UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

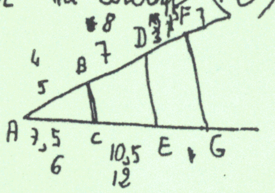
INSTITUT de RECHERCHE
sur
l' ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

I R E M
tél : 35 14 61 41

VERS LA PROPRIETE DE THALES

pour trouver le point G il faut tracer la droite (FG) // (DE) // (BC)

BD = 8



AF - AD = DF
~~AD - AF~~ = DF
15 - 12 = 3

si on divise $\frac{AE}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5$ avec tous les autres ~~calcul~~ mesure on trouve 1,5

" " $\frac{CE}{BD} = \frac{12}{8} = 1,5$ " " " " " " 1,5

DF=3 on fait $\frac{DF}{EG} = 1,5$

on remplace $= \frac{3}{EG} = 1,5$; $3 \times 1,5 = 4,5$ si on fait $\frac{4,5}{3}$ on trouve 1,5 Donc EG = 4,5

AG = 18 + 4,5 = 22,5

A LA DECOUVERTE DE THALES AVEC CABRI GEOMETRE

BERGUE Danielle *BORREANI Jacqueline*
CHEVALLIER Michel *COLONNA Hélène*

IREM de ROUEN

1, rue Thomas Becket - BP 153 , 76135 Mont-Saint-Aignan Cédex

A la découverte de la propriété de Thalès avec Cabri-géomètre

I INTRODUCTION

La propriété de Thalès dans les programmes de premier cycle, qu'est-ce que c'est ? Une spécialité française qu'il est difficile de nous envier étant donné les difficultés de compréhension et d'utilisation de cette propriété par les élèves, quelle que soit la forme que ses mutations lui aient fait prendre au cours des années.

Il est à remarquer que dans de nombreux pays, c'est la propriété : "Le triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle" qui est connue comme théorème de Thalès. La propriété que l'on étudie en France n'est pas envisagée ailleurs en tant que théorème mais elle est vue comme un cas particulier de la similitude.

D'après l'évaluation de l'A.P.M. (Bodin 1990), le taux de réussite de 50% à 70% était nettement supérieur à celui des programmes précédents. Or l'évaluation nationale de septembre 1992 a proposé des exercices (items 6A et 6B) dont le taux d'échec - aussi bien dans l'utilisation des rapports que dans la rédaction de la propriété - montre qu'elle n'est pas vraiment disponible à l'entrée en seconde pour la majorité des élèves.

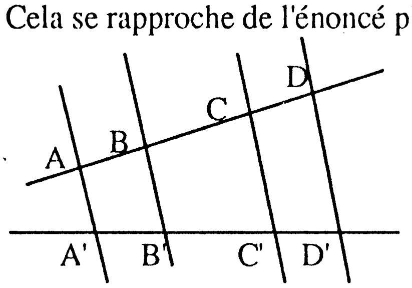
Deux conceptions du théorème de Thalès ont évolué et cohabité au cours des siècles. Elles se rapportent à deux grandes familles :

- conception projection,
- conception similitude - dilatation.

Elles sont reliées à deux théories : celle des figures semblables et celle des bandes parallèles avec étude des lignes proportionnelles et rapports de longueurs. Au cours de l'histoire, proportionnalité et similitude sont étroitement liées mais le flou entre grandeurs et nombres, les difficultés d'irrationalité des mesures ne disparaîtrons qu'avec une construction axiomatisée des nombres réels. Ce flou est au centre des problèmes que pose l'enseignement de la propriété de Thalès.

Une autre difficulté de l'utilisation du théorème de Thalès n'est-elle pas, pour les élèves, la multiplicité des visions des programmes ?

En 4ème, l'étude des projections et de la notion de cosinus semble privilégier la conservation des rapports de projection. Cela se rapproche de l'énoncé plus général :



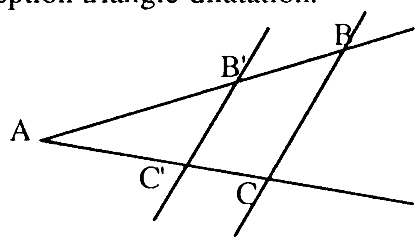
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \cdots$$

En 3ème, le programme actuel demande de mettre en oeuvre des "activités reliées à la pratique de la projection permettant de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle".

En 2nde, il est demandé de consolider les notions abordées au collège, notamment une meilleure maîtrise des situations de proportionnalité. La propriété de Thalès est étudiée sous l'aspect vectoriel en relation avec l'homothétie.

Si AB' = k AB alors AC' = k AC avec (B'C') // (BC).

Cette conception vectorielle semble engendrer des confusions avec celle de troisième, conception triangle-dilatation.



(B'C') // (BC)

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

L'élève, en relation avec le contexte de quatrième, écrit plus facilement : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Que ce soit dans l'histoire ou pour des raisons didactiques, ces diverses conceptions de la propriété de Thalès cohabitent ou entrent en conflit. Elles sont équivalentes mais les images mentales associées ne le sont pas. Il en résulte des procédures élèves différentes suivant leurs perceptions visuelles de la correspondance des segments de la figure (cf Vergnaud 1981).

De plus, avant tout enseignement de la propriété de Thalès, les élèves ont des représentations et des conceptions implicites qui mettent en oeuvre l'une ou l'autre des approches (projection, dilatation). S'ils reconnaissent une configuration, ils n'analysent pas complètement le problème. Il s'agit donc de mettre en place des situations pour avoir accès à leurs représentations. Ces situations doivent permettre également de s'approprier chacune des conceptions de la propriété et de créer des liaisons entre ces diverses conceptions : rapport de projection en 4ème, propriété de Thalès appliquée au triangle en 3ème, homothétie en 2nde. N'est-ce dommageable d'interdire l'écriture de certains quotients, à un niveau donné, dans la résolution de certains problèmes.

Pour la mémoire à long terme de l'élève, ne vaudrait-il pas mieux lui laisser faire le choix conceptuel et lui permettre une meilleure approche de la propriété ?

II UN DETOUR PAR L' HISTOIRE

Plusieurs voies étant possibles pour faire découvrir la propriété de Thalès, peut-être l'histoire en suggère-t-elle une?

Les mathématiques babyloniennes et égyptiennes sont associées à des activités pratiques où la géométrie est calculatoire. Même si les mesures sont liées au terrain et à l'arpentage, le problème des mesures des grandeurs intervient très tôt et repose sur la notion de nombre entier ou le rapport de tels nombres. On trouve dans le papyrus Rhind plusieurs problèmes sur les pyramides où intervient l'inverse de la pente des faces, soit la cotangente de l'angle qu'elles font avec l'horizon. Des questions du même type se retrouvent dans des tablettes babyloniennes: un escalier de hauteur H et de largeur L possède des marches de hauteur h et de largeur l chacune, connaissant trois des dimensions, il est demandé de trouver la quatrième. La solution utilise la proportion H : L = h : l que les Egyptiens et les Babyloniens acceptent comme une évidence.

Légende ou vérité, Thalès (vers 640-546) aurait montré comment trouver la hauteur d'une pyramide, grâce à l'ombre portée de celle-ci et à l'ombre d'un bâton vertical. A l'époque de Thalès, mathématicien, astronome, navigateur, les droites sont des rayons et les angles sont des visées, le sens de la figure est de problématiser une situation. Aucun texte ne nous est parvenu, les témoignages historiques ne gardent pas trace du raisonnement ou d'un début de preuve de la propriété attribuée à Thalès.

Dès le début de la géométrie, il y a référence à la théorie des proportions, travaux à la base du livre V des Eléments d'Euclide. Tant que les mesures restent sur des objets physiques, l'évidence, le modèle intuitif fonctionne. La distinction entre le monde des objets sensibles, imparfaits et le monde des Idées, modèles parfaits, éternels, immuables, impose un raisonnement. La démonstration est un véritable acte social, il faut convaincre l'autre. Objets idéaux et discours argumenté (logos) engendrent réflexions et problématiques sur les notions de mesures et de grandeurs.

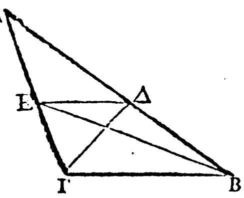
Euclide ne définit pas la notion de grandeur, mais le livre V présente diverses représentations possibles et définit la notion de raison (rapport) entre deux grandeurs homogènes. Le livre VI est une application à la géométrie plane du livre précédent.

La proposition 2 du livre VI est une première approche de la démonstration de la propriété de Thalès dans un triangle et de sa réciproque.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔE parallèle à un des côtés BΓ du triangle ABΓ; je dis que BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA.

Joignons BE, ΓΔ.



Le triangle ΒΔΕ sera égal au triangle ΓΔΕ (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔΕ, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔΕ, ΒΓ. Mais ΑΔΕ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ. Mais le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΒΔ est à ΔΑ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Ε sur la droite ΑΒ, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΓΕ est à ΕΑ; donc ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ (11. 3).

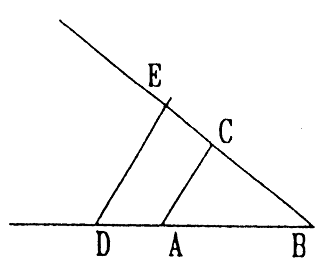
Mais que les côtés ΑΒ, ΑΓ du triangle ΑΒΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, Ε, c'est-à-dire que ΒΔ soit à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, et joignons ΔΕ; je dis que ΔΕ est parallèle à ΒΓ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, que ΒΔ est à ΔΑ comme le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ (1. 6), et que ΓΕ est à ΕΑ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ, le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ (11. 5). Donc chacun des triangles ΒΔΕ, ΓΔΕ a la même raison avec le triangle ΑΔΕ. Donc le triangle..

Le principe de cette démonstration repose sur des comparaisons d'aires, mais dans son déroulement subsiste une confusion entre le nombre et la grandeur, et la difficulté d'irrationalité possible des mesures est gommée. Que veut dire, en effet mesurer? c'est à dire comparer, compter combien de fois on peut reporter l'unité. Et que veut dire une grandeur est un certain nombre de fois une autre? avec toute l'ambiguïté de la notion de nombre, qui dans les Eléments d'Euclide disparaît, il définit alors l'égalité entre deux rapports sans définir l'objet rapport. Comment va-t-on pouvoir comparer, mesurer, c'est à dire chercher une partie commune? C'est la théorie des figures semblables qui va être alors le point central de la géométrie, avec le théorème de Thalès qui est un critère pour dire qu'il ya proportionnalité des grandeurs.

Les figures semblables vont jouer un grand rôle dans des problèmes de construction au cours des siècles suivant. La première page de la "Géométrie" de Descartes indique "comment le calcul arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie".

La Multiplication



Soit par exemple AB l'unité et imaginons qu'il faille multiplier BD par BC. Je n'ai qu'à joindre les points A et C puis tracer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

En nous référant à ce que nous appelons propriété de Thalès (sans démonstration), par une représentation géométrique, Descartes montre que le produit de deux grandeurs est une grandeur du même type.

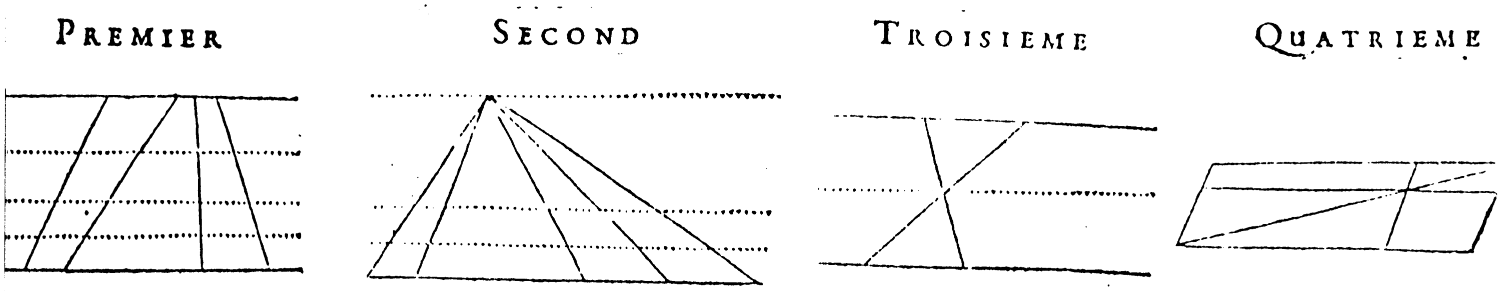
Au 17 ème siècle, l'idée de démonstration change: Elle a pour objet d'éclairer. La géométrie de Descartes fait le lien entre l'ancienne conception et une représentation algébriquedes grandeurs.

La théorie des proportions est englobée dans l'algèbre et l'énoncé des proportions $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se traduit par a d = b c.

C'est à cette époque que, dans les critiques des Eléments d'Euclide, la polémique sur la mesure débute. Mesurer c'est chercher des nombres, qu'il faut définir et avec le problème que pose la prise en compte des irrationnels. Cette discussion autour de "un rapport est-il un nombre" va durer jusqu'à la construction axiomatisée des réels.

En 1667, Arnauld, ami de Pascal, publie de "Nouveaux éléments de géométrie, contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus communes, ..., et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes". Au début du livre X, il aborde la proportion des lignes qui "dépend de deux choses, des parallèles et des angles...". Dix lemmes précisent ce qu'il entend par espace entre deux parallèles et ses propriétés. Une proposition fondamentale étudie les lignes proportionnelles et plusieurs corollaires en découlent. La propriété de référence n'envisage plus uniquement la figure triangle mais est étendue aux bandes parallèles. La démonstration ne se fonde plus sur les comparaisons d'aires mais repose sur les égalités de rapports de longueurs.

COROLLAIRE.



Deux conceptions du théorème de Thalès vont alors évoluer au cours des siècles:

- celle d'Euclide, triangle coupé par une parallèle à l'un des côtés dans le cadre des figures semblables.
- celle d'Arnauld, bandes parallèles coupées par des sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles.

Dans les démonstrations, l'évidence subsiste de façon implicite chez Euclide, de manière explicite chez les mathématiciens du 17ème-18ème.

Au 19 ème, un changement profond s'effectue avec la remise en cause de l'axiome des parallèles. Depuis le programme d'Erlangen en 1872 de Félix Klein, il n'y a plus une mais des géométries. La géométrie euclidienne est celle du groupe des similitudes, le théorème de Thalès joue donc un rôle fondamental dans l'étude de l'homothétie en liaison avec les figures semblables et l'axiome des parallèles.

Axiomatisation et formalisme de la géométrie s'élaborent dans "les fondements de la géométrie" de Hilbert en 1879. Le quatrième groupe d'axiomes concerne le parallélisme et le théorème 30 établit l'équivalence entre l'axiome des parallèles et la congruence d'angles alternes internes (ou la somme des angles d'un triangle est deux droits).

Le traité de Hilbert n'a pas pour but de convaincre, ni d'éclairer, son objectif est de déduire à partir d'axiomes des relations entre les éléments; le théorème de Thalès n'a pas sa place ici. Par contre dans le chapitre III, "le calcul segmentaire permet d'établir rigoureusement la théorie euclidienne des proportions et cela sans le recours à l'axiome d'Archimède". Proportions des côtés homologues, triangles semblables et angles congruents conduisent au théorème fondamental de la similitude:

> **Théorème 42.** Si deux parallèles coupent sur les côtés d'un angle quelconque les segments a, b et a', b', la proportion $a : b = a' : b'$ est satisfaite. Réciproquement, si quatre segments a, b, a', b' satisfont à la proportion ci-dessus et sont reportés sur les côtés d'un angle, les droites qui joignent les extrémités de a et de b à celles de a' et de b' sont parallèles.

Dans l'histoire, proportionnalité et similitude sont étroitement reliées, mais aucun ouvrage n'associe le nom de Thalès à la propriété reconnue et utilisée. Ce n'est que dans les "Eléments de géométrie" de Rouche et Comberousse (édition postérieure à 1889) que l'on lit au livre III: "*dans les triangles, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés. Cette propriété fondamentale dont la découverte est due à Thalès ne subsiste pas pour les polygones quelconques*".

Dans les manuels scolaires, à partir de 1898, on lit deux types d'énoncés du théorème de Thalès:

- toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.
- des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.

En passant par les rapports de longueurs puis par les rapports des mesures algébriques de vecteurs de même sens, diverses présentations se sont succédé. Dans la version des années 1970, rapport de projection mais aussi conservation de l'abscisse sont des présentations qui cohabitent sans être nécessairement dans une configuration de triangle. Les nouveaux programmes de troisième (1986) préconisent une présentation "triangle-dilatation" pour aboutir en seconde à une présentation vectorielle, non limitée à un triangle et préparant à l'homothétie.

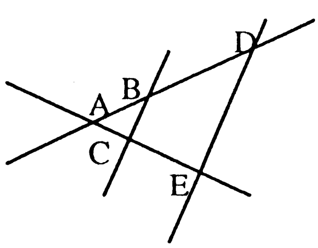
Le flou entre grandeur, nombre, mesure qui a subsisté longtemps au cours des siècles donne une indication sur les difficultés auxquelles vont se heurter les élèves. Ce sont les nombres réels qui ont permis de résoudre le problème de la mesure. Enseigner une théorie de la mesure reste une difficulté inaccessible pour beaucoup de nos élèves, les difficultés de l'histoire se renouvelant alors. Sans doute est-ce ce qui a fait de la propriété de Thalès la terreur des élèves.

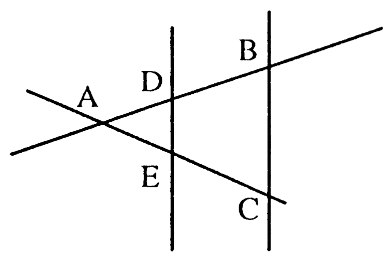
Que ce soit dans l'histoire ou pour des raisons didactiques diverses conceptions de la propriété de Thalès cohabitent ou entrent en conflit. Chaque présentation possède un domaine où elle est le plus performant.

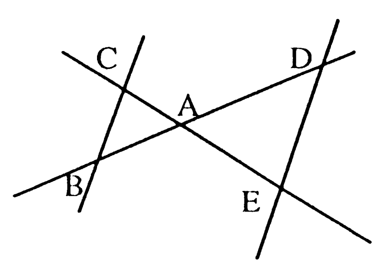
III POURQUOI UTILISER L'INFORMATIQUE ET CABRI-GEOMETRE POUR INTRODUIRE LES PROPRIETES DE THALES ?

"Pour favoriser l'évocation visuelle des élèves en géométrie, il est nécessaire d'utiliser le mouvement et d'éviter les images plaquées." : ces propos d'Antoine de La Garanderie illustrent parfaitement un intérêt de l'outil informatique dans l'enseignement de la géométrie et en particulier des propriétés de Thalès.

En effet, les élèves de collège construisent souvent leurs connaissances des objets géométriques théoriques à partir de représentations graphiques, mais ces représentations sont souvent figées et ne rendent pas compte de la variabilité des éléments d'une figure et des liens géométriques existant entre ses différents constituants. C'est pourquoi les enseignants de mathématiques sont souvent contraints à multiplier les dessins pour illustrer une même propriété et donc une seule figure. En particulier, pour la propriété de Thalès appliquée au triangle, ils dissocient la situation en trois "figures-clés" suivant les positions des points sur les côtés du triangle.







Le logiciel Cabri-géomètre permet de visualiser en continu le déplacement de la droite (BC) parallèlement à la droite (DE). Il aide les élèves à prendre conscience des invariants de la figure (alignement et ordre des points, parallélisme des droites), de la variabilité des points B et C sur les droites (AD) et (AE) et permet une meilleure appréhension de la "figure-papillon" (configuration croisée de Thalès). Il facilite ainsi l'énoncé des conditions nécessaires pour appliquer la propriété de Thalès ou sa réciproque.

D'autre part, l'objectif de cette activité de recherche est de faire émerger la proportionnalité de certaines longueurs, situation souvent difficile pour les élèves. L'outil informatique et ce logiciel permettent de disposer d'une banque de données très riche en offrant une infinité de mesures de longueur pour les segments considérés. L'enseignant peut ainsi occulter momentanément le problème posé par l'exact et l'approché et ne fournir à ses élèves que des valeurs simples facilitant le travail de recherche et l'écriture d'égalités de rapports.

Ce logiciel présente un avantage supplémentaire : celui de permettre à l'enseignant d'apporter une réponse immédiate au questionnement des élèves. En effet, lors d'une phase de recherche, ceux-ci s'engagent souvent dans des pistes variées. Cabri-géomètre permet de répondre à leurs demandes en affichant d'autres données : mesures d'angles, autres mesures de longueurs ... ou en modifiant certaines variables comme l'angle des deux droites. Ils visualisent ainsi les modifications de la figure, ce qui leur permet de disqualifier ou non leurs propositions. L'enseignant peut ainsi gérer cette recherche ouverte dans des temps raisonnables.

Enfin cette activité se déroule complètement dans l'environnement machine. Les données numériques sont fournies par l'ordinateur. En fin de séance, les élèves peuvent confronter leurs propositions avec la mesure de longueur attendue. Cette mesure existe virtuellement dans le système informatique dès le début de l'activité et est "produite" de la même façon que les valeurs proposées pour la recherche.

Si ce fonctionnement avec l'outil informatique est actuellement davantage reconnu par les élèves qu'une recherche avec papier-crayon, il ne faut néanmoins pas penser qu'il élimine la nécessité pour eux d'une démonstration.

IV OBJECTIFS (méthode et contenus)

a) L'acquisition d'une méthodologie dans le travail de recherche est nécessaire en fin de collège. Cette activité entraîne les élèves à savoir recueillir des informations de type numérique ou géométrique, les trier, les organiser.

b) La situation de Thalès est liée à la proportionnalité associée à des grandeurs de type longueur et fait partie de manière implicite du vécu (en terme d'images réelles).

Ex: *Ombre d'une échelle, Barrière (cf. film du CRDP)

* Aspect agrandissement, réduction en photos, maquettes, etc...

Nous voulions savoir quelles conceptions seraient mises en oeuvre par les élèves sans aucun effet d'enseignement de la notion.

c) La proportionnalité liée à la situation de Thalès n'est pas triviale pour les élèves. Les laisser la découvrir sur des exemples peut donner davantage de sens à la démonstration, et permettre de voir ainsi l'intérêt d'un raisonnement par rapport à un tâtonnement.

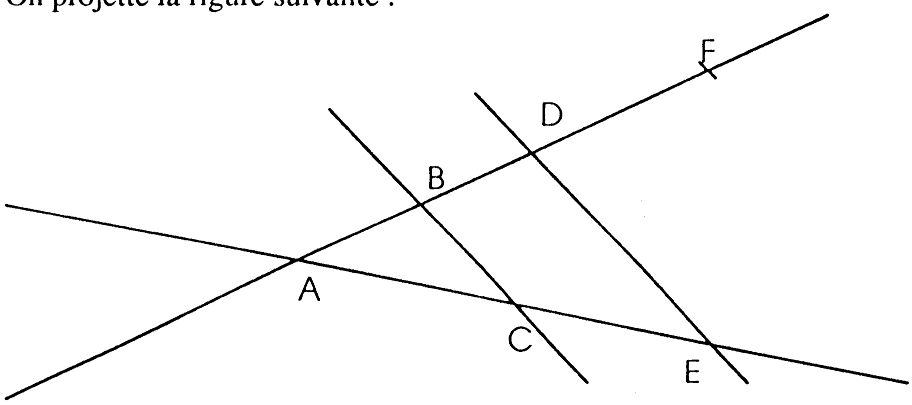
d) Le travail, sur les égalités de rapports, et sur la notion d'exact et d'approché qui lui est liée, doit permettre de faire évoluer le point de vue des élèves sur le dessin, outil de conjecture.

V DESCRIPTION

Matériel de classe : rétro projecteur, tablette rétro projectable, ordinateur et disquette Cabri-Géomètre.
Matériel élève : feuilles blanches, calculatrices, crayon et gomme.

Première séance d'une heure :

On projette la figure suivante :



Les points A, D, E, F sont fixes.
La droite (BC) est mobile en restant toujours parallèle à (DE).
Pour chaque position de (BC) l'ordinateur peut afficher les mesures des longueurs AB et AC qui varient, ainsi que celles de AD, AE et AF qui restent fixes.
La consigne écrite au tableau est la suivante :
"On donne les points A, B, C, D, E, F tels que la droite (BC) soit parallèle à la droite (DE).Sans construire la droite (FG), où peut-on placer un point G sur la droite (AC) tel que (FG)//(BC)//(DE) ?".
Pendant 10 mn, les élèves observent le dessin et écrivent leurs conjectures sur leur feuille, individuellement. C'est ce que nous avons appelé leurs conceptions premières dans l'analyse qui suit. Puis ils retournent leur feuille.
On fait maintenant varier la position de la droite (BC), le point F n'apparaît plus sur l'écran. Dans un premier temps, l'ordinateur n'affiche pas les mesures des longueurs et on déplace le point B sur la demi-droite (AD), puis l'autre demi-droite. On demande alors aux élèves :
"Qu'est-ce qui ne change pas ?"
cela afin d'insister sur l'alignement des points et la conservation de l'ordre.
Ensuite on propose aux élèves la consigne suivante :
"Vous avez, pour chaque position de B, quatre nombres affichés. Dans chacun des cas vous noterez ces nombres. Pensez à organiser votre prise de renseignements".
On continue alors la manipulation en plaçant B pour obtenir l'affichage de valeurs numérique simples.
Cinq exemples différents sont proposés.
Les élèves ont de nouveau 10 mn de travail individuel.
"Si vous le souhaitez, vous pouvez demander des données supplémentaires ou une modification du dessin".
On peut par exemple modifier l'angle Â, mesurer $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADE}$, donner une nouvelle position de (BC) à la demande des élèves.

A la suite de ce travail individuel, il reste 20 mn pour un travail de groupe. Les élèves sont réunis par groupes de 3 à 6, soit par affinité, soit choisis par l'observateur qui met ensemble des élèves dont les stratégies sont différentes. (Par exemple, certains utilisent des rapports de proportionnalité égaux à 3/2, d'autres égaux à 2/3).
Chaque groupe, après confrontation et discussion, produit une fiche où sera écrite la conjecture proposée par le groupe et la manière dont il l'a produite.
Il est entendu que les élèves ne modifient plus leur travail personnel.

2ème séance d'une heure: Séance de capitalisation.

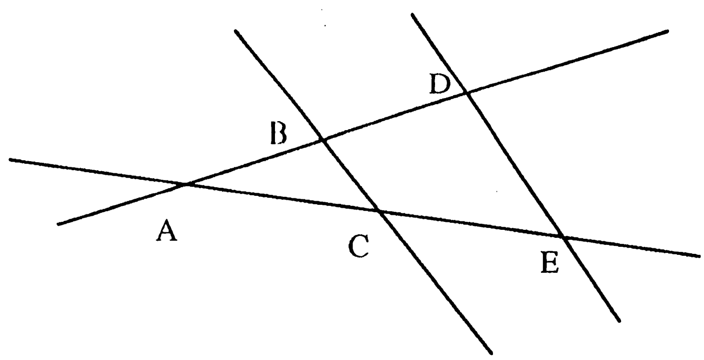
"Vous allez expliquer ce qui s'est passé, ce qui a été écrit et pourquoi vous l'avez écrit".
Le professeur va appeler chaque groupe dans un ordre déterminé afin de favoriser à nouveau le débat entre élèves : on réserve ainsi pour la fin le ou les groupes ayant produit un travail proche de la propriété de Thalès et on institutionnalise en énonçant la propriété et sa réciproque.

VI ANALYSE A PRIORI

a)Les élèves ont un vécu de situations modélisables par la propriété de Thalès(projection, ombres, ...). La figure s'affichant à l'écran a été conçue en le prenant en compte.
La position de la figure dans l'écran, l 'angle formé par les deux droites, la direction des parallèles et leur nombre sont des variables didactiques. Leurs choix rendront la figure plus ou moins congruente aux conceptions des élèves.

b)Dans une première version la situation ne proposait pas aux élèves la construction du point G mais simplement la découverte de la proportionnalité. Il s'est avéré que, d'une part cela ne constituait pas un enjeu motivant pour les élèves, d'autre part la situation ne provoquait pas un débat de classe autour de la nécessité d'une preuve par la démonstration. En effet elle basculait totalement vers un travail sur la proportionnalité.
L'introduction du point G permet de mettre en oeuvre la propriété de Thalès et sa réciproque. Il entraîne également un retour à partir de la découverte de la proportionnalité vers ses conditions d'existence sur la figure proposée donc vers le cadre géométrique.

c)Le dessin va être lu de différentes manières par les élèves.



La perception visuelle et l'organisation de la prise de données favoriseront la mise en place de l'une des procédures suivantes.

Une première procédure permet de passer d'une ligne à l'autre dans une même catégorie de mesures.
Les élèves utilisent un opérateur scalaire: la projection conserve l'égalité,
l 'addition et l'opérateur scalaire.

$$\text{Si } AD = k\,AB \quad \text{alors} \quad AE = k\,AC$$
$$\text{et } AD + AE = k\,AB + k\,AC$$

(Cette vision agrandissement-réduction de la figure peut prendre une forme vectorielle dans une utilisation en seconde).

La deuxième procédure permet de passer d'une catégorie de mesures à une autre. Les élèves utilisent un opérateur fonctionnel où l'application associe les longueurs sur une droite aux longueurs des segments projetés.

$$\text{Si } AC = k\,AB \quad \text{alors} \quad AE = k\,AD$$

La troisième procédure est de type "relation quaternaire". C'est l'utilisation des proportions vues en tant que quadruplet avec la technique du "produit en croix" ou de la "quatrième proportionnelle".

d)L' organisation de la prise de données va influencer, comme nous l'avons dit , le choix des procédures. Quelles formes d'organisation peut-on voir apparaître?
Dans un premier temps il semble naturel de penser à des dessins successifs disposés les uns sous les autres ce qui peut être aussi le cas des valeurs numériques directement. Il est évident que sous cette forme la découverte de l' existence d'une situation de proportionnalité n'est pas simple. Les élèves n'ont pas de situations de références possibles auxquelles faire appel et la proportionnalité outil parmi d'autres est, de plus, souvent rejetée car peu comprise donc pas disponible.
Des élèves peuvent utiliser spontanément ou dans un deuxième temps une disposition en tableaux qui induira un recours à la proportionnalité plus facile (éventuellement par effet d'enseignement : "tableau = proportionnalité").
Enfin une organisation sous forme de graphique permet de visualiser la fonction linéaire liée à la proportionnalité dans le premier cycle.

e)La valeur du coefficient de proportionnalité est aussi une variable didactique.
Deux valeurs sont proposées: 5/2 ou 3/2.
Elles permettent en utilisant l'inverse d'obtenir des quotients décimaux ou non. La valeur 2/3 introduit le problème des valeurs exactes ou approchées.
Par ailleurs la décomposition de 3/2 en 1 + 1/2 entraîne, par fractionnement de l'unité, l'utilisation possible d'une procédure par report de longueur.

f)Le débat va s'instaurer à deux moments dans le déroulement.
D'abord à l'intérieur des groupes: il va être intéressant de constituer ceux-ci en permettant une confrontation de différentes procédures. La procédure retenue majoritairement est révélatrice de l'outil le plus disponible.
A l'intérieur de classe: l'historique de la construction proposé par le logiciel Cabri permet de mettre en évidence les contraintes de construction qui prennent le statut d'hypothèses.
Ensuite, l'écriture des égalités de rapports de longueurs apparaît comme une généralisation acceptable des égalités de rapports de mesures. Comme nous l'avons déjà dit, la démonstration restera nécessaire.

VII OBSERVATION ET ANALYSE

A) Effets d'enseignement

Cette séquence a été utilisée dans des classes très diverses de part leurs enseignants(7 à 8 professeurs différents)La présentation par contre en a toujours été faite par le même professeur. Donc la manière dont les élèves abordent la situation dans son ensemble et traitent le problème est influencée par les différences de fonctionnement du professeur titulaire de la classe.
En effet, on voit se produire des régularités pour l'ensemble de toutes les classes mais aussi et cela pour l'ensemble des élèves d'une classe donnée une manière d'aborder par exemple l'exact et l'approché.
Quelles sont les régularités?

Le temps d'appropriation du problème (environ 10 mn):
Demander la position du point G pose un réel problème aux élèves.
Une de leur première réaction est de dire "*mais il est pas écrit le point G dont vous parlez?*" Ce n'est pas une situation habituelle : en général dans les problèmes de géométrie du premier cycle toutes les données sont écrites sur la figure.
Pourtant la dévolution du problème se fait facilement avec les deux conditions suivantes:
Les élèves doivent avoir une image de ce que représente une droite et de ce que représente un segment.Les élèves doivent savoir calculer un quotient et avoir travaillé sur les propriétés des rapports.
A partir du moment où les élèves ont relevé les données numériques, il y a un long moment d'observation de ces données qui apparaît comme un temps "blanc" pour les professeurs observateurs non habitués à cette forme de travail. Il correspond à la recherche d'un lien qui puisse être de l'ordre de l'évidence entre le nouvel état de la situation et la question posée au départ. Cela nécessite en moyenne dans chaque classe observée au moins 20 mn.

A partir de là plusieurs attitudes vont apparaître révélatrices, en partie du moins, des représentations que les élèves ont des mathématiques:
On trouve une attitude attentiste voir défaitiste: "*moi, je n'y comprends rien, de toute façon c'est toujours la même chose en math: Les autres ou le prof vont bien le dire...*"Pourtant ces élèves vont progressivement "meubler le temps" en tentant d'organiser les données et ce travail va les conduire vers l'énoncé de conjectures qui les étonneront !
On retrouve aussi l'attitude "*je fais quelque chose puisque qu'on me le demande*". " *Pourquoi je fais ce calcul:? Ben , je sais pas....J'essaye..*" La situation permet de faire appel aux quatre opérations en général bien maîtrisées en troisième. Le nombre restreint de données, la facilité des calculs va permettre à ces élèves une recherche presque exhaustive de tous les calculs possibles et ainsi la découverte d'une régularité pour des divisions.
Certains élèves (en général les "bons") pensent "*mais c'est évident*" Effectivement ils ont l'intuition du lien ,entre proportionnalité et la situation de Thalès. Ils peuvent même essayer de trouver une preuve de type démonstration en commençant par écrire les égalités de rapports en utilisant les distances et non les nombres.

Ainsi la situation permet lors de son développement de questionner les élèves et de les amener à changer de points de vue, à s'autocontroler, à raisonner, à émettre différentes conjectures.

Selon le travail fait par l' enseignant l'approche du coefficient de proportionnalité, auquel tous les élèves seuls ou en groupe vont se trouver confronter, va être plus ou moins approfondi .

Dans une première classe les élèves n'ont pas beaucoup travaillé cette notion. En général ils vont se confronter sur le fait que a et 1/a donnent finalement le même résultat quant à la proportionnalité. Mais ils préféreront choisir le coefficient a>1 et qui tombe juste parce que c'est plus facile pour les calculs. On retrouve ici le problème du statut des décimaux compris entre 0 et 1. Dans une autre classe ils ont travaillé le fait que si $b/c \approx a$ ne permet pas dans un calcul exact d'utiliser a à la place de b/c Ils vont donc naturellement utiliser comme coefficient la valeur sous sa forme fractionnaire! Il y a bien ici un effet d'enseignement car aucun des autres groupes observés dans toutes les autres classes n'utilisera une forme fractionnaire.

Dans une troisième classe, le travail fait sur le report de grandeurs apparait. Des élèves vont remarquer que si :

$$AC/AB=1{,}5 \text{ alors on peut aussi écire que } AB+AB/2 = AC$$

Convaincre les autres groupes de l'équivalence des deux expressions n'a pas été facile pour eux.L'utilisation des règles du calcul littéral à ce qui est encore dans le cadre géométrique ne va pas de soi.

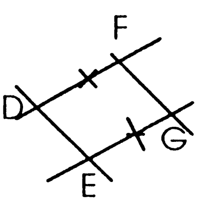
B) Analyse des conceptions premières

Avant d'analyser les conceptions premières des élèves, il convient de préciser que le dessin visible à l'écran, à valeur de figure ; c'est à dire que les mesures écrites, grandeurs obtenues par report de la grandeur unité, sont exactes. Elles sont des données du problème au même titre que (AB) // (DE).

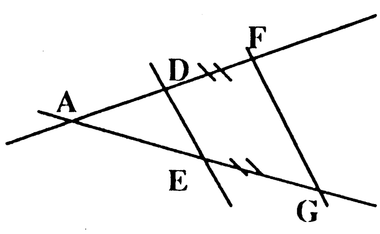
Pour l'ensemble des 145 élèves observés, les réponses spontanées, concernant la position du point G, vont à quelques exceptions près, être justifiées par des preuves, des constructions de nature géométrique.

37% reproduisent la figure avec les hypothèses en se replaçant ainsi dans les conditions habituelles du travail en géométrie. Ils placent le point G en ne justifiant rien ou en construisant à la règle et à l'équerre la parallèle. Certains mesurent, sur leur dessin, la distance AG et considèrent que c'est une preuve. On voit ici la prégnance de la confusion entre le dessin prototype et la figure. Pour ces élèves, la suite de la séquence va les obliger à changer de point de vue, au moins localement.

36% ont réinvesti une conception de la projection qui est celle de la projection sur des droites parallèles.



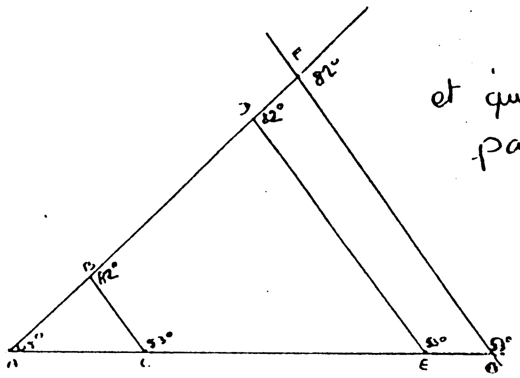
d'où



Les élèves proposent donc ici DF = EG d'où *"DF mesure 3, donc on rajoute 3 à AE"*.

7% réinvestissent la projection orthogonale plus facile à mettre en oeuvre et visuellement proche étant donné la direction de projection qui avait été choisie au départ ($\widehat{ADE} = 82°$). Ils construisent donc la perpendiculaire en F.

8% utilisent la symétrie centrale ou des angles correspondants égaux. Ils construisent donc l'angle BDE égal à l'angle DFG.



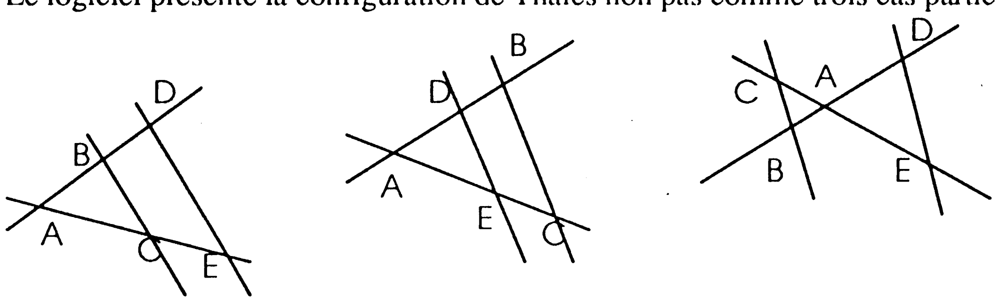
- l'angle $\widehat{DFG}$ soit égale à l'angle $\widehat{BEC}$, et que $\widehat{EGF}$ = $\widehat{BCE}$ parce toute droite parallèle à le meme angle. (87°)

6% utilisent la propriété de Thalès de manière implicite ou explicite pour deux redoublants . Pour les autres, on peut remarquer que dans les six classes, les redoublants n'ont pas, dans leur majorité, reconnu la propriété de Thalès dans l'activité.

Enfin, d'autres élèves ont fait des propositions confondant droites et segments et donc ont affirmé qu'il n'y avait pas de réponses possibles.

C) Analyse des stratégies des élèves

Les mesures sont proposées dès le début, mais les élèves ne les utilisent pas volontiers pour résoudre ce problème. Le passage de la proportionnalité des grandeurs à celle des mesures n'est pas trivial pour les élèves. Pourtant le support logiciel favorise la reconnaissance implicite de la proportionnalité des grandeurs par les élèves.
L'aspect de la figure, habituellement utilisée en cours, aspect statique, ne les engage pas dans cette direction de recherche.
L'utilisation du logiciel CABRI va permettre de montrer rapidement, non pas une, mais <u>plusieurs figures successives</u> ayant la configuration de Thalès.
Le logiciel présente la configuration de Thalès non pas comme trois cas particuliers



mais il souligne la continuité de ces configurations par déplacement de la droite (DE).
Il va de plus permettre un affichage rapide de plusieurs mesures nous servant en quelque sorte de bases de données pour des "situations Thalès".
Les valeurs numériques, affichées à l'écran, ont valeur d'hypothèse. Leur choix n'est pas quelconque, elles permettent de mettre en évidence facilement un rapport de proportionnalité 3/2 ou 2/3. Pour autant l'écriture d'un tel rapport n'est pas évident, même si la suite des valeurs est du type suivant:

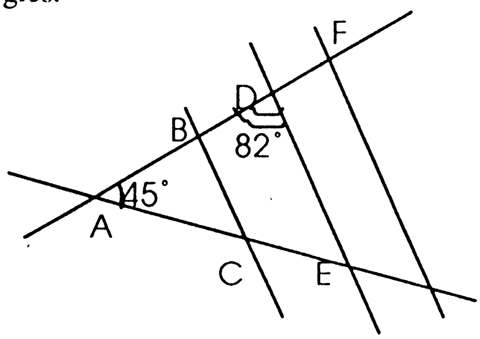
2	4	8	....
3	6	12	....

Néanmoins les élèves font presque tous un lien entre la situation proposée et la proportionnalité, mais les stratégies utilisées sont différentes. Nous allons les analyser en montrant l'influence éventuelle du logiciel dans les démarches suivies.

a) Il y a peu de non-réponse (11%)

Ce sont pour la plupart des élèves qui n'ont pas osé s'exprimer non par désintérêt mais par peur de l'erreur ou parce que peu habitués à une recherche non contextualisée: ils ne savaient pas comment démarrer seul.

b) Des stratégies non liées à la proportionnalité (17%) utilisent pour la plupart des constructions d'angles.



- Certains estiment que 82° est proche de 90° et construisent des perpendiculaires à (AB).
- La plupart après avoir demandé la mesure des angles proposent de construire la droite passant par F tel que l'angle $\widehat{AFG}$ mesure 82°. On utilise ici les fonctionnalités de CABRI qui permettent des mesures et des constructions rapides.

Ils utilisent implicitement un théorème du type "si deux sécantes à une même droite forment des angles de même mesure, alors ces sécantes sont parallèles" ou " des triangles homothétiques ont des angles de même mesure".

- Cette stratégie aboutit à une construction du point G. L'obtention du point G est pour eux suffisant comme réponse, mesurer AG sur leur dessin ne leur parait pas pertinent : cette mesure étant, pour eux , une valeur approchée. Ils ne répondent donc pas au problème posé.

c) Dans les stratégies, où les élèves mettent en oeuvre des démarches de type homomorphique (17,5%), très peu conduisent à une réussite (3,5%).

En effet, la mise en oeuvre des propriétés de linéarité est souvent comprise et utilisée pour compléter rapidement des tableaux de proportionnalité.

Ainsi

2	12	14
6	36	?

est complété

*soit par 2 + 12 = 14 donc 6 + 36 = 42

*soit par 2 x 7 = 14 donc 6 x 7 = 42

mais les élèves n'ayant "vu" dans ces propriétés que leur aspect calcul rapide généralisent à d'autres opérations de la façon suivante:

2 + 12 = 14 donc 6 + 12 = 18.

C'est une erreur déjà remarquée par certains chercheurs sous le terme de "pseudo-proportionnalité". Dans la situation proposée, cette conception vient renforcer les conceptions premières de ces mêmes élèves sur l'égalité d'un segment et de son projeté.

La différence entre leur résultat et ceux d'autres élèves les amènera à remettre en cause leur double fausse conception, et encore au prix de vives discussions!!... Ceux qui réussissent utilisent la propriété:

si α AB = AD alors α proj(AB) = proj(AD)

Problème
pour quelle position du point G sur la droite (AC) a-t-on (FG)//(BC)//(DE)?
$\boxed{\text{(AG) = 17,5 cm}}$ car 4 x 3 = 12 et 5x3 = 15. On multiplie donc par 3
pour trouver D et E.
pour trouver F, on à multiplié 4 par 3,5 donc pour trouver G,
on va multiplier 5 par 3,5 = 17,5
donc A est a 17,5 cm de G.

d) Dans cette situation l'aspect fonctionnel de la proportionnalité est mobilisé majoritairement(38,5%) et le plus souvent avec succès(33%). la recherche de rapports égaux n'est cependant pratiquement jamais immédiate. Beaucoup essaient d'abord de trouver des régularités par soustractions des mesures des segments correspondants. La notion de proportionnalité est favorisée dès qu'ils essaient pour "y voir plus clair" de construire des tableaux. Certains trouvent le coefficient de proportionnalité mais en parlant de cosinus : *"On peut l'appliquer ; C'est presque rectangle"*, d'autres ne se justifient même pas. L'erreur n'apparaîtra que dans les débats intra ou inter groupes. Néanmoins cela ne les empêche pas de trouver une réponse correcte si on considère que pour eux le cosinus n'est qu'un coefficient.
Ils utilisent indifféremment, comme coefficient de proportionnalité, un nombre ou son inverse. Pour autant la question se pose pour eux *:"Est-ce la même proportionnalité?"*. Cela sera réglé lors du travail de groupe de la façon suivante *:"Ca donne les mêmes résultats dans le tableau donc c'est la même chose"*. La notion de nombre et d'inverse sera alors évoquée de manière explicite.
Par ailleurs, les discussions, dans certains groupes travaillant sur cette stratégie, montrent que ces élèves commencent à maîtriser le statut de démonstration. En effet, l'expérience ne semble plus leur suffire comme preuve:
" C'est proportionnel, ca fait pareil partout"
"Oui, mais on ne sait pas que c'est proportionnel, si tu l'admets alors on peut accepter de multiplier partout par 1,5".
On peut remarquer que lors du travail de groupe cette stratégie va être majoritairement acceptée. On peut donc penser que cette conception de la proportionnalité est mieux assimilée et mémorisée.

e)La quatrième proportionnelle est utilisée sous sa forme "produit en croix"(12%).
Très souvent les élèves ont commencé par mettre en évidence le coefficient de proportionnalité pour "vérifier".

Dans l'ensemble ceux qui l'utilisent obtiennent une réponse correcte(8%).

les points B, C et ~~A~~ seront confondus. Mais (BC) sera toujours parallèle à (DE)

BA	4	3	6	8	13	2	5,7
CA	5	3,75	7,5	10	16,25	1,6	4,6
DA	12	12	12	12	12	12	12
EA	15	15	15	15	15	15	15

Ce sont des nombres qui sont proportionnels. donc :

$\frac{5}{x} = \frac{4}{14}$ $\qquad x = \frac{14 \times 5}{4} = 17,5 = (AG)$.

f)Débats:

A l'intérieur des groupes, le débat va faire évoluer les stratégies.

Par exemple dans une classe par effet de "proximité", la stratégie par construction géométrique avait été utilisée par près de 50% des élèves. Elle ne sera pas retenue par les groupes. Ils avaient été constitués de sorte que "proportionnalité" et "construction" puissent se confronter: les opérations et la machine à calculer ont semblé plus précises que les outils géométriques.

Le taux de réussite associé à une explication correcte, utilisant la proportionnalité, est de près de 80%.

Dans la classe, le débat commence par une description de la figure projetée, ce qui permet d'écrire au tableau, les hypothèses sous la dictée des élèves :

"A, B, D, F alignés, A, C, E alignés et (BC) // (DE)"

Ils soulignent l'importance de l'ordre des points, en expliquant leur glissement sur une même droite. On peut ici souligner l'impact du logiciel CABRI-GEOMETRE : aucun outil ne permet d'avoir un glissement continu de la droite (BC), incluant l'ensemble des cas de figures. Les élèves, ayant travaillé de cette façon, oublient parfois de préciser le parallélisme des droites mais n'oublient jamais de préciser l'alignement et l'ordre des points.

De nombreuses difficultés liées à la proportionnalité vont encore surgir.

exemple 1 :

On préfère $\frac{AC}{AB} = 1,25$ à $\frac{AB}{AC} = 0,8$ parce qu'un rapport *"en dessous de 1, c'est gênant!"*.

exemple 2 :

$AB = 5$, $AC = 6$ $\quad$ $AB = 3$, $AC = 3{,}6$ $\quad$ $AB = 2{,}5$, $AC = 3$ $\quad$ $AB = 4$, $AC = 3{,}3$ $\quad$ $AB = 8$, $AC = 6{,}7$

$\frac{6}{5} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{3{,}6}{3} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{3}{2{,}5} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{4}{3{,}3} = 1{,}212\,12\,12$ etc... $\quad$ $\frac{8}{6{,}7} = 1{,}1940299$

$\frac{AE}{AD} = \frac{12}{10} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{EG}{DF} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{EG}{4} = 1{,}2$ $\quad$ $4 \times 1{,}2 = EG$ $\quad$ $4{,}8 = EG$

$4{,}8 + 12 = AG$

$16{,}8 = AG$

$\frac{AG}{AF} = 1{,}2$ $\quad$ $\frac{AG}{14} = 1{,}2$ $\quad$ $14 \times 1{,}2 = AG$ $\quad$ $16{,}8 = AG$

Finalement, en s'appuyant sur les résultats obtenus par tous, on arrive à écrire :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

La place du point G va maintenant permettre de faire émerger la réciproque :

"si $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ *alors je peux écrire* $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$ *".*

Un autre conclut :

"Ben, c'est la solution, c'est égal à 1,25"

"Pour AG, ça fait AG = 14 x 1,25 = 17,5"

"Et alors (FG)//(BC)".

Ce type de dialogue s'est produit sous des formes proches dans les classes observées.

Il reste alors à écrire la propriété de Thalès et sa réciproque sous la forme habituelle, dans le cahier, en leur donnant un statut officiel.

VIII ANALYSE DES TESTS DE SUIVI

Nous avons essayé de voir, au travers de tests passés dans des classes ayant utilisé ou non notre situation, si il existait des disparités.
Ces classes sont forcément toutes différentes en particulier du fait des enseignants qui y enseignent (cf les effets d'enseignement). Les comparaisons sont donc difficiles. Cependant quelques points nous semblent important à noter.
Les deux exercices qui composent le test (voir annexes 3 et 4) permettent de mettre en évidence des erreurs en particulier de compréhension.
Dans le premier nous avons cherché à voir quels rapports écrivaient les élèves en particulier pour l'écriture du "troisième" rapport (propriété de Thalès dite complémentaire).
Le mot "rapport n'est pas compris par plusieurs classes n'ayant pas travaillé avec la situation. Ce n'est pas seulement une question de vocabulaire: certains élèves donnent à ce mot le sens élargi de relation entre deux objets. Pour d'autres, ils ne comprennent pas le sens de la question car pour eux la propriété de Thalès s'écrit sous forme de quotient même s'il n'y a aucune mesure.
Les principales erreurs ont été les suivantes dans l'écriture des rapports:

*Non dissociation des rapports:
Deus suites de rapports pouvaient être écrites, suivant que l'on observait la forme " triangle" ou la forme "croisée".
Des élèves, quel que soit leur type d'apprentissage, les écrivent à la suite les unes des autres:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AG}=\frac{AD}{AF}=\frac{BD}{FG}$$

Les deux séries de trois rapports sont exactes prises séparément

*Les élèves utilisent la propriété de Thalès dite "complémentaire ou prolongée".Ecrivent-ils plus souvent correctement le troisième rapport lorsqu'ils ont travaillé avec cabri-géomètre?
Il nous semble que oui, la déformation de la figure permettant d'induire une image mentale forte: c'est le troisième côté qui se déplace.

*Le non respect de l'alignement et de l'ordre des points est très rare pour ceux qui ont travaillé avec cabri-géomètre. Ceci est normal car nous avons expliqué précédemment l'impact important du dynamisme de l'image sur ce type d'erreur.

*Il est possible d'écrire quatre séries d'égalité de rapports. Nous avons constaté que les élèves ayant participé à l'expérimentation en écrivaient au moins deux correctement, ce qui n'a pas était le cas pour les autres élèves qui se contentaient d'une seule série de rapports.

*Enfin les erreurs d'écriture des rapports sont souvent dues à l'"oubli" du point d'intersection des droites.

En ce qui concerne le deuxième exercice, il est de même type que celui proposé dans l'évaluation seconde de 1993.

*Beaucoup d'élèves n'ayant pas travaillé avec cabri-géomètre se contentent d'une réponse sans justification. Lorsqu'il y a justification, on peut retrouver pour ces élèves une utilisation d'un coefficient additif bien qu'ils parlent de proportionnalité. Cette erreur fait partie des conceptions premières qui ont été décrites.

*Pour ceux qui proposent une justification, on constate que pour les élèves de l'expérimentation l'écriture des quotients précède celle des rapports. C'est normal puisque cela correspond à la méthode expérimentale proposée. On peut donc penser qu'il y a eu pour ces élèves acquisition de méthodologie. Ils font d'ailleurs facilement la distinction entre les deux cadres dans lesquels ils travaillent.

*On trouve enfin l'erreur habituelle due aux confusions entre l'exact et l'approché:

$$0{,}6 = 0{,}7$$

Cette erreur apparaît très rarement pour les élèves de l'expérimentation, puisque ce problème a fait l'objet de nombreuses discussions dans les groupes et dans toutes les classes.

IX CONCLUSION

Au travers du développement de cette activité, nous pouvons comprendre certaines des difficultés des élèves dans l'utilisation de la propriété de Thalès: Il apparaît d'abord que le passage d'une figure géométrique à son interprétation en termes de rapports de grandeurs n'est pas évident. On retrouve, ici, le problème du passage de concept de figure à celui de dessin: comprendre que dans un dessin ce qui constitutif de la figure, ce sont les invariants et en particulier le rapport des longueurs et non une longueur seule.
Dans un deuxième temps de l'activité, la reconnaissance et la caractérisation de suites proportionnelles reste aussi difficile pour la plupart des élèves. La non-directivité de la méthode choisie pour le relevé de données, de leur organisation visuelle souligne les effets d'enseignement sur la proportionnalité. L'utilisation de tableaux par certains élèves entraîne une reconnaissance rapide de l'existence d'un coefficient multiplicatif. L'évocation peut en être liée simplement à une appréhension visuelle de la forme "tableau" indépendamment de tout calcul!!...
L'écriture du coefficient est souvent issue de "réflexes" acquis dès le CM2 et/ou la sixième. Il est donc écrit plutôt sous une forme décimale exacte ou approchée. La forme fractionnaire est plus rarement acceptée, elle apparaît alors comme écriture de la division à effectuer.
L'existence de ces difficultés est en grande partie responsable de la rédaction toujours délicate de la propriété de Thalès. Dans la situation décrite les élèves s'y trouvent confrontés dès le départ. Aidés par l'approche visuelle dynamique due à l'emploi du logiciel, nos élèves semblent les surmonter plus aisément.
Cette amélioration, dans l'écriture des hypothèses(droites parallèles, points alignés) et l'écriture des rapports est notée aussi bien dans des devoirs classiques que dans des tests que nous avons effectués dans de nombreuses classes.
Cependant, un certain nombre de difficultés restent de côté:
faut-il faire un travail préliminaire sur les proportions, sur l'exact et l'approché ?
le changement de cadres ne constitue-t-il pas une difficulté supplémentaire ? etc...

HISTORIQUE DE CONSTRUCTION

Voir annexes 1 et 2

- Construire un point , nommé A.

- Construire une droite définie par deux points passant par A.

- Construire un point extérieur à la droite.

- Construire la droite définie par deux points, passant par ce point et A. Ce point sert de poignée pour modifier l'angle des deux droites.

- Construire un point sur objet,sur chacune des droites.

- Nommer les D et E .

- Construire le segment [D E]

- Prendre un point sur objet, sur [A D], nommer le B.

- Construire la parallèle passant par B.

- Prendre l'intersection de cette parallèle et de (AE). Nommer le C.

- Construire le segment [A B]
  Construire le segment [A D]
  Construire le segment [A C]
  Construire le segment [A E]
  Construire le segment [B C]

- Prendre un point sur [A D) au-delà de D. Nommer-le F.

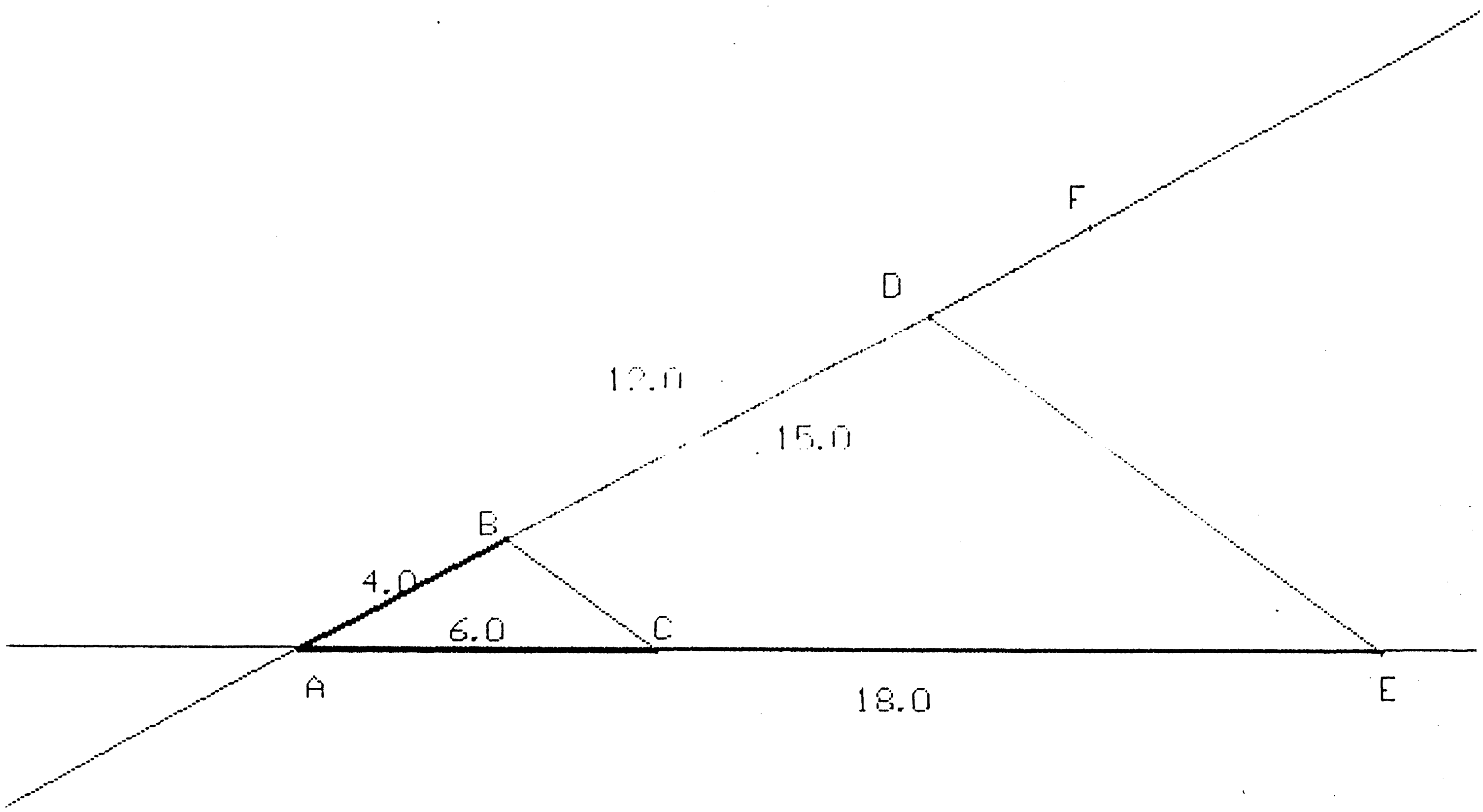
- Construire le segment [A F].

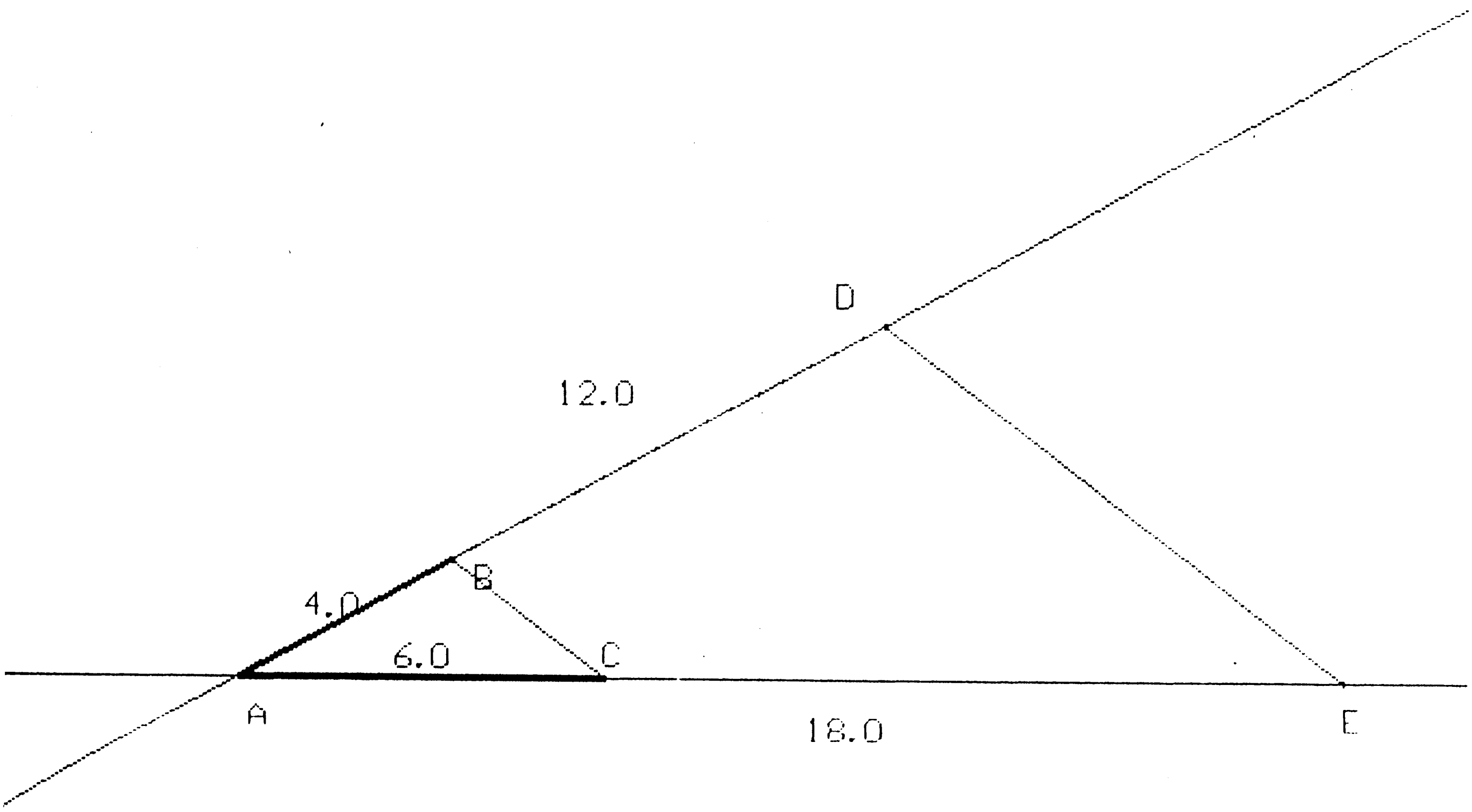
- Mesurer les segments [A B], [A D], [A C], etc...

- on peut peindre en gras les segments [A B]et [A C].

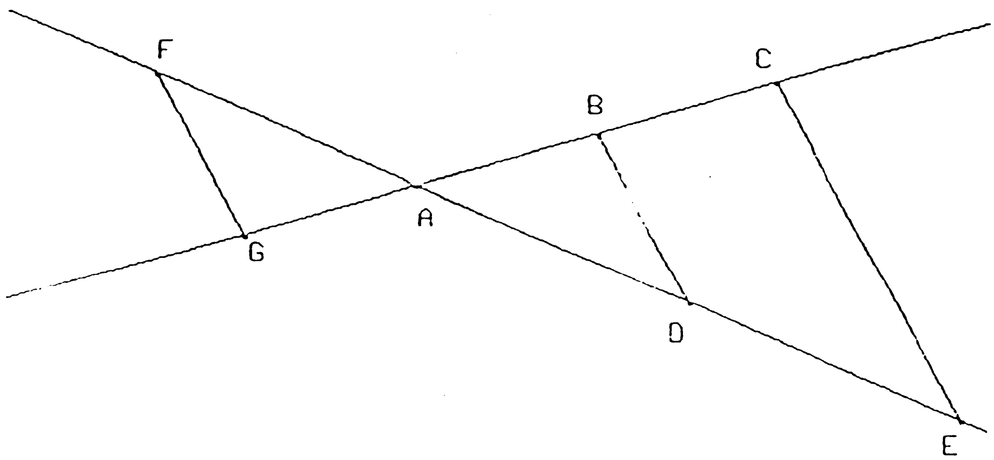
ANNEXES

Annexe 1



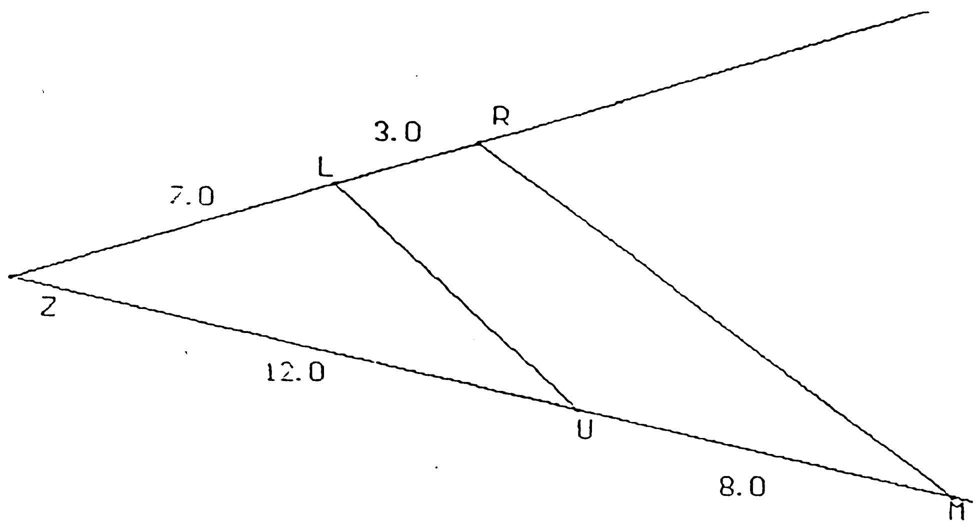

D
12.0
B
4.0
6.0
C
A
18.0
E

On sait que (BD)//(CE)//(FG).



Quels rapports égaux pouvez-vous écrire?

Les droites (LU) et (RM) sont-elles parallèles? Justifier.



BIBLIOGRAPHIE

EPISTEMOLOGIE

* ARNAULD Antoine, Nouveaux Eléments de géométrie, Paris, chez Charles Savreux, Libraire Juré, 1667; Dijon, IREM, 1983. 2 tomes, Livre I-VIII, Livre IX-XV (fac-similé).
* DESCARTES René, La Géométrie, Nantes, Ed. de l'AREFPPI, 1984.
* Eléments (les) d'EUCLIDE in Les Oeuvres d'Euclide, trad. française de Peyrard, Paris, Blanchard, 1966.
* Hilbert David, Les fondements de la géométrie, Paris, Dunod, 1971.

DIDACTIQUE

* BROUSSEAU Guy, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques 4/2, 1983.
* CORDIER Françoise et Jean, L'application du Théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. Recherches en didactique des mathématiques 11/1, 1991.
* MICHONNEAU Jacqueline, La proportionnalité en géométrie: Le théorème de Thalès. in: Petit x, 23, 1990, pp.41-59.
* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Montpellier, La propriété de Thalès dans le problème fil, 1986.
* VERGNAUD Gérard, L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang, 1981.

PREMIER CYCLE

* Enoncé de Thalès. Agrandissement. Réduction. in : Suivi scientifique classe de 3e. 1989. Bulletin inter-IREM premier cycle, nouveaux programmes de 3e. pp. 43-150.
* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Nice, De la 3e vers la seconde. Suivi des nouveaux programmes. 1989.

  (EX.: Problème de la mouche et de la fourmi. Objectifs: utilisation du théorème de Pythagore dans l'espace. Utilisation de la propriété de Thalès dans le triangle.)
* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Poitiers, Compte rendu de l'expérimentation des nouveaux programmes de troisième...Fasc.1.Calculs d'éléments métriques (1) Thalès. Systèmes d'équations. Equations de droites. Travaux numériques (1) Calcul sur les racines. 1989.
* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Rennes, Les activités mathématiques en 3e dans le cadre des nouveaux programmes. 1991.

RETROPROJECTEUR

* UNIVERSITE,institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Orléans, Propriété de Thalès au rétroprojecteur. 1984.

SECOND CYCLE

* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Lille, Matémactives, 4. 1986. (classe de seconde).
* UNIVERSITE, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Le Mans, Proportionnalité. Enseignement par situations-problèmes. La proportionnalité du CM2 à la seconde; 1991.

SOMMAIRE

REF : 100 - VERS LA PROPRIETE DE THALES.

Auteurs : *Danielle BERGUE* *Jacqueline BORREANI*
Michel CHEVALLIER *Hélène COLONNA*

Public Concerné : Professeurs de collège.

Niveau : Classes de 3ème.

Résumé : Après avoir précisé quelques éléments du contexte historique et didactique, suit la description et l'analyse d'une activité d'introduction à la propriété de Thalès. A l'aide du logiciel Cabri-Géomètre, un travail, incluant une gestion de données, permet aux élèves de 3ème de constater expérimentalement la proportionnalité des mesures de segments et de leurs projetés puis de le traduire géométriquement sous forme de rapports. On peut ainsi donner du sens à l'écriture de la propriété de Thales et de sa réciproque.

Mots clefs : - Propriété de Thalès. - Proportionnalité.
- Gestion de classe. - Logiciel Cabri-Géométre.

Date : Juin 1994 - **Prix** : 27.00 F.
Nb de pages : 31 pages - **Format** : A4.
N°ISBN : 2-86239-060-7 - **Dépôt légal** : 2ème trimestre 1994.

Publication : IREM de ROUEN.
1, Rue Thomas Becket
B.P.153
76130 Mont Saint Aignan

****

Bon de commande

M. , Mme, Mlle :
Adresse :

Libellé :	Prix	Quantité	Total
VERS LA PROPRIETE DE THALES	27.00 F		
Frais d'envoi : 15. F pour le 1er livre et 5 F par livre supplémentaire (France)			....
Frais réels pour l'étranger			....
SOMME DUE :..			....

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. - B.P. 153 - 76135 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.
RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 00044004056 81

****

DATE : SIGNATURE :