1}{4}$,
cela pour avoir la certitude de rencontrer des égalités donnant 1 à partir de fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

Synthèse
Affichage de certaines surfaces au tableau, dans la famille où le maître aura placé un exemplaire de feuille entière, après vérification collective que la surface répond à la consigne.
Le maître propose les siennes à l'examen si la classe n'en a pas construit de telles.
Recensement des écritures liées aux modes de construction, quand c'est possible.
On obtient entre autres :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$2\times\frac{1}{2}=1 \quad ou \quad \frac{2}{2}=1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \quad ou \quad \frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \quad ou \quad 4\times\frac{1}{4}=1$$

Bien entendu la surface fabriquée par découpage aléatoire et recollement n'est pas prétexte à écriture, mais permet de faire formuler par les élèves une phrase du style :
"une surface obtenue par découpage et recomposition à partir d'une surface donnée a la même aire que la surface de départ."

Consigne 2
"Vous allez choisir deux surfaces de formes différentes de la famille 1. Peut-on, partant de l'une, reconstituer l'autre surface par découpage et recollement sans chevauchement ?"

Temps de recherche.
Les enfants découpent la première surface et font un puzzle de la seconde. Ce passage de l'une à l'autre n'est pas toujours "simple", le maître peut conseiller de faire construire une surface intermédiaire, un rectangle de même aire que la surface de départ et ayant une dimension fixée, qui servira de surface de comparaison.

Synthèse
Certains l'ont constaté, d'autres n'ont pu arriver jusqu'au bout car le passage était plus complexe. Mais il est toujours possible, quand on est très précis, de transformer une surface en une autre de même aire, par le procédé du puzzle.

Institutionnalisation
Elle porte sur
- les façons de fabriquer des surfaces d'aire fixée : respecter exactement la forme, respecter le procédé de fabrication contrôlant l'aire, découper et juxtaposer exactement les morceaux de la surface de départ, etc.
- les écritures égales à l'unité, qu'on a trouvées sur les fractions :

$\frac{2}{2}=1 \quad \frac{4}{4}=1 \quad \frac{8}{8}=1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1 \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$ etc....

SEANCE 9

Présentation et analyse de l'activité

L'activité comporte deux parties. Dans la première, les enfants vont continuer le travail entrepris lors des séances précédentes et créer de nouvelles familles de surfaces de même aire par juxtaposition et recollement de surfaces choisies dans d'autres classes. Cette activité à pour but de faire produire aux élèves des égalités entre des écritures fractionnaires traduisant diverses manières de construire une surface d'aire donnée.
Dans la seconde parties les enfants devront ranger les classes obtenues. Pour valider leur proposition, ils devront construire pour chaque classe, un rectangle de la classe ayant une dimension fixée.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- utiliser les fractions et des sommes de fractions pour désigner des classes de surfaces de même aire
- écrire des égalités entre diverses écritures fractionnaires
- comparer des fractions
- réinvestir l'invariance de l'aire par découpage et recollement.

Matériel
- Les affiches correspondant aux différentes classes de surfaces de même aire déjà construites les partages déjà réalisé mais qui n'ont pas encore servi
- Des feuilles d'annuaire en grand nombre
- Des affiches pour les nouvelles classes

Déroulement

Calcul mental
1- Chaque enfant doit chercher et noter le plus d'écritures possibles du nombre 1 en utilisant des fractions en une minute.
2- Par deux, les enfants comparent leurs propositions, suppriment les doubles et font la liste de toutes les écritures différentes qu'ils ont trouvées.
3- Puis deux groupes de deux enfants font à leur tour les comparaisons et établissent la liste des écritures des quatre enfants.
4- Le maître attribue à chaque groupe autant de points que d'écritures du nombre 1, correctes et différentes. Le groupe gagnant est celui qui a le plus de points.

Organisation
Au tableau sont fixées les affiches correspondant aux classes de surfaces de même aire déjà construites, placées dans n'importe quel ordre, sous chacune d'elles, une colonne dans laquelle les enfants pourront noter des écritures fractionnaires. Des affiches vierges sont à la disposition des élèves.

Rappel de la séance antérieure
Ce rappel est à la charge des enfants et non du maître qui se contentera si cela est nécessaire de faire préciser les informations apportées en questionnant la classe. Ce rappel doit permettre aux enfants de rappeler qu'ils ont déjà construit plusieurs classes (familles) de surfaces de même

aire, par exemple : la famille des surfaces d'aire $\frac{1}{2}$, celle des surfaces d'aire 1 ,qui est la famille des surfaces qui sont toutes aussi étendues que la feuille d'annuaire choisie pour unité etc.

Consigne 1
"Vous pouvez construire de nouvelles surfaces soit en utilisant les morceaux qu'il vous reste, soit en utilisant de nouvelles feuilles d'annuaire, mais vous devez pouvoir dire quelle est leur aire en gardant toujours pour unité l'aire de la feuille d'annuaire. Vous pourrez venir placer votre surface soit dans une des familles déjà commencées soit sur une nouvelle affiche s'il s'agit d'une surface d'une nouvelle famille, mais vous devrez toujours écrire l'aire de la surface que vous avez placée dans la colonne correspondant à sa famille".

Laisser un temps de travail suffisant pour que les enfants construisent au moins chacun une surface, et pour que l'ensemble des classes obtenues soit de l'ordre de 6 ou 7.
Pendant ce temps le maître circule et favorise la recherche de surfaces d'aire supérieure à 1, en déclarant la nécessité de "grandes surfaces " pour compléter harmonieusement la collection déjà constituée.
Il a en réserve une surface d'aire $\frac{3}{4}$ ainsi qu'une surface d'aire $\frac{5}{4}$, pour le cas où les enfants ne feraient pas ces propositions.
(cf. des exemples de productions en annexe 3).

Consigne 2
"Chacun de votre place, vous observez les différentes classes ainsi que les écritures fractionnaires qui doivent les désigner et qui sont placées dessous.
Si vous avez soit des remarques à faire parce que vous n'êtes pas d'accord, soit des questions à poser, vous levez le doigt".

Pendant cette partie les propositions de chacun sont vérifiées, les écritures fractionnaires sont contrôlées en faisant le lien entre l'écriture produite et la façon dont la surface a été constituée, par exemple une surface sera codée $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ parce qu'elle aura été construite par assemblage des surfaces correspondantes.
Il faudra ensuite vérifier si cette surface se trouve dans la bonne famille par exemple avec la surface $1+\frac{1}{4}$.
Si aucun enfant n'a proposé une surface d'aire supérieure à 1, le maître propose celle qu'il a fabriquée et demande aux enfants d'évaluer son aire, puis demande à quelques-uns de construire d'autres surfaces de cette famille.

Synthèse
Reprise des égalités trouvées permettant de décrire le mode de construction et l'appartenance à une même famille.

C'est notamment l'occasion de redonner du sens à la fraction $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ c'est l'aire de trois surfaces d'aire $\frac{1}{4}$, (on verra plus tard que c'est aussi 3 divisé en 4).

Les différentes écritures produites pour chaque classe seront notées par colonne dans le cahier.

Consigne 3
"Dans chaque famille, les surfaces ont la même aire, maintenant vous allez essayer de ranger les familles selon l'aire des surfaces qu'elles contiennent : d'abord les surfaces les plus petites jusqu'aux plus étendues.
Par groupe de deux, vous allez noter sur une feuille le rangement que vous proposez en utilisant les fractions qui désignent les familles".

Mise en commun des propositions
Les noter au tableau, sans prendre parti.

Consigne 4
"Pour vérifier les propositions qui ont été faites, vous allez, par groupe de deux, construire pour chaque famille, une surface de la famille, qui soit un rectangle dont une dimension est fixée et égale à la largeur de la feuille d'annuaire. Sur chacun des rectangles ainsi construit, vous notez au feutre à quelle famille il appartient".
Reformulation de la consigne, exhibition de rectangles qui vérifient déjà cette propriété, dans les différentes classes.

Mise en commun
Comparaison des rectangles obtenus, vérification de la classe à laquelle ils appartiennent.

Consigne 5
"Peut-on à l'aide des rectangles que vous venez de construire valider la mise en ordre des classes que vous avez proposée ?"

Discussion collective sur le fait que la comparaison des rectangles construits est très simple du fait que tous les rectangles ont une dimension commune, puis sur le fait que la mise en ordre de ces rectangles du moins étendu au plus étendu, permet la mise en ordre des classes.
Valider les propositions faites précédemment, faire mettre les classes (affiches) en ordre, puis faire noter sur le cahier les inégalités entre écritures fractionnaires qui en découlent.

Synthèse
Pour comparer des fractions on peut comparer les surfaces qui ont pour aire ces fractions

Institutionnalisation

Les différentes égalités produites ainsi que la mise en ordre des fractions qui découle de la consigne 5 sont rappelées.
Sur leur cahier, les enfants notent les différentes égalités et inégalités obtenues au cours de la séance.

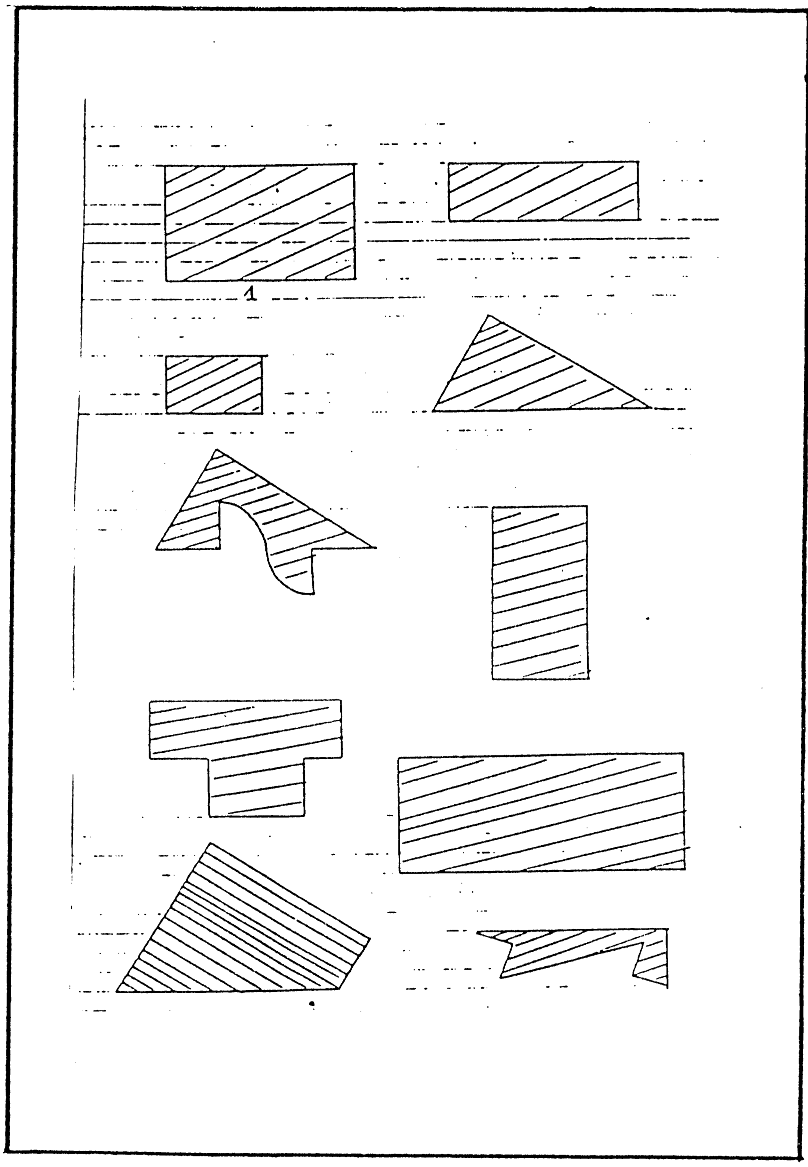
Présentation et analyse de l'activité

Dans les séances précédentes, les élèves ont été conduits à construire des surfaces et à coder l'aire, l'étalon étant la feuille entière de bottin.
Cette séance (et la suivante) permet d'évaluer la disponibilité des connaissances apprises précédemment.
Ici les élèves codent des surfaces, l'étalon étant nouveau.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- coder la mesure d'une surface quand l'étalon est connu ;
- ranger des surfaces selon l'aire ; ranger des fractions ;
- enrichir le stock d'égalités entre entiers et fractions.

Matériel
- Une fiche photocopiée par élève (cf. ci-contre et annexe 4)
- Ciseaux, du matériel de géométrie, calque à disposition.



Déroulement

Calcul mental

- Phase 1, par le procédé La Martinière, sur les ardoises ou toute la série sur le cahier de brouillon, rechercher d'autres écritures : trouver une fraction qui est égale à 1/4+1/4+1/4, à 2x1/4, à 1/5+1/5+1/5, à 3x1/5, etc. (passage d'additions réitérées à des écritures multiplicatives et vice-versa).

- Phase 2, en interrogation orale, les élèves lèvent le doigt : trouver d'autres écritures de 3/8 (attente de 3x1/8, 1/8+1/8+1/8, 6/16, etc.), de 3/6, de 6/5,....

Organisation
Par groupes de deux

Consigne 1
"Le premier rectangle de la feuille représente l'étalon. On peut donc dire que son aire est ....1 (une unité). Vous devez trouver les mesures des aires de chacune des surfaces de la fiche et justifier votre codage. Vous ne devez pas découper cette fiche, ni utiliser de règle graduée."

Temps de recherche.
Types de propositions pour les surfaces de gauche à droite et de haut en bas :

$$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ;\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\ ;\ \frac{1}{4}$$

Les procédés employés varient de l'estimation à l'oeil à l'utilisation du calque pour vérifier l'exactitude de la fraction supposée. En cas d'erreur ou de doute, la confrontation des résultats est doublée d'une vérification par calque.

Consigne 2
"Rangez les surfaces de la plus petite aire à la plus grande."

Pas de difficulté pour les surfaces dont l'une s'inclut dans l'autre ; pour les autres, un retour aux écritures, éventuellement à des représentants rectangulaires de même aire (et d'une dimension fixée) est nécessaire.
On conclut sur les inégalités suivantes, enrichies d'éventuelles justifications proposées par les enfants :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \quad car \quad \frac{1}{2}=\frac{2}{4} \quad ou \quad \frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} < 1 \quad car \quad 1=\frac{4}{4} \quad ou \quad \frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$$

$$1 < 1+\frac{1}{4} \quad de plus \quad 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Institutionnalisation possible
La mesure de l'aire d'une surface est déterminée par le nombre qui mesure l'aire et l'étalon de référence.
De nouvelles égalités enrichissent les stocks déjà constitués.

Entraînement
Exercices écrits et oraux de comparaison de fractions, du type de celles sur lesquelles a porté la synthèse.

Présentation et analyse de l'activité

Ici la tâche des élèves est de fabriquer des surfaces d'aire fixée, l'étalon étant imposé, ce qui permet donc d'évaluer la connaissance du sens des fractions associées à l'aire.
Le choix des dénominateurs permet des méthodes par pliage de l'étalon.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- fabriquer des surfaces dont l'aire est une fraction imposée, l'étalon étant un rectangle imposé ;
- enrichir le stock d'égalités entre entiers et fractions.

Matériel
- La fiche photocopiée de la séance 10, éventuellement corrigée
- Du papier de couleur pour découper, une feuille blanche par élève
- Ciseaux, matériel de géométrie, calque à disposition.

Déroulement

Calcul mental
Séance orale (le maître interroge ceux qui lèvent le doigt) de comparaison de fractions de même dénominateur, ou de numérateur 1, ou de fractions placées de part et d'autre de 1 ; bien entendu les comparaisons sont justifiées.
Par exemple : comparer 3/4 et 5/4 ; 1/5 et 1/3 ; 4/3 et 5/6 ; 7/8 et 9/8 ; 1/8 et 1/5 ; 3/4 et 5/3.

Organisation
Par groupes de deux ou trois pour permettre des échanges et des discussions, mais chaque élève rend une feuille.

Consigne
"Aujourd'hui vous allez de nouveau fabriquer des surfaces, l'étalon est le même que la dernière fois. Vous pouvez découper dans le papier de couleur et coller sur la feuille blanche, ou dessiner directement sur la feuille blanche, les surfaces dont les mesures des aires sont écrites au tableau.
Attention les constructions doivent être précises, on doit pouvoir vérifier."

Au tableau figure :

Fabriquez les surfaces d'aires

surface	A	B	C	D	E	F
aire	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$2+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{6}{8}$

Pour chaque surface donnez au moins une autre écriture de l'aire.

Temps de travail et d'écriture.
Certains enfants découpent et collent, d'autres dessinent directement ; il n'y a pas lieu d'imposer une méthode, le découpage permettant encore à certains de mieux séparer l'objet qu'on mesure de son support, la feuille de papier blanc, et d'utiliser le pliage pour fabriquer les fractions de surface demandées.

Voir en annexe 5 des exemples de productions d'élèves.

Synthèse
Les écritures fournies peuvent être très variables et très riches.
Quelques exemples possibles (et effectivement rencontrés)

$$pour A:\ 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}$$
$$pour B:\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$pour C:\ 1+1+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

etc.

La synthèse est l'occasion de pointer collectivement que les surfaces A et F ont la même aire, de même que les surfaces C et E, que les surfaces de même aire n'ont bien sûr pas toujours la même forme.

Remarques

- La richesse des écritures vient d'une part du fait que les élèves associent à une surface plusieurs façons de la construire, d'autre part qu'ils utilisent certaines propriétés des fractions.
Dans une classe où a eu lieu cette séance, un groupe de deux enfants a par exemple systématiquement enrichi son stock d'écritures par doublement des numérateur et dénominateur de chaque fraction obtenue, exemple pour la surface C :

$$2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=\frac{18}{8}=\frac{36}{16}=\frac{72}{32}=\frac{144}{64}=\frac{288}{128}=\frac{576}{256}=\ldots$$

jusqu'à atteindre des dénominateurs de 4 chiffres (et ce n'étaient pas les meilleurs élèves de la classe !)

- En général on voit cependant apparaître peu d'écritures multiplicatives, au maître de les introduire en les reliant aux additions réitérées proposées, par exemple :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Institutionnalisation

1 - Le nombre entier 1 peut s'écrire comme une fraction. Par exemple :

$$1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}=\ldots$$

Si une fraction a le même nombre au numérateur et au dénominateur, elle est égale à 1.
Si le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction est plus grande que 1.
Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est plus petite que 1.

2 - Nous savons écrire des fractions égales, par exemple :

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{12}{24}=\ldots.$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\ldots.$$

3 - Il existe des fractions plus grandes que 1, que 2, que n'importe quel nombre.

$$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=9\times\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}=5\times\frac{1}{4} \qquad \frac{7}{2}=7\times\frac{1}{2}$$

Pas d'entraînement si la séance a permis suffisamment de jeux d'écritures à l'intérieur de chaque groupe.

Présentation et analyse de l'activité

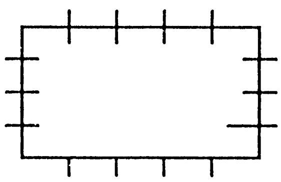
Cette séance est un réinvestissement de la précédente en travail individuel. Les dénominateurs des fractions imposées ne sont plus nécessairement de la forme 2^n, ce qui va obliger les élèves à utiliser d'autres méthodes que le pliage par deux de l'étalon ; c'est pourquoi l'étalon est donné avec la préparation d'un quadrillage.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- fabriquer des surfaces dont l'aire est une fraction imposée, l'étalon étant un rectangle imposé ;
- enrichir le stock d'égalités entre entiers et fractions.

Remarque
Cette séance étant de difficulté supérieure aux précédentes, est proposée à titre facultatif dans la progression.

Matériel
Une demi-feuille de papier par élève, avec le dessin du rectangle étalon, préparé pour être éventuellement partagé en au maximum 24 rectangles isométriques.



Déroulement

Calcul mental

- Phase 1 : à tour de rôle chaque élève donne une fraction égale à 3/2 (pour les quatre premiers interrogés), puis à 2/3 (pour les cinq suivants), puis à 1/5, etc....

- Phase 2 : le tour se poursuit en donnant une fraction égale à
$4\times\frac{1}{5}$ *puis* $6\times\frac{1}{4}$ *puis* $4\times\frac{1}{8}$ *puis* $10\times\frac{1}{5}$ *puis* $3\times\frac{1}{3}$ *etc...*

Organisation
Travail individuel

Consigne 1
"Dessinez sur votre feuille les surfaces dont la mesure de l'aire est au tableau. L'unité choisie est l'aire du rectangle dessiné sur votre feuille."

surface	a	b	c	d	e	f	g	h	i
aire	2	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{17}{12}$

Voir en annexe 6 des productions d'élèves.

Remarques

- Les fractions proposées à la recherche offrent des difficultés variables : par exemple la surface de mesure d'aire $\frac{5}{5}$ *sera plus vite construite si on sait que* $\frac{5}{5}=1$ *; les fractions de dénominateur 12 nécessitent un partage fin de la surface de départ, mais non le partage maximum proposé.*

- Avec de tels choix de fractions l'activité est apparue difficile dans la classe où elle a été faite.
12 peut être un dénominateur qui perturbe car c'est le premier dénominateur à deux chiffres que l'on rencontre. Selon les classes, il est conseillé au maître de choisir des fractions "plus simples" (à l'échelle de l'histoire de sa classe) ou des partages plus préparés pour certains enfants. Toutefois la séance est citée telle quelle pour permettre de montrer des productions d'enfants correspondantes.

Synthèse
On constate ensemble la longueur de certaines méthodes et l'avantage de passer à des écritures plus significatives pour la construction de surfaces. Ainsi il était plus facile de travailler avec :

$$\frac{5}{5}=1 \qquad pour la surface\ b$$

$$\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad pour la surface\ c$$

$$\frac{13}{12}=1+\frac{1}{12} \qquad pour la surface\ h$$

$$\frac{17}{12}=1+\frac{5}{12} \qquad pour la surface\ i$$

Ce qui permet quand la séance a suffisamment bien marché de la compléter par le questionnement suivant (qui peut également être utilisé avec les enfants ayant terminé avant leurs camarades la tâche de la consigne 1).

Consigne 2
"Donnez, si possible, des écritures des fractions suivantes qui permettent de les construire plus vite à partir de l'unité.

$$\frac{7}{7} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{10}{5}. \quad \frac{17}{10}$$ "

Synthèse
A partir des productions des élèves (des exemples en annexe 7) : toutes les égalités correctes sont acceptées.
Mais, bien entendu, on "espère" des écritures sous forme de fraction irréductible ou nombre entier plus rompu, du type :

$\frac{7}{7}=1$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$

$\frac{10}{5}=2$ $\frac{4}{5}=4\times\frac{1}{5}$ $\frac{17}{10}=1+\frac{7}{10}$

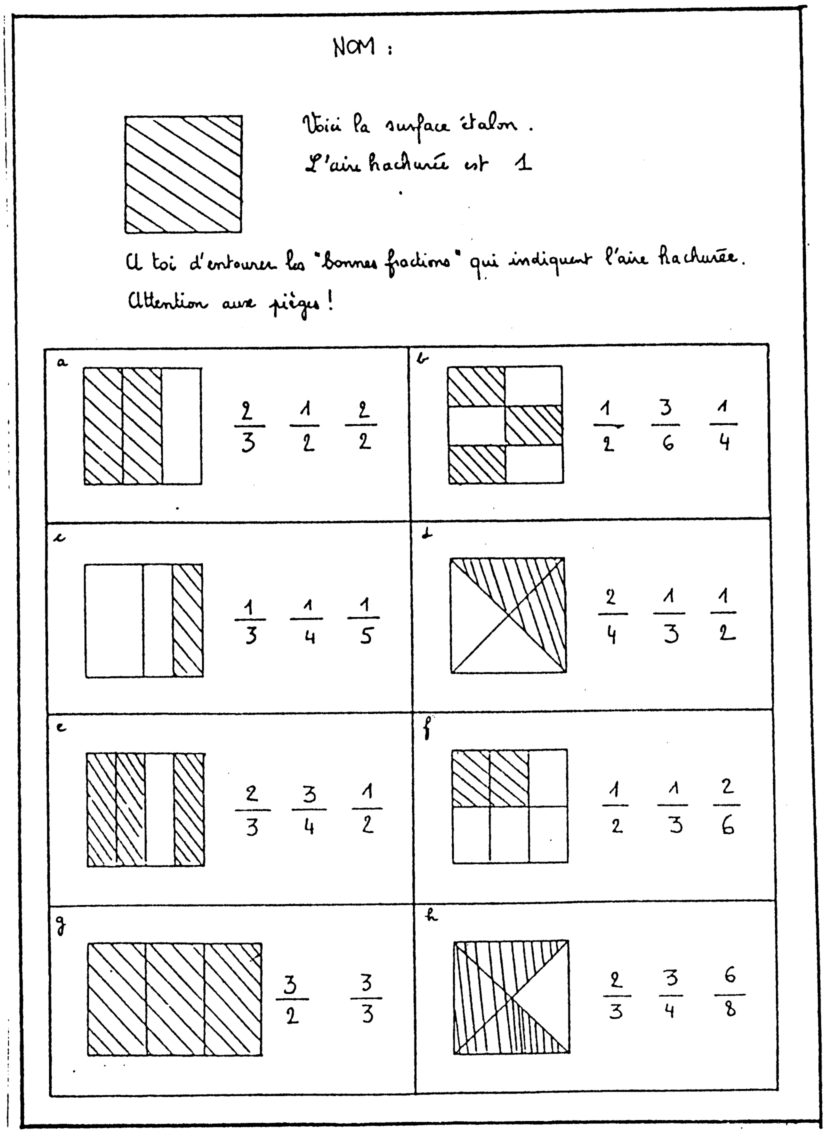
Institutionnalisation locale

Nous avons rencontré aujourd'hui d'autres écritures des fractions plus grandes que 1, qui permettent de connaître rapidement l'ordre de grandeur de la fraction : celles sous forme d'un entier (le plus grand possible) et d'un rompu (une fraction plus petite que 1).

Exemples : à partir des exemples de la synthèse.

Présentation et analyse de l'activité	**Intentions pédagogiques**
Il s'agit de vérifier que les élèves associent correctement aire d'une surface et fraction de l'unité. Leur tâche consiste à identifier dans le partage proposé les morceaux de même aire, à évaluer l'aire de ces morceaux par report dans l'étalon, et à en déduire l'aire de la surface hachurée.	- Associer les bonnes fractions aux aires fixées. - Pointer les aspects partage équitable et nombre de parts, liés à l'écriture de la fraction.

Matériel
- Une feuille photocopiée par élève (cf. ci-contre et annexe 8)
- Règle graduée, calque, compas, tout matériel de géométrie à disposition.



Déroulement

Calcul mental
Mêmes types de consignes que pour la séance 12.

Organisation
Travail individuel

Consigne 1
"Sur la fiche que vous avez reçue, vous voyez diverses surfaces hachurées. La première vous indique l'unité de référence pour cette fiche. Son aire est donc une unité.
A vous d'exprimer en choisissant les bonnes fractions parmi celles proposées les mesures des aires de chaque surface hachurée, en utilisant l'unité de départ.
Attention aux pièges !"

Les élèves travaillent individuellement, le maître circule pour voir les erreurs. Il constitue une liste de couples d'élèves dont les résultats ont des écritures différentes, sans être nécessairement inexacts.

Consigne 2
"Par deux vous allez comparer vos réponses et en discuter. Certains enfants vont se déplacer, je vais les nommer : le premier enfant nommé ira s'asseoir à côté du second."

Les échanges se font le plus souvent sur l'égalité de deux écritures (pour les surfaces des cadres **a**, **b**, **d**, **f**), plus âprement sur la mesure de la surface du cadre **c** (pour laquelle beaucoup d'enfants sont convaincus de la mesure 1/3, la comparaison avec les surfaces des cadres **a** et **e** ou le recours au calque étant nécessaire pour trouver 1/4) et la surface du cadre **g** (de la difficulté à dépasser 1 et à penser que 3/3 est plus petit que 3/2).

Remarques

- Les surfaces et les fractions proposées ont été choisies essentiellement pour mettre en défaut des propositions erronées. C'est l'occasion de pointer la nécessité de vérifier trois choses pour déterminer l'aire d'une surface S :

* *repérer la forme d'une "petite surface" permettant de paver exatement une surface d'aire connue et la surface S ;*
* *compter le nombre de "petites surfaces" constituant la surface S ;*
* *en déduire l'aire de S.*

- La vérification des bonnes mesures repose sur la connaissance des écritures et leur signification ; cet exercice renforce cette connaissance, puisque l'utilisation du calque permet, pour chaque situation, le report de la plus petite surface proposée par le découpage dans l'étalon, donc la détermination d'un dénominateur possible de la fraction.

Synthèse

Elle porte sur les discussions non réglées à l'intérieur des groupes de deux et amène la formulation par les élèves de l'importance du partage équitable de l'étalon (ou d'une fraction connue de l'étalon) pour déterminer le dénominateur de la fraction cherchée.

Institutionnalisation

Une surface d'aire $\frac{1}{b}$ se reporte b fois dans la surface unité.

$\frac{a}{b}$ désigne l'aire d'une surface constituée de a morceaux d'aire $\frac{1}{b}$.

Présentation et analyse de l'activité

Proposer aux enfants une situation de partage de disques afin de rencontrer une unité d'aire représentée par un étalon d'une nouvelle forme, de coder et décoder l'aire de différentes surfaces en fonction de cette nouvelle unité. La situation comporte plusieurs phases dans lesquelles alternent pliages et constructions géométriques. Les enfants pourront ainsi mobiliser des compétences acquises en géométrie pour résoudre le problème posé.

Intentions pédagogiques

Amener les enfants à :
- réinvestir les fractions dans un contexte de partage de disque
- utiliser des constructions géométriques pour effectuer des partages
- construire des surfaces d'aire donnée.

Matériel
- Un disque en carton de 5 cm de rayon
- Feuilles blanches
- Compas règle ciseaux

Déroulement

Calcul mental
Comparer une fraction à un entier et en particulier à sa partie entière, utiliser l'écriture d'une fraction sous forme de la somme de sa partie entière et du "rompu".
Exemple
Comparer $\frac{5}{4}$ et 1, faire justifier $\frac{5}{4} > 1$ parce que $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$
Le maître interroge à tour de rôle les élèves oralement.

Organisation matérielle
Travail individuel

Consigne 1
"Aujourd'hui, nous allons choisir pour unité non plus l'aire d'un rectangle comme jusqu'à présent, mais l'aire d'un disque. Voici le disque dont l'aire sera choisie comme unité. Vous allez commencer par construire plusieurs disques unités analogues à celui-ci. Le rayon des disques est 5 cm.
Puis vous construirez des surfaces d'aire $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$......".

Les partages en deux, quatre, huit ne posent généralement aucun problème, les enfants les effectuent par pliage.

La surface d'aire $\frac{3}{4}$ est construite par découpage, on peut constater que de nombreux enfants enlèvent $\frac{1}{4}$ au disque entier plutôt que de recoller 3 surfaces mesurant $\frac{1}{4}$.

La surface d'aire $\frac{5}{4}$ pose problème à de nombreux enfants car l'idée première consiste à ajouter un quart de disque au disque unité, mais cette procédure se heurte à un problème matériel, les deux surfaces ne se touchant que par un point. Le maître incite les enfants à chercher comment résoudre le problème en réfléchissant aux diverses façons d'écrire la fraction $\frac{5}{4}$.

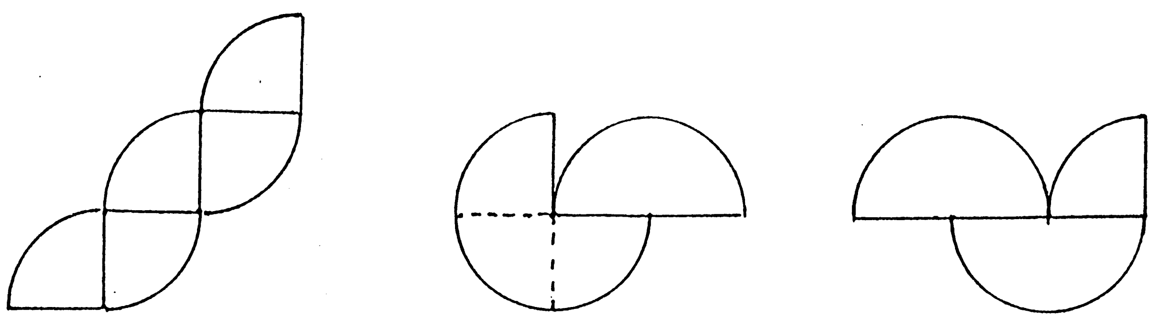
Mise en commun

- des procédures de partage pour les surfaces d'aire $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$
- des procédures de constructions pour les surfaces $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{4}$

Productions des écritures qui traduisent la façon dont ont été construites ces surfaces, ces écritures dépendent des productions des élèves. On obtient par exemple :

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=.....$$



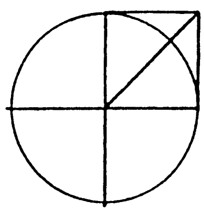
Consigne 2

"Vous rangez dans une grande enveloppe les surfaces que vous venez de construire.
Toujours avec la même unité, représentée par le disque de 5 cm de rayon, vous allez maintenant dessiner ces surfaces en utilisant les instruments de géométrie que vous voulez. Lorsque vous aurez terminé vos dessins, vous pourrez vérifier en utilisant les surfaces qui sont dans l'enveloppe".

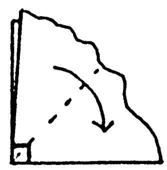
Mise en commun

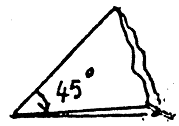
Les procédures utilisées par les élèves sont présentées et commentées : tracés à main levée, tracé d'un diamètre pour obtenir les demi-cercles, de deux diamètres perpendiculaires pour obtenir les quarts de cercle.
Pour les huitièmes de cercles les procédures dépendent des compétences acquises en géométrie, une procédure souvent rencontrée consiste à tracer deux diamètres perpendiculaires

puis à construire (en utilisant l'équerre) un carré ayant pour côtés consécutifs deux rayons perpendiculaires puis la diagonale du carré qui passe par le centre du cercle.
Si aucun travail sur les angles n'a été mené cette séance peut-être l'occasion d'utiliser un gabarit d'angle de 45° construit par pliage. La construction de la bissectrice au compas peut-être envisagée si les enfants ont eu l'occasion de faire de nombreux dessins géométriques.

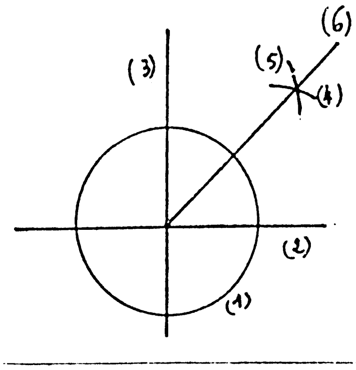


construction d'un carré et d'une diagonale





construction d'un gabarit d'angle de 45° par pliage



construction de la bissectrice au compas

Pour les autres surfaces, on retrouve généralement des méthodes qui utilisent pliages et découpages.
Validation des propositions par comparaison avec les surfaces construites précédemment.

Synthèse

Pour partager le disque en deux parties superposables d'aire $\frac{1}{2}$, il suffit de tracer un diamètre.

Pour partager le disque en quatre parties superposables d'aire $\frac{1}{4}$, il suffit de tracer deux diamètres perpendiculaires.

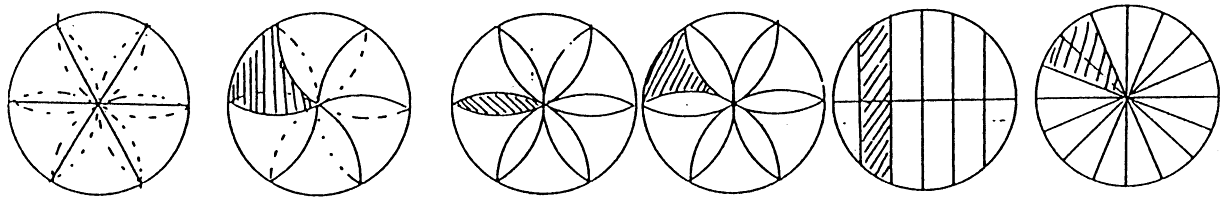
Consigne 3

"Maintenant, vous allez construire ou dessiner des surfaces d'aire $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$"

Pour le partage en six, les enfants ont généralement une certaine difficulté, certains essayent de plier encore en deux ce qui donne 16 secteurs puis regroupent les secteurs pour obtenir 6 parties mais qui ne sont pas superposables, d'autres sortent leur machine à partager, là encore les parties obtenues ne sont pas superposables.
Si aucun enfant ne cherche à utiliser le compas, le maître peut leur rappeler qu'ils peuvent utiliser tous les instruments de leur choix et en particulier qu'il serait peut-être intéressant d'essayer le compas.
A ce moment là, beaucoup d'enfants construisent une rosace à 6 branches, certains ne savent qu'en faire, d'autres utilisent les points de division du cercle pour tracer six secteurs circulaires, d'autres enfin utilisent la rosace pour proposer des partages en 6 n'ayant pas la forme d'un secteur circulaire, mais obtenus en utilisant les arcs de cercles tracés.

Laisser un temps de recherche suffisamment long, mais ne pas hésiter à faire une première mise en commun des propositions pour le partage en six avant de continuer les autres constructions.

Mise en commun des différentes propositions.
Exemples de propositions d'enfants correctes (les deux premières) et erronées (les suivantes).



Synthèse

Pour partager le disque en six parties exactement superposables d'aire $\frac{1}{6}$, il suffit de reporter le rayon six fois sur le cercle et de joindre les points obtenus au centre du cercle, soit en traçant des rayons, soit en traçant des arcs de cercle.
Pour diviser le disque en trois parties superposables d'aire $\frac{1}{3}$, il suffit de partager le cercle en six comme précédemment et de conserver un point sur deux.
Recensement des écritures traduisant la manière dont ont été construites les surfaces d'aire $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$.

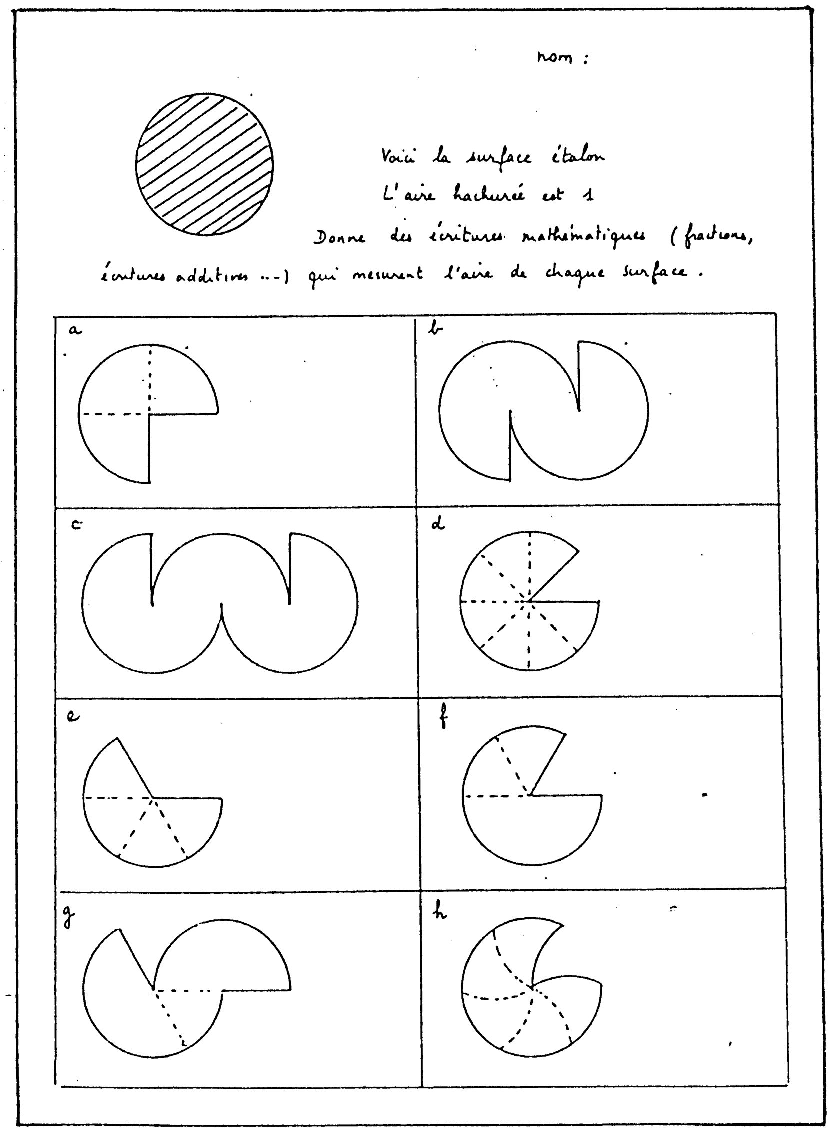
Présentation et analyse de l'activité

Proposer aux enfants une situation de communication, à partir d'un jeu de message, afin de les amener à construire des surfaces, à coder et décoder leur aire en fonction d'une unité dont l'étalon donné est un disque.
La validation des propositions consiste en la comparaison des surfaces du point de vue de leur aire indépendamment de leur forme, c'est un moment important de la situation.
Il s'agit ici d'une séquence de réinvestissement sans nouvel apprentissage.

Intentions pédagogiques

Amener les enfants
- à distinguer aire et forme
- à réinvestir les fractions dans un contexte de construction de surfaces en utilisant des pliages et des constructions géométriques
- à construire des surfaces d'aire donnée.

Matériel
- Un disque en carton de 5 cm de rayon
- Feuilles blanches
- Compas, règle, ciseaux
- Une fiche photocopiée par élève pour la consigne 2.
(cf. ci-contre et annexe 9)



Déroulement

Calcul mental
Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs : le maître dit une fraction, les élèves cherchent mentalement l'encadrement par deux entiers consécutifs, le maître interroge l'un d'eux en lui demandant de justifier. Exemple :

$\frac{7}{2}$ est entre 3 et 4 parce que

$\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$

Après quelques interrogations orales les enfants peuvent noter l'encadrement sur leur ardoise (procédé Lamartinière) ou sur leur cahier, le maître dans ce cas contrôlera individuellement les propositions des élèves.

Organisation matérielle
Travail par équipe de deux enfants. Les deux enfants d'une même équipe ne doivent pas être voisins.

Consigne 1
"L'unité d'aire est à nouveau l'aire du disque de rayon 5 cm, comme la dernière fois. Aujourd'hui, vous allez dessiner une surface que vous appellerez surface A, de l'aire et de la forme que vous voulez, puis vous écrirez un message pour que votre coéquipier construise une surface de même aire que la vôtre, cette surface sera appelée surface B.
Votre message ne doit comporter aucun dessin, l'unité d'aire est toujours l'aire du disque de rayon 5 cm.
Vous échangerez vos messages deux à deux, et vous dessinerez une surface B de l'aire indiquée sur le message que vous avez reçu.
Puis vous comparerez les surfaces A et B correspondant à chacun des messages. Si les surfaces A et B correspondant au même message ont bien la même aire, votre équipe gagne un point".

Faire reformuler la consigne de manière à ce que les enfants comprennent que l'on s'intéresse à l'aire et non à la forme des surfaces.

Travail d'abord individuel, puis échange des messages, puis nouveau temps de travail individuel, enfin regroupement par équipe pour effectuer les validations.
Pendant ce temps le maître observe les stratégies des élèves, apporte une aide individualisée, prépare la synthèse en fonction des propositions des élèves.

Mise en commun
A l'issue de la partie recenser avec les enfants différents moyens de vérifier que deux surfaces ont même aire : superposition directe, découpage et recollement pour donner à l'une des deux surfaces la forme de l'autre.

Proposer aux enfants une deuxième partie de jeu.
Après les deux parties, les équipes comptent leurs points.

Synthèse
Elle porte sur les écritures des messages produits. Ces écritures sont vérifiées, éventuellement classées et mises en ordre.

Consigne 2
Pour évaluer individuellement la capacité des enfants à évaluer l'aire d'une surface en fonction de l'unité choisie.
Donner aux enfants la feuille sur laquelle sont dessinées des surfaces obtenues à partir du partage du disque unité.
Laisser un temps d'observation, insister sur le choix de l'unité pour cette activité : c'est l'aire du disque dessiné en haut de la feuille.
Demander aux enfants de donner l'aire des différentes surfaces sous forme d'écritures fractionnaires, puis de ranger ces surfaces de la moins étendue à la plus étendue et de ranger les fractions de la plus petite à la plus grande.
Les enfants ont à leur disposition les instruments de géométrie et du papier calque et travaillent individuellement.
Correction individuelle.

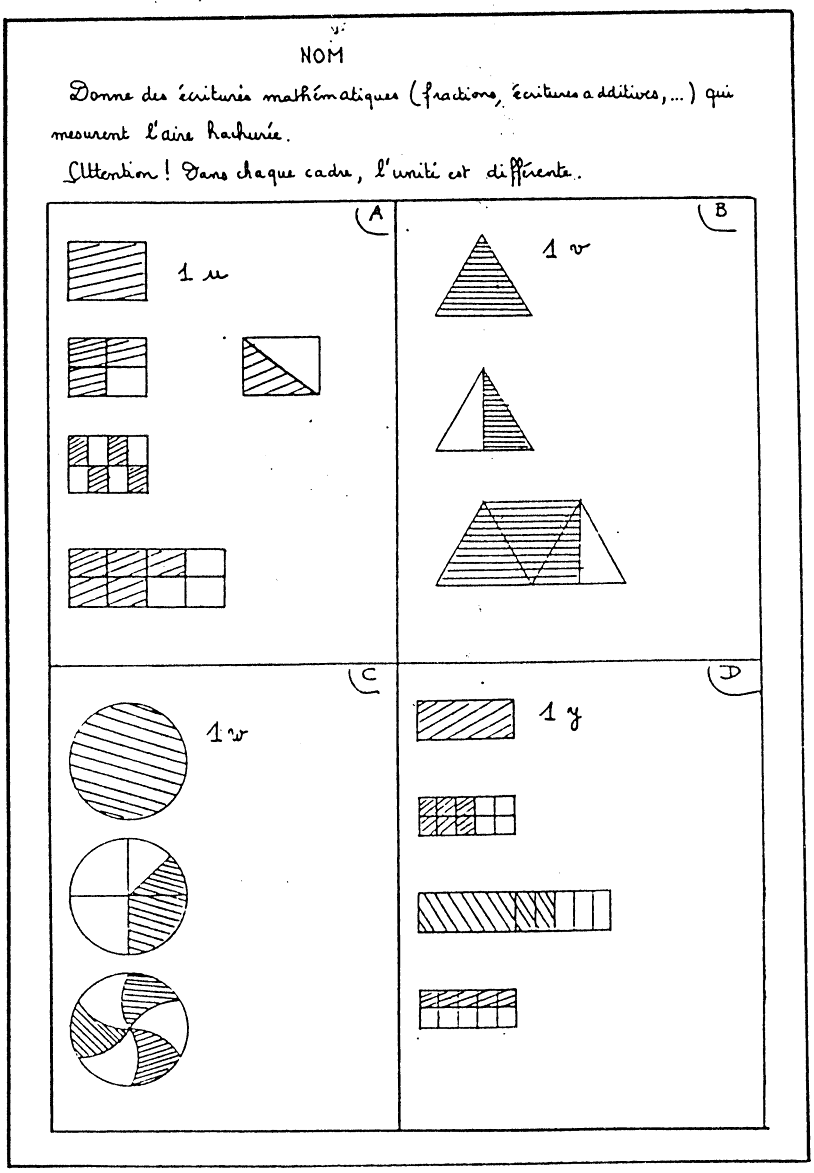
Présentation et analyse de l'activité

Dans cette séance, les élèves sont confrontés à des étalons différents et écrivent une fraction correspondant à la mesure de l'aire de la surface désignée.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- associer une fraction à une aire, l'étalon étant imposé ;
- relativiser la notion d'unité et celle de fraction d'une unité.

Matériel
Une fiche photocopiée par élève (cf. ci-contre et annexe 10)



Déroulement

Calcul mental

En interrogation orale individuelle, faire exprimer une fraction sous la somme de sa partie entière et du "rompu" correspondant, par exemple :

$\frac{8}{3}\left(=2+\frac{2}{3}\right)$ $\frac{20}{4}(=5)$

$\frac{17}{5}\left(=3+\frac{2}{5}\right)$ $\frac{7}{3}\left(=2+\frac{1}{3}\right)$

$\frac{15}{3}(=5)$ $\frac{18}{6}(=3)$ $\frac{45}{5}(=9)$

Utiliser beaucoup de fractions égales à un entier (voir $\frac{20}{4}$) pour préparer la séance 17.

Organisation
Exercice individuel

Consigne 1
"Sur la feuille, il y a quatre cadres A, B, C, D. Dans chaque cadre vous voyez un étalon, c'est la surface hachurée de mesure d'aire 1, et d'autres surfaces dont vous devez coder la mesure par une fraction, en faisant attention à l'unité de référence."

Remarque
Chaque cadre propose un étalon différent, l'unité est donc différente dans chaque cadre, ce qui est rappelé par l'introduction des lettres symbolisant les différentes unités : u pour le cadre A, v pour le cadre B, w pour le cadre C et y pour le cadre D.

Temps de recherche et d'écriture.
Les surfaces du cadre A ne posent pas, en général, de difficulté particulière (écritures attendues $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{8}$ *ou* $\frac{2}{4}$ *ou* $\frac{1}{2}$), sauf peut-être la dernière, d'aire supérieure à l'unité ($\frac{5}{4}$ *ou* $1+\frac{1}{4}$).

L'étalon du cadre B a une forme non classique, mais la reconnaissance d'un axe de symétrie facilite l'association de $\frac{1}{2}$ à la deuxième surface et de $\frac{5}{2}$ *ou* $2+\frac{1}{2}$ à la troisième surface.

Quant à l'étalon du cadre C, elle reprend la forme de l'étalon de la séance précédente. La deuxième surface du cadre peut être prétexte à $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ *comme à* $\frac{3}{8}$, la troisième réinvestit le partage en 6 par la rosace à six branches, d'où $\frac{3}{6}$ *et éventuellement* $\frac{1}{2}$.

Le dernier cadre D permet de retrouver des égalités de fractions et de rencontrer un "grand" dénominateur. Les écritures attendues peuvent être :

$\frac{6}{10}$ *ou* $\frac{3}{5}$

$1+\frac{2}{5}$ *ou* $1+\frac{4}{10}$ *ou* $\frac{7}{5}$ *ou* $\frac{14}{10}$

$\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{5}{10}$

Les enfants comparent leurs écritures par deux, les valident ou invalident par deux, réservent les discussions non réglées à la classe entière. Le maître surveille les échanges et repère les accords illicites.

Synthèse
Elle porte sur les différentes écritures possibles pour chaque surface et sur les égalités de fractions qui en découlent.
Une consigne supplémentaire du maître permet de chercher, pour les surfaces d'aires plus petites que l'unité, des écritures soustractives (1 - fraction plus petite que 1).

Institutionnalisation
Pour trouver le nombre qui mesure l'aire d'une surface, il faut se référer à l'unité choisie pour la mesurer.

Présentation et analyse de l'activité

Il s'agit dans cette séance de faire le point sur le calcul mental en proposant aux élèves un jeu de cartes.
Ce jeu est composé de cartes sur lesquelles sont inscrites diverses écritures utilisant des fractions et des nombres entiers.
Les règles choisies sont les règles classiques du jeu de mariage, du Memory et du jeu de bataille.

Intentions pédagogiques

Entraîner les enfants à comparer des fractions, et des nombres entiers à partir d'une évaluation rapide des ordres de grandeur

Assurer une décontextualisation des fractions

Permettre aux enfants de faire le lien entre fraction et division.

Matériel

Chaque jeu comporte 12 cartes, il faut prévoir un jeu pour deux élèves. Tous les jeux sont différents, ils seront échangés entre les groupes au cours de la séance et des séances suivantes.
Chaque jeu est caractérisé par un dessin au verso des cartes pour être plus facilement reconstitué en cas de mélange.
Les jeux seront complétés par d'autres cartes lorsque les fractions décimales auront été travaillées, et les écritures à virgule introduites.
Dans chaque jeu on trouve un nombre pair d'écritures d'un même nombre pour que l'on puisse réaliser des "mariages". En général, dans chaque jeu, on trouve un entier et deux ou trois fractions ayant des parties entières différentes, de telle sorte que la comparaison puisse être rapide sans nécessiter une gymnastique de calcul qui n'est pas une compétence exigible à l'école élémentaire.

Exemples de jeux :

Jeu 1	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$	$4\times\frac{1}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$	$1+\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{5}{2}$

Jeu 2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{4}$	$1+\frac{1}{2}$	$2-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{4}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{7}{2}$	$3+\frac{1}{2}$

Prévoir une reproduction de l'un des jeux sur des feuilles de format A4, de manière à pouvoir faire faire une partie par deux enfants au tableau devant leurs camarades pour permettre à tous de bien comprendre les règles.

Déroulement

Organisation de la classe
Travail par groupe de deux
Distribution des jeux de cartes, un par groupe de deux.

Consigne 1
Demander aux élèves d'observer le jeu de cartes et de faire les remarques qu'ils souhaitent.
Puis présenter la règle du jeu des mariages, généralement connue des enfants.
Il s'agit tout d'abord d'enlever une carte du jeu, puis de distribuer les cartes, et de faire les mariages possibles c'est à dire de regrouper par paire les cartes qui désignent le même nombre.
Ce jeu n'est pas très intéressant à deux mais il a ici pour but de familiariser les enfants avec les cartes et de leur permettre de mettre au point des stratégies de comparaison rapides. Il est souhaitable de demander aux enfants de poser sur le coin de leur table les mariages qu'ils ont effectuésd pour que le maître puisse contrôler en passant entre les enfants.

Mise en commun des stratégies de comparaison.

Consigne 2
Proposer la règle de Memory.
Les 12 cartes, après avoir été battues, sont placées sur la table faces cachées, la disposition est laissée à la charge des enfants. Le premier joueur, désigné au hasard, retourne deux cartes, si les deux cartes désignent le même nombre, il ramasse les deux cartes et rejoue, sinon il replace les deux cartes exactement là où il les avait prises, faces cachées, et c'est au second joueur de jouer.

Comme pour le jeu des mariages demander aux enfants de placer sur le coin de leur table les paires de cartes qu'ils ont ramassées.

Consigne 3
Proposer alors aux enfants une partie de bataille.
Les cartes sont battues et toutes distribuées.
Chaque enfant tient son paquet de cartes faces cachées dans la main et pose la première carte de son paquet sur la table, face visible. La carte désignant le nombre le plus grand l'emporte, si les deux cartes sont de même valeur il y a bataille, les enfants doivent alors poser une deuxième carte sur la première, la plus forte des deux nouvelles cartes posées permet à son propriétaire de ramasser les quatre cartes.
Si les enfants ne connaissent pas la règle, faire jouer une partie par deux enfants, face à la classe avec le grand jeu de cartes en affichant les cartes au tableau.

Mise en commun
Après quelques parties faire une mise en commun des stratégies de comparaison utilisées.

Synthèse
Les différentes méthodes de comparaison sont formulées puis chaque enfant note dans son cahier les égalités et les inégalités entre les différentes écritures du jeu de cartes avec lequel il a joué.

Entraînement
Si le temps le permet, faire échanger les jeux de cartes, et proposer de nouvelles parties de Memory ou de bataille.

Remarque
Cette séance peut être reprise plusieurs fois, les jeux étant échangés entre les groupes.

Prolongement

Le maître peut ensuite proposer des parties à quatre en regroupant deux jeux. Il doit être attentif aux jeux qu'il regroupe afin que les comparaisons soient toujours à la portée des élèves (fractions de même dénominateur, de même numérateur, fractions séparées par un ou plusieurs entiers).

Présentation et analyse de l'activité

Les élèves vont au cours de cette séquence résoudre un premier problème qui doit leur permettre d'établir un lien entre fraction d'une grandeur continue (aire) et fraction d'une collection discrète.
Le second problème proposé permet d'abandonner la référence aux aires.

Intentions pédagogiques

Aborder les fractions sous un nouvel aspect, fractions de collections discrètes, qui permet de faire le lien avec les "opérateurs fractionnaires" et la division.

Matériel
Les textes des problèmes écrits sur le tableau, éventuellement photocopiés pour chaque enfant, et des dessins de tablettes de chocolat rectangulaires ("4 rangées de 6 carrés") sur des feuilles à distribuer aux enfants s'ils en ont besoin.

Déroulement

Calcul mental
Comparaison de fractions ayant même numérateur, par exemple $\frac{1}{7}$ *et* $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{7}$ *et* $\frac{2}{8}$. *etc.*
Comparaison de fractions séparées par un (ou plusieurs) entiers par exemple $\frac{13}{4}$ *et* $\frac{5}{3}$.
Le maître interroge tout d'abord les élèves oralement à tour de rôle, en leur demandant de justifier leurs propositions. Il demande ensuite aux enfants d'écrire les inégalités sur leur ardoise ou leur cahier pour cinq comparaisons afin de vérifier les réponses de chacun.

Organisation matérielle
Travail par groupe de deux, chaque groupe doit présenter sur une affiche sa démarche et sa solution.

Consigne 1
Afficher le texte suivant :

> De son voyage en Suisse, Madame Choclet a apporté deux tablettes de chocolat suisse qui ont chacune 24 carrés. Elle donne la première à Marine et Julien.
> Marine prend $\frac{1}{4}$ de la tablette, Julien , lui, en prend $\frac{3}{8}$.
> Lequel des deux prend le plus de chocolat ?
>
> Madame Choclet donne la seconde à Pauline et Thomas.
> Pauline en mange $\frac{3}{8}$, tandis que Thomas en mange $\frac{1}{3}$.
> Des quatre enfants lequel est le plus gourmand ? Lequel est le moins gourmand ?
> Jérôme mange ce qui reste des deux tablettes. Mange -t-il plus ou moins de chocolat que les autres enfants ?

Faire lire l'énoncé du problème et faire reformuler les questions, préciser que sur leur affiche les enfants ne doivent pas se borner à noter leurs résultats mais doivent également présenter leur méthode.

Pendant la phase de recherche et de rédaction de l'affiche, le maître observe les procédures utilisées par les élèves apporte si nécessaire une aide individualisée pour la compréhension de la situation en distribuant par exemple le dessin de la tablette, mais ne se prononce en aucun cas sur la pertinence des propositions des enfants, ce qui rendrait caduque la phase de mise en commun.

De nombreux enfants répondent immédiatement à la première question en transformant $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{8}$. Pour la seconde question la comparaison directe n'étant plus possible, les procédures observées s'appuient souvent sur le dessin de la tablette. Certains enfants partagent le rectangle en utilisant le quadrillage représenté par les carrés, d'autres le partagent en utilisant les méthodes rencontrées pour les aires.

Mise en commun

Le maître accroche au tableau les affiches de groupes ayant utilisé des méthodes différentes, que les résultats soient corrects ou non.

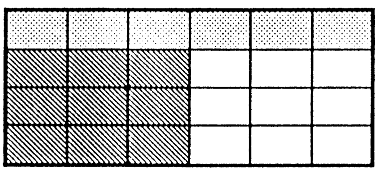
Les enfants doivent observer dans un premier temps les méthodes de leur camarades, puis les résultats, et faire les remarques qu'ils jugent opportunes.

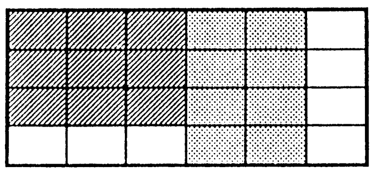
Chaque proposition est ensuite discutée et vérifiée, les erreurs sont analysées.

Généralement on aboutit à deux familles de solutions. La première consiste à évaluer le nombre de carreaux mangés par chaque enfant

Marine 6, Julien 9, Pauline 9, Thomas 8 et Jérôme 16

La seconde consiste à se décider à partir des dessins. Exemples :





Interroger les élèves :

"$\frac{1}{4}$ de la tablette, c'est combien de carrés ?

$\frac{3}{8}$. de la tablette, c'est combien de carrés ?

Chaque enfant ensuite choisit la méthode qui lui convient le mieux et la note dans son cahier.

Synthèse

Pour calculer le quart de 24, il suffit de diviser 24 par 4.

Pour expliquer que l'on prend le quart de 24 carrés on peut donc écrire :

$\frac{1}{4} \times 24 = 6 = 24 : 4$

Pour calculer les $\frac{3}{8}$ de 24, on peut commencer par chercher $\frac{1}{8}$ de 24 que l'on obtient en divisant 24 par 8, puis on multiplie le nombre obtenu par 3 car $\frac{3}{8}$ c'est $3 \times \frac{1}{8}$.

Pour expliquer que l'on prend les $\frac{3}{8}$ de 24, on peut donc écrire :

$\frac{3}{8} \times 24 = 9 = 3 \times (24 : 8)$

Consigne 2
"Dans une classe de CM2, de 28 élèves, le maître a réalisé une enquête pour connaître le sport préféré de ses élèves.
$\frac{3}{7}$ des élèves préfèrent le football
$\frac{1}{4}$ des élèves préfèrent le volley ball
$\frac{2}{7}$ préfèrent le basket;
Quel sport préfére le plus grand nombre d'enfants ?"
Tous les enfants ont-ils pris part au vote ?
Lecture et explication éventuelle du termed'enquête, précisez que les enfants n'ont eu le droit de donner qu'une seule réponse.
Travail individuel

Mise en commun des procédures et des résultats
Certains élèves ne calculent pas directement combien d'enfants préfèrent chacun des sports, mais commencent par comparer les fractions, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle cette question est posée avant la suivante, car dans le cas contraire la procédure de comparaison directe des fractions ne pourrait pas apparaître.
Pour comparer les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$, les enfants comparent les numérateurs.

Pour comparer $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$, certains enfants disent :

" $\frac{1}{4}$ c'est $\frac{2}{8}$,

et puisque 7 est plus petit que 8 , $\frac{1}{7}$ est plus grand que $\frac{1}{8}$

donc $\frac{2}{7}$ est plus grand que $\frac{2}{8}$ c'est à dire plus grand que $\frac{1}{4}$."

Finalement $\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7}$.
D'autres cherchent en premier le nombre d'enfants préférant le volley car il suffit de diviser 28 par 4.
Pour trouver le nombre d'enfants préférant les autres sports les enfants utilisent la méthode dégagée au cours de la synthèse précédente, ils calculent 28 divisé par 7 puis multiplient le nombre 4 trouvé, par 2 ou par 3 suivant le cas envisagé.
Pour savoir si tous les enfants ont voté, il faut de toute façon déterminer le nombre d'enfants préférant chacun des sports même si ces calculs n'étaient pas nécessaires pour répondre à la première question.

Après cette mise en commun chaque enfant rédige sur son cahier sa propre solution.

Consigne 3.
Le maître propose de faire le même sondage dans la classe, en limitant le nombre de sports mis aux voix à 3 ou 4, puis de donner le résultat du sondage sous la même forme que celle du problème précédent.
Le sondage est effectué collectivement, les résultats sont présentés au tableau, puis par groupe de deux les enfants doivent chercher quelle fraction du nombre total d'élèves de la classe représente chaque groupe.

Mise en commun des propositions, discussion, vérification.
Exemple : si la classe comporte 30 enfants et que 10 enfants préfèrent le football, on peut dire " les $\frac{10}{30}$ des élèves de la classe préfèrent le football" ou encore "$\frac{1}{3}$ des enfants préfèrent le football".
Si le cas se présente il est possible de chercher si les fractions trouvées peuvent être simplifiées.

Institutionnalisation

Les fractions servent à désigner le lien entre le nombre d'éléments des parties d'une collection et le nombre total d'éléments de la collection.
Exemples :

$\frac{1}{4}$ de 28, c'est 7. On écrit : $\frac{1}{4} \times 28 = 7 = 28 : 4$

$\frac{2}{7}$ de 28, c'est 8. On écrit : $\frac{2}{7} \times 28 = 8 = 2 \times (28 : 7)$

Si une collection contient 30 éléments, une partie de 10 éléments constituent $\frac{1}{3}$ de la collection car $\frac{1}{3} \times 30 = 10$.

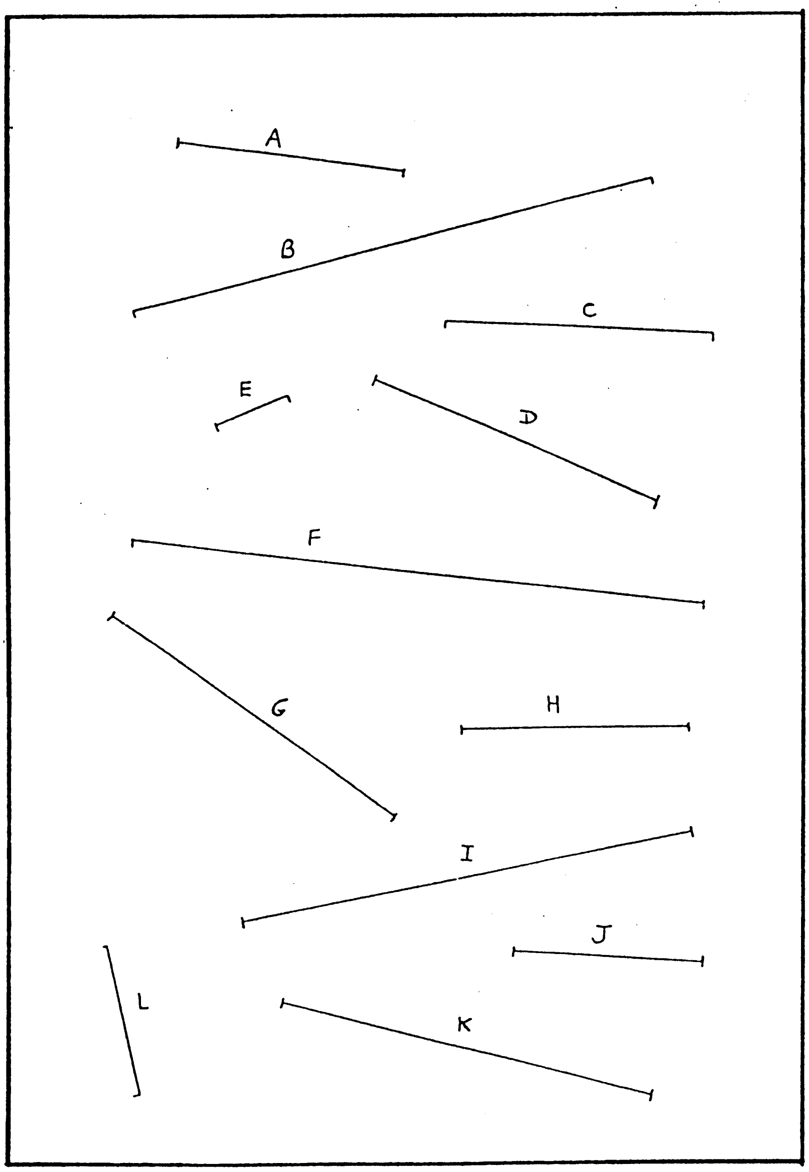
Présentation et analyse de l'activité

Les fractions ont été contextualisées par des longueurs, puis des aires, puis des collections discrètes. Cette séance et la suivante vont permettre de les rencontrer de nouveau associées à des longueurs, en les considérant comme des abscisses de points sur une demi-droite graduée.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- retrouver les fractions dans un contexte de mesures de longueurs,
- graduer une demi-droite en utilisant des fractions.

Matériel
Une fiche photocopiée par élève, du modèle ci-contre (au départ les segments ne sont pas codés, ils figurent seuls sur la feuille). Cf. annexe 11.
Pas de règle graduée, ni de calque.
Compas à disposition



Déroulement

Calcul mental

Comparaison de fractions décimales (elles seront institutionnalisées sous leur nom dans la séance suivante) de même dénominateur, puis séparées par un entier.

1- "La famille des dixièmes"
Comparer
$\frac{7}{10} et \frac{15}{10}$; $\frac{25}{10} et \frac{17}{10}$; $\frac{36}{10} et 3$; $\frac{36}{10} et 4$

2- "Et si on essayait la famille des centièmes ?"
Comparer par exemple
$\frac{38}{100}$ *et* $\frac{13}{100}$; $\frac{123}{100}$ *et* $\frac{56}{100}$; 2 *et* $\frac{200}{100}$

3- "Et si on mêlait les deux familles ?"

Comparer par exemple $\frac{3}{10}$ *et* $\frac{3}{100}$; $\frac{70}{100}$ *et* $\frac{7}{10}$; $\frac{6}{10}$ *et* $\frac{52}{100}$

Cette troisième comparaison nécessite de rappeler les méthodes de comparaison : utiliser la partie entière si possible ou voir un même dénominateur possible.

Organisation

Tâche individuelle, mais échanges à deux par table.

Consigne 1

"Vous avez tous reçu une feuille sur laquelle figurent des segments. Il s'agit de les ranger du plus petit au plus grand, sans les découper ni utiliser de règle graduée, et de trouver un moyen pour indiquer l'ordre dans lequel vous les avez rangés. Avez-vous quelques idées ?"

Certains enfants proposent le calque (mais le maître n'en a plus), la comparaison deux à deux par utilisation d'un papier intermédiaire, etc.
Le maître demande comment seront écrites les conclusions ; on convient de nommer chaque segment, les propositions des élèves sont de coder les deux extrémités, le maître propose pour économiser des lettres de donner une lettre à chaque segment. Le codage se fait donc collectivement, le maître affiche au tableau une lettre sur chaque segment, une autre feuille avec les segments codés circule dans sa classe pour ceux qui sont trop loin du tableau. Le maître s'assure en circulant que les élèves ont pris le bon codage pour chaque segment.

Temps de recherche et de rangement.

Synthèse

Au bout d'un quart d'heure de travail, le maître fait une synthèse des résultats et méthodes :
la comparaison deux par deux est en général le moyen communément employé.
On obtient dans l'ordre des longueurs croissantes :
$E < L < J < A=H < C < D < G < K < I < B < F$
L'égalité des longueurs de A et H est pointée et notée.

Toute la classe juge la méthode de comparaison longue, avec la difficulté de contrôler la validité des résultats. L'ensemble du groupe évolue, avec une plus ou moins grande intervention du maître, sur l'idée de les redessiner tous à partir d'un même point. D'où la consigne suivante.

Consigne 2

"Dessinez tous les segments sur la même droite, à partir d'un même point, appelé l'origine, que l'on appelle aujourd'hui Z."

Pour retrouver l'extrémité qui correspond au bon segment, certains enfants proposent la lettre qui le code. On décide donc de noter l'extrémité de chaque segment, autre que le point Z, par la lettre qui codait initialement le segment.

Voir les travaux d'enfants en annexe 12.

Consigne 3

"Vous obtenez des points sur une droite, nous allons choisir une unité sur la droite et chercher leur abscisse. L'unité choisie est la longueur ZL."

Les enfants rappellent leurs souvenirs de l'abscisse, le maître ravive les mémoires. On cherche ensemble l'abscisse de E.

Recherche par groupe de deux. La distance LJ est retrouvée par report dans l'unité, mais le point J est alors souvent doté de l'abscisse $\frac{1}{4}$. Pour certains il est utile de rappeler où serait le point d'abscisse $\frac{1}{4}$, pour donner à J l'abscisse $1+\frac{1}{4}$.

Synthèse
Quand la droite est graduée par le choix de l'unité (ici ZL), chaque point a une abscisse.
L'abscisse d'un point mesure la longueur du segment de l'origine jusqu'au point.

La séance se termine par la comparaison des différentes écritures des abscisses.

Par exemple, l'abscisse de A (et de H) peut être notée :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \quad ou \quad 1+\frac{2}{4} \quad ou \quad 1+\frac{1}{2} \quad ou \quad \frac{3}{2}$$

ce qui permet de réviser des égalités sur les fractions.

Présentation et analyse de l'activité

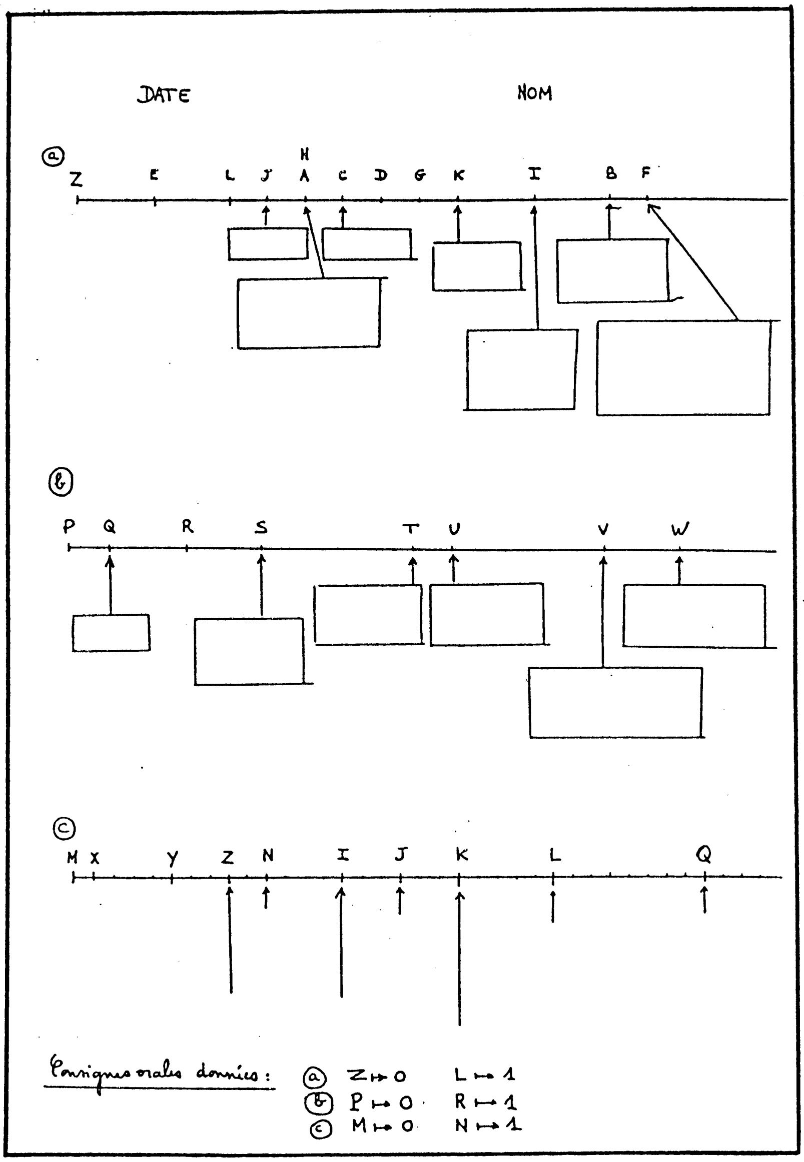
Dans la continuité de la séance précédente, les élèves trouvent des abscisses de points placés sur une demi-droite graduée, ces abscisses pouvant être entières ou rationnelles non entières.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- graduer une droite avec une unité imposée,
- trouver plusieurs écritures de l'abscisse d'un point,
- construire des égalités avec des fractions.

Matériel

Une fiche photocopiée par élève (cf. ci-contre et annexe 13).



Déroulement

Calcul mental

1 - Oralement, à tour de rôle, calculer : 1/2 de 12 ; 1/4 de 24 ; 1/6 de 36 ;
et le maître écrit les réponses au tableau sous la forme

$\frac{1}{2} \times 12 = 6 \quad \frac{1}{4} \times 24 = 6$ etc.

Puis calculer 3/4 de 60 ; 3/10 de 100 ; 7/10 de 20, etc.
Cette deuxième série fait intervenir des numérateurs supérieurs à 1, donne lieu à des justifications du type :

$\frac{3}{4}$ *de* 60, *c'est* 3 *fois* $\frac{1}{4}$ *de* 60, *donc* 3 *fois* 15, *donc* 45.

2 - Ecrire sous forme d'un entier plus le "rompu" (les fractions décimales sont écrites au tableau) :

$$\frac{46}{10} ; \frac{74}{10} ; \frac{3}{10} ; \frac{123}{10} ; \frac{345}{10} ; \frac{345}{100} ; \frac{123}{100} ; \frac{200}{100} ; \frac{30}{100}$$

Organisation
Travail individuel avec échanges par groupes de deux.

Rappel
Ensemble, on rappelle la dernière séance, qui avait amené à :
- dessiner tous les segments sur une même demi-droite, avec la même origine, nommée Z, pour plus vite comparer leurs longueurs ;
- chercher l'abscisse de chaque point, l'unité étant la longueur ZL.

Consigne 1
La première tâche demandée consiste à refaire le travail de la dernière séance sur la demi-droite **a** et à retrouver, si possible, plusieurs écritures de chaque abscisse, ce afin de permettre à tous de réussir complètement l'exercice.

Synthèse
Sur les différentes écritures. Quelques exemples de possibles :

$$3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=4-\frac{1}{4}$$

Les écritures foisonnent, on trouve sans effort des écritures additives fractionnaires des entiers.

Consigne 2
Même travail sur la demi-droite **b**, quand l'unité est précisée (la longueur PR) : recherche des abscisses des points marqués et de plusieurs écritures possibles pour ces abscisses, après une recherche collective de l'abscisse de Q et le placement des points d'abscisses entières.

Le maître insiste sur la justification de l'abscisse du point Q, $\frac{1}{3}$: la longueur PQ se reporte 3 fois exactement dans l'unité PR.
On ne note pas de difficulté particulière, ni trop d'erreurs : les enfants proposent des fractions, des écritures additives et soustractives de fractions.

Consigne 3
Même type de tâche pour la demi-droite **c**, quand l'unité est précisée (la longueur MN), une synthèse ayant lieu sur le point X avant les autres recherches.

Cet exercice ne pose pas de problème particulier, une fois repéré que l'unité MN est partagé équitablement en 10. Les écritures proposées font surtout apparaître des dixièmes ou des entiers, compte-tenu du partage prédessiné. Les élèves produisent des égalités sur ces dixièmes, du type :

$$1+\frac{7}{10}=\frac{10}{10}+\frac{7}{10}=\frac{17}{10}=2-\frac{3}{10} \qquad \frac{25}{10}=2+\frac{5}{10} \qquad 2=\frac{20}{10}=\frac{10}{5}$$

Voir travaux d'enfants en annexe 14.

Synthèse
Sur les différentes écritures proposées.
Sur le nom mathématique donné aux fractions de dénominateur 10, 100, 1000, etc.

Institutionnalisation

1 - En mathématiques, on appelle fraction décimale les fractions de dénominateur 10, ou 100, ou 1 000, ou 10 000, ou ....
Exemples de fractions décimales : $\frac{7}{10}$; $\frac{156}{10}$; $\frac{21}{100}$; $\frac{56}{1000}$; $\frac{345}{100}$

2 - Beaucoup de nombres, mais pas tous, peuvent s'écrire en fractions décimales.

Exemples :

$2 = \frac{20}{10}$ 2 peut s'écrire en fraction décimale

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\frac{1}{2}$ peut s'écrire en fraction décimale

$\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire en fraction décimale.

Présentation et analyse de l'activité

Avant de passer à l'écriture usuelle à virgule des décimaux, un entraînement systématique sur les fractions décimales, qui bénéficient du sens construit sur les fractions en général, est très souhaitable.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à "s'entraîner" sur les fractions décimales :
- chercher la partie entière et le rompu ;
- encadrer la fraction par deux entiers consécutifs ;
- donner d'autres écritures de dénominateur 10^n.

Matériel

Une fiche photocopiée par élève (cf. ci-contre et annexe 15).

Déroulement

Calcul mental

1 - A l'oral, calculer :

$\frac{1}{4}$ *de* 60 ; $\frac{3}{4}$ *de* 60 ;

$\frac{1}{5}$ *de* 10 ; $\frac{2}{5}$ *de* 10 ; $\frac{7}{5}$ *de* 10 ;

$\frac{1}{4}$ *de* 80 ; $\frac{2}{4}$ *de* 80 ; $\frac{5}{4}$ *de* 80 ;

$\frac{1}{10}$ *de* 50 ; $\frac{7}{10}$ *de* 50 ; $\frac{5}{10}$ *de* 50 ;

$\frac{1}{100}$ *de* 300 ; $\frac{4}{100}$ *de* 300 ;

$\frac{1}{10}$ *de* 300 ; $\frac{4}{10}$ *de* 300 ; $\frac{10}{10}$ *de* 300

NOM

1. Complète les égalités :

$\frac{3}{10} = \frac{\cdot}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

$\frac{13}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

$2 = \frac{\cdot}{10} = \frac{\cdot}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

$31 = \frac{\cdot}{10} = \frac{\cdot}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

$\frac{1}{2} = \frac{\cdot}{10} = \frac{\cdot}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

$\frac{3}{2} = \frac{\cdot}{10} = \frac{\cdot}{100} = \frac{\cdot}{1000}$

2. Complète :

$\frac{40}{100} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$\frac{3400}{10} = \cdot$

$21 = \frac{\cdot}{\cdot}$

$\frac{1300}{100} = \cdot$

$\frac{150}{10} = \cdot$

$177 = \frac{\cdot}{\cdot}$

3. Trouve la partie entière et le rompu.

$\frac{754}{10} = \quad + \frac{}{}$

$\frac{1234}{10} =$

$\frac{754}{100} =$

$\frac{1234}{100} =$

$\frac{754}{1000} =$

$\frac{1234}{1000} =$

4. Écris une fraction décimale égale

$4 + \frac{3}{10} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$15 + \frac{9}{10} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$3 + \frac{17}{100} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$9 + \frac{7}{10} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$72 + \frac{5}{10} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$6 + \frac{7}{100} = \frac{\cdot}{\cdot}$

2 - A l'écrit, donner la partie entière et le rompu de :

$\frac{35}{10}$; $\frac{123}{10}$; $\frac{101}{10}$;
$\frac{120}{100}$; $\frac{325}{100}$; $\frac{530}{100}$

Organisation
Travail individuel

Consigne 1
"Nous savons écrire des fractions égales, par exemple ?"
et les élèves peuvent répondre $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = etc$
"Comment "ça marche" ?"

et on rappelle les principes vus par la classe sur l'égalité de deux fractions.

"Aujourd'hui nous allons travailler surtout avec des fractions décimales. Vous savez écrire des fractions égales, mais nous allons le faire uniquement avec des fractions de dénominateur 10, 100, 1000, etc.
Par exemple si j'écris $\frac{4}{10}$, vous dites ?"
Réponses possibles : $\frac{4}{100}$ $\frac{40}{100}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{400}{1000}$

Le maître fait une distinction entre les fractions égales et de dénominateur répondant à la consigne (ici $\frac{40}{100}$ *et* $\frac{400}{1000}$), les fractions égales et ne répondant pas la consigne (ici $\frac{2}{5}$) et les fractions non égales à celle demandée (ici $\frac{4}{100}$).

Une fois la consigne comprise par tous, le maître leur distribue la fiche.
Puis il circule dans la classe pour une aide individualisée.

Synthèse
Elle porte sur la possibilité de changer (par un facteur 10) le dénominateur d'une fraction décimale ; sur la "simplicité" de calcul de la partie entière et du "rompu" d'une fraction décimale.

Remarque
A l'issue de ces exercices et de cette synthèse, les fractions décimales devraient sembler aux élèves plus "faciles" que les autres.

Institutionnalisation

1 - Une fraction de dénominateur 10 peut s'écrire avec un dénominateur 100, ou 1 000, etc.

Exemple : $\frac{8}{10}=\frac{80}{100}=\frac{800}{1000}$

Une fraction de dénominateur 100 peut s'écrire avec un dénominateur 1 000, ou 10 000, etc.

Exemple : $\frac{24}{100}=\frac{240}{1000}=\frac{2400}{10000}$

Un nombre entier peut s'écrire en fraction décimale. Exemple :

$$6=\frac{60}{10}=\frac{600}{100}=\frac{6000}{1000}$$

$$23=\frac{230}{10}=\frac{2300}{100}$$

2 - La partie entière d'une fraction décimale se calcule vite ; il est rapide de trouver deux entiers consécutifs encadrant une fraction décimale, par exemple :

$$\frac{153}{10}=15+\frac{3}{10} \quad car \quad 153=150+3 \quad ; \quad 15 < \frac{153}{10} < 16$$

$$\frac{789}{100}=7+\frac{89}{100} \quad car \quad 789=700+89 \quad ; \quad 7 < \frac{789}{100} < 8$$

Présentation et analyse de l'activité

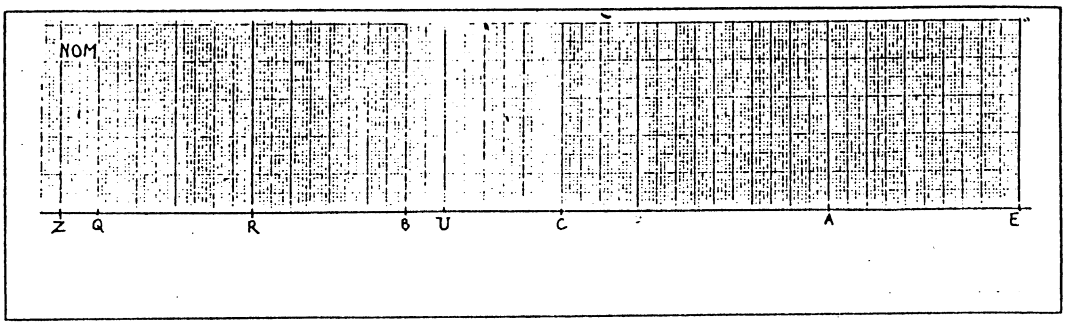
Les fractions décimales ont été introduites et travaillées. Cette leçon permet de les placer sur la droite graduée, donc de les ordonner et de donner du sens à des fractions de dénominateur 100.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à :
- réinvestir la graduation avec des fractions décimales ;
- comprendre la réitération possible du partage équitable en dix ;
- associer les bonnes fractions aux nouveaux points.

Matériel

Une demi-feuille de papier millimétré par enfant (dans le sens de la longueur).
La photocopie d'un quart de feuille de papier millimétré (dans le sens de la longueur) pour deux enfants, avec une demi-droite d'origine Z, un point U à 10 cm de Z et quelques autres (cf. points ci-dessous).
Pas de règle graduée, mais du calque et un compas à disposition.



Déroulement

Calcul mental

Le maître donne des fractions décimales (de dénominateur 10 et 100) oralement, laisse un temps ; chaque enfant les écrit, puis trouve sa partie entière et son rompu.
Exemples : 13 dixièmes, 145 centièmes, 234 dixièmes, 50 dixièmes, 1200 centièmes, etc.

Organisation

Travail individuel

Consigne 1
Demander aux enfants d'observer la feuille de papier millimétré qui leur a été remise.
C'est du papier avec des tout petits carreaux, régulièrement répartis, appelé papier millimétré, car un tout petit carreau est un carré d'un millimètre de côté. Sur la feuille, est dessinée une droite, avec des points marqués.

"Il s'agit de placer des points sur cette droite ou de trouver l'abscisse de certains points. Vous allez recevoir pour deux un modèle des points déjà placés. Vous allez soigneusement recopier sur votre feuille les indications du modèle."

Laisser un temps de recopiage

Remarque
Il est difficile d'utiliser une photocopie de papier millimétré dans la mesure où la copie peut déformer le quadrillage, c'est pourquoi il est souhaitable que les enfants travaillent directement sur du vrai papier millimétré. Le maître veillera à contrôler la recopie des points et de leurs emplacements.

Consigne 2
"Je vous indique que l'unité est ZU. Quelle est l'abscisse de Z ? Quelle est l'abscisse de U ? Trouvez les abscisses de chacun des points du modèle (que vous avez recopié sur votre feuille)."

Le maître peut avoir préparé un tableau :

point	Z	U	A	R	Q	B	C	E
abscisse								

Ce tableau est rempli collectivement après un court temps individuel et on compare les éventuelles différentes écritures : fractions quelconques, entiers, écritures additives.

Le maître demande ensuite de donner si possible une fraction à dénominateur 10 pour chacune des abscisses. On complète donc le tableau par une ligne :

point	Z	U	A	R	Q	B	C	E
abscisse (écritures possibles)	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$ $1-\frac{1}{10}$	$1+\frac{3}{10}$ $\frac{13}{10}$	$2+\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$
fraction décimale (écritures attendues	$\frac{0}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{25}{10}$

Les fractions à dénominateur 10 sont trouvées, soit par des considérations numériques (transformation licite du dénominateur), soit par l'utilisation de la sous-unité ZQ : si ZQ se reporte n fois dans le segment de l'origine au point considéré, l'abscisse de ce point est $\frac{n}{10}$

Le maître fait constater ces deux façons de trouver les fractions convenables.

Consigne 3
"Quelle abscisse a le point T qui correspond à la première graduation du papier millimétré ?"

Les enfants comptent le nombre de fois que ZT est contenu dans ZQ et annoncent 10, certains concluent faussement : donc T a pour abscisse $\frac{1}{10}$.

Le maître se réfère à l'unité (qui contient 100 fois la longueur de la plus petite graduation) ; on conclut donc : l'abscisse de T est $\frac{1}{100}$ et simultanément
$\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{100}$, ce que le maître écrit $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

Consigne 4
"Placez sur la droite les points suivants :"

point	G	H	J	K
abscisse	$\frac{30}{100}$	$\frac{167}{100}$	$\frac{55}{100}$	$\frac{240}{100}$

"Cherchez d'autres écritures pour les abscisses."

Une mise en commun a lieu sur les différentes écritures possibles, celles uniquement sous forme de fraction, celles sous forme d'une écriture additive ou soustractive. Ainsi :

$$\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$
$$\frac{167}{100}=1+\frac{67}{100}=2-\frac{33}{100}$$
$$\frac{240}{100}=\frac{24}{10}=2+\frac{4}{10}$$

Consigne 5
"Trouvez les fractions décimales de dénominateur 100 pour tous les points nommés de la droite"

On ajoute une ligne supplémentaire au deuxième tableau de la consigne 2.

Synthèse
Sur les égalités entre fractions à dénominateur 10 et celles à dénominateur 100.

Institutionnalisation

Retenons quelques égalités importantes

$1=\frac{10}{10}=\frac{100}{100}$ $\quad$ *donc 1 c'est 10 dixièmes ou 100 centièmes*

$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$ $\quad$ *donc* $\frac{1}{10}$ *de* $\frac{1}{10}$ *c'est* $\frac{1}{100}$

$\frac{1}{100}$ est $\frac{1}{10}$ partagé en 10. $\frac{1}{100}$ est dix fois plus petit que $\frac{1}{10}$.

Le partage en 10 peut se poursuivre :

$\frac{1}{100}$ partagé en 10 est $\frac{1}{1000}$; $\quad$ $\frac{1}{1000}\times 10=\frac{1}{100}$,
$\frac{1}{1000}$ est dix fois plus petit que $\frac{1}{100}$.

$\frac{1}{1000}$ partagé en 10 est $\frac{1}{10000}$; $\quad$ $\frac{1}{10000}\times 10=\frac{1}{1000}$,
$\frac{1}{10000}$ est dix fois plus petit que $\frac{1}{1000}$

Présentation et analyse de l'activité

Cette séance a pour but d'introduire l'écriture usuelle des nombres décimaux.
Comme il s'agit d'une convention (relativement récente), on ne cherchera pas à faire "construire" cette convention, mais on s'attachera à la faire comprendre.
Pour cela nous proposons aux enfants un document présentant des fractions décimales et leur écriture chiffrée de telle sorte qu'ils puissent, en analysant ces égalités, émettre des propositions sur les règles d'écriture des nombres décimaux.

Intentions pédagogiques

Amener les enfants à
- comprendre la convention d'écriture des nombres décimaux
- passer des fractions décimales aux nombres décimaux et réciproquement.
- lire les nombres décimaux.

Matériel

- Fiches individuelles sur la convention d'écriture des fractions décimales et la lecture des nombres décimaux.(cf. ci-contre et annexe 16)
- Calculatrices

Voici comment les mathématiciens ont décidé d'écrire les fractions décimales

	fraction décimale	écriture à virgule	partie entière + "rompu"	lecture
a	$\frac{257}{10}$	25,7	$25 + \frac{7}{10}$	25 et 7 dixièmes
b	$\frac{2365}{1000}$	2,365	$2 + \frac{365}{1000}$	2 et 365 millièmes
c	$\frac{46}{100}$	0,46		
d	$\frac{7}{10}$	0,7		
e	$\frac{405}{100}$	4,05		
f	$\frac{607}{1000}$	0,607		
g	$\frac{34}{10}$			
h	$\frac{9}{100}$			
i	$\frac{703}{10}$			
j		5,23		
k		75,2		
l		0,061		
m			$40 + \frac{8}{10}$	
n			$9 + \frac{2}{100}$	
p				17 et 34 centièmes
q				3 et 27 millièmes

Déroulement

Calcul mental

- Comparaison de fractions décimales.
Le maître cite, oralement, deux fractions décimales. Exemples :

$$\frac{53}{100}\ et\ \frac{75}{100}\ ,\ \frac{4}{10}\ et\ \frac{47}{100}$$

les enfants disent laquelle des deux est la plus grande et justifient leur affirmation.

- Ecriture d'un entier sous forme de fractions de dénominateur 10; 100;1000...
Les enfants à tour de rôle et oralement donnent, pour des nombres entiers, plusieurs écritures.

Exemples :

$$6=\frac{60}{10}=\frac{600}{100}=\frac{6000}{1000}$$

$$\frac{870}{10}=87=\frac{8700}{100}$$

Organisation matérielle
Travail par groupe de deux.

Consigne 1
Proposer aux enfants d'observer attentivement le document distribué.
Par groupe de deux, avec votre voisin, vous allez essayer de trouver la convention choisie par les mathématiciens pour écrire les fractions décimales. Vous noterez vos propositions. Puis pour les tester, vous continuerez à remplir les deux premières colonnes du tableau jusqu'à la ligne *l*. Vous pouvez utiliser votre calculatrice.

Mise en commun
Les propositions sont mises en commun et discutées.
Les enfants exposent la manière dont ils ont utilisé la calculatrice.
C'est l'occasion de rappeler le lien entre les fractions et la division, par exemple la fraction $\frac{37}{10}$ désigne le quotient exact de 37 par 10.
Certains remarquent que si ont fait la division de 257 par 10 avec la calculatrice, on obtient à l'écran le nombre 25.7 et non le nombre 25,7 comme sur la fiche. A ce moment le maître peut indiquer que sur les calculatrices, la virgule est remplacée par un point.

Dans cette première phase, le maître laissera les enfants lire les nombres à virgule à leur façon, un travail spécifique sur la lecture est prévu dans la consigne 2.
Certains enfants disent qu'ils connaissent déjà les nombres décimaux, parce que les prix sont souvent écrits comme cela. Le maître peut alors demander aux élèves de citer plusieurs prix, et de faire des remarques : les nombres décimaux utilisés pour les prix ont toujours deux chiffres après la virgule, il s'agit de *francs* avant la virgule et de *centimes* après la virgule ; les centimes sont les centièmes du franc.

Consigne 2.
Demander aux enfants de remplir les colonnes 2 et 3 du tableau, jusqu'à la ligne *l*, après avoir analysé les cases déjà remplies.

Mise en commun
Les enfants font des remarques sur la manière de lire les nombres à virgule : la lecture correspond à l'écriture de la fraction décimale sous sa forme partie entière plus rompu.

Consigne 3
Demander aux enfants de compléter les quatre dernières lignes de la fiche.
Correction individuelle.

Synthèse
Tous les nombres qui s'écrivent en fractions décimales s'appellent des nombres décimaux.

Donner aux enfants quelques informations sur l'apparition des écritures à virgule[1]
Actuellement, on écrit les nombres décimaux soit avec une virgule, soit avec un point. Cela dépend des pays. Les calculatrices écrivent les nombres décimaux avec un point.
Les nombres décimaux se lisent en disant la partie entière et le rompu qui s'appelle aussi partie décimale.
La calculatrice permet de passer des fractions décimales à leur écriture avec un point, en divisant le numérateur par le dénominateur.

Institutionnalisation

Un nombre décimal a plusieurs écritures, par exemple :

$$\frac{257}{10} = 25 + \frac{7}{10} = 25,7$$

25,7 s'appelle un nombre à virgule et se lit "25 et 7 dixièmes".

Entraînement en dehors de la séance.

1- Ecrire les fractions suivantes sous forme de nombres à virgule, utiliser la calculatrice pour vérifier.

$\frac{475}{100} =$ $\frac{509}{10} =$ $\frac{50}{10} =$ $\frac{5}{100} =$ $\frac{598}{10} =$ $\frac{4100}{10} =$ $\frac{540}{100} =$

2- Ecrire sous forme de fractions décimales les nombres suivants, utiliser la calculatrice pour vérifier.

8,45 = 60,7 =

37,06 = 0,6 =

0,024 = 17,03 =

3- Donner une liste de nombres écrits de différentes façons, les enfants doivent repérer les nombres entiers.

4- Donner un nombre entier ou décimal non entier, les enfants doivent l'écrire de différentes manières.

[1]Les fractions étaient connues déjà dans l'Antiquité, par exemple par les Egyptiens, elles furent couramment utilisées par les mathématiciens au cours des sciècles. Les fractions décimales, c'est à dire les fractions qui ont pour dénominateur les nombres 10, 100, 1000, 10000,etc.,étaient elles aussi connues et utilisées, mais les nombres à virgule, quant à eux, n'ont vu le jour que relativement récemment. Il fait attendre en effet le 16 ème sciècle pour rencontrer des propositions d'écriture à virgule pour les fractions décimales (en 1585, un banquier hollandais, Stevin, définit les nombres décimaux et proposent de les utiliser dans la vie économique). Il faut en fait attendre la révolution (en particulier le discours de Laplace à la Convention en 1792) pour que l'usage des nombres décimaux se répande.

Présentation et analyse de l'activité

Cette séance a pour but de familiariser les enfants avec l'écriture usuelle des nombres décimaux. Pour bien comprendre la signification de la position des chiffres dans les écritures à virgule, le maître va prolonger le tableau de numération des nombres entiers aux nombres décimaux. Ici, il ne s'agit en aucun cas d'une situation de recherche, mais de l'introduction d'un "outil" que les enfants pourront utiliser dans diverses situations par exemple pour comparer plusieurs nombres décimaux, puis plus tard pour construire des techniques opératoires sur ces nombres.

Intentions pédagogiques

Amener les enfants à :
- comprendre la signification des chiffres après la virgule en fonction de leur position
- comparer des nombres décimaux.

Déroulement

Calcul mental

1- Dictée de nombres décimaux.
Le maître dit des nombres décimaux, les enfants notent sur leur ardoise ou leur cahier les écritures à virgule correspondantes, par exemple :
2 et 1 dixième
5 et 27 centièmes
46 et 8 dixièmes
57 et 9 centièmes
8 dixièmes
54 centièmes
4 et 125 millièmes.

2- Le maître écrit au tableau des nombres décimaux, les enfants les lisent à tour de rôle, par exemple :
4,5 ; 2,39 ; 7,03 ; 0,6

Organisation matérielle
Travail par groupe de deux.

Consigne 1
"Aujourd'hui, nous allons essayer de comprendre pourquoi il est intéressant d'écrire les fractions décimales sous la forme de nombres à virgule.
Lorsqu'on écrit les nombres entiers, vous savez que la position des chiffres a une grande importance, par exemple :
4758 et 7845 sont écrits avec les mêmes chiffres, mais les chiffres ne sont pas situés à la même place. Par exemple, dans 4758 , le chiffre 4 est le chiffre des milliers, tandis que dans 7845, le chiffre 4 est le chiffre des dizaines.

Pour bien comprendre la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre entier, on utilise en CP ou en CE, un tableau de numération.

unités de millions	centaines de mille	dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités

Dans ce tableau de numération placez les nombres 4758 ; 7845 ; 254 ; 67,3 ; 178,56".

Remarque
Les deux derniers nombres doivent induire la nécessité de prolonger le tableau et de différencier à nouveau partie entière et partie décimale.

Mise en commun des propositions des enfants.
Pour les nombres entiers il n'y a pas de problème. Pour les nombres à virgule, certains enfants proposent d'écrire les chiffres après la virgule à droite de la dernière colonne du tableau, d'autres proposent de faire une colonne pour ces chiffres-là, d'autres proposent de faire autant de colonnes que de chiffres après la virgule.

Le maître propose alors de compléter le tableau en suivant cette proposition et indique le nom des entêtes des nouvelles colonnes.

dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

Application
Ecrivez dans le tableau les nombres
5,9 ; 1064,3 ; 18,36 ; 567 ; 0,549 ; 39,04 ; 1540,006 ; 0,078.

Puis complétez les égalités :

$$5,9 = 5 + \frac{\dots}{10}$$

$$1064,3 = \ \dots + \frac{\dots}{10}$$

$$18,36 = \ \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}$$

$$0,549 = \ \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{1000}$$

$$39,04 = \ \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}$$

$$1540,006 = \ \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{1000}$$

$$0,078 = \ \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{1000}$$

Mise en commun
Les enfants viennent à tour de rôle placer les nombres décimaux dans le tableau de numération et expliquent les décompositions associées.

Synthèse
Comme pour les nombres entiers, la position des chiffres dans l'écriture des nombres décimaux indique la valeur des groupements :

- le premier chiffre à droite de la virgule est le chiffre des dixièmes, le second est celui des centièmes, le troisième celui des millièmes et ainsi de suite.....

$$\frac{2365}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} = 2,365$$

3 est le chiffre des dixièmes
6 est le chiffre des centièmes
5 est le chiffre des millièmes.

- quand il n'y a pas d'unité d'un certain ordre on place un zéro. Exemple :

$$\frac{405}{100} = 4 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} = 4,05$$

L'écriture décimale correspond à la décomposition canonique de la fraction décimale.

- Rappel :
Un dixième $\frac{1}{10} = 0,1.$ *Un centième* $\frac{1}{100} = 0,01.$ *Un millième* $\frac{1}{1000} = 0,001.$

Il faut 10 dixièmes pour faire une unité.
Il faut 100 centièmes pour faire une unité, et 10 centièmes pour faire un dixième.
Il faut 1000 millièmes pour faire une unité, il faut 100 millièmes pour faire un dixième, il faut 10 millièmes pour faire un centième.

Consigne 2
Ecrire plusieurs nombres décimaux au tableau, demander aux enfants de préciser pour chacun d'eux le chiffre des dixièmes, celui des unités, celui des millièmes, celui des centièmes etc.
Revenir au tableau de numération à chaque fois que cela est nécessaire.

Consigne 3
"Rangez dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants :
4,6; 4,12; 4,327
vous pouvez utiliser le tableau de numération".

Remarque
Les nombres choisis ont pour but de mettre en échec des stratégies erronées classiques s'appuyant sur une conception des décimaux comme couples d'entiers, par exemple
4,6 < 4,12 car 6 < 12
ou une stratégie qui en dérive : puisque 4,6 est plus grand que 4,12, alors 4,12 est plus grand que 4, 327 (moins il y a de chiffres dans la partie décimale plus le nombre est grand ou encore les nombres sont rangés dans l'ordre contraire de leur partie décimale)

Mise en commun

Les enfants proposent leur mise en ordre et expliquent la méthode qu'ils ont utilisée, les divers résultats sont comparés.

Pour valider les propositions les nombres décimaux sont d'une part écrits sous forme de fractions décimales, et d'autre part inscrits dans le tableau de numération.

$$4,6=\frac{46}{10}+\frac{460}{100}=\frac{4600}{1000}$$

$$4,12=\frac{412}{100}=\frac{4120}{1000}$$

$$4,327=\frac{4327}{1000}$$

dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
				4	6		
				4	1	2	
				4	3	2	7

conclusion

4,12 < 4,327 < 4,6

Application

Rangez dans l'ordre croissant les nombres

46,2; 46,06; 6,42; 6,4; 6,125; 0,95; 9,05; 9,50; 9,52; 0,952; 61,25.

(Le maître laisse les enfants libres de choisir la stratégie qui leur convient le mieux).

Mise en commun et correction collective

Synthèse

Pour comparer des nombres décimaux, on peut :

- les écrire sous forme de fractions décimales de même dénominateur et comparer les numérateurs.
- les écrire dans le tableau de numération et comparer les chiffres en partant de la gauche
- comparer directement les chiffres de chaque ordre en partant de la gauche
- écrire la décomposition canonique des nombres puis comparer les unités de chaque ordre toujours en partant de la gauche.

Consigne 4

Demander aux enfants de reprendre la fiche de la séquence 22, et de donner l'écriture à virgule des abscisses des points de la demi-droite dans le tableau suivant :

point	Z	U	A	R	Q	B	C	E
abscisse								

Puis demander aux enfants de ranger les nombres décimaux ainsi obtenus par ordre croissant et de comparer ce rangement à la position des points sur la demi-droite.

Mise en commun
Les différentes écritures proposées pour les points de la demi-droite sont vérifiées, la cohérence du rangement des nombres décimaux et de la position des points sur la droite est mise en évidence.

Institutionnalisation

Une centaine, c'est 10 dizaines.
Une dizaine, c'est 10 unités.
Une unité, c'est 10 dixièmes.
Un dixième, c'est 10 centièmes.
Un centième, c'est 10 millièmes.
Et ainsi de suite.

Le maître fait également noter le tableau de numération construit lors de la consigne 1, avec quelques exemples :

dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
			4	5	2	0	7

Dans 45,207
4 est le chiffre des centaines
5 est le chiffre des unités
2 est le chiffre des dixièmes
0 est le chiffre des centièmes
7 est le chiffre des millièmes.
etc.

Présentation et analyse de l'activité

C'est une activité de résolution de problème de réinvestissement sur les décimaux.

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à résoudre un problème dont un décimal non entier est solution.

Matériel
- Calculatrices et règle graduée (en millimètres) par groupe.
- Dans chaque groupe une cinquantaine de feuilles du même paquet.

Déroulement

Calcul mental

1- A l'oral (mais les élèves peuvent s'aider, et c'est conseillé, d'une feuille de brouillon), jeu du nombre caché.
Le maître pense à un nombre, les élèves font des propositions de nombres auxquelles le maître répond "trop grand" ou" trop petit" ou "bravo".
Exemples : 15,7   27,39

2- A l'oral jeu du furet : compter à tour de rôle de 0,2 en 0,2 à partir de 3,2.
Chaque enfant dit tout d'abord le nombre oralement puis vient le noter au tableau. La difficulté vient du passage de 3,8 à 4. En effet oralement les enfants disent "3 et 6 dixièmes, 3 et 8 dixièmes, 3 et 10 dixièmes" : sous cette forme, il n'y a bien sûr pas d'erreur, mais le risque est grand de voir à l'écrit 3,8 puis 3,10 qui, cette fois est incorrect. Le maître s'attachera donc à faire transformer les 10 dixièmes en 1 unité après discussion sur cette question avec les élèves.

Organisation
Travail par groupe

Consigne 1
"Voici un paquet de 500 feuilles de papier. Par groupe, vous allez déterminer l'épaisseur d'une feuille de papier."

Temps de recherche

En général chaque enfant prend une feuille et mesure son épaisseur avec le double-décimètre, ou bien devant la difficulté à tenir la feuille rigide, essaie de dessiner son épaisseur par un trait et de mesurer la largeur de ce trait.

Mise en commun
Constats : "c'est pas facile", "ça fait moins d'1 mm", "après les mm, on n'a pas appris", "tracer un trait pour la feuille, c'est tricher", etc. ou propositions de nombres relativement fantaisistes.
Le maître demande d'être sûr des nombres avancés, et de prouver son affirmation.
Si l'idée de prendre un paquet de feuilles ne vient pas, le maître la suggère, de la façon suivante :
"Certes, il est vraiment difficile de mesurer l'épaisseur d'une feuille, alors que pourrait-on mesurer qui nous donnerait peut-être une indication sur cette épaisseur ?"

Consigne 2
"Vous allez donc mesurer l'épaisseur de plusieurs feuilles (le nombre que vous voulez, mais les mesures doivent être les plus précises possible) et en déduire l'épaisseur d'une feuille"
Discussion sur la précision souhaitée : au moins 1 mm pour le total des feuilles.

Mise en commun
Certains ont choisi 5 feuilles et trouvé 1/2 mm ; d'autres 10 feuilles et 1 mm ; d'autres 20 feuilles et trouvé 2 mm. La classe étudie si tous les résultats sont cohérents ou non, la prise en compte des approximations dues aux mesures est discutée, on décide d'un seuil de tolérance.

nombre de feuilles	épaisseur en mm
5	1/2
10	1
20	2

Remarque : ce tableau correspond à un type de papier (dit 60 g) ; un autre type peut fournir d'autres épaisseurs.

Consigne 3
"Peut-on vérifier les mesures sur l'épaisseur de 50 feuilles ?"

La classe prévoit l'épaisseur de 50 feuilles dans le tableau, la vérifie par la mesure, on discute des approximations éventuelles.

Consigne 4
"Calculez l'épaisseur d'une feuille en mm."

Les divisions à la main posent des problèmes, certains enfants fournissent spontanément les réponses $\frac{1}{10}$ *ou* $\frac{2}{20}$ *ou...* 0,1 et constatent leur égalité ; le maître met à disposition des calculatrices pour ceux qui s'appuient sur la division.

Remarque
Les calculatrices sont indispensables ici pour ne pas bloquer les élèves qui veulent utiliser la division, dans la mesure où ils ne connaissent pas la division à quotient décimal et de plus inférieur à 1 (donc de partie entière 0 !)

Synthèse
L'épaisseur d'une feuille est 0,1 mm, c'est-à-dire un dixième de mm ; ce qui veut dire que dix feuilles ont une épaisseur totale de 1 mm. Le maître signale qu'il était possible de trouver ce résultat sans calculatrice (dans le cas d'une épaisseur 1/10).

Consigne 5
"Trouvez l'épaisseur de 100 feuilles, de 1000 feuilles, de 500 feuilles"

Mise en commun des différents résultats. Comparaison avec l'épaisseur d'une ramette de 500 feuilles.

Synthèse

On peut écrire	On retrouve
$0{,}1 \times 100 = 10$	$\frac{1}{10}$ de 100 c'est 10
$0{,}1 \times 1000 = 100$	$\frac{1}{10}$ de 1 000 c'est 100
$0{,}1 \times 500 = 50$ (car ça fait 1/2 de 100)	$\frac{1}{10}$ de 500 c'est 50

Réinvestissement
On sait que 1 000 feuilles d'un autre paquet ont une épaisseur de 12 cm.
Ces feuilles sont-elles plus ou moins épaisses que les précédentes ?

Même question pour un paquet de 500 feuilles d'épaisseur 5,5 cm.

Remarque
Cette situation est inspirée de la recherche de G.et N.Brousseau sur les décimaux. L'utilisation qui en est faite ici n'en illustre qu'un aspect minime.

Présentation de ces séquences

Au cours de ces séquences, le maître propose aux enfants divers problèmes dans lesquels interviennent fractions et nombres décimaux et dont les contextes sont choisis dans la vie quotidienne. Nous en présenterons quatre.

Les enfants doivent effectuer des comparaisons et des opérations sur les fractions et sur les nombres à virgule. Les méthodes de calcul sont à leur charge, l'aspect familier des problèmes leur permettant de trouver des stratégies de résolution empiriques.

Intentions pédagogiques

Amener les enfants à investir les connaissances acquises sur les nombres décimaux dans la résolution de problèmes issus de la vie quotidienne. Les préparer aux techniques opératoires.

Matériel
Calculatrices

Problème 1

Quelle fraction du jour représente :
- une heure
- 12 heures
- 8 heures
- $\frac{1}{2}$ heure
- $\frac{3}{4}$ d'heure
- 1 minute
- 1 seconde.

Trouvez une façon de présenter vos résultats et de les justifier.

Objectif

Fractions et vie pratique. Travailler la notion de fraction d'une grandeur.

Organisation matérielle
Donner par groupe 2 ou 3 calculs choisis en fonction des compétences des élèves.

Synthèse
Pour savoir quelle fraction du jour représente une durée, il est nécessaire d'exprimer le jour et la durée dans la même unité.

Exemple : un jour c'est 24 heures donc 8 heures c'est $\frac{1}{3}$ du jour.

Problème 2.

La longueur des chaussures s'exprime en points.

Le point français vaut $\frac{2}{3}$ de centimètre.

Quelle est la longueur, en centimètres, d'une chaussure du 33 ? du 35 ? du 39 ?
Vous pouvez utiliser la calculatrice, votre règle graduée. Vous pourrez vérifier sur les pieds des enfants faisant ces pointures.

Objectif

Multiplier une fraction par un nombre entier.

Aborder la notion de précision des valeurs approchées.

Remarque
La pointure 35 est choisie pour donner lieu à un travail sur les approximations.

Organisation matérielle
Recherche individuelle pour observer les stratégies de chacun.
Prévoir une toise pour contrôler les longueurs des pieds des enfants (cf. annexe 17)

Mise en commun
Certains essayent de calculer combien de centimètres mesure le point, et se heurtent à la division de 2 par 3, mais obtiennent un résultat à la calculatrice.
D'autres utilisent une droite graduée en centimètres et évaluent soit approximativement à l'oeil, soit en transformant 1 cm en 10 mm, ils divisent 10 par 3 et disent que cela fait 3 mm et un peu plus.
Des enfants cherchent à utiliser la machine à partager, qui s'avère un outil non adéquat parce que les parallèles ne sont pas assez proches les unes des autres.
D'autres utilisent du papier millimétré.
D'autres essaient de calculer 33 x $\frac{2}{3}$.

Synthèse
Le point mesure $\frac{2}{3}$ de cm donc

* 33 points mesurent 33 x $\frac{2}{3}$ de cm, c'est à dire 22 cm car :

$$33\times\frac{2}{3}=\frac{33\times2}{3}=11\times2=22$$

* 35 points mesurent 35 x $\frac{2}{3}$ de cm, c'est à dire *environ* 23,3 cm car ;

$$35\times\frac{2}{3}=\frac{35\times2}{3}=\frac{70}{3}=23+\frac{1}{3}$$

Si on divise 1 par 3 on obtient un quotient décimal qui "ne s'arrête pas" : 0,3333.......
On peut prendre comme valeur approchée 0,3 ou 0,4.
La pointure 35 correspond donc à une longueur d'*environ* 23,3 cm ou 23,4 cm.

Profiter de cette occasion pour susciter une discussion sur la précision des valeurs approchées en fonction du contexte du problème. Ici 23,33 est un résultat plus précis mais non pertinent pour la situation.

Problème 3

Voici un document de la poste donnant les tarifs pour affranchir le courrier.

LES CORRESPONDANCES

En service rapide
LETTRES
Mention *lettre* obligatoire pour les lettres de plus de 20g.

poids jusqu'à	20 g	50 g	100 g	250 g	500 g	1000 g	2000 g	3000 g
tarifs	2,80 F	4,40 F	6,70 F	11,50 F	16,00 F	21,00 F	28,00 F	33,00 F

En service économique
ECOPLI

20 g : 2,40 F

Une société envoie en service rapide :
- 100 lettres de moins de 20g
- 25 lettres pesant 120g
- 60 lettres pesant 40g
- 17 lettres pesant 70g

et 150 lettres en service économique.

Quelle somme d'argent faut-il pour affranchir toutes ces lettres.
Effectuez les calculs à la main, vous utiliserez la calculatrice pour vérifier

Objectif

Multiplier un décimal par un entier

Organisation matérielle
Travail à deux

Mise en commun
Pour effectuer les multiplications certains enfants transforment les prix en centimes, d'autres tentent des additions réitérées et font des regroupement, d'autres donnent le prix pour 10 lettres de chaque catégorie...

Synthèse à partir des méthodes des enfants.

Exemple :
Pour multiplier un nombre décimal par un nombre entier on peut écrire le nombre décimal sous forme de fraction décimale et multiplier cette fraction décimale par le nombre entier.

Problème 4

Donner des catalogues de magasins ou des listes de produits avec leur prix.
Proposer une somme d'argent et des achats imposés ou au choix des élèves.

Exemple :
Au super marché, Amélie achète
2 bouteilles d'orangina à 7,15 F l'une
une boite de céréales à 12,60 F
un lot de 5 barres Snickers à 8,95 F le lot
un pot de Nutella à 18,50 F
3 baguettes à 2,85 F l'une
un pot de confiture à 6,05 F le pot
une demi-livre de beurre à 30 F le kilo
une livre et demi de cerises à 17,80 F le kilo.
Elle a emporté 100F. A-t-elle assez d'argent si oui combien lui rend-on, sinon combien lui manque-t-il et quel article doit-elle laisser ?

Objectif

Effectuer des opérations sur les nombres décimaux.

Remarque
Après lecture de la liste des achats, il peut être nécessaire de donner des informations complémentaires par exemple sur la "livre".

Organisation matérielle
Travail par groupe

Mise en commun des procédures de résolutions et des procédures de calcul.
Discussion sur les expressions "une demi-livre" ($\frac{1}{2}$ livre) et "une livre et demie ($1+\frac{1}{2}$ livre).
Demander aux enfants ce que représentent ces masses en kilogramme.

Synthèse
Pour additionner ou soustraire des nombres décimaux, il suffit de placer les unes au dessous des autres les unités de chaque rang, donc les virgules les unes sous les autres, puis d'effectuer l'opération sans s'occuper des virgules et enfin de placer dans le résultat la virgule sous les autres.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

A.P.M.E.P.,1986, *Nombres décimaux"* Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 2.

BOLON J., 1993, "L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire" dans *Grand N* n°52.

BROUSSEAU G., 1980, "Problèmes de l'enseignement des décimaux" dans *Recherches en didactique des mathématiques* I.1.

BROUSSEAU G., 1981, "Problèmes de didactique des décimaux" dans *Recherches en didactique des mathématiques* II.1.

BROUSSEAU N. et G., 1987 *L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire,* Brochure de l'IREM de Bordeaux I.

COMITI C. NEYRET R. et al.,1981, "Les décimaux" dans *Revue Grand N*, Mathématiques pour le cycle moyen, numéro spécial.

DHOMBRES J., 1978, *Nombre, mesure et continu*, CEDIC Nathan.

DOUADY R., 1980, "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire" dans *Recherches en didactique des mathématiques* I.1.

DOUADY R. PERRIN GLORIAN M.J.,1986, *Nombres décimaux,* Brochure de l'IREM de Paris VII.

ERMEL, 1980, *Apprentissages Mathématiques à l'école élémentaire*, Cycle moyen, tome 2, Hatier.

GRISVARD C.et LEONARD F., 1981 "Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs", dans *Bulletin de l'APMEP n° 327.*

Groupe Histoire et Epistémologie des mathématiques, 1979, *Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la révolution,* Brochure de l'IREM de Rouen.

STEVIN 1585, *La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes,* Reproduction de textes anciens. Brochure de l'IREM de Paris VII.

ANNEXES

Annexe 1 : machine à partager pour la *séance 4.*

Annexe 2 : photo des demi-feuilles d'annuaire obtenues à la *séance 6.*

Annexe 3 : photo des familles de surfaces en fonction de l'aire construites à la *séance 9.*

Annexe 4a : fiche élève pour la *séance 10.*

Annexe 4b : travaux d'élèves correspondants à la *séance 10.*

Annexe 4c : travaux d'élèves correspondants à la *séance 10.*

Annexe 5a : travaux d'élèves correspondants à la *séance 11.*

Annexe 5b : travaux d'élèves correspondants à la *séance 11.*

Annexe 6a : travaux d'élèves correspondants à la *séance 12.*

Annexe 6b : travaux d'élèves correspondants à la *séance 12.*

Annexe 7a : travaux d'élèves correspondants à la *séance 12*

Annexe 7b : travaux d'élèves correspondants à la *séance 12*

Annexe 8 fiche élève pour la *séance 13.*

Annexe 9 : fiche élève pour la *séance 15.*

Annexe 10 : fiche élève pour la *séance 16.*

Annexe 11 : fiche élève pour la *séance 19.*

Annexe 12 : travaux d'élèves correspondants à la *séance 19.*

Annexe 13 : fiche élève pour la *séance 20.*

Annexe 14a : travaux d'élèves correspondants à la *séance 20.*

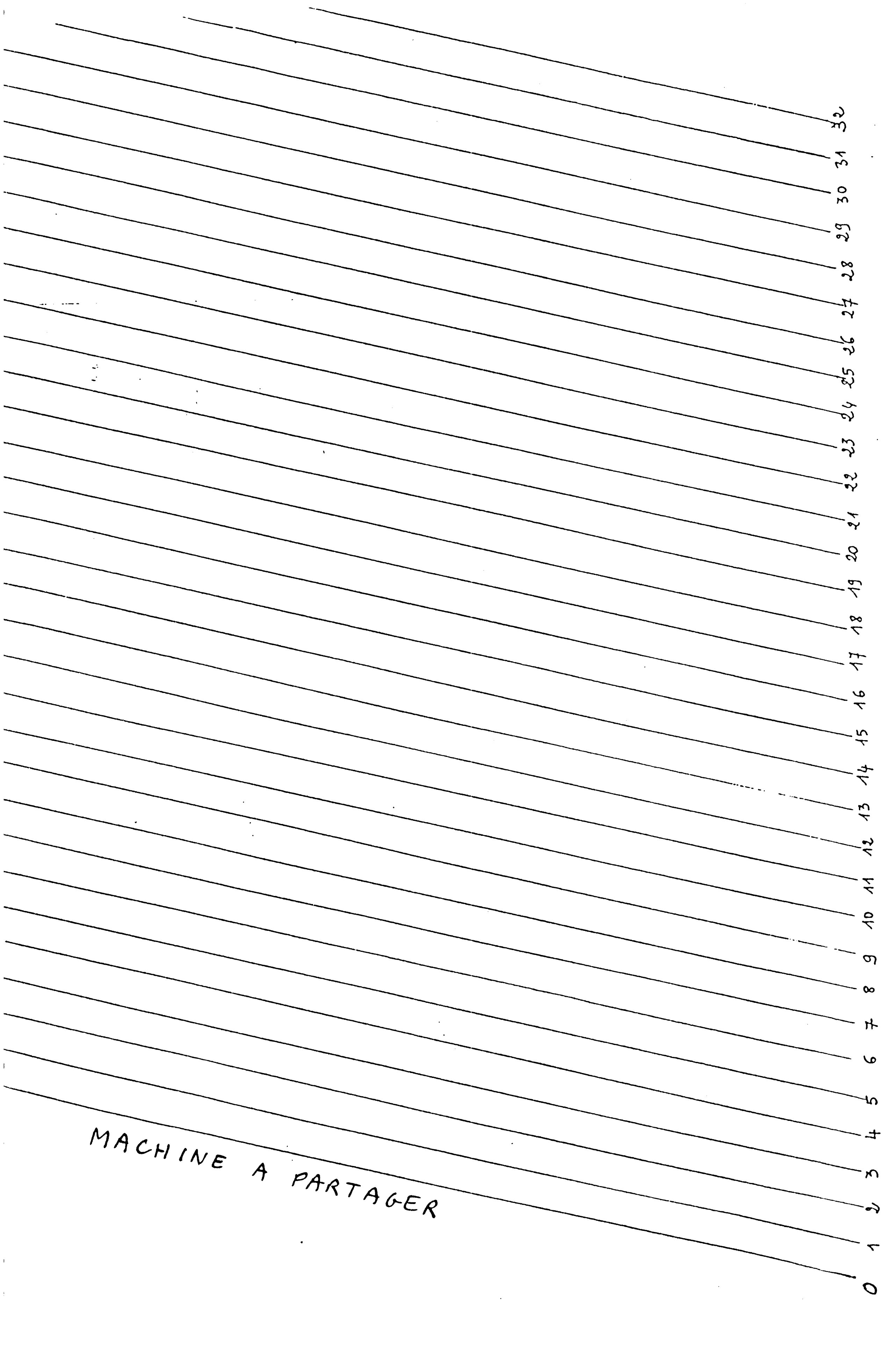
Annexe 14b : travaux d'élèves correspondants à la *séance 20.*

Annexe 15 : fiche élève pour la *séance 21.*

Annexe 16 : fiche élève pour la *séance 23.*

Annexe 17 : toise pour la pointure des pieds, pour le problème 2 des *séances suivantes.*

Annexe 1 (seance 4)



Annexe 2 (séance 6)

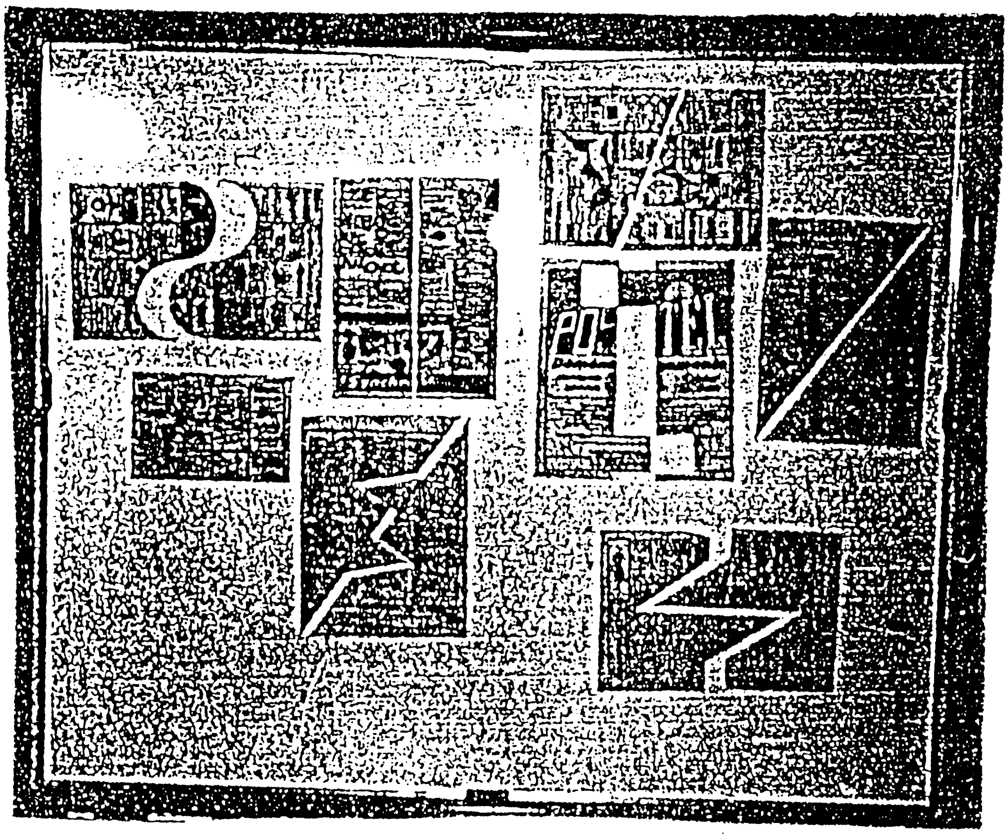


photo du tableau de la classe

Annexe 3 (séance 9)

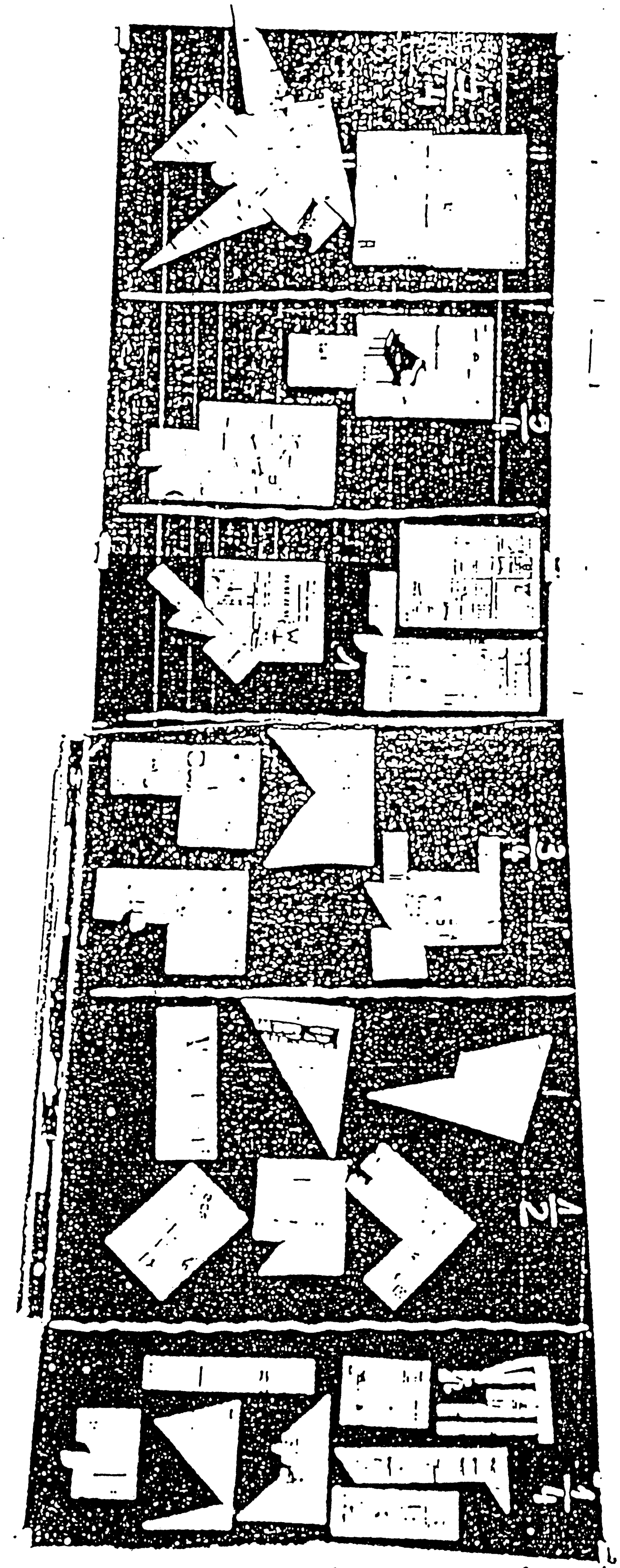
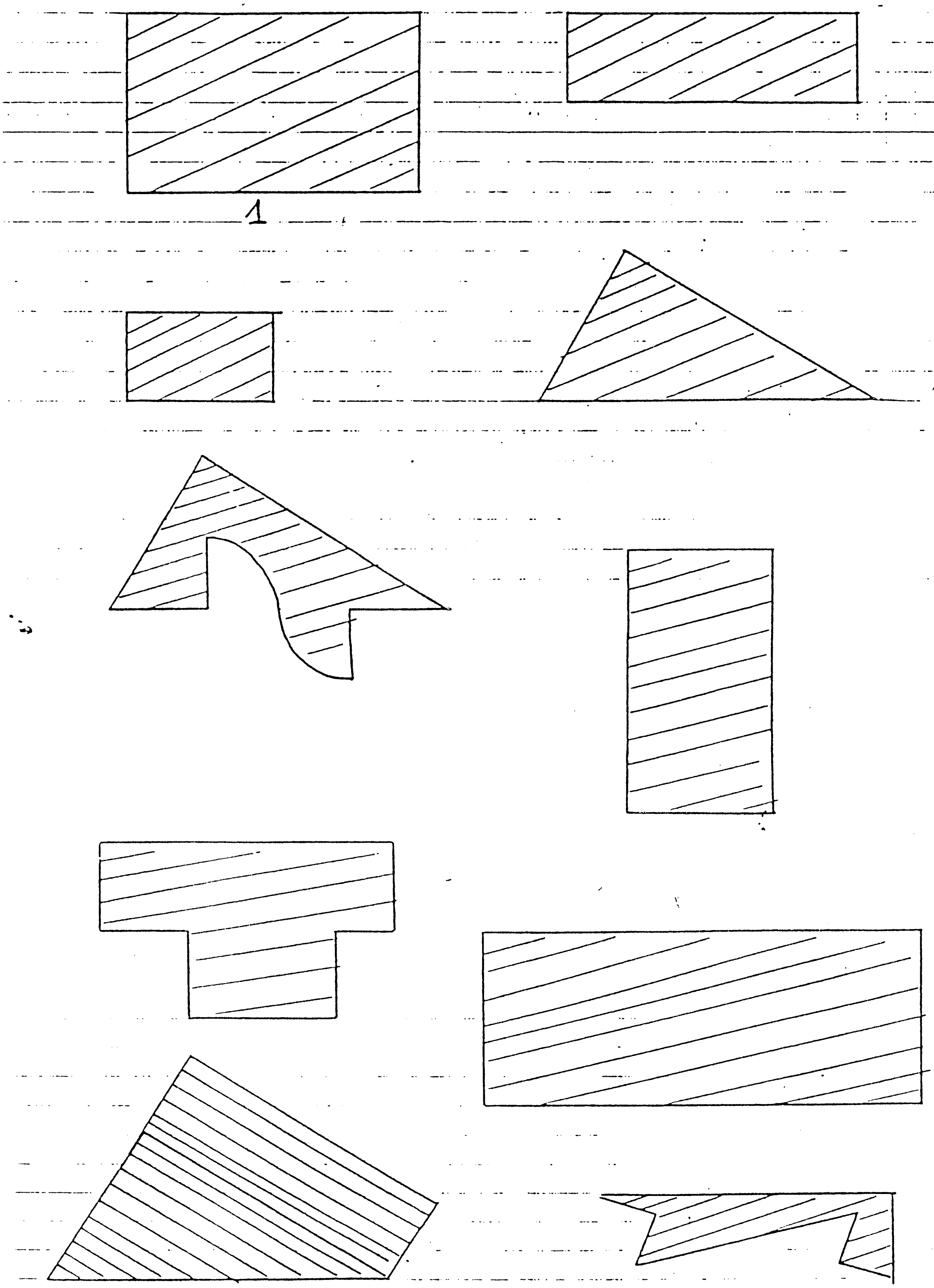


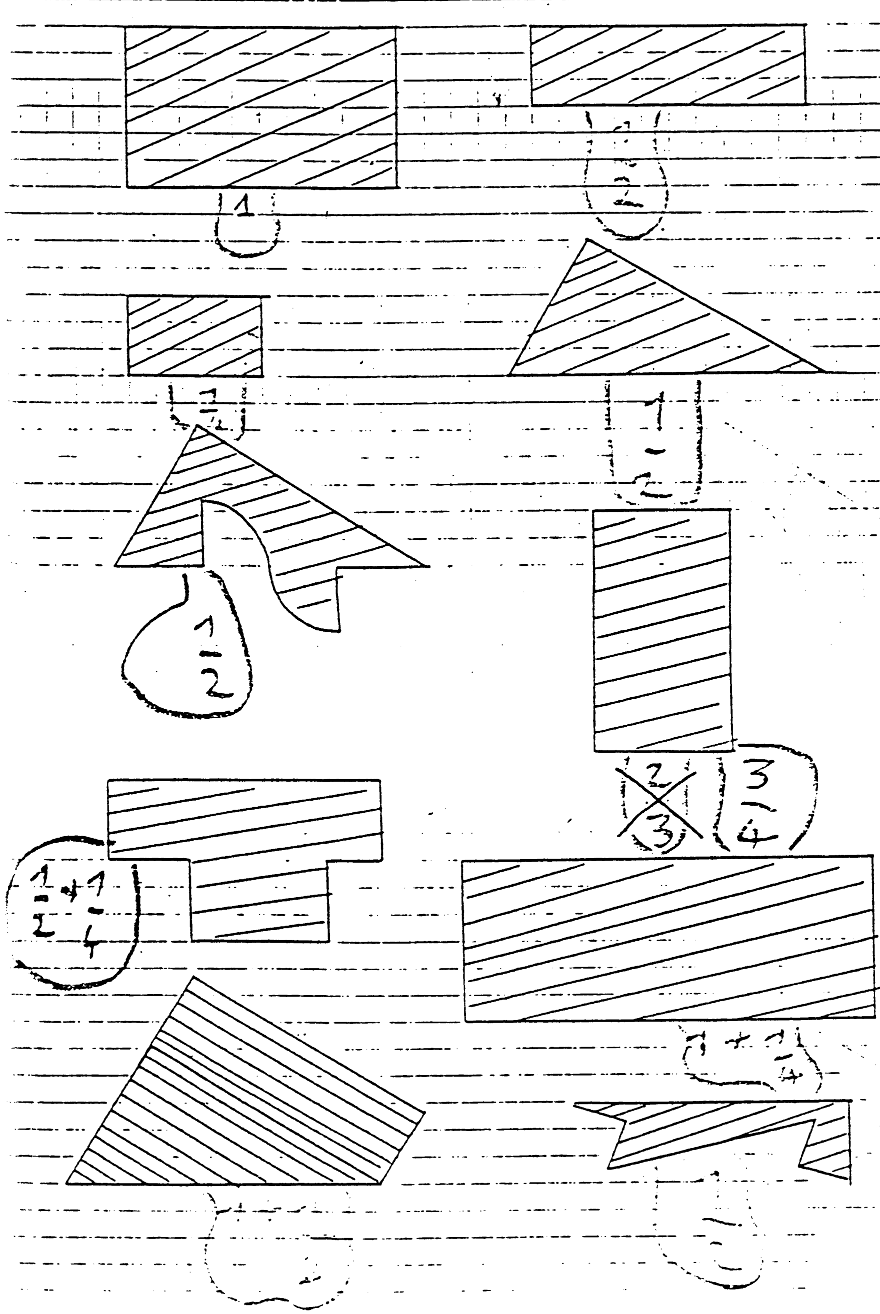
photo des affiches de la classe.

Annexe 4a (séance 10)



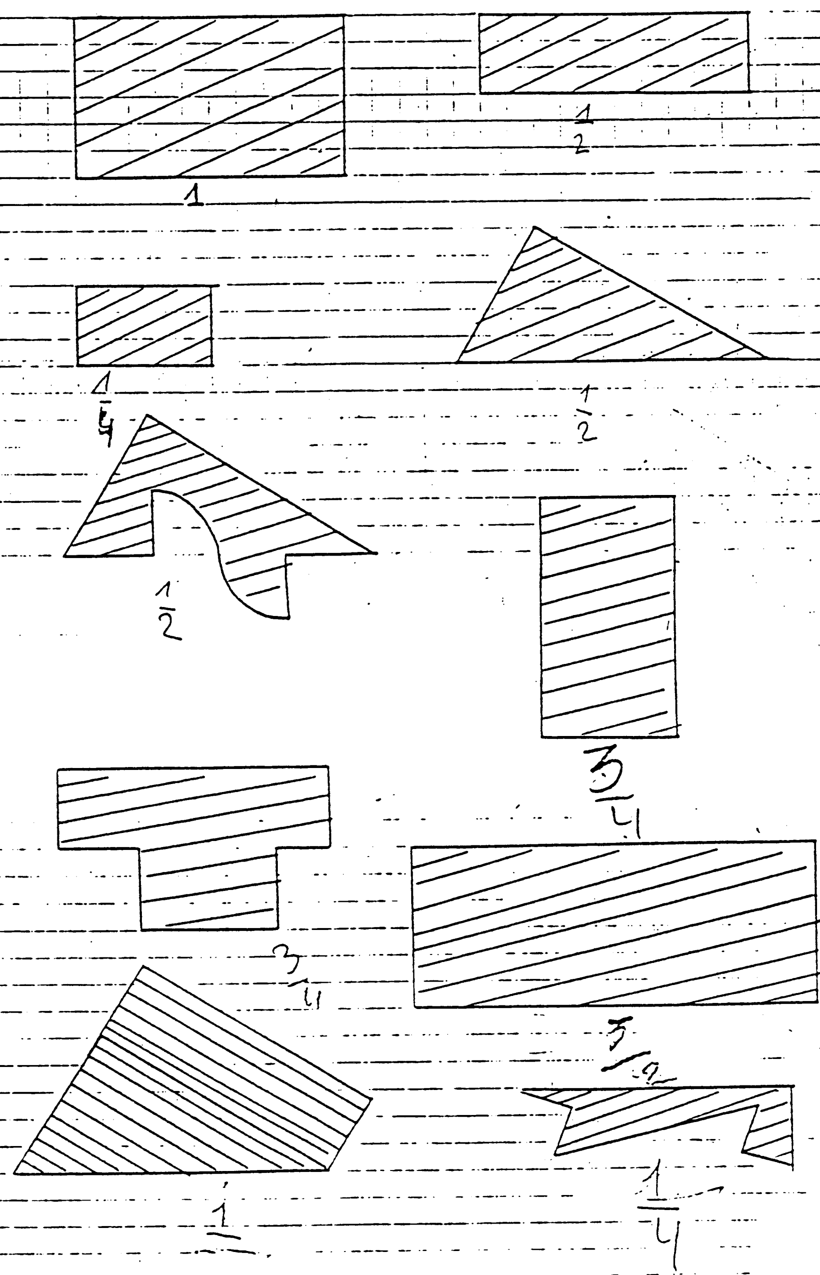
Annexe 4 b (séance 10)

Benoît
Virginie

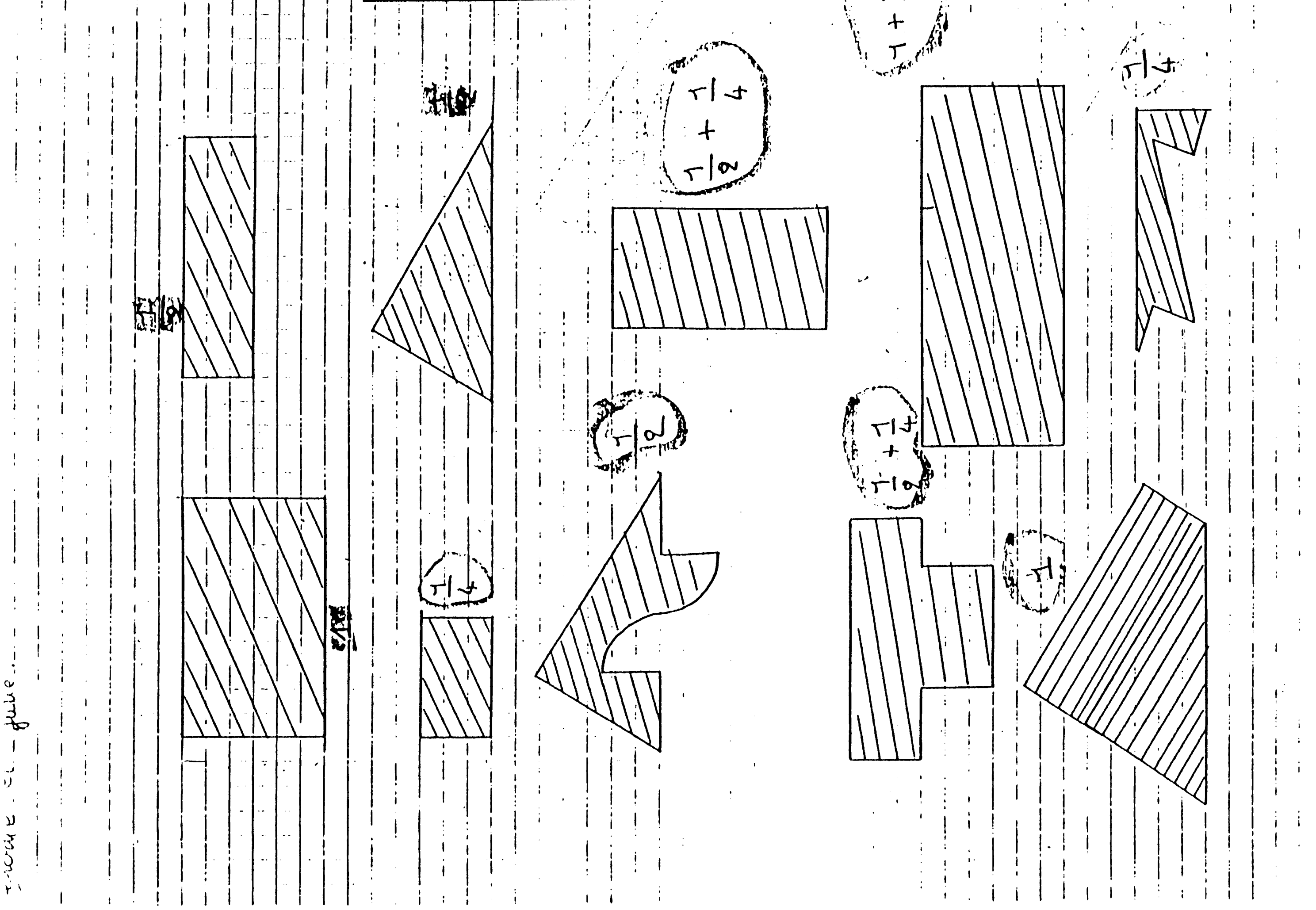


Nicolas (François)

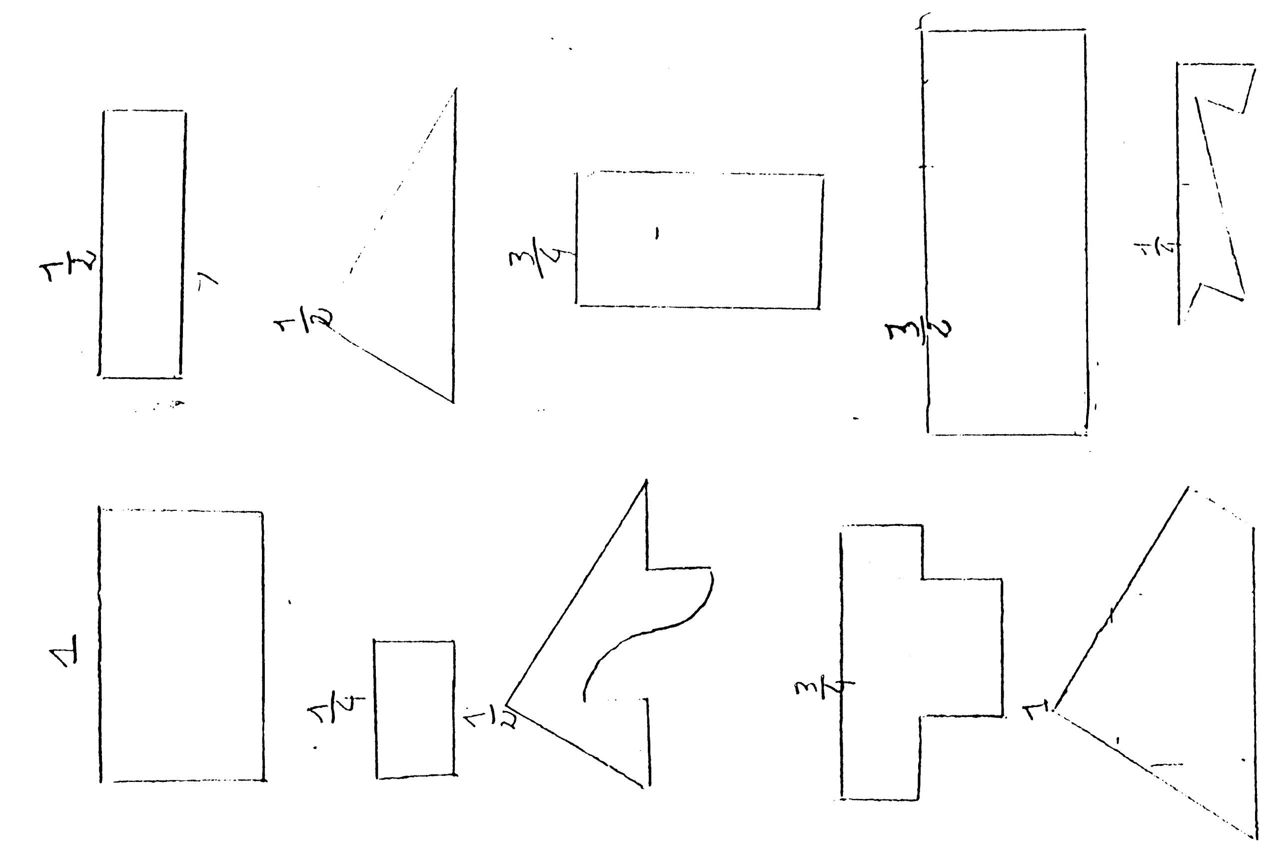
Annexe 4b (séance 10)



Annexe 4c (séance 10)



Annexe 4 c (séance 10



Fabriquer et coller sur l'autre feuille les surfaces suivantes : a - surface d'aire $\frac{3}{2}$

b - " " $\frac{5}{4}$

c - " " $2 + \frac{1}{4}$

d - " " $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

e $\frac{9}{4}$

f - " " $\frac{6}{8}$

(HÉLÈNE + MÉLANIE)

A : $\frac{3}{2}$ ou $1 + \frac{1}{2}$

B : $\frac{5}{4}$ $1 + \frac{1}{4}$

C : $2 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{9}{4}$

D : $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$ ou $1 + \frac{3}{4}$

E : $\frac{9}{4}$ ou $2 + \frac{1}{4}$

F : $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$

Fabriquer et coller sur l'autre feuille les surfaces suivantes :

Johanny et Sylvie

a : surface d'aire $\frac{3}{2}$

b : " " $\frac{5}{4}$

c - " " $2 + \frac{1}{4}$

d - " "

$\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

e " " $\frac{9}{4}$

F " " $\frac{6}{8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

a 1 $\frac{3}{2}$

c 1 $\frac{1}{4}$ 1 $\frac{1}{4}$

$1 + 1 + \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{4}$

d $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

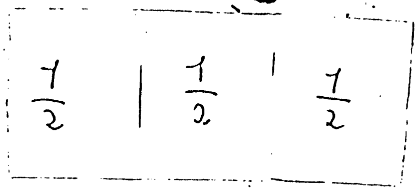
b $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

Annexe 5a (séance 11)

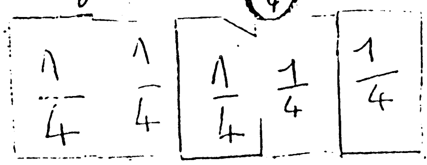
Annexe 5b (séance 11)

Elodie + Julie.

a: surface d'aire $\frac{3}{2}$ $= 1 + \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{4}$

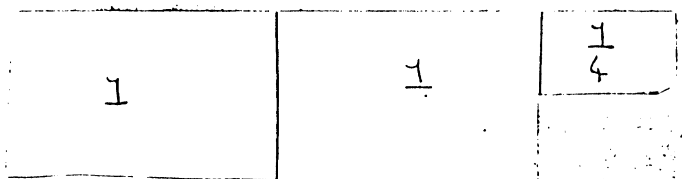


b: surface d'aire $\frac{5}{4}$



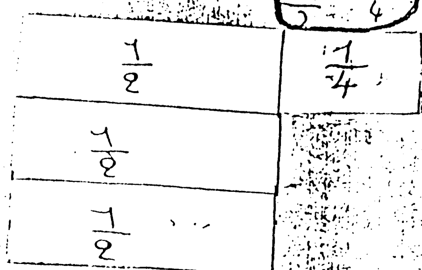
$= \cancel{2}\, 1 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{\cancel{2}\,4} + \frac{1}{\cancel{2}\,4} + \frac{1}{\cancel{2}\,4} + \frac{1}{\cancel{2}\,4} + \frac{1}{\cancel{2}\,4}$

c: surface d'aire $2 + \frac{1}{4}$



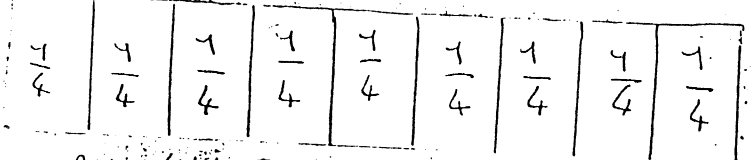
$= 1 + 1 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{9}{4}$

d: surface d'aire $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

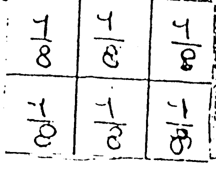


$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{7}{4}$

e: surface d'aire $\frac{9}{4}$ $= \cancel{2}\; 2 + \frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{2} + \frac{1}{4}$



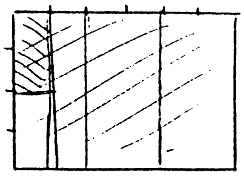
f: surface d'aire $\frac{6}{8}$



$= \frac{3}{3}$

Annexe 6a (séance 12)

NOM : Cédric



$1 : \frac{5}{5}$

Dessine des surfaces

a - aire 2
b - aire $\frac{5}{5}$
c - aire $\frac{6}{4}$
D - aire $\frac{2}{3}$
E - aire $\frac{1}{6}$
F - aire $\frac{5}{6}$
g - aire $\frac{1}{12}$
H - aire $\frac{13}{12}$
i - aire $\frac{17}{12}$

a aire 2

$2 = 1 + 1$

b aire $\frac{6}{4}$

$\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$

C aire

$\frac{2}{3} =$ ~~[illegible]~~ $\frac{?}{4}$

b

D E

$\frac{1}{6}$

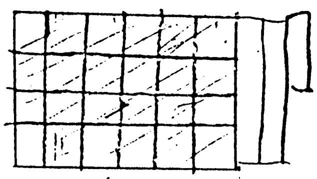
$\frac{1}{12}$

F

$\frac{5}{6}$

G

$\frac{2}{12}$



1

a - aire 2

1 a 1

b : $\frac{5}{5} = 1$

c : $\frac{6}{4} = (1$ NON

d

d : aire $\frac{2}{3}$

e : aire $\frac{1}{6}$

e

f - aire $\frac{5}{6}$

NOM : Julie

f.

g - aire $\frac{1}{12}$

g

h - aire $\frac{13}{12}$

$\frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12}$

h

i - aire $\frac{17}{12}$

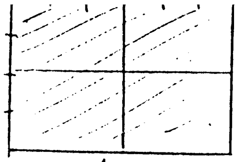
$17 = 1 + 5$

i

b

NOM : . Sébastien

Annexe 6 b (séance 12)



1

a : 2

e : $\frac{1}{6}$

f : $\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

g : $\frac{1}{12}$

: $\frac{5}{5} = 1$

: $\frac{6}{4}$

h : $\frac{13}{12}$ $= \frac{12}{12} + \frac{1}{12}$

$1 + \frac{1}{12}$

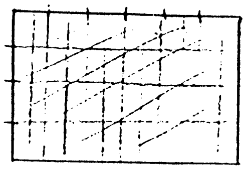
: $\frac{2}{3}$

i : $\frac{17}{12}$ $\frac{16}{12} + \frac{1}{12}$

$\frac{8}{6} + \frac{1}{12}$

$\frac{4}{3} + \frac{1}{12}$

TB



1

a aire 2
b aire $\frac{5}{5}$
c aire $\frac{6}{4}$
D aire $\frac{2}{3}$
e aire $\frac{1}{6}$
f aire $\frac{5}{6}$
g aire $\frac{1}{12}$
h aire $\frac{13}{12}$
i aire $\frac{17}{12}$

2

a

B $\frac{5}{5}$

f = $\frac{5}{6}$

C $\frac{6}{4}$

g $\frac{1}{12}$

b

D $\frac{2}{3}$

E $\frac{1}{6}$

H $\frac{13}{12}$

i $\frac{17}{12}$ $= 1 + \frac{1}{12}$

Élève 1

$\frac{7}{7} = 1$

$\frac{3}{6} = \cancel{1}$

$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{10}{5} = 2$

$\frac{4}{5} = \cancel{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}\ 4 \times \frac{1}{5}$

$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

$\frac{17}{10} = \cancel{2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}}\ 1 + \frac{1}{10}$

$\frac{25}{10} = \cancel{10 + \frac{15}{10}}\ 2 + \frac{5}{10}$

$\frac{18}{10} = 1 + \frac{8}{10}$

$\frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10}$

$\frac{45}{10} = 4 \times \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = 4 + \frac{5}{10}$

$\frac{27}{10} = 2 + \frac{7}{10}$

$\frac{60}{10} = 6$

b

Annexe 7a (séance 12)

Élève 2

$\frac{7}{7} = 1$

$\frac{3}{6} = 1/2$

$4/3 = 1 + 1/3$

$4/8 = 1/2$

$\frac{10}{5} = 2$

$4/5 =$ [illegible] $4 \times 1/5$

$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

$\frac{17}{10} = 1 + 7/10$

$\frac{25}{10} = 2 + 5/10$

$\frac{18}{10} = 1 + 8/10$

$35 = 3 + 5/10$

$\frac{45}{10} = \frac{40}{10} + \frac{5}{10} = 4 + \frac{5}{10}$

$\frac{27}{10} = 2 + 7/10$

$60 = 6$

Elève 3

$\frac{7}{7} = 1$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{10}{5} = 2$

$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \; 4 \times \frac{1}{5}$

$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}$

b

$\cancel{\frac{25}{10}} = \cancel{\frac{10}{10}} + \cancel{\frac{10}{10}} + \cancel{\frac{5}{10}}$ $\qquad \cancel{\frac{35}{10}} = \frac{10}{10}$

$\cancel{\frac{18}{10}} = \cancel{\frac{10}{10}} + \frac{5}{10}$

Elève 4

$= 1$

$= \frac{1}{2}$

$= 1 + \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{10}{5} = 2$

$\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$

$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}$

b

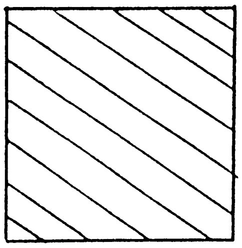
$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{5}{10}$

$\frac{25}{10} = \cancel{10 + 10 + \frac{1}{5}}$

$\frac{18}{10} \; \frac{10}{10} + \frac{10}{8}$

$\frac{35}{10} = \frac{10}{10}$

Annexe 8 (séance 13)



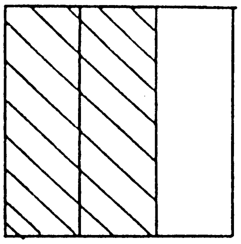
Voici la surface étalon.

L'aire hachurée est 1

A toi d'entourer les "bonnes fractions" qui indiquent l'aire hachurée.

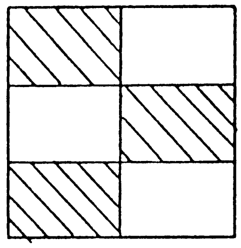
Attention aux pièges !

a



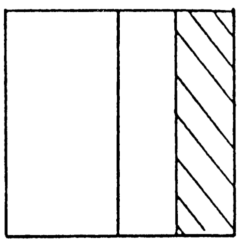
$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$

b



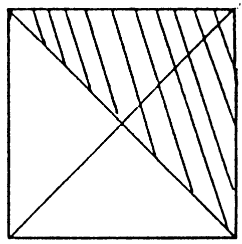
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{4}$

c



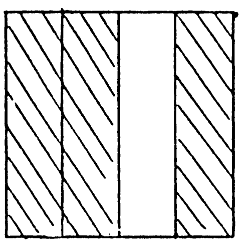
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

d



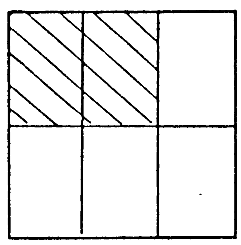
$\frac{2}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

e



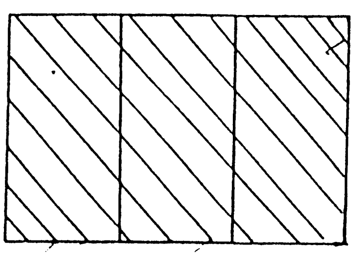
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

f



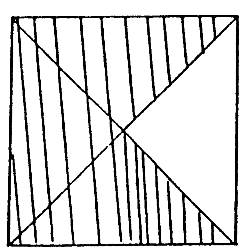
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$

g



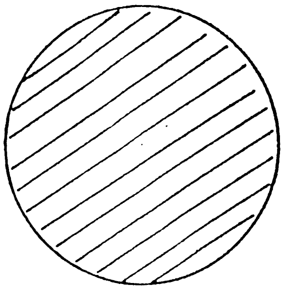
$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$

h



$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

Annexe 9 (séance 15) nom :

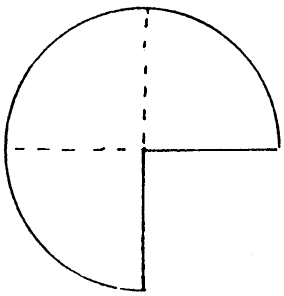


Voici la surface étalon

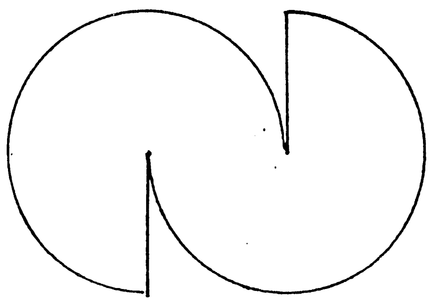
L'aire hachurée est 1

Donne des écritures mathématiques (fractions, écritures additives ....) qui mesurent l'aire de chaque surface.

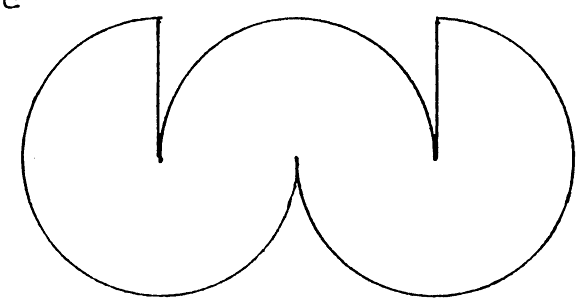
a



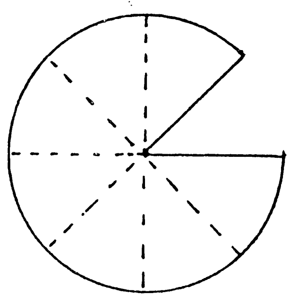
b



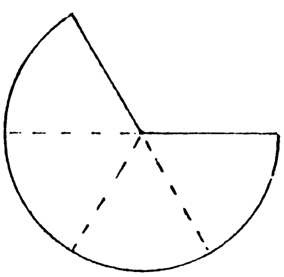
c



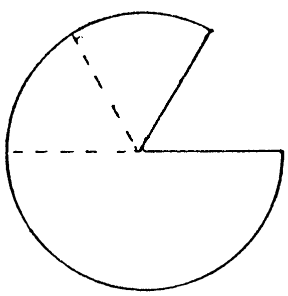
d



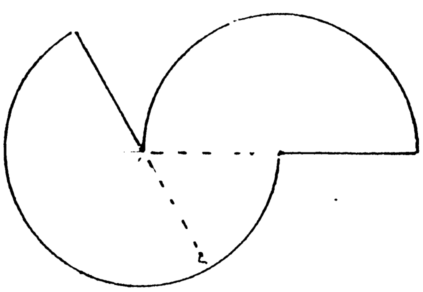
e



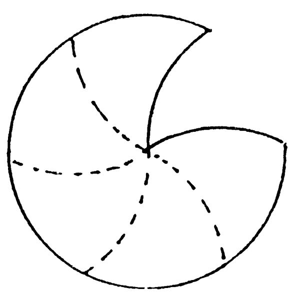
f



g



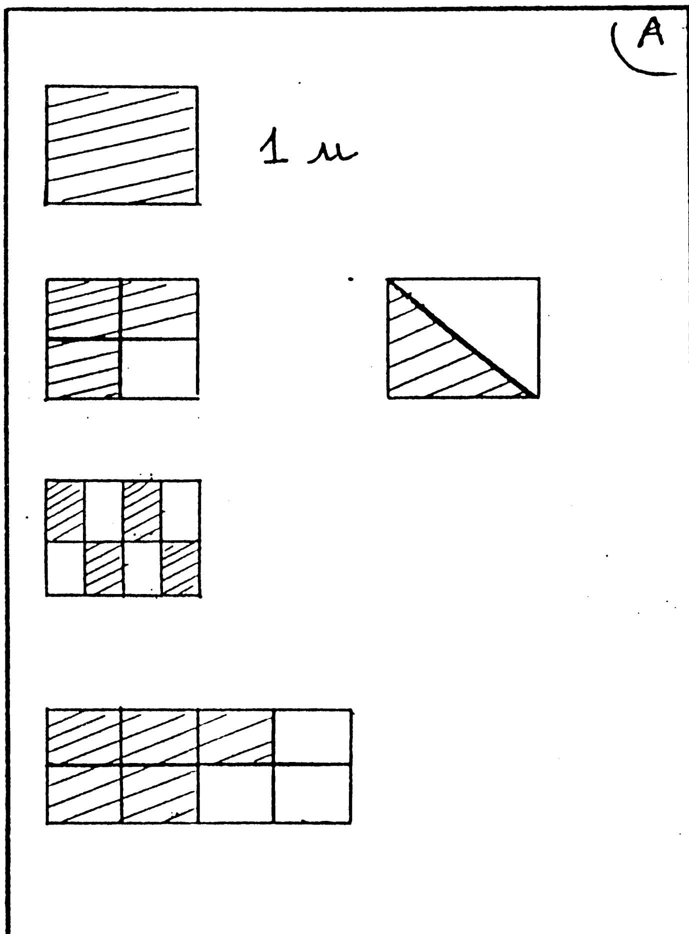
h

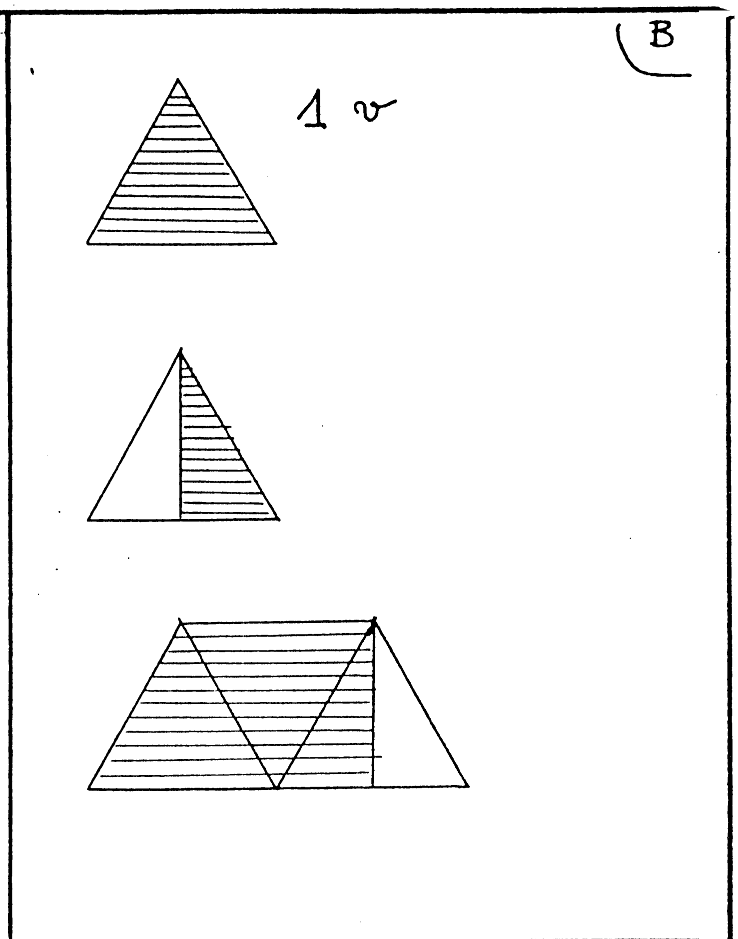


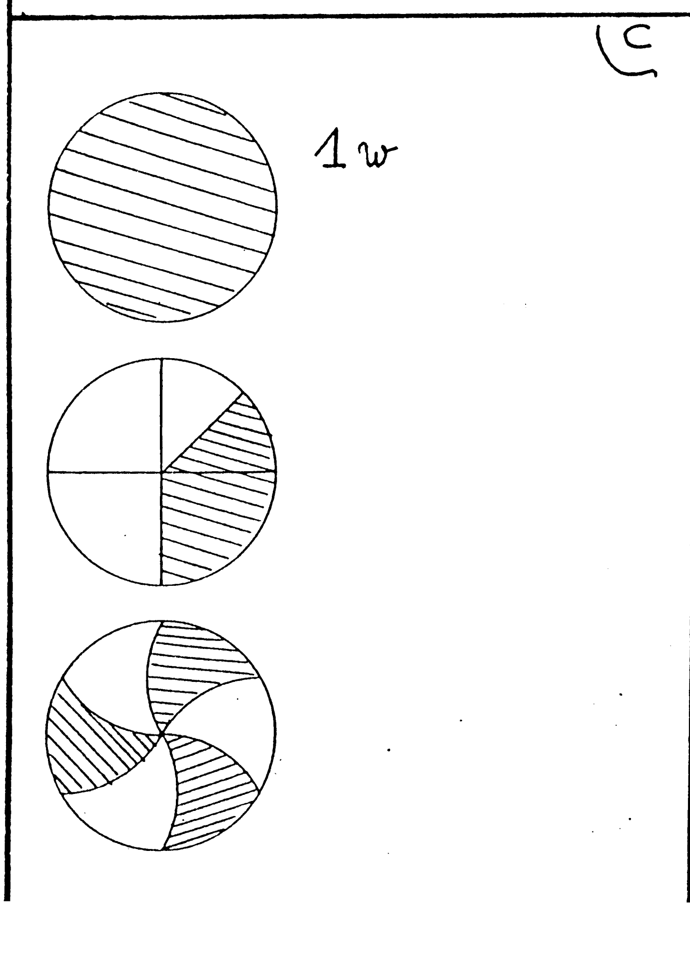
Annexe 10 (séance 16)

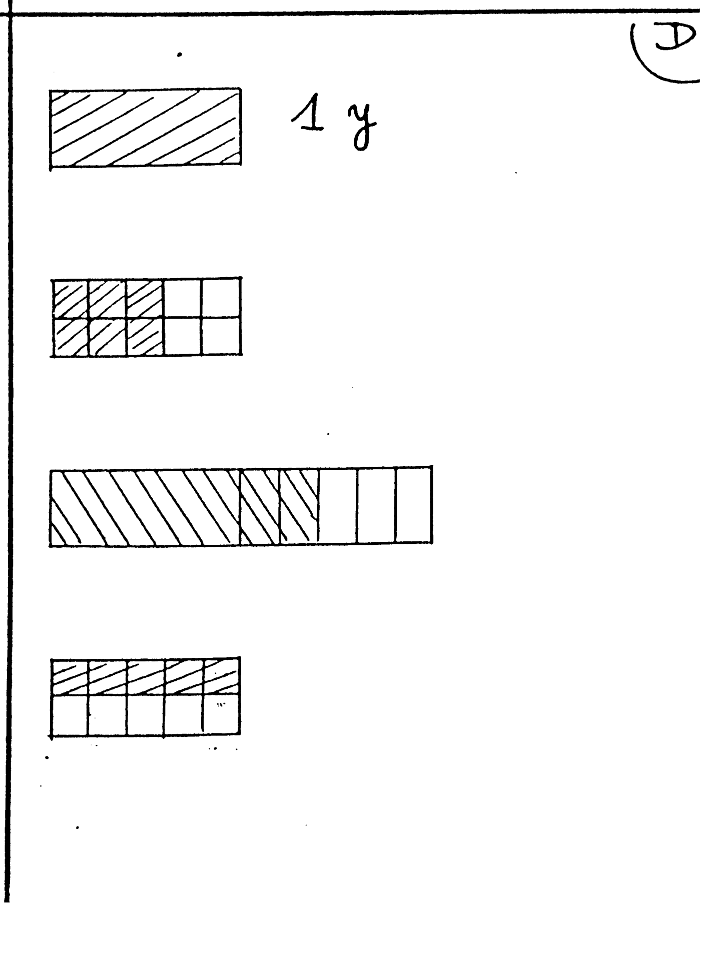
Donne des écritures mathématiques (fractions, écritures additives, ...) qui mesurent l'aire hachurée.

Attention ! Dans chaque cadre, l'unité est différente.

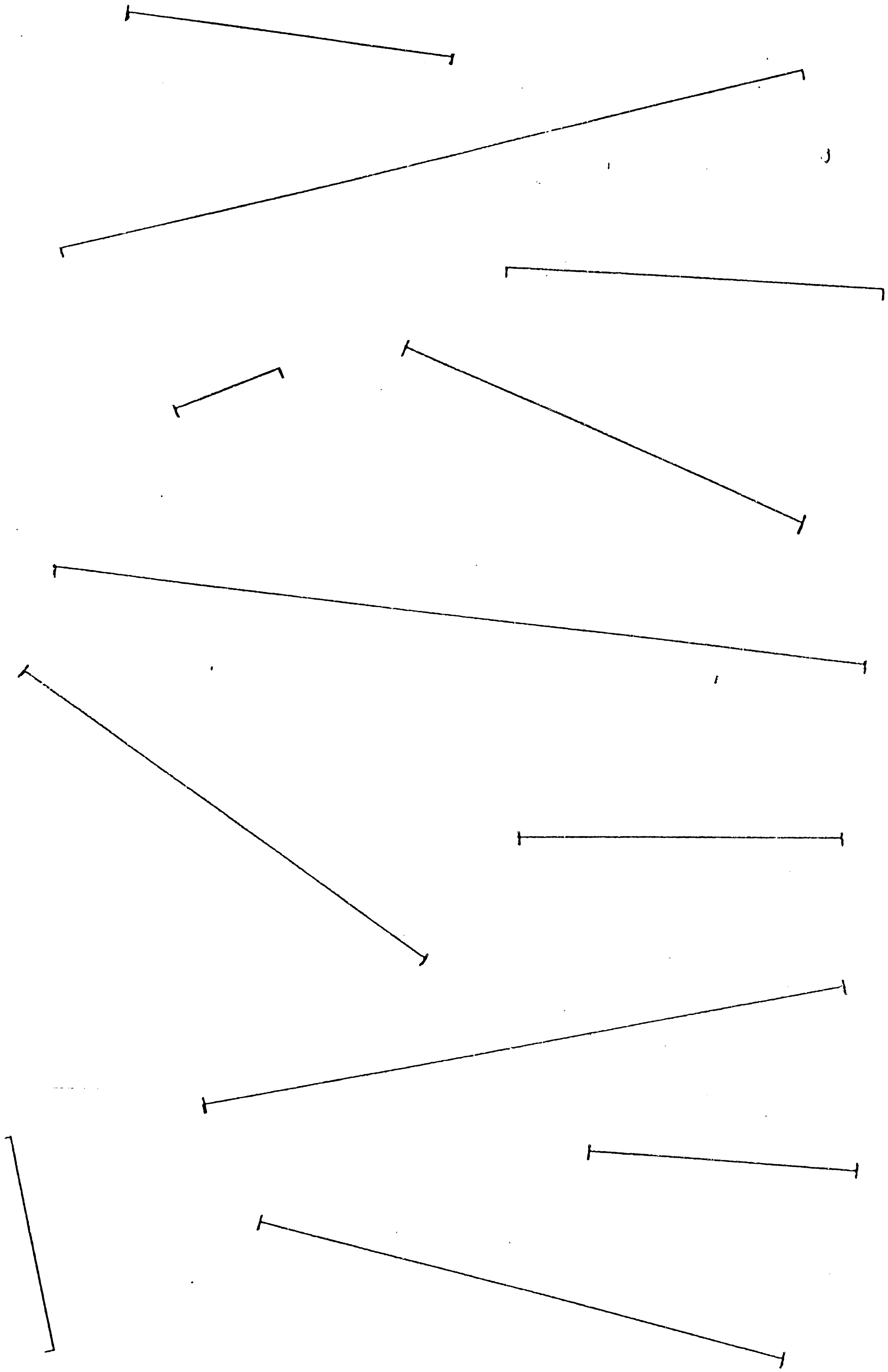








Annexe 11 (séance 19)



Annexe 12 (séance 19)

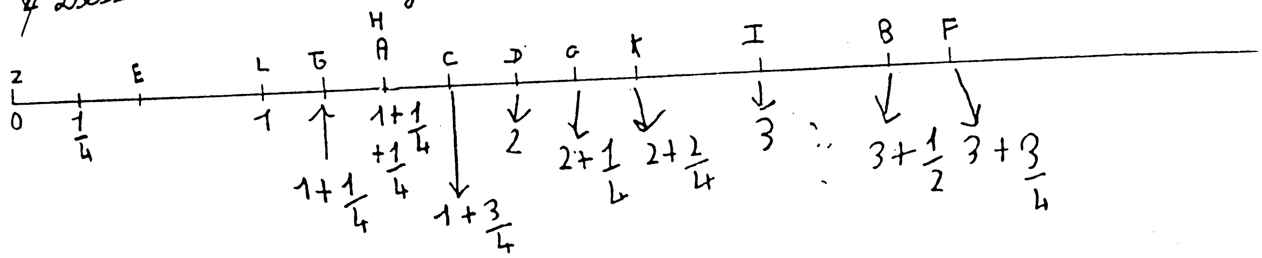
Mélanie

Samedi 14 mars

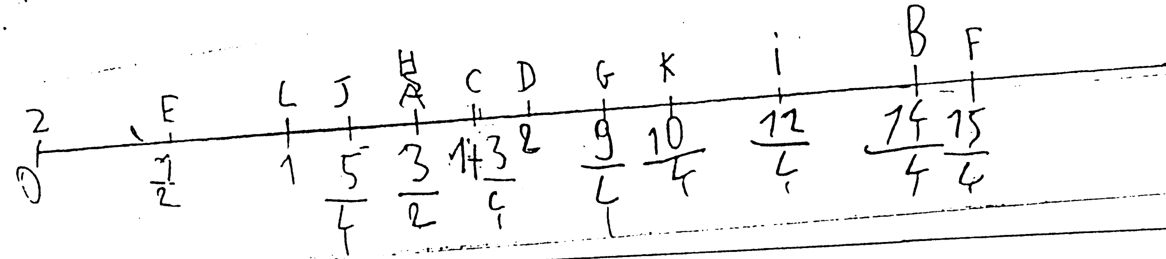
1/ range les segments du plus petit au plus grand.

2/ E. L. J. A = H. C. D. G. K. I. B. F.

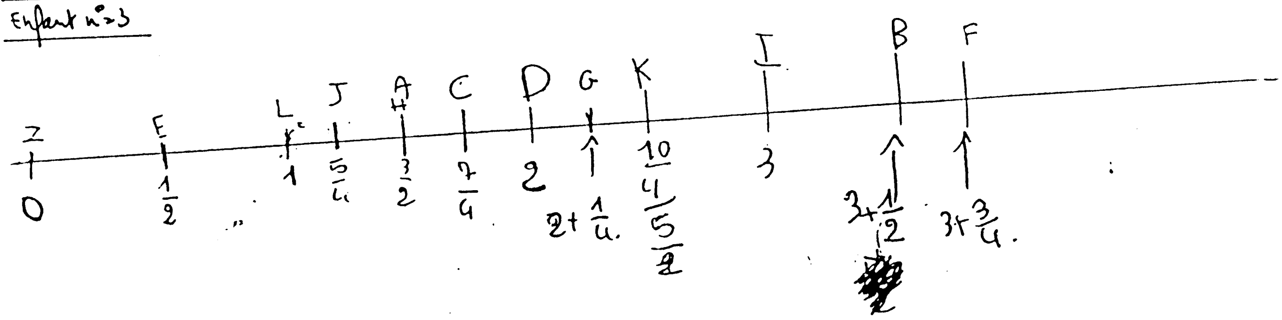
3/ Dessine tous les segment sur la même droite, à partir du poin



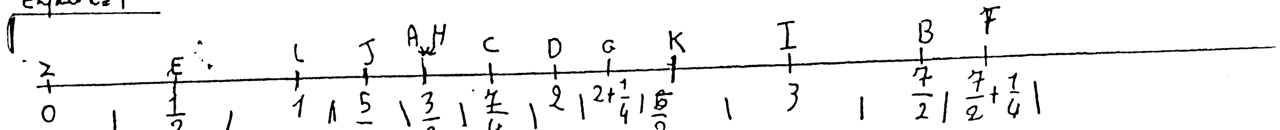
Enfant n°2



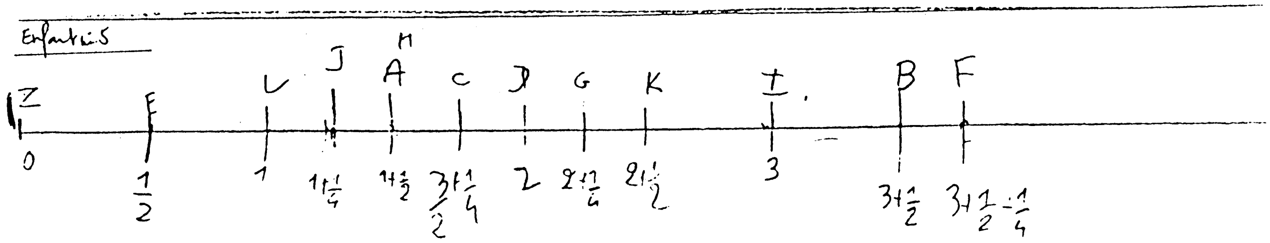
Enfant n°3



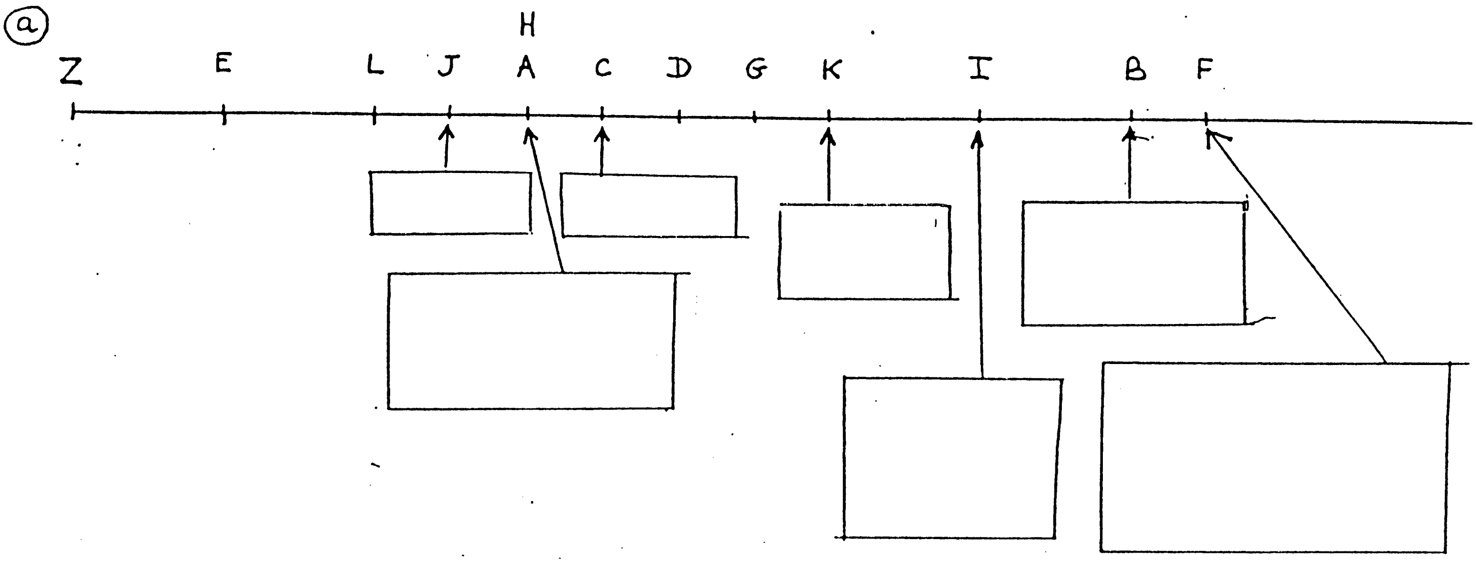
Enfant n°4

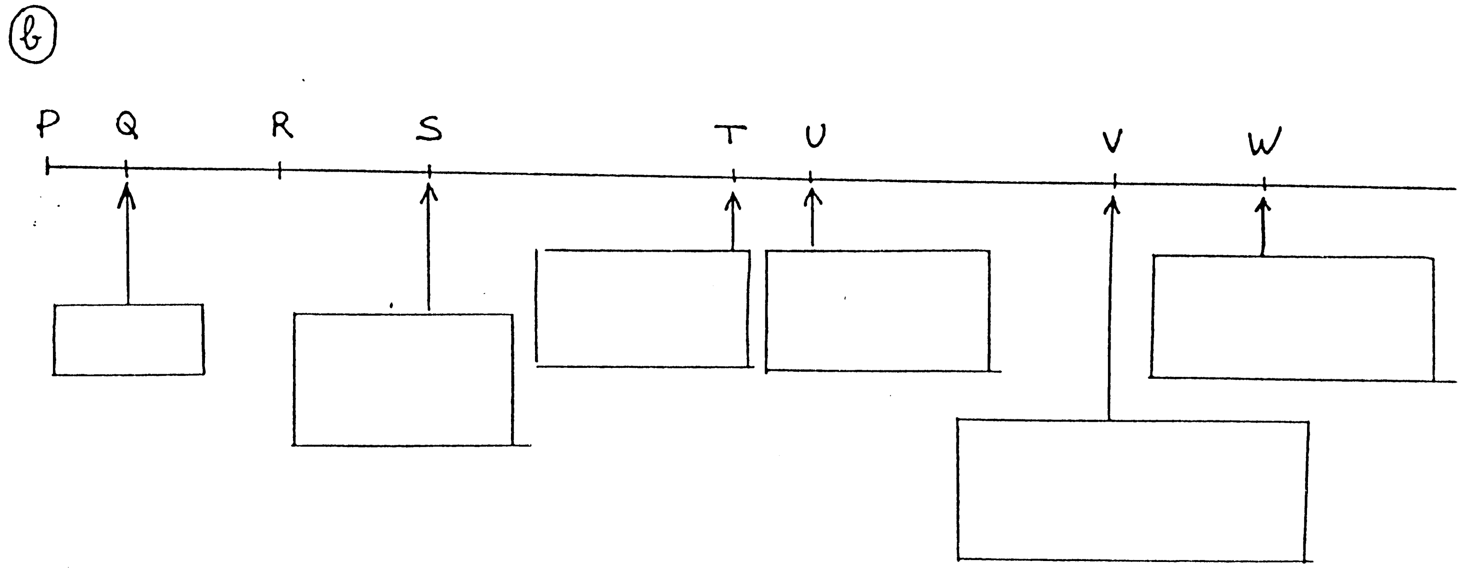


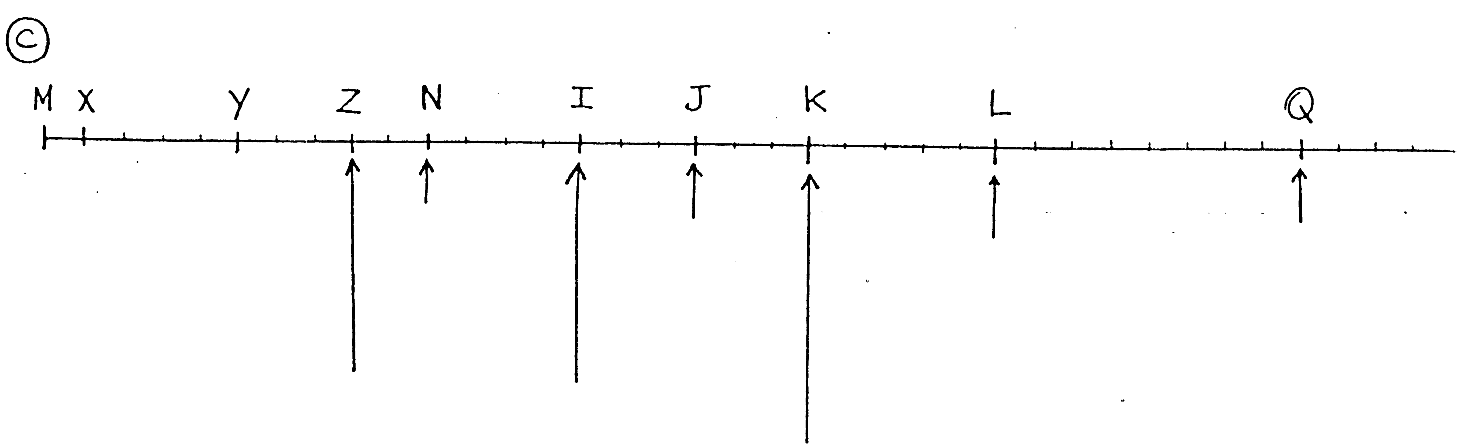
Enfant n°5



Annexe 13 (séance 20)







Consignes orales données :

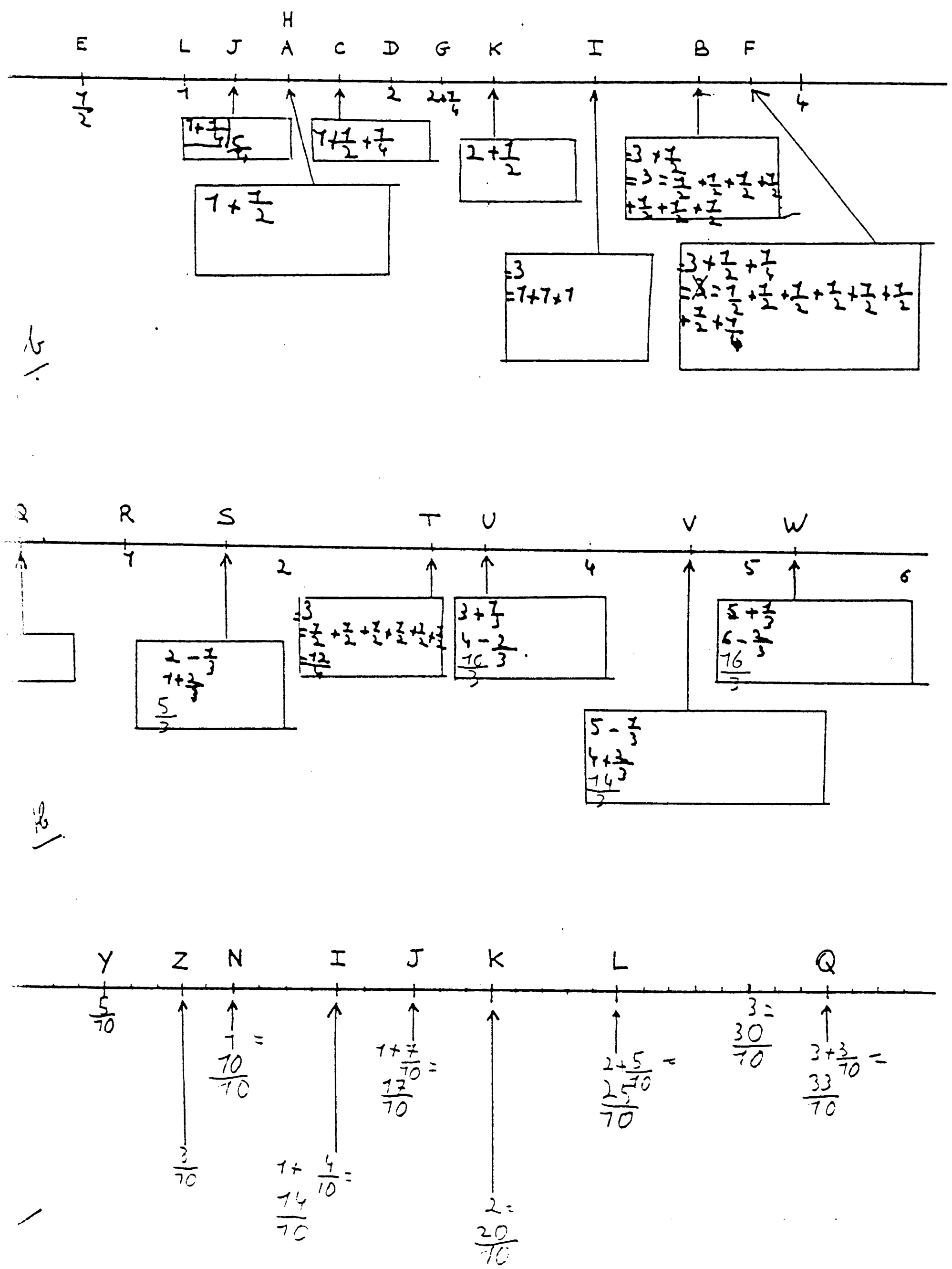
a $Z \mapsto 0$ $L \mapsto 1$

b $P \mapsto 0$ $R \mapsto 1$

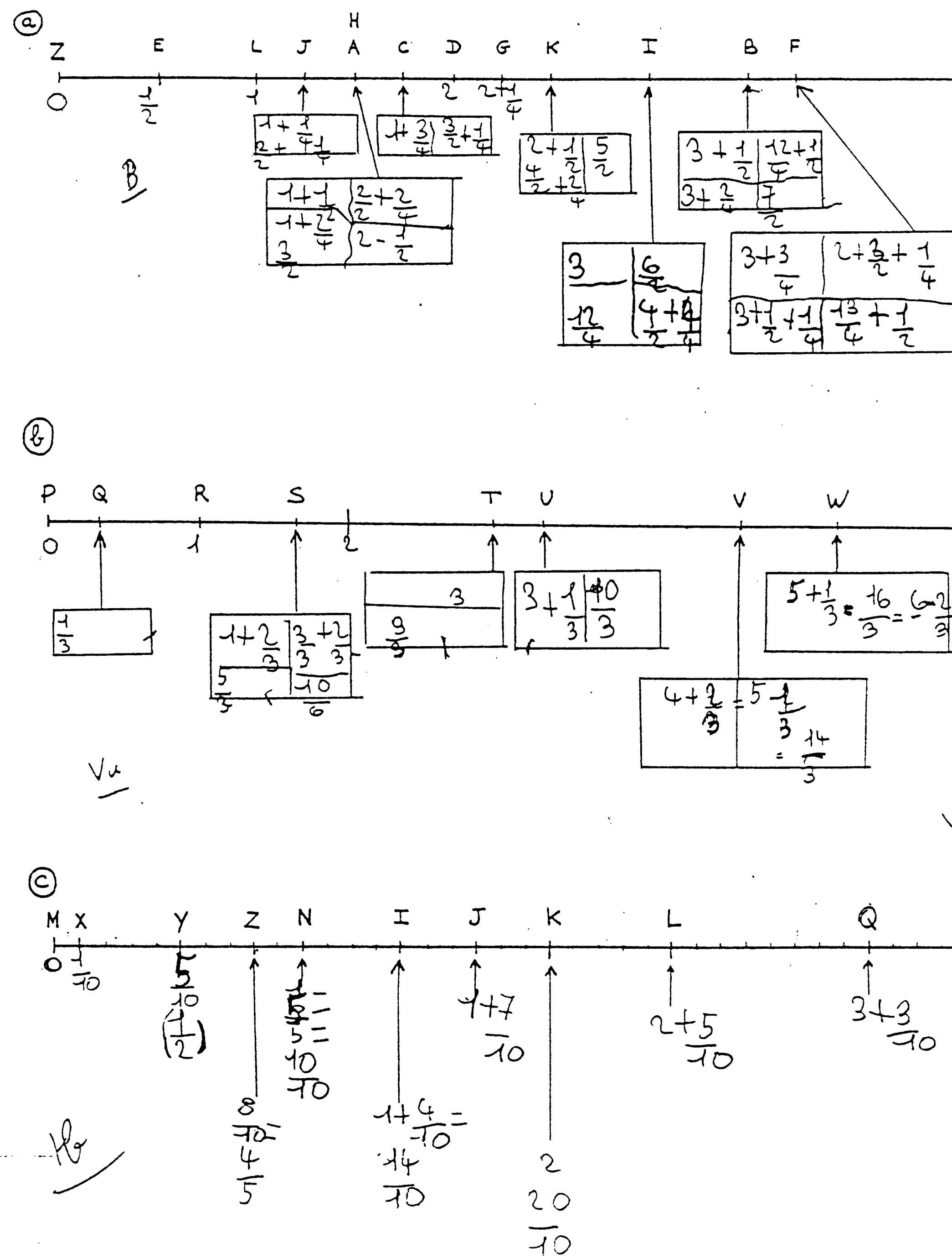
c $M \mapsto 0$ $N \mapsto 1$

Annexe 14a (séance 20)

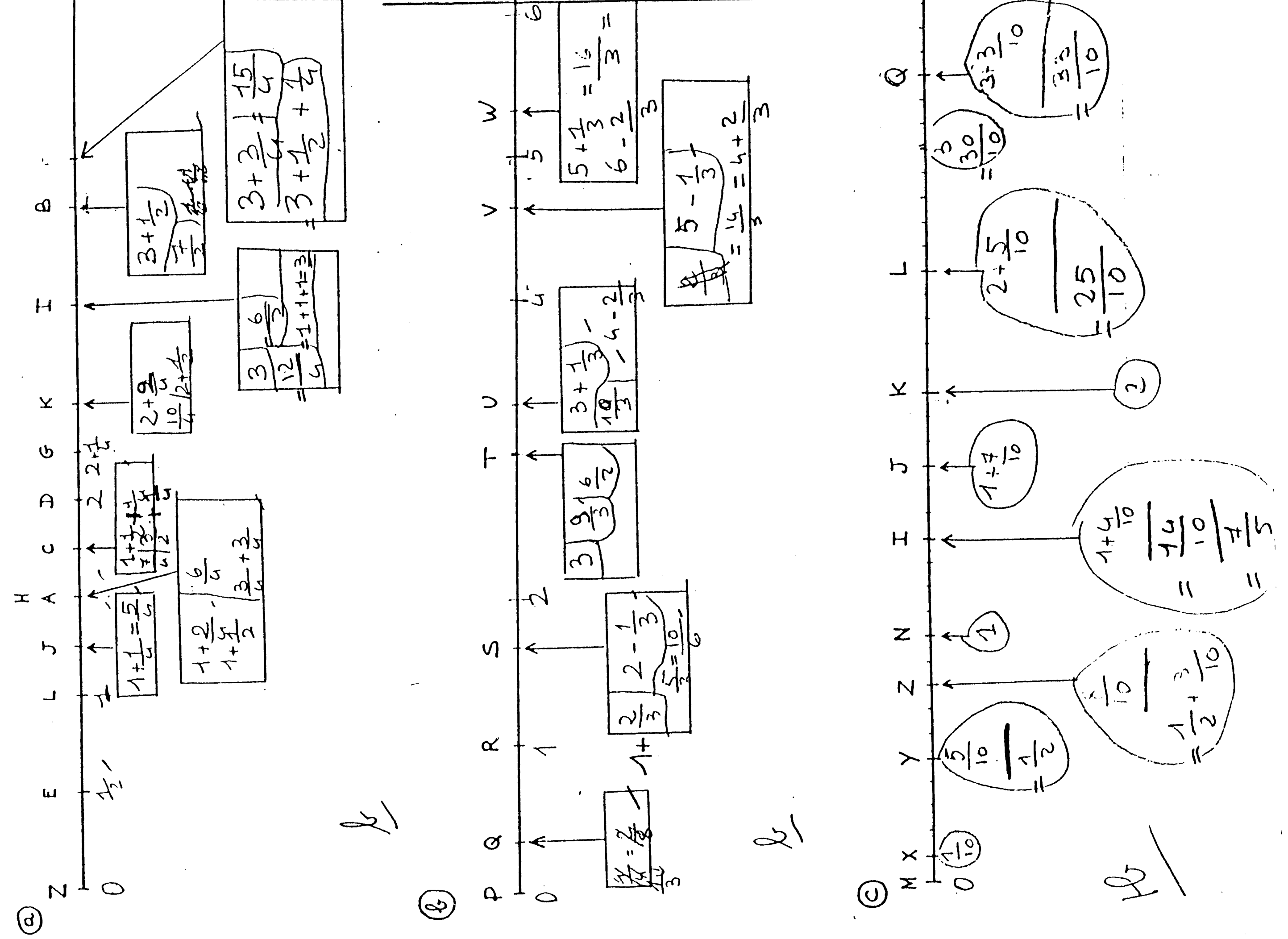
DATE . 28/3/87 NOM : Elodie

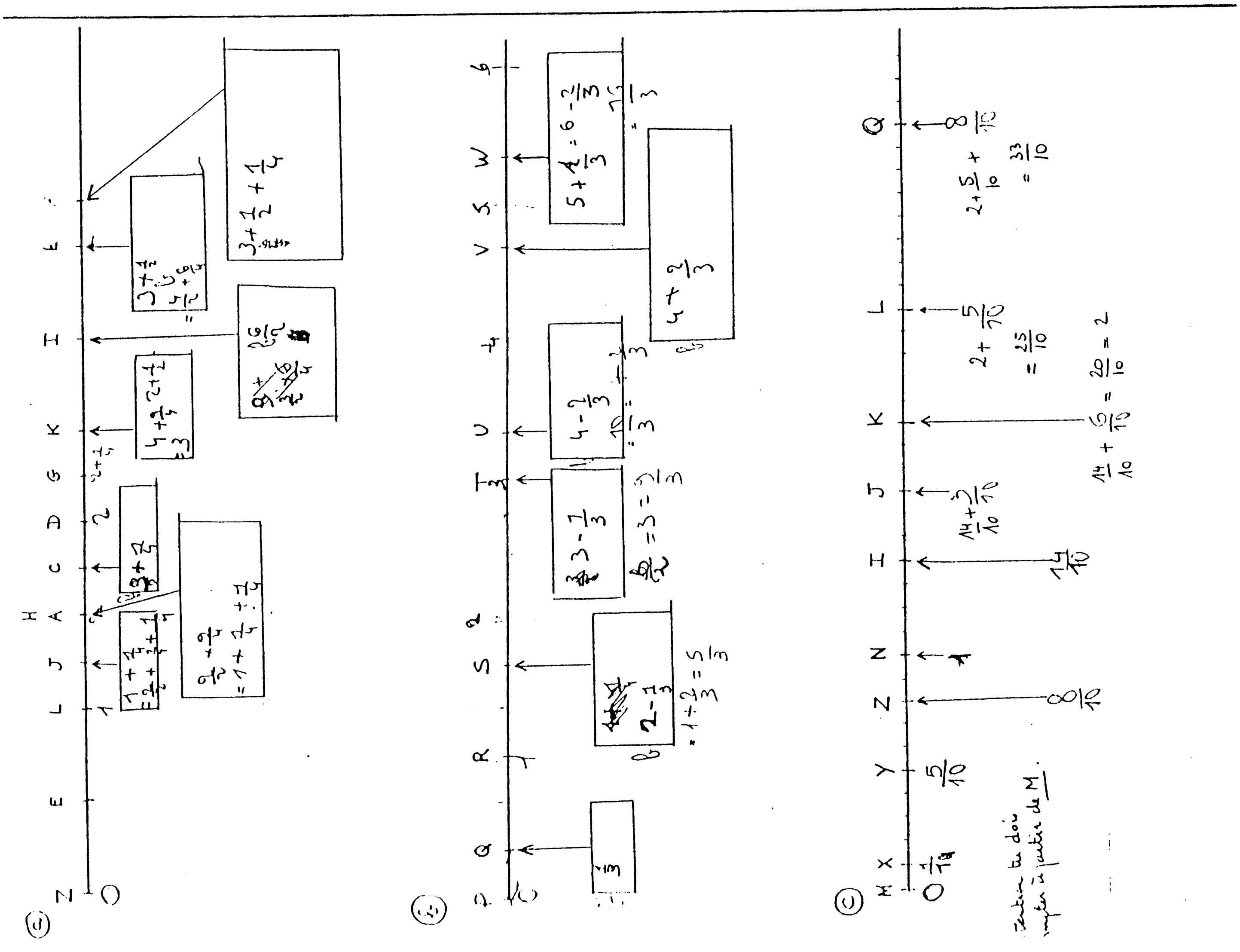


DATE Samedi 28 Mars (87) NOM :



Annexe 14 D (séance 20)





Annexe 15 (séance 21)

1. Complète les égalités :

$\frac{3}{10} = \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{1000}$

$\frac{13}{100} = \frac{\dots}{1000}$

$2 = \frac{\dots}{10} = \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{1000}$

$31 = \frac{\dots}{10} = \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{1000}$

$\frac{1}{2} = \frac{\dots}{10} = \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{1000}$

$\frac{3}{2} = \frac{\dots}{10} = \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{1000}$

2. Complète :

$\frac{40}{100} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{3400}{10} = \dots$

$21 = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1300}{100} = \dots$

$\frac{150}{10} = \dots$

$177 = \frac{\dots}{\dots}$

3. Trouve la partie entière et le rompu.

$\frac{754}{10} = \dots + \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1234}{10} =$

$\frac{754}{100} =$

$\frac{1234}{100} =$

$\frac{754}{1000} =$

$\frac{1234}{1000} =$

4. Écris une fraction décimale égale

$4 + \frac{3}{10} = \frac{\dots}{\dots}$

$15 + \frac{9}{10} = \frac{\dots}{\dots}$

$3 + \frac{17}{100} = \frac{\dots}{\dots}$

$9 + \frac{7}{10} = \frac{\dots}{\dots}$

$72 + \frac{5}{10} = \frac{\dots}{\dots}$

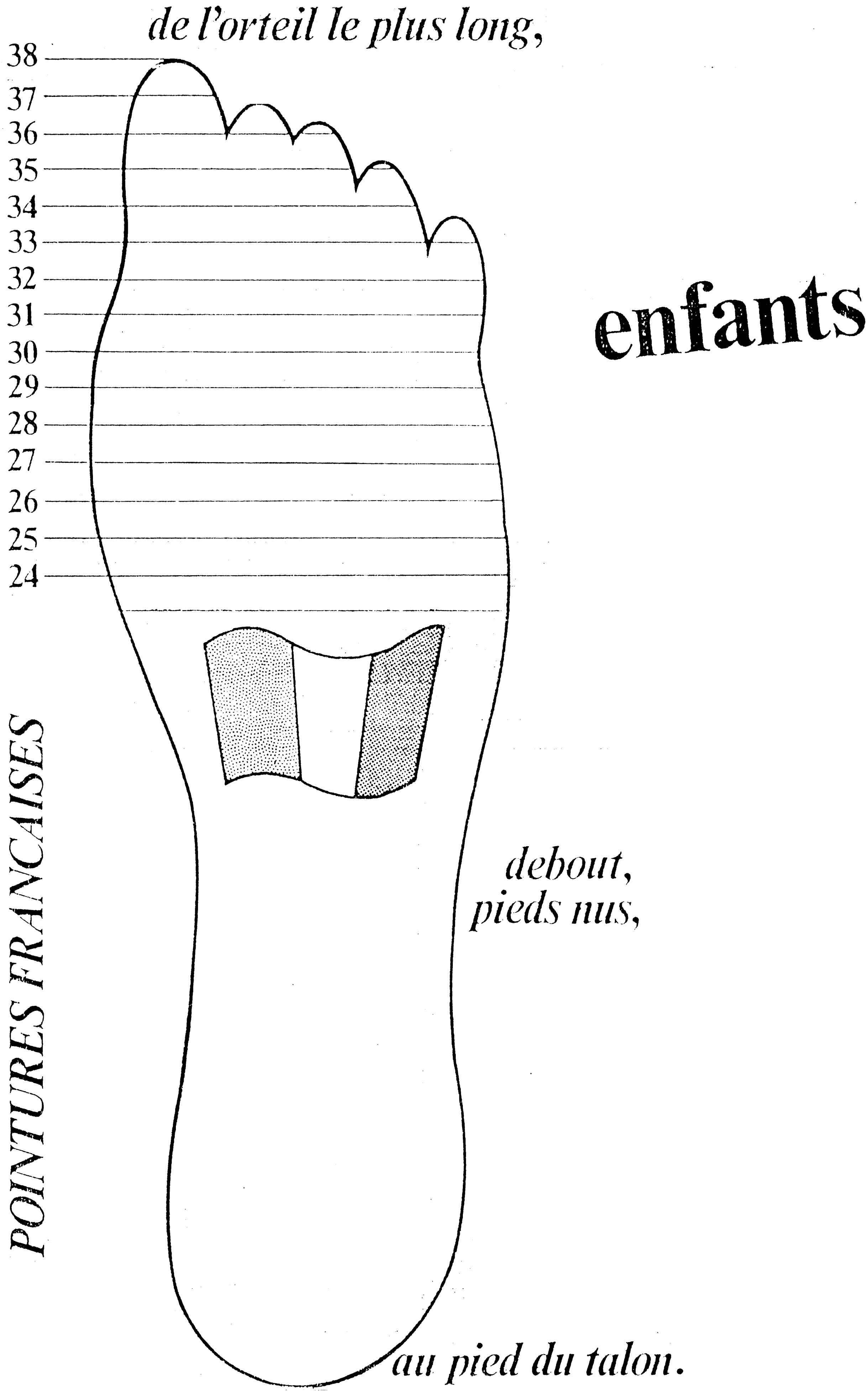
$6 + \frac{7}{100} = \frac{\dots}{\dots}$

Annexe 16 (Séance 25)

Voici comment les mathématiciens ont décidé d'écrire les fractions décimales

	fraction décimale	écriture à virgule	partie entière + "rompu"	lecture
a	$\frac{257}{10}$	25,7	$25 + \frac{7}{10}$	25 et 7 dixièmes
b	$\frac{2365}{1000}$	2,365	$2 + \frac{365}{1000}$	2 et 365 millièmes
c	$\frac{46}{100}$	0,46		
d	$\frac{7}{10}$	0,7		
e	$\frac{405}{100}$	4,05		
f	$\frac{607}{1000}$	0,607		
g	$\frac{34}{10}$			
h	$\frac{9}{100}$			
i	$\frac{703}{10}$			
j		5,23		
k		75,2		
l		0,061		
m			$40 + \frac{8}{10}$	
n			$9 + \frac{2}{100}$	
p				17 et 34 centièmes
q				3 et 27 millièmes

Annexe 17


de l'orteil le plus long,
38
37
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
enfants
POINTURES FRANCAISES
debout,
pieds nus,
au pied du talon.

TITRE **La machine à partager**
Fractions et décimaux au C.M.

Auteurs Catherine Houdement, Marie-Lise Peltier

Public visé Etudiants en I.U.F.M.
Instituteurs et professeurs des écoles du cycle 3.
Professeurs des collèges.

Niveau Cycle 3 des écoles (CM). Sixième des collèges.

Résumé Présentation et compte-rendu d'une progression
sur l'introduction des fractions et des décimaux en C.M.

Mots-clés Fractions. Décimaux.
Aires. Longueurs. Graduation. Mesure.
Formation des maîtres.

Date : Juin 1994
Nombre de pages : 114
Prix : 37 F

Publication : ISBN : 2 - 86239 - 059 - 3

I.R.E.M. Université de Haute-Normandie
BP 153, 1, rue Thomas Becket
76135 Mt St Aignan Cedex

****

Bon de commande

à retourner à I.R.E.M. de Rouen
BP 153,
1, rue Thomas Becket
76135 Mt St Aignan Cedex

M., Mme, Mlle :
Adresse :

Quantité : Prix à payer :
(nbre d'exemplaires x 37 F + frais de port : 15 F pour le premier livre
5 F pour les suivants

Le (date) Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent Comptable de l'Université de Rouen