



UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

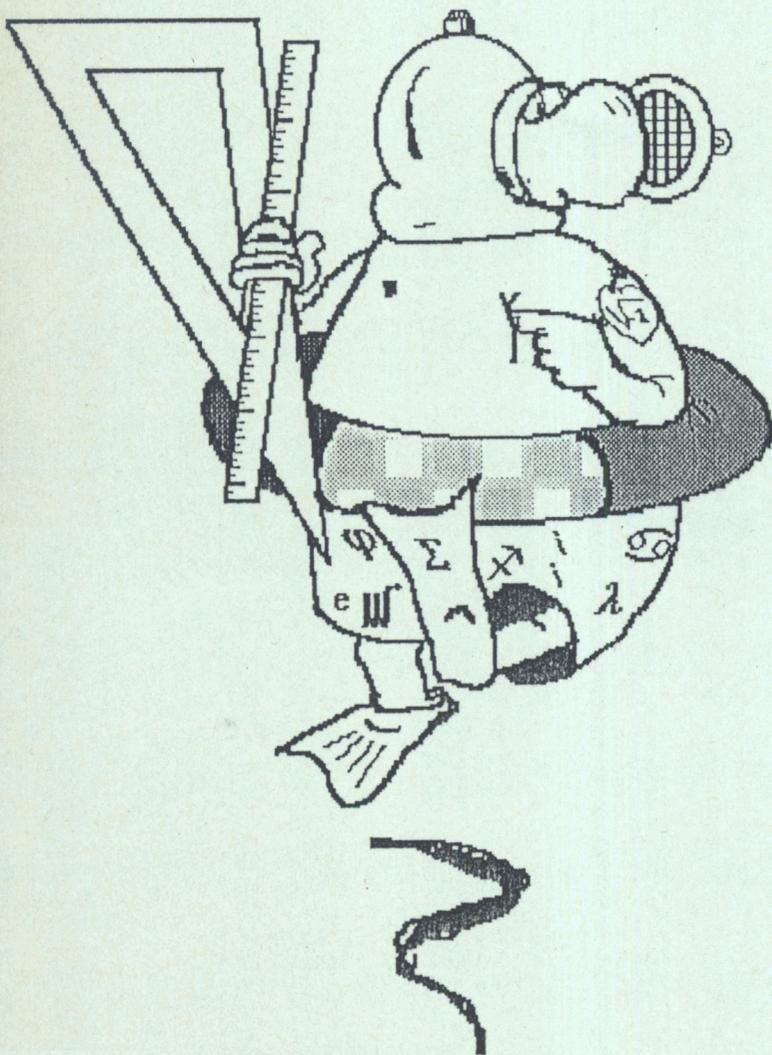
INSTITUT de RECHERCHE

sur

l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

I R E M

tél : 35 14 61 41



P O U R Q U O I ◆ A I M E R
E N C O R E ◆ F A I R E ◆ D E S
M A T H E M A T I Q U E S

I R E M de ROUEN

1, rue Thomas Becket - BP 153, 76135 Mont-Saint-Aignan Cédex

INTRODUCTION

C'est lors d'un précédent stage P.A.F, consacré aux probabilités qu'a germé l'idée de permettre aux professeurs de maths de se retrouver, trois fois l'an, dans le même cadre.

Nous n'avions fixé de contraintes ni sur le niveau, ni sur le contenu. Les intervenants s'engagèrent seulement à laisser une trace écrite de leur exposé. Je propose, ici, la réunion de ces différentes communications, présentées dans l'ordre chronologique. J'espère que ces articles, aideront les stagiaires (et peut-être au-delà) à développer ou reprendre ce qui les aura intéressés ou interrogés.

Nous avons eu, au début de l'année, un court débat sur le sujet du stage, apparemment sans rapport avec son intitulé. Je crois pourtant que les différents orateurs, nous auront aidé à nous convaincre qu'*aimer faire des mathématiques* est une qualité presque indispensable pour bien les enseigner. Ils nous ont aussi rappelé la place que tiennent les mathématiques¹ dans toute démarche scientifique et *a fortiori* dans l'enseignement de la Science.

Les différentes péripéties de la saga des *Bouées* que nous a résumées Gérard Lavau, pour l'après-midi de la seconde séance illustre parfaitement ce *processus* et donc ce qu'avaient voulu faire les initiateurs de ces journées: partir d'un problème concis, qu'on peut aisément représenter ou dessiner (en peignant les bouées...), faisant intervenir des nombres simples. arriver ensuite, soit pour généraliser, soit pour mettre en forme des calculs potentiellement généralisables, à le formaliser grâce à des objets mathématiques dont l'introduction s'avère nécessaire. C'est aussi la démarche qu'a adoptée Bertrand Fort pour dénombrer la loi de probabilité de la somme des points marqués par cinq dés.

Mais cette volonté de représenter et donc de traiter simplement des problèmes non triviaux a d'autres applications. Jean-Claude Jovet nous a expliqué, comment grâce au symbolisme des *arbres* on peut introduire (et faire aimer) les probabilités conditionnelles en cycle E.S. Thierry Hamel a rappelé qu'un outil identique existait pour les barycentres: *les équilibres*².

Il a également illustré et démontré, de très diverses manières, le théorème de *Ptolémée*. Une seconde communication fut consacrée à la *géométrie articulée*. Par exemple, on fait varier l'aire d'un triangle dont les côtés sont fixés. Ceci permet de relier problèmes géométriques et problèmes d'analyse (extrema, études de fonctions, conditions initiales ou contraintes) de façon un peu originale. Bien sûr les paramètres et des calculs algébriques non élémentaires sont au rendez-vous, mais on peut attaquer ces problèmes d'une toute autre manière en utilisant les outils modernes. Le logiciel *Le géomètre* permet de réaliser et de figurer les contraintes et les articulations, une calculatrice ou un traceur évitent les calculs à condition de savoir interpréter les courbes ce qui n'est pas toujours évident.

Plusieurs fois, cette année, les stagiaires ont trouvé sur les différents points traités des améliorations. C'est ainsi que Jean Claude Jovet s'est souvenu des angles *extérieurs et intérieurs* qu'il avait étudiés au Lycée. J'espère donc que le lecteur de cette brochure y trouvera à la fois matière à réflexion et plaisir.

Luc Sinègre.

¹ Qu'on ne saurait évidemment réduire à un prêchi-prêcha de formules, ou d'instructions plus ou moins autoritaires.

² Une courte communication sur ce thème fut donnée à la deuxième journée. On peut se reporter aux fascicules Barycentres et Equilibres (Irem de Rouen 1988), Equilibres complexes, Equilibres de l'Espace (Irem de Rouen 1990) ou encore Géométrie des Equilibres (Irem de Bordeaux 1989).

SOMMAIRE

page

Première Journée (Lundi 18 Octobre).

- 1 *Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux numéros consécutifs au Loto. Application au dénombrement de certaines suites "en escalier".*
Luc Sinègre (Rouen).
- 4 *Les probabilités "en grim pant aux arbres".*
Jean Claude Jovet (Dieppe).
- 11 *Autour des quadrilatères inscriptibles et du Théorème de PTOLEMEE. Des applications de la Seconde à la Terminale.*
Thierry Hamel (Evreux).
- 20 *Un essai géométrique pour multiplier les vecteurs de R^3 .*
Luc Sinègre (Rouen).

Deuxième Journée (Vendredi 4 Février).

- 24 *Quelques applications de l'analyse (DSE, etc...) au dénombrement et au calcul des probabilités.*
Bertrand Fort (Dieppe).
- 29 *Quelques réflexions, à partir d'un exercice du livre de Terracher. Combien y-a-t-il de bouées à six cases et cinq couleurs ?*
Gérard Lavau (Rouen).

Troisième Journée (Lundi 30 Mai).

- 38 *Les angles intérieurs et extérieurs.*
Jean Claude Jovet (Dieppe).
- 42 *Aspects anciens et modernes sur les cercles réels ou imaginaires.*
Luc Sinègre (Rouen).
- 48 *La géométrie des articulations dans le plan ou l'espace.*
Thierry Hamel (Evreux).

QUELLE EST LA PROBABILITE D'OBTENIR AU MOINS DEUX NUMEROS CONSECUTIFS AU LOTO ?

Pour modéliser le loto on choisit de tirer p numéros parmi les n premiers entiers.

1°) Il m'a semblé plus intuitif de prendre comme ensemble des possibles l'ensemble des suites strictement croissantes de p entiers parmi les n premiers (numérotés de 1 à n). Appelons $u(n,p)$ le cardinal de cet ensemble.

Une fois le plus grand numéro fixé (disons i , $i \geq p$) il me reste $p-1$ numéros à choisir parmi $i-1$. Si bien que la partition obtenue en raisonnant sur la valeur du plus grand numéro fournit la formule:

$$u(n, p) = \sum_{i=p}^n u(i-1, p-1)$$

Or, on s'aperçoit que se donner une suite strictement croissante de p nombres parmi n , revient à se donner une partie à p éléments du même ensemble. Ainsi, nous avons retrouvé la formule:

$$C_n^p = \sum_{i=p}^n C_{i-1}^{p-1} \quad (1)$$

2°) Appelons désormais $v(n,p)$ le cardinal de l'ensemble des suites strictement croissantes de p numéros non consécutifs.

Si l'on procède à la même partition, une fois le plus grand numéro placé (disons i) il reste $p-1$ numéros non consécutifs à choisir parmi $i-2$ numéros possibles.

D'autre part le plus grand numéro prend au minimum la valeur $2p-1$, car le cas le plus défavorable est $(1,3,\dots,2p-1)$. On a donc la nouvelle formule:

$$v(n, p) = \sum_{i=2p-1}^n v(i-2, p-1)$$

Comme $v(n,1) = n$, on trouve alors:

$$v(n, 2) = \sum_{i=3}^n i-2 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} = C_{n-1}^2$$

On calcule, de même que, $v(n, 3) = C_{n-2}^3$.

On a donc l'idée de démontrer par récurrence sur p : $v(n, p) = C_{n-p+1}^p$. (2)

La propriété ayant été vérifiée pour $p=1$, supposons qu'elle est vraie jusqu'au rang k fixé.

On a alors

$$v(n, k+1) = \sum_{i=2k+1}^n v(i-2, k) = \sum_{i=2k+1}^n C_{i-k-1}^k$$

par hypothèse de récurrence, et donc en posant $j=i-k$ que

$$v(n, k+1) = \sum_{j=k+1}^{n-k} C_{j-1}^k$$

On reconnaît ainsi la formule (1), ce qui permet d'écrire:

$$v(n, k+1) = C_{n-k}^{k+1}$$

et démontre l'hérédité de la proposition.

3°) On peut alors répondre à la question posée pour le loto.

Appelons A l'événement "obtenir deux numéros consécutifs au moins".

Nous venons de trouver le cardinal des cas favorables et des cas possibles et donc que

$$P(A) = 1 - \frac{v(49,6)}{u(49,6)} = 1 - \frac{C_{44}^6}{C_{49}^6} \approx 0,4952$$

4°) La formule (2) peut laisser présager une méthode directe pour calculer $v(n, p)$:

Une fois les p numéros du tirage choisis, imaginons ce qui se passe lorsqu'on les remet à leur place quand aucun d'eux ne suit l'autre. Ils iront tous se placer dans un des intervalles qui séparent les $n-p$ numéros restés à leurs places. Comme ils forment $n-p+1$ intervalles, il nous suffit de choisir p intervalles ce qui démontre:

$$v(n, p) = C_{n-p+1}^p$$

5°) Généralisation:

Si l'on veut maintenant que l'espace entre deux numéros soit supérieur ou égal à k (k fixé positif), on appelle $W(k)$ le nombre des cas favorables. Bien sûr $W(0) = C_n^p$ nous venons de démontrer que $W(1) = C_{n-p+1}^p$

Calculons ce qui se passe pour $k=2$. Si nous tirons les p numéros, et si ensuite nous cherchons à les replacer dans les $n-p+1$ intervalles ils ne peuvent revenir dans deux intervalles adjacents si bien que

$$W(2) = v(n-p+1, p) = C_{n-2(p-1)}^p$$

Ce raisonnement se poursuit facilement par récurrence, et pour tout entier positif k fixé

$$W(k) = C_{n-k(p-1)}^p$$

(On prend la convention classique que le coefficient binomial C_n^p est nul lorsque $n < p$).

6°) Le cas des marches négatives.

Cette formule nous rappelle la définition des combinaisons avec répétition. Nous avons donc envie d'appeler résultat avec écart de -1 un tirage "du Loto" avec répétition possible.

Pour dénombrer ces nouveaux types de tirage, imaginons la modification suivante. Nous rajoutons aux n numéros initiaux, $p-1$ jokers, symbolisés par la lettre A. Une fois le tirage de p boules effectué, on l'ordonne par ordre croissant, et chaque joker, resté attaché au numéro qui le précède lors du tirage, permet la répétition.

Exemple avec $p=6$: le tirage 9AA4A5, devient 4A59AA après la première opération, ce qui donne 445999.

Si le joker arrive en premier il restera attaché au dernier numéro tiré.

A8A2AA, devient 2AAA8A, soit 222288. Par construction nous dénombrons C_{n+p-1}^p tirages possibles.

On effectue ainsi une bijection entre nos tirages et les parties de p boules parmi n avec répétition.

$$W(-1) = C_{n+p-1}^p = \Gamma_n^p$$

Pour aller encore plus loin il faut en plus rajouter $p-1$ jokers B qui, eux, permettent d'enlever une unité au numéro précédent (avec toujours la même convention pour le début).

Exemple avec $p=6$: le tirage 8A3B-10-A devient 3B8A-10-A ce qui donne 3288-10-10.

BA81B5 devient 1B5BA8 qui donne 105448.

Ainsi à l'arrivée l'on obtient des suites croissantes "avec un infléchissement de 1":

$$W(-2) = C_{n+2(p-1)}^p$$

En conclusion, cette étude permet donc de dénombrer les suites croissantes de p nombres parmi n :

$k > 0$ -----suites croissantes avec saut au moins k entre deux nombres.	$W(k) = C_{n-k(p-1)}^p$
$k = 0$ -----suites strictement croissantes	$W(0) = C_n^p$
$k = -1$ -----suites croissantes	$W(-1) = C_{n+p-1}^p$
$k = -k' < 0$ -----suites croissantes avec une tolérance d'une faiblesse d'au plus $ k $ entre deux.	$W(k) = C_{n+k(p-1)}^p$

Conclusion: Pour tout entier relatif k , l'ensemble \mathfrak{W}_k des suites (a_1, a_2, \dots, a_p) k -croissantes des n premiers entiers, c'est-à-dire l'ensemble des suites qui vérifient la condition

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad a_{i+1} - a_i \geq k + 1$$

a pour cardinal $W(k) = C_{n-k(p-1)}^p$.

Bibliographie: Arthur Engel

L'enseignement des Probabilités et de la Statistique, tome 1.

Cedic 1979 (épuisé mais disponible à la bibliothèque de l'IREM).

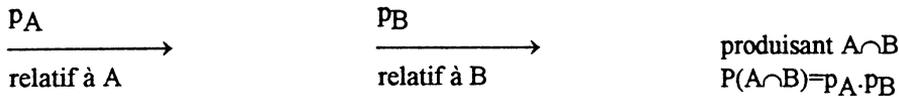
LES PROBABILITES "EN GRIMPANT AUX ARBRES".

Jean Claude Jovet a d'abord exposé comment représenter et introduire les probabilités en Lycée au moyen de diagrammes figurant des arbres (même dans les cas de non équiprobabilité). Les détails de cette présentation sont donnés dans la brochure "Probabilités pour le Lycée 2" dont on a extrait les paragraphes suivants:

Pré-requis: Notions élémentaires sur les ensembles.
Notions élémentaires sur les probabilités.

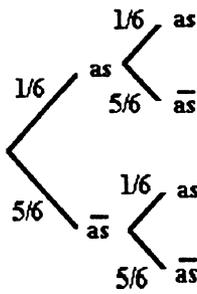
Schématisation d'une probabilité

Préambule: Mon expérience pédagogique dans l'initiation des probabilités, m'a convaincu qu'il semblait très bien perçu par les élèves de traduire la conjonction de deux événements par un schéma du type:



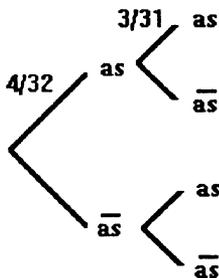
Exemples:

1 On lance deux dés, probabilité d'obtenir deux as?



$$P(\text{"2as"}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2 On tire successivement deux cartes d'un jeu de 32, probabilité d'obtenir deux as?



$$P(\text{"2as"}) = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

On s'aperçoit alors qu'on a utilisé le même graphique pour deux situations différentes, dans l'exemple 1 les événements sont indépendants, alors que, dans le second, les flèches traduisent les probabilités conditionnelles. Il est donc intéressant de proposer une notation différente pour les deux situations:

Evènements indépendants:



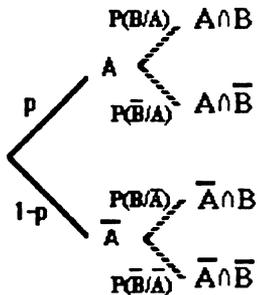
Evènements liés:



Remarque: cette notation s'adapte bien également au cas de produits d'espaces de probabilités.

Probabilités conditionnelles.

On a $P(A).P(B/A) = P(A \cap B)$



Le schéma établit que $P(. / A)$ est une probabilité.

Le lecteur vérifiera qu'avec ce formalisme on peut présenter ou interpréter toutes les formules fondamentales des probabilités conditionnelles.

On a ensuite mis à l'épreuve ces diagrammes et ces méthodes pour résoudre la série d'exercices suivants:

EXEMPLES.

Pour chacun des exercices qui suivent, on a indiqué, à droite, l'arbre qui permettra à l'élève de se guider.

1) La Météo Capricieuse:

Dans une région que l'on se refuse à nommer, s'il fait beau aujourd'hui, il y a 2 chances sur 10 qu'il pleuve demain. Par contre, s'il pleut aujourd'hui, il y a 6 chances sur 10 qu'il pleuvra demain. On suppose, bien sûr, que la prévision se réduit à l'alternative, pluie/soleil.

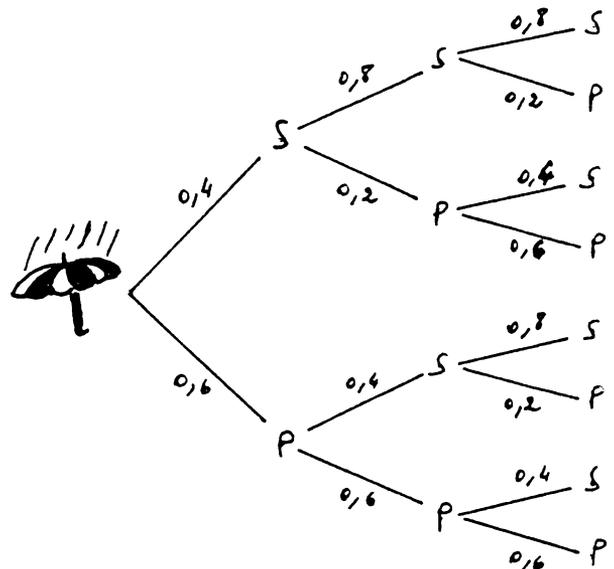
Calculer la probabilité des événements suivants:

- " Il fera beau dimanche, sachant que l'on est jeudi et qu'il pleut".
- " Il y aura au moins une journée de pluie avant mercredi sachant qu'on est dimanche et qu'il pleut".

Un voyageur quitte le pays sous la pluie le mardi et revient le vendredi sous le soleil.

Calculer la probabilité des événements suivants:

- " Il a fait beau mercredi et jeudi ".
- " Il a plu jeudi".



Q1	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	R1	0,624
Q2	D	L	M	Me		
Q3	Me	Me	J	V		

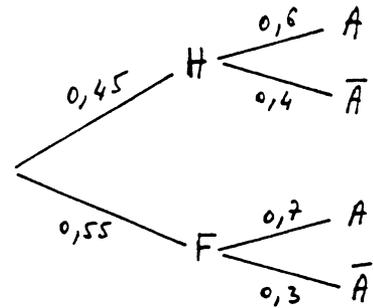
2) Les ELECTIONS:

Aux élections présidentielles 60% des hommes votent pour le candidat A, qui est aussi le candidat de 70% des femmes.

On choisit une personne au hasard dans cette population qui contient 55% de femmes.

Quelle est la probabilité que:

- Cette personne vote A?
- Cette personne soit une femme sachant qu'elle vote A?



R1: 0,655 R2: 0,587...

3) EN TC: (Référence Fractal Tc page 37).

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher, dont 2 verts et 3 blancs. On effectue des tirages successifs de jetons de l'urne de la façon suivante:

- si l'on obtient un jeton blanc, ce jeton est remis dans l'urne avant de procéder au tirage suivant;
- si l'on obtient un jeton vert, ce jeton est remplacé dans l'urne par un jeton blanc, avant de procéder au tirage suivant;
- lorsque les deux jetons verts ont été tirés, on s'arrête.

On appellera phase la double opération qui consiste à tirer un jeton puis à le remettre ou à le remplacer dans l'urne. Le but de l'exercice est de décrire l'état de l'urne après une succession de phases.

1°) On étudie les résultats possibles de deux tirages consécutifs. Il sera commode de désigner un tel résultat par un mot formé à l'aide des deux lettres B et V. Décrivez l'ensemble des résultats possibles, en indiquant la probabilité de chacun d'eux.

2°) On effectue une succession de n tirages (n>0) et on considère les événements suivants:

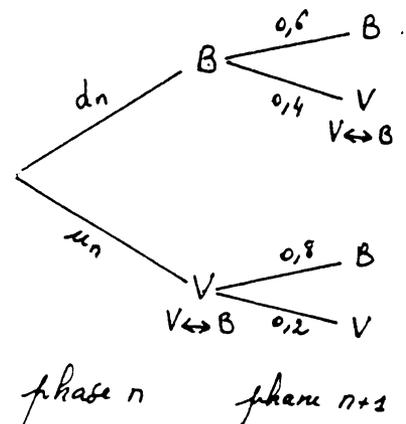
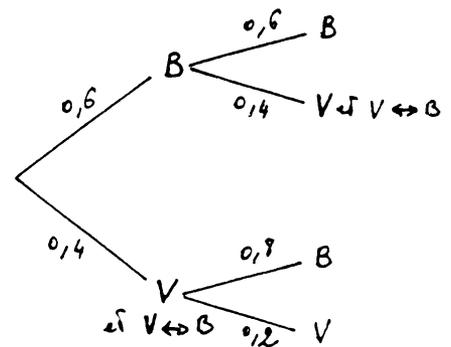
D_n : "A la fin de la n-ième phase, l'urne contient deux jetons verts."

U_n : "A la fin de la n-ième phase, l'urne contient un seul jeton vert".

On note d_n , la probabilité de l'événement D_n , et u_n celle de U_n .

- Utilisez le 1°) pour calculer d_1 , u_1 , d_2 et u_2 .
- Exprimez en fonction de n la probabilité d_n .
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n on a:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n$$



3°) a) On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = u_{n-1} + 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

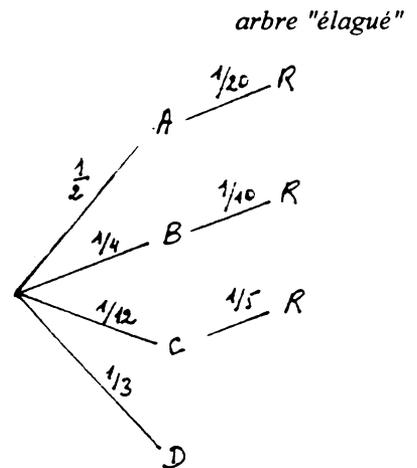
Montrez que l'on a $v_1 = 8/5$ et que si n est supérieur à 1 $v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n$.

b) Déduisez en v_n puis u_n en fonction de n .

4) (HEC mais aussi toutes classes).

Pour se rendre au Lycée un élève a le choix entre quatre itinéraires, A, B, C, D, qu'il choisit respectivement avec des probabilités de $1/3, 1/4, 1/12, 1/3$. Pour chacun des itinéraires précités la probabilité qu'il arrive en retard est estimée respectivement à $1/20, 1/10, 1/5, 0$.

Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C sachant qu'il vient d'arriver en retard?



R: 2/7

5) CHAINE DE MARKOV.

3 enfants jouent à la balle.

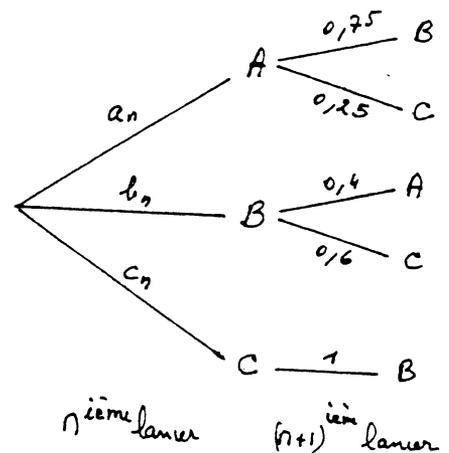
Si A a la balle, il la renvoie sur B trois fois sur quatre et sur C une fois sur quatre.

Si B a la balle, il la renvoie sur A deux fois sur cinq et sur C trois fois.

Si C a la balle, il la redonne toujours à B.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités pour qu'au n-ième lancer, A (resp B, resp C) ait la balle en main. Trouver les relations de récurrences reliant les probabilités de deux états successifs, et en déduire l'expression générale de a_n, b_n, c_n en fonction de n .

"lire", par exemple, la balle arrive à B.



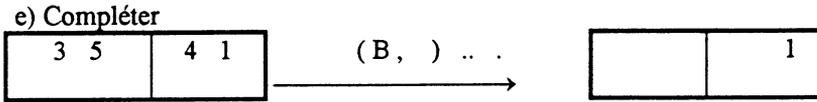
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0 \\ 0,75 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

6) INTUITION?

Le problème des trois roues:

On dispose de trois roues R, R', R" chacune d'elles étant divisée en 32 secteurs égaux.

- Sur R il y a n ($0 \leq n \leq 32$) secteurs valant 6 points et $32-n$ en valant 3.
- Sur R' il y a 16 secteurs à 5 points et 16 à 2 points.
- Sur R" il y a 25 secteurs à 4 points et 7 à 1 point.



Q2

a) Est-il possible d'avoir un état



oui-non?

Pourquoi?

b) Compléter

$$\begin{cases} b_1 + n_1 = \\ b_2 + n_2 = \\ b_1 + b_2 = \\ n_1 + n_2 = \end{cases}$$

c) Justifier

$$\begin{cases} 1 \leq n_1 \leq 6 \\ 2 \leq b_1 \leq 7 \end{cases}$$

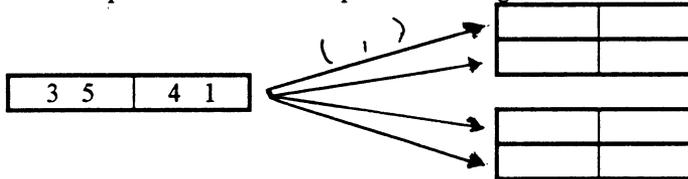
d) Préciser les conditions sur b_2 et n_2

$$\begin{cases} \leq n_2 \leq \\ \leq b_2 \leq \end{cases}$$

e) Expliquer pourquoi la donnée d'un des quatre nombres b_1, n_1, b_2 ou n_2 définit un état.

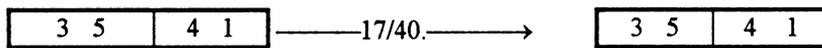
f) Combien y-a-t-il d'états possibles? Les décrire.....

Q3 Ecrire les 4 états possibles à l'issue du premier échange



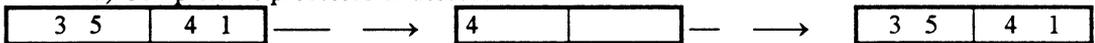
Quelle est la probabilité de retrouver l'état initial -+-=- - ?

On note pour la suite

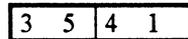


Q4 A l'issue du premier échange, on procède à un second échange, et on s'intéresse uniquement aux échanges redonnant l'état initial.

a) Compléter le processus ci-dessous:



la probabilité de revenir à

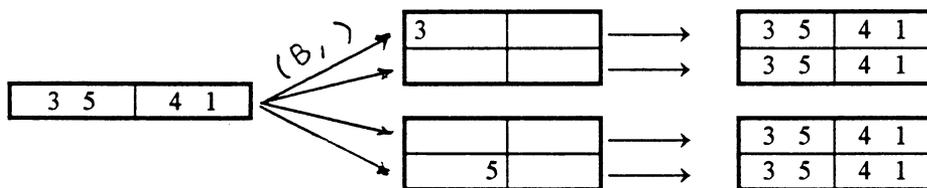


en deux échanges et en passant par l'état



est -x--=- - ?

b) Compléter le diagramme ci-dessous qui permet de retrouver l'état initial après deux échanges (on pourra utiliser Q3):



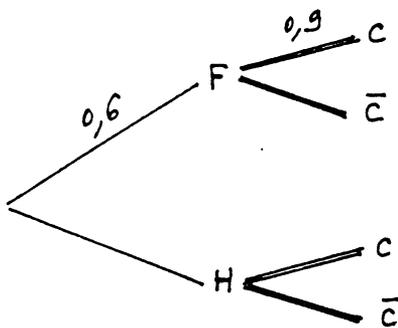
Q5 Conclusion: Quelle est la probabilité de retrouver l'état initial après deux échanges?

8) Voici un dernier exemple tout à fait dans l'esprit des programmes actuels.

Dans une population comportant 60% de femmes, on note que neuf femmes sur dix possèdent un chien, tandis que les hommes ne possédant pas de chien représentent seulement un vingtième de la population globale. On choisit une personne au hasard. Calculer la probabilité pour que cette personne:

- a) soit un homme
- b) ne possède pas de chien sachant que c'est une femme.
- c) ne possède pas de chien sachant que c'est un homme.
- d) possède un chien.

Commentaire: tout élève ayant compris l'énoncé doit dresser l'arbre ci-dessous:



← $H \cap \bar{C}$ avec $p(H \cap \bar{C}) = \frac{1}{20} = 0,05$
 dès lors, toutes les réponses "coulent de source".

- a) 0,4 b) 0,1 c) 0,125 d) 0,89

*Bibliographie: Les Probabilités pour le Lycée 2, appendice. Publication de l'IREM de Rouen.
 Arthur Engel: l'enseignement des Probabilités et de la Statistique, tome 1. Cedic 1979.*

EXPOSE SUR LE THEOREME DE PTOLEEMEE.

Cet exposé trouve son origine dans l'élaboration d'un contrôle que j'ai voulu proposer aux élèves de la classe de 1èreS, à qui j'enseignais la Beauté des Mathématiques, il y a quelques années, au Lycée "A.Briand" d'Evreux. Ce devoir devait porter sur une démonstration de la formule de Brahmagupta, formule qui donne l'aire d'un quadrilatère inscrit dans un cercle en fonction de ses côtés, à savoir :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où p est le demi-périmètre du quadrilatère. Cette formule qui est au quadrilatère inscrit ce qu'est la formule de Héron au triangle ($S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$), peut être considérée comme une application de la formule d'Al-Kashi qui, pour sa part, est en général bien assimilée par l'élève moyen de 1èreS, puisqu'elle ne fait que généraliser d'une certaine façon le théorème de Pythagore¹.

Tandis que je décortiquais la dite-formule de Brahmagupta, j'en vins à me demander:

(1) Mais, au fait, pourquoi ne se généraliserait-elle pas à tout quadrilatère?

(2) La formule d'Al-Kashi faisant intervenir les diagonales du quadrilatère, n'y aurait-il pas moyen d'utiliser le théorème de Ptolémée?

Je dus me rendre compte alors que:

(1) Oui, la formule se généralisait bien à tout quadrilatère.

(2) Elle était équivalente au théorème de Ptolémée

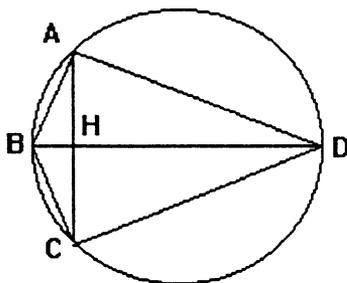
Il m'apparut enfin que ce dernier était non seulement à la portée de mes élèves, mais surtout qu'il avait cette qualité d'être démontrable de mille façons différentes².

Ce qui suit se veut être une présentation de quelques-unes de ces démonstrations. On commencera par de simples cas particuliers que des élèves de seconde peuvent aborder sans difficulté majeure, on passera ensuite au niveau 1ère S et on terminera sur des démonstrations générales utilisant les outils de T.C, notamment les nombres complexes et les similitudes. C'est d'ailleurs à l'aide de ces transformations qu'on pourra apprécier la plus synthétique (sans doute la plus astucieuse!..) des preuves du fameux théorème. En fin d'exposé, on trouvera une démarche montrant l'équivalence entre le théorème de Ptolémée et la formule de Brahmagupta.

Exercice n°1:

Cet exercice pourrait en fait très bien figurer dans une séance de T.P. en classe de 3ème. Il n'est fait appel effectivement qu'à l'aire du triangle (rectangle!..) et à la propriété de conservation des distances par les réflexions.

On considère un cercle de diamètre [BD], A un point du cercle (non situé sur ce diamètre!), H son projeté orthogonal sur [BD] et C son symétrique par rapport à [BD]



1°) Démontrer que : $AB \cdot CD = AB \cdot AD = AH \cdot BD$

2°) Que peut-on dire de façon analogue du produit $BC \cdot AD$?

3°) En déduire l'égalité $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

¹ Rappels: La formule d'Al-Kashi s'écrit : $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$, où γ représente l'angle géométrique ACB. Quant à Al-Kashi, indiquons à ceux du fond qu'il n'est pas un mathématicien suisse du XIX^{ème} né à Aspirine, mais bien comme son nom semble le signaler, un savant arabe du XV^{ème}...

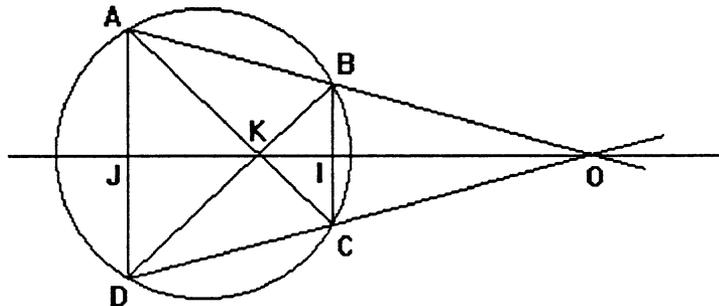
Brahmagupta, lui, est un hindou du VII^{ème} et Héron, un Alexandrin du II^{ème}...

² Bien sûr, mille n'est qu'un ordre de grandeur.

Exercice n°2:

Ici, on chante l'hymne à Thalès sur l'air des homothéties, refrain au c(h)oeur de la partie "géométrie" du programme de seconde...L'exercice est présenté avec un paramètre, qu'on choisira évidemment et numériquement au moment de la répétition générale.

On considère un trapèze isocèle, tel que les côtés (AB) et (CD) se coupent en O à l'extérieur du cercle circonscrit au trapèze, avec $OA > OB$.



- 1°) Montrer qu'il existe une homothétie de centre O qui envoie B sur A et C sur D. On appellera m son rapport.
- 2°) Montrer que $AB = (m-1).OB$.
- 3°) Quelle est l'image de B par l'homothétie de centre K qui envoie C sur A? Quel est son rapport?
- 4°) En déduire la valeur de BD en fonction de m et de KB.
- 5°) Etablir les égalités : $IJ = (m-1).IO = (m+1).IK$.
- 6°) En utilisant les homothéties précédentes, montrer la formule : $AB.CD + BC.AD = AC.BD$.

Correction :

1°) Comme ABCD est un trapèze, on sait qu'il existe une homothétie unique qui envoie B sur A et C sur D. (Pour le redémontrer, on introduit l'homothétie de centre O qui envoie B sur A ; l'image de C se trouve à l'intersection de (OC) et de la parallèle à (BC) passant par A ...)

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (m-1).\vec{OB} \text{ d'où } AB = (m-1).OB \text{ avec } m > 1.$$

3°) L'image de B par l'homothétie de centre K qui envoie C sur A, se trouve à l'intersection de (BK) et de la parallèle à (BC) passant par A autrement dit en D! Son rapport est :

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -m$$

(Cela résulte des configurations de Thalès dans les triangles KBC et KAD d'une part, dans les triangles OBC et OAD d'autre part.)

$$4°) \vec{DB} = \vec{KB} - \vec{KD} = m.\vec{KB} + \vec{KB} = (m+1).\vec{KB} \text{ d'où } BD = (m+1).KB$$

5°) L'homothétie de la première question envoie I, le milieu de [BC] sur J le milieu de [AD], de sorte que :

$$\vec{IJ} = \vec{OJ} - \vec{OI} = (m-1).\vec{OI} \text{ d'où } IJ = (m-1).OI$$

En recommençant le même raisonnement avec la seconde homothétie on obtient:

$$\vec{IJ} = \vec{IK} + \vec{KJ} = \vec{IK} + m.\vec{IK} = (m+1).\vec{IK} \text{ d'où } IJ = (m+1).IK.$$

6°) La droite (IJ) étant un axe de symétrie du trapèze, on peut écrire :

$$\begin{aligned} AB.CD + BC.AD - AC.BD &= AB^2 + m.BC^2 - BD^2 = (m-1)^2.OB^2 + 4m.BI^2 - (m+1)^2.KB^2 \\ &= (m-1)^2.(BI^2 + IO^2) + 4m.BI^2 - (m+1)^2.(KI^2 + IB^2) \\ &= BI^2 .((m-1)^2 + 4m - (m+1)^2) = 0. \end{aligned}$$

Remarque : Thalès, on aime...mais Descartes, c'est pas mal non plus! Aussi ne serait-il pas de mauvais goût d'essayer une démonstration analytique . On peut choisir le repère d'origine J, d'axe des abscisses (IJ) et d'axe des ordonnées (AD) .

On peut poser: A (0;1) , B (a;b) , C (a;-b) , D (0;-1)

On en déduit:

$$AD = 2 ; BC = 2b ;$$

$$AB \cdot CD = AB^2 \text{ (par symétrie)} = a^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 + 1 - 2b$$

$$\text{de même } AC \cdot BD = AC^2 = a^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2b$$

On a bien :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + 4b = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

(Les valeurs de a et b sont laissées à l'appréciation de l'auditeur...)

Exercice n°3 :

Testé et approuvé au cours de travaux dirigés en 1èreS, cet exercice utilise les lignes trigonométriques ordinaires. Il fait par ailleurs discrètement référence aux travaux du maître Ptolémée, qui devait s'y prendre de façon relativement semblable pour compléter ses tables de "longueurs de cordes".

Sur un cercle C , on considère quatre points A, B, C, D tels que [A,C] soit un diamètre de longueur 1 et tels que B et D soient situés de part et d'autre de ce diamètre.

On note β l'angle ACB et γ l'angle ACD.

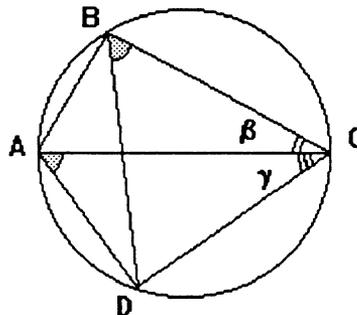
1°) Calculer en fonction de β et de γ les distances AB, BC, CD, DA.

2°) Montrer que l'on a:

$$\frac{\sin CAD}{CD} = \frac{\sin BCD}{BD}$$

En déduire $BD = \sin(\beta + \gamma)$.

3°) Quelle formule de trigonométrie retrouve-t-on avec le théorème de Ptolémée?



Correction:

1°) Dans les triangles ABC et ADC, rectangles respectivement en B et C ([A,C] est un diamètre!), on lit directement:

$$\sin \gamma = AD, \cos \gamma = CD, \sin \beta = AB \text{ et } \cos \beta = BC \text{ en utilisant le fait que } AC = 1.$$

2°) Dans le triangle BCD, on peut écrire:

$$\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{CD}{\sin CBD} = \frac{CD}{\sin CAD}$$

les angles CBD et CAD ayant même sinus puisqu'ils interceptent le même arc, inscrits tous deux dans le même cercle. On en déduit :

$$\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{CD}{\cos \gamma} = 1$$

$$\text{puis } BD = \sin BCD = \sin(\beta + \gamma)$$

3°) On peut écrire en reprenant les résultats ci-dessus les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} BD \cdot AC &= BD && \text{car } AC = 1 \\ BD &= \sin(\beta + \gamma) && \text{d'après 2°) } \\ \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos\beta &= AB \cdot CD + AD \cdot BC && \text{d'après 1°) } \end{aligned}$$

Selon que l'on admet la formule du sinus d'une somme ou le théorème de Ptolémée, on obtient alors l'autre résultat!

Exercice n°4:

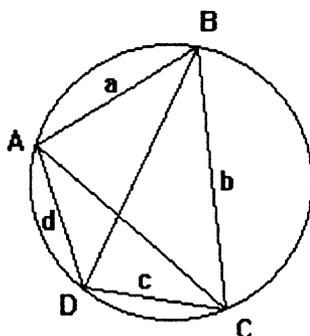
Et voilà Al-Kashi aux quatre coins du polygone permettant dans une tétraphonie cosinusoidale, une démonstration joliment "symétrique" du théorème de son ancêtre hellène.

On considère toujours quatre points points A,B,C,D sur un cercle C de sorte que B et D soient de part et d'autre de la diagonale [A,C]. On pose AB = a, BC = b, CD = c et DA = d.

En utilisant quatre fois la formule d'Al-Kashi, établir les autres formules ci-dessous:

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \quad \text{et} \quad BD^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}$$

En déduire le théorème de l'hellène ancêtre !



Correction:

Appliquons la formule d'Al-Kashi dans les triangles ABC et ACD, on obtient:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(ABC) = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(ADC)$$

Puisque les angles ABC et ADC sont inscrits dans le même cercle, interceptent le même arc AC et qu'enfin B et D sont situés de part et d'autre de cet arc, on peut affirmer que ces angles sont supplémentaires et par conséquent $\cos(ADC) = -\cos(ABC)$. Après substitution dans l'égalité ci-dessus, on obtient:

$$\cos(ABC) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

puis

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd} \\ &= \frac{a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab}{ab + cd} \\ &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \end{aligned}$$

On procède rigoureusement de la même manière dans les triangles ABD et BCD; on obtient la formule annoncée pour BD^2 et on observe avec une joie difficile à contenir comment les deux fractions se simplifient quand on les multiplie entre elles. On aboutit dans l'allégresse générale à l'égalité:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (ac + bd)^2,$$

c'est-à-dire $AC \cdot BD = ac + bd$

(version un tantinet allégée, tout du moins au niveau de l'écriture, du théorème dePtolémée.)

Exercice n°5:

"Exercice sur les complexes", disons pour élève de T.C.

On rapporte le plan complexe à un repère orthonormal $R=(O,I,J)$ et on considère quatre points A,B,C,D sur le cercle trigonométrique C , d'affixes respectifs a,b,c,d . qu'on pourra bien sûr noter:

$$a = e^{i\alpha}; b = e^{i\beta}; c = e^{i\gamma}; d = e^{i\delta}$$

Calculer les produits $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ en fonction de a,b,c,d d'abord puis en fonction de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. En déduire le théorème de Ptolémée ...

Correction:

On écrit d'abord:

$$AB^2 \cdot CD^2 = |a - b|^2 \cdot |c - d|^2 = (a - b) \cdot \overline{(a - b)} \cdot (c - d) \cdot \overline{(c - d)}$$

En tenant compte du fait que sur le cercle trigonométrique, les complexes vérifient $\bar{x} = \frac{1}{x}$, on peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot CD^2 &= (a - b) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (c - d) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \\ &= \frac{(a - b)^2 (c - d)^2}{abcd} \end{aligned}$$

On peut s'aventurer à poser :

$$\vartheta = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \text{ d'où } abcd = e^{2i\vartheta}$$

$$\text{puis } AB \cdot CD = \pm (e^{i\alpha} - e^{i\beta})(e^{i\gamma} - e^{i\delta})e^{-i\vartheta}$$

(simple résolution dans C d'une équation du type $Z^2 = \zeta^2$)

En développant, on obtient:

$$AB \cdot CD = \pm (e^{i(\alpha+\gamma-\vartheta)} + e^{i(\beta+\delta-\vartheta)} - e^{i(\alpha+\delta-\vartheta)} - e^{i(\beta+\gamma-\vartheta)})$$

$$\text{mais } \beta + \delta - \vartheta = \frac{\beta + \delta - \alpha - \gamma}{2} = -(\alpha + \gamma - \vartheta)$$

$$\text{et } \beta + \gamma - \vartheta = \frac{\beta + \gamma - \alpha - \delta}{2} = -(\alpha + \delta - \vartheta)$$

D'où, finalement :

$$AB \cdot CD = 2 |\cos(\alpha + \gamma - \vartheta) - \cos(\alpha + \delta - \vartheta)|$$

On montrerait de même que:

$$AC^2 \cdot BD^2 = \frac{(a - c)^2 (b - d)^2}{abcd} \text{ et } AD^2 \cdot BC^2 = \frac{(a - d)^2 (b - c)^2}{abcd}$$

$$\text{d'où } AC \cdot BD = 2 |\cos(\alpha + \beta - \vartheta) - \cos(\alpha + \delta - \vartheta)|$$

$$\text{et } AD \cdot BC = 2 |\cos(\alpha + \beta - \vartheta) - \cos(\alpha + \gamma - \vartheta)|$$

A ce stade, on peut certes s'estimer satisfait d'avoir converti les expressions en fonction des complexes a, b, c, d en bon réels bien de chez nous; hélas, notre satisfaction ne dépasse pas les barres de valeurs absolues....Si on veut les faire disparaître, une discussion s'impose sur la disposition des points sur le cercle C .

Bien sûr, le quadrilatère $ABCD$ n'étant pas à une rotation près, on peut, pour simplifier un peu la discussion, prendre $\alpha = 0$; on peut également supposer $0 < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$ qui correspond à un quadrilatère où les diagonales $[A,C]$ et $[B,D]$ sont bien sécantes.

On s'aperçoit alors -mais non sans mal toutefois- que les valeurs absolues peuvent être effacées et qu'on aboutit à la somme attendue, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= 2(\cos(\delta - \vartheta) - \cos(\beta - \vartheta)) \\ &= 2(\cos(\delta - \vartheta) - \cos(\gamma - \vartheta)) + 2(\cos(\gamma - \vartheta) - \cos(\beta - \vartheta)) \\ &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \end{aligned}$$

Il y a toutefois possibilité d'éviter le passage par les réels et donc cette trop fastidieuse discussion, en choisissant, non plus $\alpha = 0$, mais $\theta = 0$. Ceci est en effet tout à fait possible puisque:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 &\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow 4\alpha + AOB + BOC + COD = 0 \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}(2\pi - AOB - BOC - COD) \left[\frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

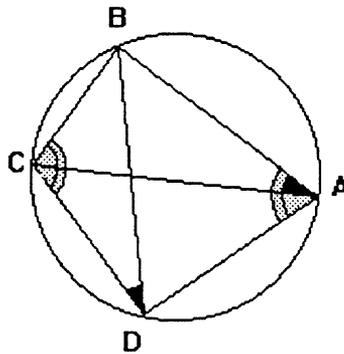
On a même quatre choix possibles dont un pour lequel α est dans l'intervalle $[0; \pi/2]$!

Ceci étant posé, le produit $abcd$ est bien égal à 1, et par conséquent, on peut écrire les formules trouvées initialement, de la façon suivante:

$$(*) \begin{cases} \varepsilon AB \cdot CD = (a - b)(c - d) = ac + bd - bc - ad \\ -\varepsilon' AC \cdot BD = -(a - c)(b - d) = ad + bc - ab - cd \\ \varepsilon'' AD \cdot BC = (a - d)(b - c) = ab + cd - ac - bd \\ \text{avec } \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \text{ dans } \{+1; -1\} \end{cases}$$

On peut noter qu'il a été fait en sorte que la somme des trois termes de droite soit bien nulle!

Vérifions maintenant que les trois ε sont de même signe (autrement dit, qu'ils sont égaux!). Pour cela, il suffit de revenir à la figure initiale:



Les angles CAB et CDB inscrits dans le même cercle, interceptent le même arc BC et de plus A et D sont situés du même côté de la corde associée (puisque les diagonales $[A,C]$ et $[B,D]$ sont supposées être sécantes) donc ils sont égaux (modulo 2π !), ce qui s'écrit:

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$

$$\text{soit } \arg\left(\frac{(b-a)(c-d)}{(c-a)(b-d)}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$

$$\text{ou encore } \frac{(b-a)(c-d)}{(c-a)(b-d)} \in \mathbf{R}_+$$

Si on se reporte aux égalités (*), ce résultat correspond exactement à $\varepsilon / \varepsilon'$ réel positif, les termes du type AB, AC...etc n'intervenant évidemment pas dans le signe. On en déduit ce qu'on voulait, à savoir $\varepsilon = \varepsilon'$

Par contre, les angles DAB et DCB inscrits dans le même cercle et interceptant le même arc DB sont supplémentaires car A et C sont de part et d'autre de la corde DB, ce qui s'écrit:

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\text{soit } \arg\left(\frac{(b-a)(d-c)}{(a-d)(b-c)}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\text{d'où } \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}_+$$

Qu'on se reporte une nouvelle fois aux égalités (*) et obtient cette fois-ci $\varepsilon / \varepsilon''$ réel positif, donc l'égalité $\varepsilon = \varepsilon''$.

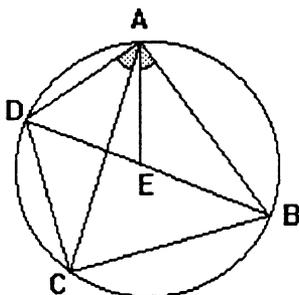
Conclusion:

$\varepsilon \cdot AB \cdot CD - \varepsilon' \cdot AC \cdot BD + \varepsilon'' \cdot AD \cdot BC = 0$ donne bien le théorème de Ptolémée après simplification par ε !

Exercice n°6 :

Cet exercice n'en est pas un en vérité, mais il est mieux que ça, il est une source d'inspiration!..Il s'agit là d'une démonstration du théorème de Ptolémée, à la fois sobre et ingénieuse, faisant appel à la notion de triangles semblables "comme à la belle époque". Si j'en crois Mme E.Barbin, dans les Actes du 8ème colloque Inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques"³, elle est due à un excellent pédagogue de la deuxième moitié du XVIIème, un certain B.Lamy, père oratorien, cela va de soit, auteur d'un modeste "Eléments de Géométrie"

On considère un quadrilatère ABCD inscrit dans cercle C de sorte que les points A et C se situent de part et d'autre de la diagonale (BD). On construit le point E sur [B,D] tel que les angles DAC et EAB soient égaux.



1°) On vérifie que E est bien sur le segment [B,D].

2°) On vérifie que les triangles ACD et ABE sont semblables de sorte à pouvoir écrire:

$$(1) \quad \left(\frac{AE}{AD}\right) = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

3°) On vérifie de même que les triangles ADE et ABC sont semblables et que:

$$(2) \quad \left(\frac{AE}{AB}\right) = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

4°) On en déduit:

$$AC \cdot BD = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot \left(\frac{AB}{AC} \cdot CD + \frac{AD}{AC} \cdot BC\right) = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad !$$

³ Pour plus de détails intéressants, ne pas manquer la lecture de l'article de l'animatrice sus-nommée de l'IREM des Pays de Loire, qui commence à la page 17, dans ces Actes édités sous le titre "La figure et l'espace" par l'IREM de Lyon.

Complément annexatoire:

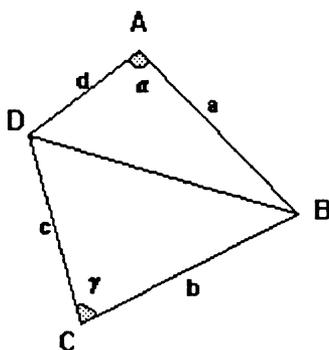
Etant donné un quadrilatère ABCD, non plus nécessairement inscrit dans un cercle mais néanmoins convexe, et cela à des fins simplificatrices, on peut, avec de petits moyens comme ceux dont on dispose, par exemple, en 1èreS, et avec des élèves motivés établir la série ci-dessous des relations métriques dans le quadrilatère convexe:

[On utilisera systématiquement les notations suivantes:

a, b, c, d	pour les côtés AB, BC, CD, DA;
p	pour le demi-périmètre $(a+b+c+d)/2$;
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	pour les angles DAB, ABC, BCD, CDA;
S	pour l'aire;
θ	pour l'angle que font les diagonales.(orienté par exemple de AC vers BD)]

(1) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 2.(ad.\cos\alpha - bc.\cos\gamma)$

(simple généralisation de l'exercice n°4 à un quadrilatère quelconque)



(2) $2.S = ad.\sin\alpha + bc.\sin\gamma$

(trivial)

(3) $16.S^2 = 4.(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 8.abcd.[1 + \cos(\alpha + \gamma)]$

(résulte de (1) et (2))

(4) $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - [abcd.[1 + \cos(\alpha + \gamma)]]/2$

ou $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd.\cos^2((\alpha + \gamma)/2)$

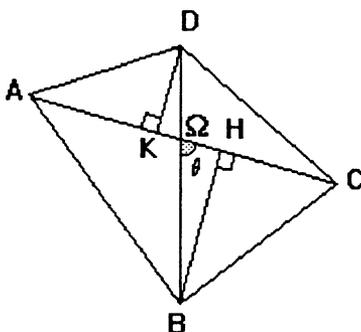
[cela résulte de l'identité remarquable:

$$16.(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) = 4.(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= 4.(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

$$= 4.(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$$

(5) $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\theta$ (cf figure ci-dessous!..)



(6) $\vec{AC}.\vec{BD} = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)$ ou encore $AC.BD.\cos\theta = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)$

(cf figure ci-dessus!..)

(7) $AC^2.BD^2 = (ac + bd)^2 - 2.abcd.[1 + \cos(\alpha + \gamma)]$

(résulte directement de ce qui précède)

Conclusion:

Non seulement on retrouve le théorème de Ptolémée et la formule de Brahmagupta concernant les quadrilatères inscrits, mais on a simultanément leur réciproque, et même un peu mieux que ça, si on fait intervenir le signe du terme $abcd \cdot [1 + \cos(\alpha + \gamma)]$ qui se soustrait dans les deux formules. Ce terme étant toujours positif (*on a même remarqué que c'était le carré de $\cos[(\alpha + \gamma)/2]$*), on doit se rendre à l'évidence suivante:

Etant donné un quadrilatère (convexe) ABCD "articulé", autrement dit dont les côtés ont des longueurs fixées à l'avance, son aire et le produit de ses diagonales sont maximaux quand il est inscrit et seulement dans cette situation, ce que l'on peut encore synthétiser par la suite d'équivalence suivante:

$\begin{aligned} & \text{ABCD inscrit} \\ \Leftrightarrow & \alpha + \gamma \text{ (resp } \beta + \delta) = \pi \\ \Leftrightarrow & S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ \Leftrightarrow & AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \end{aligned}$

(fin de l'exposé).

QUELQUES ESSAIS POUR MULTIPLIER LES VECTEURS AU XIX^{ème} SIECLE.

1 INTRODUCTION

Les premiers auteurs qui introduisent la représentation géométrique des nombres complexes, Wessel, puis Argand, font en même temps, très tôt, des tentatives pour trouver une multiplication qui généraliserait à l'espace la géométrie complexe du plan.

Argand¹ introduit, par exemple, des angles imaginaires pour "sortir" du plan complexe et se demande si le domaine des nombres est refermé sur l'ensemble des imaginaires:

"Si ces notions étaient admises, la question souvent agitée de savoir si toute fonction peut être ramenée à la forme $p + q\sqrt{-1}$ se trouverait résolue négativement".

Il écarte aussitôt les objections que l'on va lui faire: les démonstrations qui prouvent le contraire reposent soit sur l'extrapolation de la théorie des séries à un champ inconnu², soit sur l'emploi des logarithmes³.

La réponse de M. Français⁴ rappelle qu'Euler⁵ a démontré que l'expression $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ n'est pas imaginaire mais égale à $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

On retrouve ce même souci de généralisation chez Gauss. Hamilton a rappelé, dans une lettre de 1853 à De Morgan, qu'il avait des raisons privées de croire que le mathématicien allemand, tout en cherchant lui aussi une représentation, n'avait pas anticipé la découverte des quaternions (c'est une de ses obsessions après 1843). En effet, le Baron von Walterhausen (au second meeting de la British Association en 1845) lui aurait appris que "son ami et maître Gauss avait pendant longtemps souhaité organiser une sorte d'Algèbre Triple, mais que son idée avait été de dénoter symboliquement la troisième dimension de l'espace par une nouvelle unité transcendante, aussi imaginaire pour $\sqrt{-1}$, que cette dernière unité, pour 1"⁵.

Mais s'il paraît naturel que les mathématiciens aient tout de suite cherché à découvrir un système algébrique qui ne se cantonnât pas au plan, il est plus étonnant de constater que la découverte des quaternions en 1843 n'a pas arrêté immédiatement ces recherches.

En Grande-Bretagne des mathématiciens comme les frères Graves, De Morgan (ou même Cayley⁶), continuent encore de chercher et de publier dans les années quarante sur des algèbres doubles ou triples définies par des systèmes arbitraires de relations.

Ces systèmes devinrent surtout intéressants après que la découverte des quaternions eut permis de dépasser les règles de permanence qu'avait posées Peacock. Mais on peut déceler des différences importantes entre la manière et le dessein qu'avait Hamilton et tous ces travaux de l'école anglaise.

La position du papier.

Pendant les dix ans qui vont séparer les travaux algébriques sur les couples et la découverte des quaternions en 1843, Hamilton ne publie rien sur ce sujet. Il nous reste heureusement l'historique qu'il a dressé lui-même dans la Préface des "*Lectures on quaternions*".

Il y essaie de rappeler toutes ses intuitions et toutes les incitations extérieures qui auraient pu l'influencer.

La plupart de ces travaux sur les triplets furent impulsés par des échanges de courrier avec son ami J.T Graves et donc non édités, comme, par exemple, il l'écrit à propos du papier de De Morgan "Triple Algebra":

" Mes symboles x_1 et x_2 (de 1834-35) n'avaient pas encore été publiés, et ne lui étaient pas connus par d'autres voies;....; mais ils ne me satisfaisaient pas car je les tenais pour insuffisamment 'définis'"⁷.

¹ Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires. Paris Blanchard 1971.

² "Il arrive souvent en effet dans l'Analyse qu'une série qui, par sa nature ne peut exprimer que des quantités réelles, prend une valeur ou plutôt une forme infinie lorsqu'elle doit représenter une quantité imaginaire".

³ "On n'a pas encore des notions bien précises sur les logarithmes imaginaires".

⁴ Annales de Mathématiques. Tome IV p222-235.

⁵ Life of Sir R.W. Hamilton (Graves. Arno Press 1975 II489-490).

⁶ Philosophical Magazine vol XXVII (1845) pp-38-40.

⁷ Preface to Lectures on quaternions 1853 §43.

La position du problème:

Le problème qui est posé à tous les mathématiciens qui recherchent une généralisation des nombres complexes est de construire un système engendré par trois unités (contenant 1 et i) et supportant les lois de l'algèbre ordinaire. Ils recherchent donc une extension commutative de \mathbb{R} de degré 3 contenant \mathbb{C} .

De plus, ces nombres doivent traduire naturellement la géométrie euclidienne, donc doivent supporter la loi des modules:

$$\text{Module du produit} = \text{produit des modules.}$$

Dans la Préface, les différentes tentatives ne sont pas exposées chronologiquement. Hamilton commence par une généralisation algébrique qu'il interprète ensuite géométriquement. Il rappelle, ensuite, deux tentatives géométriques séparées par cinq ans, sans doute après avoir compris ce qui les unifiait, puis différents autres essais d'ordre trigonométrique, postérieurs, qui lui donnent l'occasion de rappeler que cette voie fut la première qu'il ait choisi dans les années trente. D'autre part Hamilton ne donne aucune tentative personnelle après 1835, et nous laisse donc comprendre qu'il était persuadé dès cette époque de l'impossibilité d'aboutir par les voies ordinaires.

J'ai choisi d'exposer ici la première tentative de 1831. C'est une tentative géométrique, à l'opposé d'un autre essai, effectué en 1835, qui lui est algébrique. Hamilton y explique comment il s'est convaincu qu'il n'était pas possible de généraliser à l'espace le système d'Argand.

Les manières d'aborder la question dans ces deux séries de recherches sont réciproques, puisque dans le premier cas il s'agit de trouver un système géométrique astucieux prolongeant les propriétés géométriques des nombres complexes et de regarder, ensuite, si les lois vérifient ou non les contraintes. A l'inverse dans la seconde méthode on essaie de poser les propriétés générales des lois puis l'ensemble des relations qu'elles induisent sur les unités.

2. UNE TENTATIVE GEOMETRIQUE

Toutes les tentatives géométriques reposent sur l'idée suivante:

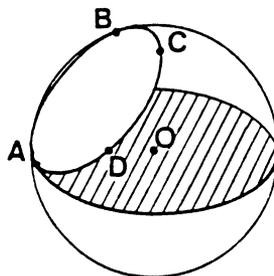
Définir une multiplication sur la sphère unité S_2 , que l'on étendra, ensuite, à l'espace tout entier par la loi des modules.

Les constructions géométriques de Hamilton.

La sphère unité a pour centre O . OA est la ligne 1, il s'agit de multiplier deux lignes données OB et OC , le résultat est OD .

En 1831, Hamilton se place sur le petit cercle circonscrit à ABC (si $B \neq C$), D sera le point de ce petit cercle tel que $\text{arc}(AB) = \text{arc}(CD)$ (en tenant compte de l'orientation).

D est donc construit comme une "quatrième proportionnelle de A, B, C sur ce petit cercle.



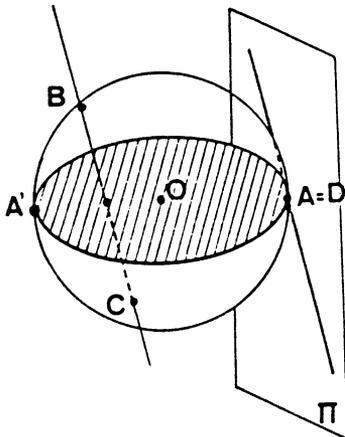
Il modifie ensuite légèrement sa définition pour obtenir les carrés:

D sera construit comme la seconde intersection de la parallèle à (BC) passant par A, δ , et de la sphère, et dans le cas d'un point double on remplacera δ , par la tangente au grand cercle de la sphère défini par le point et A⁸.

Les objections qu'il note à propos de cette méthode sont de deux ordres.

1) "l'indétermination quant à la construction de la réciproque d'une ligne".

En effet si (BC) est parallèle à Π , le plan tangent à la sphère en A, la construction nous amène à prendre D en A. Et B restant fixé, une infinité de points C remplissent la condition.



2) "Il y avait aussi la grande et (il me semblait) fatale objection à cette méthode de construction, elle ne préservait pas le principe distributif de la multiplication; le produit de sommes n'étant pas égal à la somme des produits."⁹

C'est cet argument qui l'incite à abandonner définitivement la méthode.

3.CONCLUSION

Nous n'avons pas eu le temps, pendant ce bref moment consacré à l'histoire des mathématiques de retrouver les formules analytiques de cette multiplication qui sont, pour deux rayons vecteurs exprimés en x, y, z, (r est la norme), x', y', z', r', avec un résultat en x'', y'', z'':

$$\frac{x'' - rr'}{rx' - xr'} = \frac{y''}{ry' - yr'} = \frac{z''}{rz' - zr'} = \frac{rx' - xr'}{p - rr'}$$

$$(p = xx' + yy' + zz')$$

Le lecteur pourra alors (comme le fait Hamilton lui-même) faire dériver ces formules des trois équations suivantes:

$$1) \quad xx'' + yy'' + zz'' = r^2 x'$$

$$2) \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = r'^2 x$$

$$3) \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2 r'^2$$

La troisième équation traduit immédiatement le morphisme des modules.

⁸ Ceci vient de l'exercice de géométrie élémentaire: "Etant donnés quatre points cocycliques, AB=CD si et ssi (AD)// (BC)"

⁹ Preface §37

La seconde est l'équation cartésienne du cône d'axe OC et de demi-angle au sommet \widehat{AOB} .

$$\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{COD}) \quad 10$$

C'est cette interprétation géométrique qui nous permet de comprendre exactement comment Hamilton a construit son système. Il a sans doute vu *a posteriori*, au moment où il a posé ce système commun d'équations comment cette égalité d'angles généralise la méthode d'Argand.

Si nous nous contentons, pour raisonner, de reprendre nos points A, B, C et D sur la sphère unité, il s'agit d'y trouver un point D tel que l'angle \widehat{AOB} soit identique à l'angle \widehat{COD}

D'une façon générale, les points A, B, C étant fixés sur la sphère l'angle \widehat{AOB} est connu; il faut donc pour construire D rechercher l'intersection de la sphère avec le cône d'axe (OC) et de demi-angle au sommet \widehat{AOB} .

Mais nous n'avons considéré que les équations 2) et 3). L'équation 1) aboutit à un problème équivalent avec le cône d'axe (OB) et de demi-angle \widehat{AOC} , cette symétrie provient, bien sûr, de l'hypothèse implicite de commutativité pour la multiplication des lignes.

Cet échec pour généraliser n'apparaît donc pas seulement comme une tentative avortée parmi d'autres. Hamilton nous indique qu'il a fermé, alors, définitivement une direction de recherches, car tout autre essai du même type l'aurait ramené à ces deux cônes.

Bibliographie:

*pour des prolongements sur ces tentatives géométriques ou algébriques
Quelques essais pour multiplier les vecteurs de l'espace. IREM de Rouen.*

10 $ie \frac{x'x''+y'y''+z'z''}{r''} = \frac{x'}{r'}$

SERIES ENTIERES ET DENOMBREMENTS

Il s'agit de montrer, à l'aide de 3 exemples, comment les séries entières peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes de dénombrement ou de probabilité.

Etant donné une suite $(a_n) \in \mathbb{C}$, on lui associe la série entière $\sum a_n z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$

On définit $A_n(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$, et $A(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(z)$ dans le cas de convergence. On note alors $A(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$, et on dit que la série $\sum a_p z^p$ est convergente.

Théorème S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $M > 0$ tels que, pour tout n , $|a_n z_0^n| \leq M$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Produits de Cauchy Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières absolument convergentes pour $|z| < R$, $A(z)$ et $B(z)$ leur somme respective. Alors il existe une série entière $\sum c_n z^n$, de somme $C(z)$, absolument convergente pour $|z| < R$, telle que $A(z)B(z) = C(z)$. De plus, $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$. C'est ce nombre qu'on appelle $n^{\text{ème}}$ produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

On lance 5 dés. Soit S la variable aléatoire indiquant la somme des points marqués. Loi de probabilité de S ?

1 Fonction génératrice.

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans N. On introduit la série entière

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) z^n$$

Cette série converge pour $z=1$, car $G_X(1) = 1$, donc son rayon est au moins égal à 1.

Théorème: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans N.

Alors $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$.

Preuve Soit l'événement $(X + Y = n)$.

$$(X + Y = n) = \bigcup_{p=0}^n [(X = p) \cap (Y = n - p)]$$

Cette réunion étant disjointe,

$$P(X + Y = n) = \sum_{p=0}^n P[(X = p) \cap (Y = n - p)]$$

Mais X et Y étant indépendantes,

$$P[(X = n) \cap (Y = n - p)] = P(X = p) \cdot P(Y = n - p)$$

Dans le produit $G_X(z) \cdot G_Y(z)$, le coefficient de z^n est $\sum_{p=0}^n P(X = p) \cdot P(Y = n - p)$, c'est donc $P(X + Y = n)$.

Corollaire: Ici, $G_S(z) = [G_X(z)]^5$

2 Mise en place

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de points marqués par un dé.

$$G_X(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = \frac{z(1 - z^6)}{6(1 - z)}$$

$$G_s(z) = \frac{z^5 (1-z^6)^5}{6^5 (1-z)^5}$$

3 Opérateur de différence

Soit

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

On définit $\Delta P(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}$

On observe que $\Delta P(z) + zP(z) = P(z)$ soit $\Delta P(z) = (1-z)P(z)$. Dans l'ensemble des polynômes Δ est un endomorphisme injectif. Son image est l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(1)=0$, ie dont la somme des coefficients est nulle.

Soit $\Delta P(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n+1} z^{n+1}$, avec $b_0 + b_1 + \dots + b_{n+1} = 0$. Donc $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, avec

$$a_p = \sum_{k=0}^p b_k$$

4 Loi de probabilité

$$G_s(z) = \frac{z^5 (1-z^6)^5}{6^5 (1-z)^5}, \text{ donc } \Delta^5 G_s(z) = \frac{z^5}{6^5} (1-z^6)^5$$

Par commodité, on va déterminer $6^5 G_s(z)$, et compte tenu de la symétrie par rapport à $n=17,5$, on va aller de $n=5$ à $n=17$. Il suffit de compléter le tableau

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$6^5 \Delta^5 G_s$	1	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	10
$6^5 \Delta^4 G_s$	1	1	1	1	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	6
$6^5 \Delta^3 G_s$	1	2	3	4	5	6	2	-2	-6				
$6^5 \Delta^2 G_s$	1	3	6	10	15	21	23						
$6^5 \Delta G_s$	1	4	10	20									
$6^5 G_s$	1	5											780

Nombre D_n de dérangements

1 Position du problème

Soit n un entier naturel. On appelle dérangement une permutation ne possédant aucun point fixe. Il s'agit de déterminer D_n , nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. Par exemple, $D_3=2$, les deux dérangements étant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A ce problème, on associe le point de vue probabiliste: une permutation étant choisie au hasard dans un ensemble à n éléments, quelle est la probabilité que cette permutation soit un dérangement ?

2 Un exemple

Parmi les gens allant à un spectacle, n possèdent un chapeau qu'ils déposent au vestiaire. A la sortie, les chapeaux leur sont rendus au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune personne ne récupère son chapeau? Est-ce que cette probabilité augmente ou diminue avec n ? A-t-elle une limite? Si oui, est-ce 0, ou 1, ou 0,5? Ou un autre nombre?

3 Relation entre les D_n

Dans un ensemble à n éléments, il y a $n!$ permutations, que l'on va classer d'après le nombre k de leurs points fixes. Soit E_k un sous ensemble à k éléments de $[1, n]$. Les permutations qui fixent les éléments de E_k induisent un dérangement sur un ensemble à $n-k$ éléments. Leur nombre est donc D_{n-k} .

Par ailleurs, k étant donné dans $[1, n]$, il existe $\binom{n}{k}$ sous-ensembles tels que E_k . Le nombre de permutations qui fixent k éléments est donc $\binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$. D'où les relations

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} &= n! \\ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} D_{n-k} &= n! \\ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!} &= 1 \end{aligned}$$

4 Utilisation d'une série entière

Le premier membre de cette relation apparaît comme un produit de Cauchy.

On connaît la série $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

D'où l'idée d'introduire $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$

Comme $D_n \leq n!$, pour $|z| < 1$, $\exp(z) \cdot S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, soit $S(z) = \exp(-z) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^k$

5 Calcul de D_n

On réutilise le produit de Cauchy

$$S(z) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} z^p \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right), \text{ d'où}$$

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}, \text{ soit}$$

$$D_n = n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^p}{p!}$ est alternée, et converge vers $\frac{1}{e}$. D'après le théorème spécial des séries

alternées,

$$\left| \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\text{donc } \left| \frac{D_n}{n!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{et} \quad \left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

En utilisant l'abréviation e.p.p. pour 'entier le plus proche', on trouve pour $n > 0$

$$\boxed{D_n = \text{e.p.p.} \left(\frac{n!}{e} \right)}$$

Cette relation n'est pas exacte pour $n=0$, car alors $D_0=1$, tandis que $\text{e.p.p.} \left(\frac{0!}{e} \right) = 0$

Nombre de manières de totaliser n francs avec des pièces de 1, 2 et 5 francs.

1 Mise en place du problème

Appelons p le nombre de pièces de 1 f
 " q " " de 2 f
 " r " " de 5 f

Il s'agit de trouver le nombre de triplets (p, q, r) de \mathbb{N}^3 tels que $p+2q+5r = n$

Soit a_n ce nombre. Alors $a_n = \sum_{p+2q+5r=n} 1$

On peut aussi écrire $a_n = \sum_{p+2q+5r=n} u_p v_{2q} w_{5r}$, avec $u_p = v_{2q} = w_{5r} = 1$, de sorte que

a_n est un produit de Cauchy pour les trois séries $\sum u_p z^p$, $\sum v_{2q} z^{2q}$ et $\sum w_{5r} z^{5r}$,

avec $u_p = v_{2q} = w_{5r} = 1$. Chacune de ces séries est absolument convergente pour $|z| < 1$.

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$, on introduit $S(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$, pour $|z| < 1$.

D'où $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n étant le nombre cherché.

2 Décomposition en éléments simples de $S(z)$

$$S(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2+z^3+z^4)}$$

Le gros du travail est la recherche de la partie polaire associée au pôle 1.

Pour cela, on pose $Z = 1-z$ et $T(Z) = S(z)$

$$T(Z) = \frac{1}{Z^3(2-Z)\frac{1-(1-Z)^5}{Z}}$$

$$\frac{1-(1-Z)^5}{Z} = \frac{1-(1-5Z+10Z^2-10Z^3+\dots)}{Z} = 5-10Z+10Z^2-\dots$$

$$(2-Z)(5-10Z+10Z^2-\dots) = 10-25Z+30Z^2-\dots$$

On effectue alors la division de 1 par $10-25Z+30Z^2$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 2. On trouve comme numérateur de la partie polaire

$$\frac{1}{10} + \frac{Z}{4} + \frac{13Z^2}{40} = \frac{27-36z+13z^2}{40}, \text{ donc la partie polaire associée à 1 est } P(z) = \frac{27-36z+13z^2}{40(1-z)^3}.$$

On trouve finalement

$$S(z) = P(z) + \frac{1}{8(1+z)} + \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{1-\frac{z}{\zeta^k}}, \quad \text{avec } \zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \text{ et } A_k \in \mathbb{C}$$

3 Développement en série entière de $P(z)$

On a maintenant besoin du

Théorème: Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour $|z| < 1$, $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, avec $\binom{\alpha}{0} = 1$ et

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{pour } n > 0$$

Preuve (abrégée) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Pour $|z| < 1$, on définit $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$, Log désignant la détermination principale d'un logarithme. $\operatorname{Log}(1+z)$ est analytique sur D , et $\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z}$.

Posons $g_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$. Alors \mathcal{G}_α vérifie

$$\frac{d}{dz} g_\alpha(z) = \frac{d}{dz} \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z)) = \frac{\alpha}{1+z} \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z)) = \frac{\alpha}{1+z} g_\alpha(z)$$

$$\mathcal{G}_\alpha \text{ vérifie donc } \begin{cases} (1+z)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Soit par ailleurs la série entière $S_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$. Comme $\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{\alpha-n}{n+1}$ (2), par le critère de d'Alembert,

cette série converge sur D . L'égalité (2) s'écrit aussi $(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n}$.

D'où la suite d'égalités

$$\frac{d}{dz} S_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha-n) \binom{\alpha}{n} z^n = \alpha S_\alpha(z) - z \frac{d}{dz} S_\alpha(z)$$

De plus, $S_\alpha(0) = 1$, donc S_α vérifie (1). D'où le théorème, par unicité de la solution de (1) sur D .

Corollaire Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $|z| < 1$, $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n$

On applique ici le corollaire lorsque $p=3$, ce qui donne $\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$, d'où

$$\begin{aligned} 80P(z) &= (27 - 36z + 13z^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \\ &= 27 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n - 36z \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{n-1} + 13z^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nz^{n-2} \\ &= \left[27 \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2) - 36 \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n) + 13 \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n) \right] z^n \end{aligned}$$

les sommations pouvant être démarrées à $n=0$, car $n^2+n=0$ pour $n=0$, et $n^2-n=0$ pour $n=0$ et $n=1$.

$$\text{On trouve } P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 8n + 13,5}{20} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+4)^2}{20} - \frac{1}{8} \right] z^n.$$

4 Calcul de a_n

$$\text{Posons } P(z) + \frac{1}{8(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ et } \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{1-\frac{z}{\zeta^k}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n. \quad b_n = \left[\frac{(n+4)^2}{20} - \frac{1}{8} \right] + \frac{(-1)^n}{8} \text{ et } u_n = \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{\zeta^{kn}}$$

On observe que $\zeta^5=1$, donc u_n est de période 5. Comme $a_n = b_n + u_n$, on va calculer u_n par la différence $a_n - b_n$ sur les 5 premières valeurs de n . Par exemple, $a_3=2$, car les deux seules manières de totaliser 3 francs sont 3 pièces de 1f pour la première, et 1 pièce de 1f et 1 de 2f pour la seconde.

n	a_n	b_n	u_n
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	1	1	0
2	2	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$
3	2	$\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$
4	3	$\frac{16}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Ecrivant maintenant $a_n = \frac{(n+4)^2}{20} + v_n$, il reste à majorer $|v_n|$: $|v_n| \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\text{d'où enfin } a_n = \text{e.p.p. } \frac{(n+4)^2}{20}$$

LA BOUEE DE TERRACHER

Nous sommes plusieurs collègues de plusieurs établissements scolaires, de Terminale ou de Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, à nous être passionnés l'année dernière pour un exercice qui figure dans le manuel de TERRACHER de TC :

On dispose d'une bouée circulaire de 6 cases et de 5 couleurs. De combien de manières différentes peut-on peindre la bouée de façon que deux cases adjacentes ne soient pas de la même couleur.

Le défi à relever est la découverte d'une solution générale, avec n cases et p couleurs (dans le sens p couleurs au plus), avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$

Il apparaît rapidement que l'énoncé peut s'interpréter de deux façons différentes.

(I) Les cases sont supposées discernables, ce qui est le cas si la bouée est "clouée", ce qui empêche qu'on puisse la faire tourner autour de son centre. Nous parlerons alors du problème de la bouée clouée. Si les couleurs sont désignées par p lettres, le coloriage de la bouée peut être représenté par une liste ou un mot de n lettres, choisis parmi p , de façon que deux lettres successives soient différentes, de même que la première et la dernière lettre.

Exemple: $p = 5$ avec les couleurs Rouge, Vert, Bleu, Orange, Jaune
 $n = 6$: RVRBOJ

(II) Si l'on admet que la bouée peut tourner autour de son centre, nous obtenons le problème de la bouée tournante. Deux mots représentant un coloriage de la bouée seront équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par permutation circulaire des lettres.

Exemple : RVRBOJ \approx RBOJRV

I- RESOLUTION DU PROBLEME DE LA BOUEE CLOUEE :

Ce problème paraît déjà assez difficile pour des élèves de Terminale. Il a également été proposé en TD à des élèves de Maths Sup. Ceux-ci ont parfois trouvé des solutions élégantes. Plusieurs raisonnements sont possibles. Nous commencerons par ceux proposés par des participants au stage.

Méthode 1 : Appelons $K_{n,p}$ le nombre de solutions, ou plus simplement K_n en considérant le nombre p de couleurs fixé, et le nombre n de cases variable. On choisit une couleur parmi p pour la première case, puis, pour chaque case qui suit, on choisit une couleur parmi les $p-1$ couleurs différentes de la case précédente, ce qui donne $p(p-1)^{n-1}$ possibilités, mais on obtient des bouées qu'il convient de rejeter. Ce sont celles pour lesquelles la case n et la case 1 ont la même couleur. Le nombre de telles bouées est K_{n-1} . En effet, il suffit de fusionner les case 1 et n en une seule case pour obtenir une bouée clouée de $n-1$ cases. D'où la relation de récurrence :

$$K_n = p(p-1)^{n-1} - K_{n-1}$$

Cette relation permet de déterminer K_n . On trouve :

$$K_{n,p} = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)$$

formule remarquable par sa simplicité, qui donne $K_{6,5} = 4^6 + 4 = 4100$.

Méthode 2 : On dresse un tableau de p colonnes (les couleurs) et de n lignes (les cases). On numérotera les couleurs de 1 à p et les cases de 1 à n . On supposera que la case 1 est coloriée avec la couleur 1. Il suffira ensuite de multiplier le nombre de solutions trouvées par p .

Pour i variant de 1 à n , on note à la i ème ligne et la j ème colonne le nombre de façons de colorier les cases 1 à i de la bouée, de façon que la i ème case soit coloriée avec la couleur j . Dans le cas particulier $n = 6$ et $p = 5$, on obtient:

n° cases ↓	1	2	3	4	5 ← n° de couleur
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1
3	4	3	3	3	3
4	12	13	13	13	13
5	52	51	51	51	51
6	204	205	205	205	205

Ce dernier nombre 204 est en fait à rejeter car la 6ème case doit avoir une couleur différente de 1. Le tableau est construit en remarquant que le nombre occupant la place (i,j) est la somme des nombres occupant les places $(i-1,k)$ pour k différent de j . La solution finale est 810, somme des quatre valeurs 205 occupant les places $(6,k)$ pour k différent de 1. Il convient de multiplier 810 par $p=5$ pour trouver les 4100 solutions possibles.

Dans le cas général, on notera V_i le vecteur de \mathbb{R}^p dont les p composantes sont les p valeurs occupant la ligne i . On a alors :

$$V_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$V_{i+1} = (M - I)V_i$$

où I est la matrice identité de \mathbb{R}^p et M la matrice à p lignes et p colonnes dont tous les coefficients valent 1. Il est facile de montrer que $M^k = p^{k-1}M$ pour $k \geq 1$. Le nombre de solutions cherchées (lorsque la première case est coloriée avec la couleur 1) n'est autre que la première composante de $V_{n+1} = (M - I)^n V_1$. Il suffit de développer $(M - I)^n$ pour trouver ce coefficient. On obtient :

$$V_{n+1} = \left[\sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} M^k + (-1)^n I \right] V_1$$

$$V_{n+1} = \left[\left(\sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} p^{k-1} \right) M + (-1)^n I \right] V_1$$

Le coefficient cherché vaut :

$$\sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} p^{k-1} + (-1)^n = \frac{(p-1)^n - (-1)^n}{p} + (-1)^n$$

le nombre total de solutions est égal à ce coefficient multiplié par p , soit

$$K_{n,p} = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$$

Méthode 3: On suppose, comme ci-dessus, donnée la couleur de la première case. Appelons $X_{n,p}$ le nombre de solutions dans ce cas (ou plus simplement X_n , en considérant comme variable uniquement le nombre n de cases, le nombre de couleurs restant invariablement fixé à p). Le nombre total de solutions sera alors $K_n = pX_n$. On a facilement :

$$X_2 = p-1$$

$$X_3 = (p-1)(p-2)$$

Le cas général peut se traiter de la façon suivante :

- ou bien toutes les cases 2 à n sont de couleur différente de la case 1. Il y a alors $(p-1)(p-2)^{n-2}$ possibilités de coloriage (à savoir $p-1$ pour la case 2 et $p-2$ pour les cases 3 à n , dont les couleurs sont différentes de la case 1 et de la case qui les précède).
- ou bien l'une des cases 3 à $n-1$ est de même couleur que la case 1. Soit k le numéro de la première case de même couleur que la case 1. Le coloriage des cases 2 à $k-1$ donne $(p-1)(p-2)^{k-3}$ (à savoir $p-1$ possibilités pour la case 2 et $p-2$ pour les cases 3 à $k-1$). Quant au coloriage des cases k à n , il est

équivalent à celui d'une bouée clouée de $n-k+1$ cases, obtenue en découpant les cases k à n et en les recollant en une bouée plus petite, la couleur de la case k étant imposée.

Cela conduit à une formule de récurrence :

$$X_n = (p-1)(p-2)^{n-2} + \sum_{k=3}^{n-1} (p-1)(p-2)^{k-3} X_{n-k+1}$$

malheureusement peu exploitable. Elle permet cependant d'obtenir $X_{6,5} = 820$, ce qui donne $K_{6,5} = 4100$ coloriages possibles pour la bouée de Terracher.

Méthode 4 : On reprend les notations précédentes. Le nombre de cases de la même couleur que la case 1 est au plus de $\text{Ent}(n/2)$. Pour k variant de 0 à cette valeur, on cherche le nombre de coloriages ayant k cases de la même couleur que la case 1, la couleur de cette dernière étant toujours donnée. Si la case 1 est la seule de sa couleur, on a vu qu'il y avait $(p-1)(p-2)^{n-2}$ coloriages possibles.

Dans le cas de k cases autres que la case 1 et de sa couleur, on procède comme suit :

- On choisit les k cases, de 3 à $n-1$, qui seront de la même couleur que la case 1. Il s'agit de choisir k numéros de cases n_1, n_2, \dots, n_k vérifiant $n_i + 2 \leq n_{i+1}$. Si l'on pose $m_i = n_i - i$, alors les m_i forment une suite strictement croissante entre 2 et $n-1-k$. Inversement, une telle suite (m_i) permet de reconstituer la suite (n_i) . Or le nombre de choix de suites (m_i) est égal au nombre de combinaisons de k éléments parmi $n-k-2$.

- On choisit la couleur des cases qui suivent immédiatement les k cases ainsi définies, ainsi que celle qui suit la case 1. Elles sont d'une couleur autre que celle de la case 1. Il y a donc $(p-1)^{k+1}$ choix possibles.

- Il reste $n-2k-2$ cases à colorier, d'une couleur autre que celle de la case 1 et de la case qui les précède, soit $(p-2)^{n-2k-2}$ choix possibles.

D'où la formule :

$$X_n = \sum_{k=0}^{\text{Ent}(n/2)} (p-1)^{k+1} (p-2)^{n-2k-2}$$

ce qui donne pour $n = 6$ et $p = 5$:

$$X_{6,5} = 4 \cdot 3^4 + 3 \cdot 4^2 \cdot 3^2 + 4^{3^2} = 820$$

(On pourra remarquer que les sommes des coefficients binomiaux qui interviennent dans l'expression de X_n sont les termes de la suite de Fibonacci).

Méthode 5 : Comme précédemment, on suppose donnée la couleur de la case 1. Nous supposons les couleurs numérotées de 1 à p . On colorie successivement les cases suivantes, les diverses possibilités de coloriage figurant sous forme d'arbre :

case1			1			
case2	2		3	p	$(p-1)$ possibilités
case3	1 3.....p	1 2 4.....p			1 2 3.....p-1	$(p-1)^2$ possibilités
.....					
case n-1	1.....				$(p-1)^{n-2}$ possibilités

En ce qui concerne la case n , le coloriage se fait de la façon suivante : la couleur 1 se trouvant dans la case $n-1$ donne $p-1$ possibilités de coloriage de la case n ; les couleurs différentes de 1 se trouvant dans la case $n-1$ donnent $p-2$ possibilités de coloriage de la case n . Si on note U_{n-1} le nombre de fois où la couleur 1 apparaît dans la ligne $n-1$, alors le nombre de non 1 vaut $(p-1)^{n-2} - U_{n-1}$, et le nombre de possibilités dans la ligne n correspondant au coloriage de la case n est :

$$X_n = U_{n-1} \cdot (p-1) + [(p-1)^{n-2} - U_{n-1}] \cdot (p-2) = (p-1)^{n-2} (p-2) + U_{n-1}$$

Il reste à déterminer U_{n-1} . Or les 1 de la ligne n-1 proviennent des non 1 de la ligne n-2. D'où la relation de récurrence :

$$U_{n-1} = (p-1)^{n-3} - U_{n-2}$$

En partant de $U_1 = 1, U_2 = 0$, on obtient par récurrence (laissée au lecteur) :

$$U_{n-1} = (-1)^n (p-1) \frac{1 - (-p+1)^{n-3}}{p}$$

D'où

$$K_n = pX_n = p(p-1)^{n-2}(p-2) + (-1)^n (p-1) [1 - (-p+1)^{n-3}]$$

Donc

$$K_{n,p} = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$$

Méthode 6 : Considérons une bouée de n cases. Deux cas se présentent :

- Ou bien la case 1 n'est pas de la même couleur que la n-1. On peut alors lui associer une bouée de n-1 cases répondant aux conditions du problème en supprimant la case n. Inversement, une telle bouée de n-1 cases permet de reconstituer p-2 bouées de n cases, puisqu'il y a p-2 couleurs possibles à attribuer à la case n que l'on introduit.
- Ou bien la case 1 est de la même couleur que la n-1. On peut alors lui associer une bouée de n-2 cases répondant aux conditions du problème en supprimant les cases n et n-1. Inversement, une telle bouée de n-2 cases permet de reconstituer p-1 bouées de n cases, en attribuant à la case n-1 que l'on introduit la couleur de la case 1, et à la case n l'une des p-1 couleurs restantes.

D'où la relation :

$$K_n = (p-2)K_{n-1} + (p-1)K_{n-2}$$

La suite (K_n) vérifie une récurrence linéaire de la forme $K_n = aK_{n-1} + bK_{n-2}$.

L'équation caractéristique associée est :

$$x^2 = (p-2)x + (p-1)$$

de racine -1 et p-1. K_n est donc combinaison linéaire de $(-1)^n$ et $(p-1)^n$. Les valeurs initiales $K_2 = p(p-1)$ et $K_3 = p(p-1)(p-2)$ permettent de déterminer que $K_n = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$.

Méthode 7 : On remarque que l'expression trouvée de K_n est étonnamment proche de $(p-1)^n$, qui n'est autre que le nombre de bouées clouées, sans condition de couleurs pour les cases adjacentes, à n cases et p-1 couleurs. Ce fait peut s'expliquer directement en établissant un rapport entre les deux problèmes. Appelons bouées avec condition les bouées dans lesquelles deux cases adjacentes sont de couleurs différentes, contrairement aux bouées sans condition. Il est possible d'associer à toute bouée avec condition de n cases et p couleurs une bouée sans condition de n cases et p-1 couleurs de la façon suivante : notons a_1, a_2, \dots, a_n la suite des couleurs de la bouée avec condition, les a_i étant éléments de $\{1, \dots, p\}$. Notons b_1, b_2, \dots, b_n la suite des couleurs de la bouée sans condition associée, les b_i étant éléments de $\{1, \dots, p-1\}$ et définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} b_i = a_i & \text{si } a_{i-1} > a_i \\ b_i = a_i - 1 & \text{si } a_{i-1} < a_i \end{cases}$$

(avec la convention $a_0 = a_n$). Par exemple, on associe à la bouée avec condition 1243212 la bouée sans condition 1133211. Cette association n'est pas tout à fait bijective.

- En ce qui concerne une bouée sans condition disposant d'au moins deux couleurs, elle se trouve effectivement associée à une et une seule bouée avec condition. On retrouve les a_i à partir des b_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{si } b_{i-1} < b_i \quad \text{alors} \quad a_i = b_i + 1 \\
 & \text{si } b_{i-1} > b_i \quad \text{alors} \quad a_i = b_i \\
 & \text{si } b_{i-1} = b_i \quad \text{alors} \quad \begin{cases} a_{i-1} = b_{i-1} + 1 \\ a_i = b_i \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{i-1} = b_{i-1} \\ a_i = b_i + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans le dernier cas, on choisit la bonne condition en ayant déjà trouvé si a_{i-1} est égal à b_{i-1} ou à $b_{i-1} + 1$. Il suffit de partir de deux valeurs différentes de b_{j-2} et b_{j-1} ce qui définit a_{i-1} (on ne peut amorcer cette récurrence dans le cas d'une bouée sans condition unicolore). On vérifiera que cette méthode donne bien une bouée avec condition, les couleurs variant entre 1 et p . Par exemple, pour la bouée sans condition 1133211, on a :

$$\begin{aligned}
 b_2 = 1 < 3 = b_3 &\Rightarrow a_3 = b_3 + 1 = 4 \\
 b_3 = b_4 = 3 \quad \text{et} \quad a_3 = b_3 + 1 &\Rightarrow a_4 = b_4 = 3 \\
 b_4 = 3 > 2 = b_5 &\Rightarrow a_5 = b_5 = 2 \\
 b_5 = 2 > 1 = b_6 &\Rightarrow a_6 = b_6 = 1 \\
 b_6 = b_7 = 1 \quad \text{et} \quad a_6 = b_6 &\Rightarrow a_7 = b_7 + 1 = 2 \\
 b_7 = b_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_7 = b_7 + 1 &\Rightarrow a_1 = b_1 = 1 \\
 b_1 = b_2 = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = b_1 &\Rightarrow a_2 = b_2 = 2
 \end{aligned}$$

d'où la bouée avec condition 1243212.

- Dans le cas d'une bouée unicolore sans condition, on voit que si n est pair, la bouée unicolore ccccc...c provient de deux bouées avec condition $c(c+1)c(c+1)...c(c+1)$ ou $(c+1)c(c+1)...c(c+1)c$; il faut donc ajouter dans le dénombrement des bouées avec condition $p-1$ bouées supplémentaires par rapport au $(p-1)^n$ bouées sans condition dénombrées. Par contre, si n est impair, il est impossible d'obtenir une bouée sans condition unicolore, et l'on a donc comptabilisé $p-1$ bouées en trop, qu'il faut retrancher aux $(p-1)^n$ bouées sans condition.

Voici, pour conclure, un tableau de valeurs des $K_{n,p}$ (n indice de ligne et p indice de colonne) :

K	2	3	4	5	6=p
2	2	6	12	20	30
3	0	6	24	60	120
4	2	18	84	260	630
5	0	30	240	1020	3120
6	2	66	732	4100	15630
7	0	126	2184	16380	78120
8	2	258	6564	65540	390630
9	0	510	19680	262140	1953120
10	2	1026	59052	1048580	9765630
11	0	2046	177144	4194300	48828120
12	2	4098	531444	16777220	244140630
13	0	8190	1594320	67108860	1220703120
=n	$1 + (-1)^n$	$2^n + (-1)^n 2$	$3^n + (-1)^n 3$	$4^n + (-1)^n 4$	$5^n + (-1)^n 5$

On posera dans la suite $K_1 = 0$, en conformité avec la formule précédente.

II RESOLUTION DU PROBLEME DE LA BOUEE TOURNANTE :

Ce problème est beaucoup plus difficile. Nous noterons $L_{n,p}$ (ou L_n) le nombre de possibilités de coloriage. Des recherches à la main, puis utilisant un ordinateur donnent les valeurs suivantes :

L	2	3	4	5	6=p
2	1	3	6	10	15
3	0	2	8	20	140
4	1	6	24	70	165
5	0	6	48	204	624
6	1	14	130	700	2635
7	0	18	312	2340	11160
8	1	36	834	8230	48915
9	0	58	2192	29140	217040
10	1	108	5934	104968	9768887
11	0	186	16104	381300	4438920
12	1	352	44368	1398500	20346485
n=13	0	630	122640	5162220	93900240

En particulier, $L_{6,5} = 700$ La découverte d'une formule générale a comblé de joie quelques professeurs acharnés.

On remarque qu'on peut associer à chaque bouée non clouée plusieurs bouées clouées se déduisant l'une de l'autre par rotation. Par exemple, pour $n = 4$ et $p = 3$, les bouées clouées sont, (en notant les couleurs 1, 2, 3) :

1212 1213 1232 1312 1313 1323 2121 2123 2131
2313 2321 2323 3121 3131 3132 3212 3231 3232

qui se répartissent suivant 6 classes de la façon suivante :

{1212, 2121}
{1213, 2131, 1312, 3121}
{1232, 2321, 3212, 2123}
{1313, 3131}
{1323, 3231, 2313, 3132}
{2323, 3232}

ce qui définit 6 bouées non clouées :

1212 1213 1232 1313 1323 2323

Le nombre de bouées non clouées est donc égal au nombre de classes. Soit O_k le nombre de classes de k éléments. Dans l'exemple précédent, il y a 3 classes à 2 éléments et 3 classes à 4 éléments. Donc :

$$O_2 = 3 \text{ et } O_4 = 3$$

On a alors :

$$L_n = \sum_k O_k \quad (\text{nombre de classes})$$

$$K_n = \sum_k k O_k \quad (\text{classes multipliées par le nombre de classes}).$$

Enfin, la somme précédente se fait sur les nombres k diviseurs de n . On connaît les K_n . Il suffit de déterminer les O_k pour en déduire L_n . On utilise alors une formule dite formule d'inversion de Möbius [1][3][4], qui est telle que, étant deux fonctions f et g définies sur \mathbb{N}^* , on ait :

$$f(n) = \sum_{k|n} g(k) \Rightarrow g(n) = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \cdot f(k)$$

où $k|n$ signifie que les sommes se font sur les nombres k , diviseurs de n , et où μ est la fonction de Möbius, définie de la façon suivante :

$$\mu(1) = 1$$

$$\mu(n) = (-1)^n$$

$$\mu(n) = 0$$

si $n = p_1 p_2 \dots p_s$ produit de s nombres premiers distincts.
sinon, c'est-à-dire si n possède un facteur carré.

On applique cette formule avec $f(n) = K_n$, et $g(k) = kO_k$. Ainsi:

$$nO_n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) K_k$$

ou encore, en changeant les indices :

$$kO_k = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) K_d$$

D'où

$$L_n = \sum_{k|n} \left[\frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \cdot K_d \right] = \frac{1}{k} \sum_{d|k|n} \left[\mu\left(\frac{k}{d}\right) \cdot K_d \right]$$

où $d|k|n$ signifie que l'on fait la somme sur les couples (d,k) tels que d divise k et k divise n .

En posant $k = md$ on peut transformer la formule précédente et on arrive à:

$$L_n = \sum_{d|n} \left[\sum_{m|\left(\frac{n}{d}\right)} \frac{\mu(m)}{md} \cdot K_d \right] = \sum_{d|n} \left[\sum_{m|\left(\frac{n}{d}\right)} \frac{\mu(m)}{d} \right] \cdot \frac{K_d}{d}$$

Enfin, merveille des merveilles, il existe une ultime formule reliant la fonction de Möbius à la fonction indicatrice d'Euler :

$$\Phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Cette formule n'est d'ailleurs rien d'autre que la formule d'inversion de Möbius appliquée à :

$$n = \sum_{d|n} \Phi(d)$$

relation classique vérifiée par la fameuse Φ d'Euler.

Cette formule intervient à point nommé pour pouvoir conclure :

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot K_d = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) \cdot K_{\frac{n}{d}}$$

Rappelons que $\Phi(n)$ est égal au nombre d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si n se décompose en facteurs premiers sous la forme :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s} \quad \text{alors} \quad \Phi(n) = p_1^{a_1-1} (p_1 - 1) \dots p_s^{a_s-1} (p_s - 1)$$

Les raisonnements précédents s'appliquent d'ailleurs au calcul du nombre de bouées en général sans imposer de condition de couleurs aux cases adjacentes (et de ce fait précédemment appelées bouées sans condition). Les bouées clouées (ou les mots de n lettres sur un alphabet de cardinal p) sont alors au nombre de $KG_{n,p} = p^n$. Le nombre de classes ayant k éléments est :

$$OG_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \cdot p^d = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) \cdot p^{k/d}$$

formule identifiée par ailleurs sous le nom de formule de Witt. Le nombre de bouées tournantes en général est :

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot p^d = LG_{n,p}$$

Signalons que la formule de Witt donne également le nombre de polynômes irréductibles de degré k à coefficients dans le corps fini à p éléments (où p doit alors être une puissance d'un nombre premier) [3][4]. Par exemple, le nombre de polynômes irréductibles de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vaut OG_4 avec $p=2$, soit $OG_4 = 3$. (Il s'agit des polynômes $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $X^4 + X^3 + 1$, et $X^4 + X + 1$).

Considérons en effet les bouées tournantes de n cases et p couleurs, sans condition de couleurs pour les cases adjacentes. Représentons une telle bouée par un mot constitué des numéros des couleurs de ses cases. Ce mot est défini à une permutation circulaire près de ses lettres. Une telle bouée est dite irréductible si aucun des mots qui la représente ne peut s'écrire par juxtaposition de sous-mots identiques. Par exemple, sur l'alphabet $\{0,1\}$, la bouée 00111 est irréductible, alors que la bouée 010010 ne l'est pas. Il se trouve donc que, pour tout p

puissance d'un nombre premier et tout n entier, le nombre de bouées irréductibles de n cases et p couleurs est égal au nombre de polynômes irréductibles de degré n sur le corps fini à p éléments.

Voici quelques exemples dans le cas p=2.

	Polynômes irréductibles de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (valeur des coefficients par degré décroissant)	Bouées tournantes irréductibles, à deux couleurs {0,1} et n cases. Il est possible de permuter circulairement les bouées.
n=1	11 10	0 1
n=2	111	01
n=3	1011 1101	001 011
n=4	10011 11001 11111	0001 0011 0111
n=5	100101 101001 101111 110111 111011 111101	00001 00011 00101 00111 01011 01111
n=6	1000011 1001001 1010111 1011011 1100001 1100111 1101101 1110011 1110101	000001 000011 000101 000111 001011 001101 001111 010111 011111

Voici la contribution étonnante de Sylvain Poirier (en Maths Sup à l'époque) à ce problème.

III PROPRIETES DES CORPS FINIS : [3][4]

Soit K le corps à p éléments, où p est puissance d'un nombre premier. Soit L le corps à p^n éléments. Alors L est un espace vectoriel sur K de dimension n .

Soit G le groupe de Galois des automorphismes de corps de L laissant invariants les éléments de K . G est un groupe cyclique de n éléments engendré par l'automorphisme :

$$\Phi: L \rightarrow L$$

$$x \rightarrow x^p$$

Les polynômes irréductibles P de $K_n[X]$ se factorise sous la forme :

$$P = (X - a)(X - \Phi(a)) \dots (X - \Phi^{n-1}(a)), \quad a \in L$$

Les racines sont distinctes.

Il existe enfin une base B de L comme K -espace vectoriel de la forme $(b, \Phi(b), \dots, \Phi^{n-1}(b))$, avec donc $\Phi^n(b) = b$.

Voici ce que propose Sylvain Poirier :

A tout polynôme irréductible de degré n , on associe ses racines $(a, \Phi(a), \dots, \Phi^{n-1}(a))$. On peut voir assez facilement que, grâce à la forme choisie pour la base B , les composantes de ces racines sur la dite base se déduisent les unes des autres par permutation circulaire. Elles constituent les n écritures possibles d'une même bouée, qui est irréductible puisque les n racines sont distinctes.

EXEMPLE :

Soit $K = F_2$ le corps à deux éléments, et $L = F_8$ le corps à 8 éléments. Alors $L = K[b]$ avec b vérifiant $b^3 + b^2 + 1 = 0$. Les éléments de L sont :

0	$b^3 = 1 + b^2$
1	$b^4 = 1 + b + b^2$
b	$b^5 = 1 + b$
b^2	$b^6 = b + b^2$

(puis $b^7 = 1$)

$(1, b, b^2)$ est une base de L comme K -espace vectoriel. Mais $B = (b, b^2, b^4)$ est aussi une base :

0	$b^3 = b + b^4$
1	$b^4 = b + b^2 + b^4$
b	$b^5 = b^2 + b^4$
b^2	$b^6 = b + b^2$

On a b, b^2 et b^4 de composantes respectives $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$ sur la base B . Ce sont les racines de $X^3 + X^2 + 1$ Par ailleurs, b^3, b^6 , et $b^{12} = b^5$ ont pour composantes dans la base B $(1,0,1), (1,1,0)$ et $(0,1,1)$ et sont les racines du polynôme $X^3 + X + 1$ L'association entre polynôme irréductible et bouée est donc la suivante :

1101	001
1011	011

Il ne nous reste plus qu'à admirer une telle perspicacité chez un élève de Maths Sup, et à saluer bien bas.



Bibliographie :

- [1] *Encyclopedia Universalis - Divisibilité.*
- [2] *Arnaudès/Fraysse - Algèbre (Dunod) p.188.*
- [3] *Lang - Algebra (Addison-Wesley) p.190.*
- [4] *Mignotte - Mathématiques pour le calcul formel (PUF) p.249-250.*

DES ANGLES.....

Les notions d'angle extérieur, ou intérieur, à un cercle ne sont pas fondamentales en géométrie; elles permettent cependant, d'alléger parfois les démonstrations. Assimilables relativement tôt, elles nécessitent uniquement la connaissance de l'angle inscrit et de l'angle au centre correspondant.

1 Définitions

Soit (C) un cercle et deux droites (D) et (D') telles que

$$\begin{cases} (D) \cap (D') = \{\Omega\} \\ (D) \cap (C) = \{A, B\} \\ (D') \cap (C) = \{A', B'\} \end{cases}$$

a) Si Ω est extérieur à (C) on appelle $B\hat{\Omega}B'$ l'angle extérieur au cercle (C) (fig 1).

b) Si Ω est intérieur à (C) on appelle $B\hat{\Omega}B'$ l'angle intérieur au cercle (C) (fig 2).

- Sur un cercle (de rayon 1) l'arc $A\hat{B}$ a pour mesure, la mesure de l'angle qui l'intercepte.

2 Propriétés.

a) L'angle extérieur au cercle est égal à la demi différence des arcs qu'il intercepte.

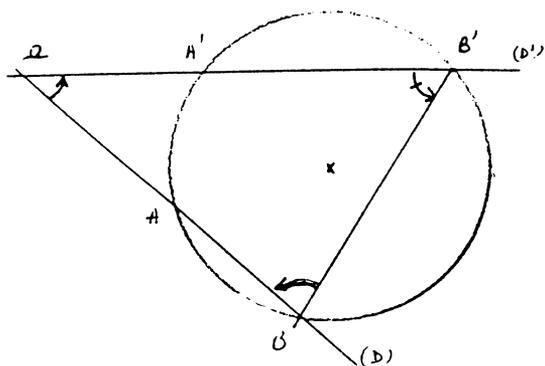


fig 1

Dans le triangle $\Omega BB'$

$$\hat{\Omega} = \pi - \hat{B} - \hat{B}'$$

Soit

$$2\hat{\Omega} = 2\pi - 2\hat{B} - 2\hat{B}'$$

Or

$$2\hat{B} = B'\hat{A} \quad \text{et} \quad 2\hat{B}' = A'\hat{B} \quad (\text{angles inscrits})$$

donc

$$2\hat{\Omega} = B'\hat{A} + A'\hat{B} + BB'\hat{A} - B'\hat{A} - A'\hat{B}$$

$$2\hat{\Omega} = BB'\hat{A} - A'\hat{A}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(BB'\hat{A} - A'\hat{A})$$

Remarque¹: Dans le triangle $\Omega AB'$

$$2\hat{\Omega} + 2\hat{B}' = 2\hat{A}$$

(même supplément)

$$2\hat{\Omega} + A'\hat{A} = BB'\hat{A}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(BB'\hat{A} - A'\hat{A})$$

¹ Les remarques sont de Marcel Quesnel.

b) L'angle intérieur au cercle est égal à la demi somme des arcs qu'il intercepte.

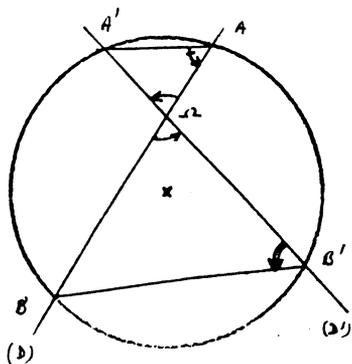


fig2

Dans les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$ on a:

$$2\hat{\Omega} = \pi - \hat{A} - \hat{A}' + \pi - \hat{B} - \hat{B}'$$

Or (angles inscrits)

$$\hat{A} = \hat{B}' \quad \text{et} \quad \hat{A}' = \hat{B}$$

d'où

$$2\hat{\Omega} = 2\pi - 2\hat{A} - 2\hat{A}'$$

$$2\hat{\Omega} = A\hat{A}' + A'\hat{B} + B\hat{B}' + B'\hat{A} - A'\hat{B} - B'\hat{A}$$

$$2\hat{\Omega} = A\hat{A}' + B\hat{B}'$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(A\hat{A}' + B\hat{B}')$$

Remarque: Dans le triangle $\Omega AB'$

$$2\hat{\Omega} = 2\hat{B}' + 2\hat{A}$$

$$2\hat{\Omega} = A\hat{A}' + B\hat{B}'$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(A\hat{A}' + B\hat{B}')$$

N.B. Si on travaille avec des angles orientés on obtient une seule formule pour $(\Omega\vec{A}, \Omega\vec{A}') = \frac{1}{2}(A\hat{A}' + B\hat{B}')$.

Il suffit de rediger l'une des démonstrations avec des angles orientés.

3 Exemples.

ex1) Soit (C) un cercle de diamètre AI et (T) la tangente à (C) en I. Soient B et C deux points de $C \setminus \{A, I\}$. On note B' et C' les intersections de (AB) et (AC) avec (T). Comparer les triangles ABC et AB'C'.

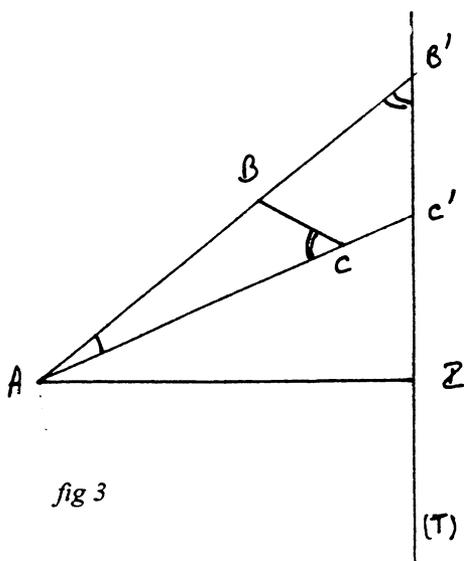


fig 3

Les triangles ABC et AB'C' ont $\hat{B}AC$ en commun:

$$\hat{B}' = \frac{1}{2}(A\hat{I} - \hat{I}B)$$

(angle extérieur)

$$\hat{B}' = \frac{1}{2}(\hat{I}A - \hat{I}B)$$

car $A\hat{I} = \hat{I}A = \pi$

$$\hat{B}' = \frac{1}{2}B\hat{A} = \hat{C}$$

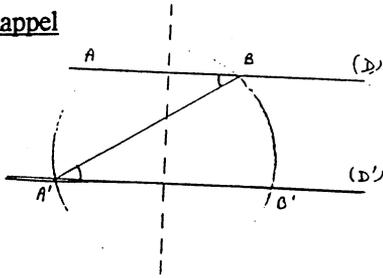
Les triangles sont donc semblables.²

² Cette proposition fut proposée par Thierry Hamel et démontrée autrement. C'est donc cet exercice qui est à l'origine de cet exposé de Jean Claude Jovet.

On peut ajouter que comme $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC}{AC'}$, on a $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = AZ^2$; la projection conique de centre A qui projette le cercle sur sa tangente, entraîne la propriété suivante: deux points quelconques (ici B et C) et leurs images (B' et C') sont cocycliques (cf proposition page). Cette application s'appelle une inversion de pôle A (note de l'éditeur).

Retrouver le cercle d'Euler.....

Rappel



Soient D et D' deux parallèles sécantes à un cercle dans la situation de la figure 6.

Par symétrie $AA'=BB'$, donc $\widehat{AA'} = \widehat{BB'}$...
ou encore $\widehat{A'} = \widehat{B'}$ (alternes internes) donc $\widehat{AA'} = \widehat{BB'}$...

* * *

Soit un triangle ABC et A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, et AB.

On note (ω) le cercle circonscrit à A'B'C'. Soient α, β, γ les intersections de (ω) avec BC, CA, et AB.

Q1 Montrer que $(A\alpha)$ est orthogonale à (AB) .

R1 sur la figure 7 ci-jointe, on a

$C'A'=B'C$ (parallélogramme)

$C'A'=B'\alpha$ (cf rappel)

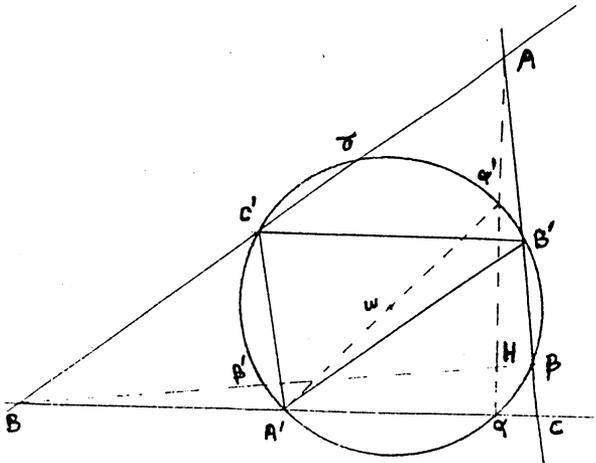
$B'C=B'A$ (B' milieu de [AC])

Soit $B'A=B'C=B'\alpha$

Ce qui montre que le triangle $A\alpha C$ est rectangle en α .

En procédant de même façon pour β et γ on a démontré que:

α, β, γ sont les pieds des hauteurs issues de A, B, C.



Q2 Soit H l'orthocentre de A, B, C. On note α', β', γ' les nouvelles intersections de $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ avec (ω) . Montrer que α' est le milieu de [AH].

R2 Comme $A'\hat{A}$ est droit (R1)

A' et α' sont diamétralement opposés sur (ω)

On a donc $\alpha'\hat{C}'A'$ qui est droit.

Comme $(B\beta)\perp(AC)$ et $(AC)\parallel(C'A')$:

$(B\beta)$ est orthogonal à $(C'A')$.

Donc $(B\beta)$ et $(C'\alpha')$ sont parallèles.

Le milieu C' de [A,B] se projette au milieu α' de [AH].

En procédant de la même façon pour β' et γ' on a démontré que:

α', β', γ' sont les milieux de [AH], [BH], et [CH].

fig 7

Conclusion: (ω) est le cercle d'Euler du triangle A, B, C, il contient neuf points remarquables: les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, et les milieux des segments joignant les sommets à l'orthocentre.

Singularités des points A', B', C', α', β', γ'

Compte tenu du rappel $C'\hat{A'} = \alpha\hat{B'}$ (car $(B'C')$ et (BC) sont parallèles) et $\alpha\hat{B'} = B'\hat{\gamma}$ ($(A'B')$ parallèle à (AB)).

On trouve donc que $\alpha\hat{B'} = B'\hat{\gamma} = C'\hat{A'}$ et donc que B' est le milieu de l'arc $\alpha\hat{\gamma}$.

En procédant de la même façon on prouverait que A', B', C' sont les milieux des arcs $\gamma\hat{\beta}$, $\alpha\hat{\gamma}$, $\beta\hat{\alpha}$. et comme A', B' et C' sont diamétralement opposés à α', β', γ' (cf Q2) on a finalement α', β', γ' milieux des arcs $\gamma\hat{\beta}$, $\alpha\hat{\gamma}$, $\beta\hat{\alpha}$.³

³ Comme $\alpha\hat{B'} = C'\hat{A'}$ $\beta\hat{C'} = A'\hat{B'}$ $\gamma\hat{A'} = B'\hat{C'}$, par addition $\alpha\hat{B'} + \beta\hat{C'} + \gamma\hat{A'} \equiv 0 \pmod{2\pi}$

soit $\alpha\hat{A'} + A'\hat{B'} + \beta\hat{B'} + B'\hat{C'} + \gamma\hat{C'} + C'\hat{A'} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ et enfin: $\alpha'\hat{A'} + \beta'\hat{B'} + \gamma'\hat{C'} \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

ASPECTS ANCIENS ET MODERNES SUR LES CERCLES.

1. INTRODUCTION

On fixe définitivement le plan P euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Un cercle C de centre Ω et de rayon R ($R \geq 0$) est défini comme $C(\Omega, R) = \left\{ M \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \in P, \Omega M = R \right\}$.

Son équation cartésienne dans le repère précédent est donc $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

Réciproquement, étant donné un polynôme du second degré en x et y de la forme $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, regardons à quelle condition l'équation $f(x, y) = 0$, correspond à un cercle du plan.

Comme $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

on peut associer à f un cercle de centre $\Omega \begin{array}{l} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{array}$ si et seulement si $a^2 + b^2 \geq 4c$.

Dans le cas où $a^2 + b^2 < 4c$, par souci de généralité on associera à f un cercle de centre $\Omega \begin{array}{l} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{array}$, mais de

rayon $i\sqrt{4c - a^2 - b^2}$, appelé cercle imaginaire.

Nous appellerons désormais cercle, un cercle possédant un centre à coordonnées réelles et un rayon réel ou imaginaire pur.

Avec cette convention l'application qui à tout polynôme f du type précédent associe le cercle correspondant est bijective.

Exemple: Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$. Après canonisation, on s'aperçoit qu'il s'agit du

cercle de centre $\Omega \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array}$ et de rayon i . Pour en donner une représentation, nous allons choisir de procéder

toujours de la même manière. On prend un x réel, par exemple $x=a$ et l'on calcule les ordonnées correspondantes. ici $y = \pm i\sqrt{1 + (a+1)^2}$, que l'on décide de représenter par les point \tilde{M} du plan P de

coordonnées $\tilde{M} \begin{array}{l} a \\ \pm\sqrt{1 + (a+1)^2} \end{array}$. Ainsi le plan contiendra des points réels, mais aussi les représentations

des points imaginaires, obtenues par la méthode précédente. L'équation des points réels qui correspondent aux points \tilde{M} est donc après élimination de a $x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0$, équation d'une hyperbole centrée

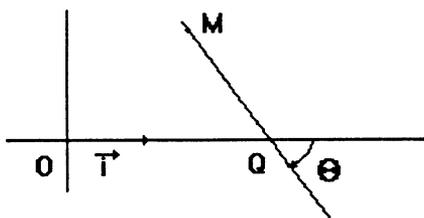
au point $\Omega \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array}$ et d'axe focal (Ω, \vec{j}) .

Cette méthode permet aussi d'associer à tout point réel M , un point imaginaire dont le représentant \tilde{M} sera à la même place, en complexifiant l'ordonnée de M .

2. UNE ILLUSTRATION DE CETTE DUALITE.

Pour commencer, retrouvons analytiquement, le théorème (attribué à Thalès), qui caractérise le cercle comme ensemble des points d'où l'on regarde le diamètre d'un angle droit.

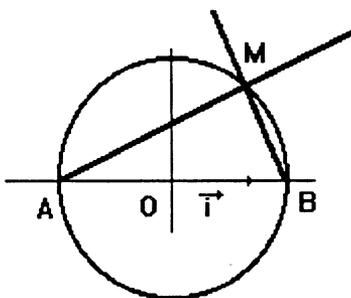
Soit $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ un point du plan quelconque et $Q \begin{vmatrix} x_Q \\ 0 \end{vmatrix}$.



Appelons Θ l'angle $(\vec{i}, M\vec{Q})$.

$$\text{On a } \tan(\vec{i}, M\vec{Q}) = \tan \Theta = \frac{\det(\vec{i}, M\vec{Q})}{\vec{i} \cdot M\vec{Q}} = \frac{-y}{x_Q - x}$$

L'équation d'un cercle réel de diamètre $[AB]$, centré à l'origine du repère est $x^2 + y^2 = a^2$.



$$\text{On a } \tan(\vec{i}, M\vec{B}) = \tan \Theta_1 = \frac{-y}{a-x} \quad \text{et} \quad \tan(\vec{i}, M\vec{A}) = \tan \Theta_2 = \frac{y}{a+x}$$

$$\text{Le produit } \tan \Theta_1 \tan \Theta_2 = \frac{-y^2}{a^2 - x^2} = -1 \text{ donc } \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 = \cos(\Theta_1 - \Theta_2) = 0$$

$$\text{ce qui permet de retrouver } (M\vec{A}, M\vec{B}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Pour trouver la propriété duale, considérons un cercle imaginaire d'équation $x^2 + y^2 = -a^2$.

La représentation obtenue, grâce au procédé précédent, permet de représenter cet ensemble imaginaire par une hyperbole équilatère d'équation $-x^2 + y^2 = a^2$.

A un point M imaginaire $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ (avec y imaginaire pur!) on associe $\tilde{M} \begin{vmatrix} x \\ -iy \end{vmatrix}$, le diamètre focal de l'hyperbole

est défini par les points $\tilde{A} \begin{vmatrix} 0 \\ -a \end{vmatrix}$ et $\tilde{B} \begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix}$

Nous allons d'abord estimer l'angle réel $(\vec{i}, \tilde{M}\vec{B}) = \Theta_1$, en fonction des coordonnées complexes de M .

$$\tan(\vec{i}, \tilde{M}\vec{B}) = \tan \Theta_1 = \frac{-x_{\tilde{M}}}{a - y_{\tilde{M}}} = \frac{-x}{a + iy} \quad \text{et de même}$$

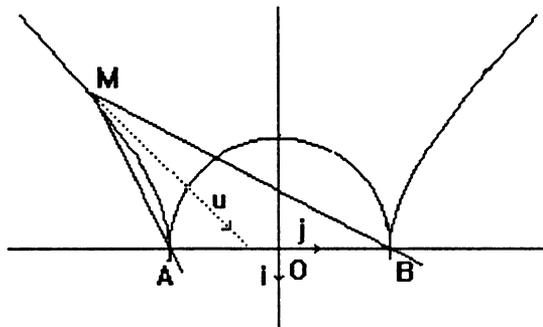
$$\tan(\vec{i}, \tilde{M}\vec{A}) = \tan \Theta_2 = \frac{-x_{\tilde{M}}}{-a - y_{\tilde{M}}} = \frac{x}{a - iy}$$

Finalement $\tan \Theta_1 \tan \Theta_2 = \frac{-x^2}{a^2 + y^2} = 1$ et $\cos(\Theta_2 + \Theta_1) = 0$.

On peut donc énoncer le théorème "dual" du théorème de l'angle droit dans le cercle:

Proposition: ¹ Pour tout point M de l'hyperbole équilatère de sommets A et B, on a

$$(\vec{i}, M\vec{A}) + (\vec{i}, M\vec{B}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$



Remarque: Si l'on appelle \vec{u} un vecteur directeur d'une des bissectrices de l'angle AMB, on aura

$$2(\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{u}, M\vec{A}) + (\vec{u}, M\vec{B}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$$\text{donc} \quad (\vec{i}, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

Les bissectrices de cet angle sont donc parallèles aux asymptotes.

Cette dualité suscita, en 1852, cet échange de lettres entre le mathématicien anglais De Morgan et l'irlandais Hamilton.

"Je peux comprendre votre dernière perspective imaginaire. Ce qui se cache derrière est une substitution du cercle par l'hyperbole équilatère. ...J'ai toujours regretté que l'hyperbole équilatère n'est pas eu quelque propriété remarquable, comme le cercle en a, qui aurait permit à Euclide de les introduire conjointement"².

Et la réponse de Hamilton:

"A propos d'Euclide et de l'hyperbole équilatère, on pourrait penser presque aussi naturel de considérer le cas d'un triangle de base donnée, dont la différence, à la place de la somme, des angles de la base serait un angle droit".

3. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES CERCLES.

L'ensemble Ξ des cercles imaginaires ou réels, se confond maintenant avec l'ensemble des polynômes $f(x,y)$ de la forme $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$. Mais contrairement à l'ensemble ξ des polynômes du premier degré de la forme $f(x,y) = +ax + by + c$ (dont les représentations graphiques sont en général des droites, à un facteur de colinéarité près), Ξ n'est pas un espace vectoriel. Toutefois on a une application

naturelle $\Xi \times \Xi \rightarrow \xi$
 $\phi: (f, g) \rightarrow g - f$ qui vérifie les deux propriétés suivantes:

a) pour tout triplet de cercles C, C' et C''

$$\phi(C, C') + \phi(C', C'') = \phi(C, C'') \quad \phi(f, g) \quad (\text{relation de Chasles}).$$

b) pour tout cercle C et toute forme D de ξ il existe un unique cercle C' tel que

$$\phi(C, C') = D$$

¹ Je n'énonce que le sens direct, mais on remarquera qu'il n'est pas difficile d'obtenir une C.N.S.

² Correspondance entre Sir William Rowan Hamilton et Augustus De Morgan, dans le livre de Robert Graves *Life of Sir William Rowan Hamilton* tome 3 pp.337-339 (Arno Press New York 1975).

L'espace des cercles Ξ est donc un espace affine (de dimension trois) dont l'espace vectoriel associé est ξ est l'ensemble "des droites". Les cercles sont donc des points de cet espace, dont les classes de bipoints sont les vecteurs.

4. PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE.

Soit C un cercle associé au polynôme f et $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point donné du plan P .

On appelle puissance de A par rapport au cercle C le réel $f(x_A, y_A) = x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c = P_C(A)$.

Remarque: le point A appartient au cercle si et ssi sa puissance est nulle.

- Expressions métriques de la puissance dans le cas d'un cercle réel

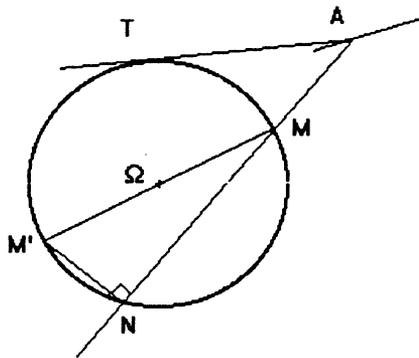
On prend f de la forme $f(x, y) = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 - R^2$.

A à l'extérieur du cercle et T l'intersection d'une tangente à C menée de A avec C .

$$P_C(A) = (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 - R^2 = \Omega A^2 - R^2 = AT^2.$$

Ce qui prouve que $P_C(A)$ est indépendant du repère choisi.

Une sécante quelconque menée de A au cercle C , coupe C en M et N . M' est le symétrique de M par rapport au centre Ω .



On a les égalités suivantes:

$$A\bar{M} \cdot A\bar{N} = A\bar{M} \cdot A\bar{M}' = (A\bar{\Omega} + \Omega\bar{M})(A\bar{\Omega} + \Omega\bar{M}') = A\Omega^2 + \Omega\bar{M} \cdot \Omega\bar{M}' = A\Omega^2 - R^2 \text{ puisque } \Omega\bar{M} + \Omega\bar{M}' = \bar{0}.$$

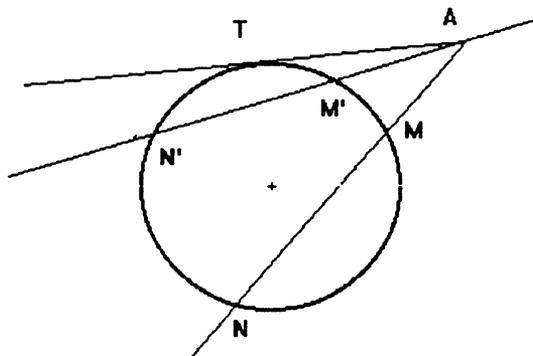
On a donc pour toute sécante au cercle (AMN) : $P_C(A) = A\bar{M} \cdot A\bar{N} = \Omega A^2 - R^2 = AT^2$

Au passage nous pouvons énoncer, et démontrer le théorème qui en découle.

Théorème:

Soit M, N, M', N' , quatre points tels que les droites (MN) et $(M'N')$ soient sécantes en A et tels que les points M, N , et M' ne soient pas alignés, alors on a l'équivalence suivante:

$$M, N, M', N' \text{ sont cocycliques si et seulement si } A\bar{M} \cdot A\bar{N} = A\bar{M}' \cdot A\bar{N}'.$$



Démonstration:

Dans le sens direct, la proposition est évidente puisque $A\bar{M} \cdot A\bar{N}$ ne dépend pas de la sécante choisie.

Pour démontrer le sens réciproque, appelons N'' le point d'intersection de la droite (AM') avec le cercle circonscrit au triangle (M, N, M') .

En appliquant à nouveau le sens direct on a $A\bar{M} \cdot A\bar{N} = A\bar{M}' \cdot A\bar{N}''$. et comme par hypothèse on a $A\bar{M} \cdot A\bar{N} = A\bar{M}' \cdot A\bar{N}'$, en conséquence $A\bar{M} \cdot A\bar{N}'' = A\bar{M}' \cdot A\bar{N}'$ et donc $A\bar{N}'' = A\bar{N}'$ ce qui achève la démonstration (méthode de la fausse position)..

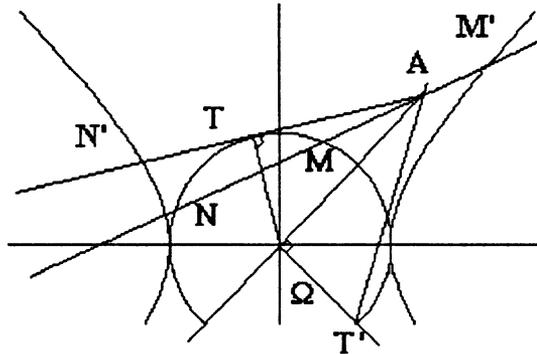
• Expressions métriques de la puissance dans le cas d'un cercle imaginaire

On prend f de la forme $f(x, y) = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + R^2$.

A à l'extérieur du cercle et T l'intersection d'une tangente à C menée de A avec C .

$$P_C(A) = (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + R^2 = \Omega A^2 + R^2 = AT'^2.$$

T' désignant une intersection de la perpendiculaire à $(A\Omega)$ avec le cercle.



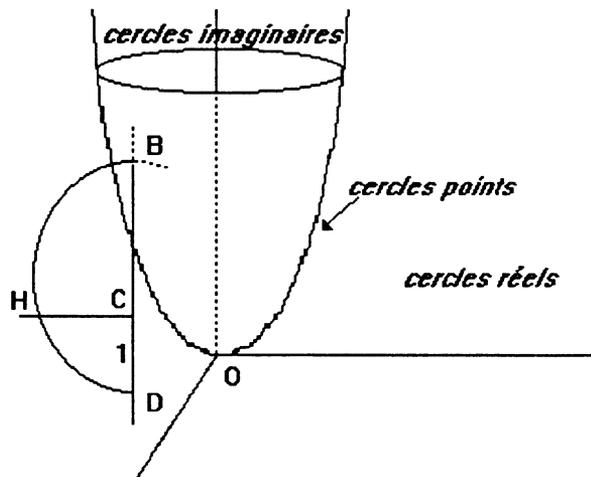
5 ASPECTS LINEAIRES.

Nous avons vu à la page 44, que l'on pouvait munir l'ensemble des cercles Ξ d'une structure d'espace affine, et pour simplifier les notations nous identifierons dorénavant Ξ avec R^3 , et donc les cercles avec les points de ce nouvel espace.

Au cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, correspond le point C de coordonnées $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$.

L'équation générale des cercles points est alors la surface d'équation $a^2 + b^2 = 4c$.

Les sections de cette surface par des plans horizontaux sont des cercles d'équation $a^2 + b^2 = C^{te}$, les sections par des plans frontaux sont des paraboles d'équation $b^2 - 4c = C^{te}$. La surface est donc un paraboloides circulaire. A l'intérieur de cette surface nous retrouvons les cercles imaginaires, et à l'extérieur les cercles réels.



Pour par exemple, retrouver un cercle réel représenté par un point C $\begin{matrix} | a \\ b \\ c \end{matrix}$ à l'extérieur du paraboloïde, on

construit le point B $\begin{matrix} | a \\ b \\ z_B \end{matrix}$ sur paraboloïde qui a la même cote.

Le rayon du cercle représenté par C est R tel que

$$R^2 = a^2 + b^2 - 4c = 4(z_B - c) = 4\overline{CB}.$$

Pour construire R, on reporte un segment CD de longueur R sur la droite (CB).

La sphère de diamètre (CD) recoupe la droite passant par C, parallèle au plan frontal, et perpendiculaire à (CB)

en H. On a $CH = \sqrt{CB} = \frac{R}{2}$.

Pour obtenir le centre du cercle, on projette C sur le plan horizontal ce qui dans ce plan produit un point de

coordonnées $\begin{matrix} | a \\ b \\ 0 \end{matrix}$, on le transforme par une homothétie de centre O et de rapport -1/2, pour obtenir le centre.

Mais dans cet espace le faisceau de cercle défini par les deux cercles non concentriques C et C'³, correspond à l'ensemble des barycentres de C et de C', c'est-à-dire à la droite (CC').

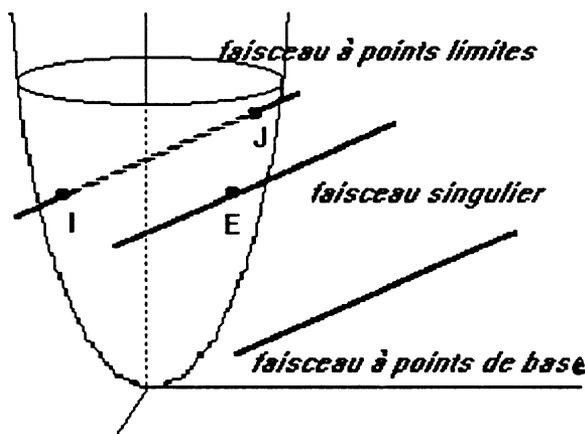
On trouve ainsi les trois sortes de faisceaux:

Si la droite (CC') rencontre le paraboloïde, en I et J, le faisceau contient donc deux cercles points, et est donc du type à points limites.

On retrouve d'ailleurs les cercles imaginaires qui le composent à l'intérieur du paraboloïde.

Si la droite (CC') est tangente au paraboloïde, le faisceau contient un unique cercle point et est donc du type singulier.

Enfin si la droite (CC') ne rencontre pas le paraboloïde, on retrouve un faisceau à point de base.



Il resterait à décrire et définir les propriétés géométriques des cercles de chacune de ces droites. Ceci sera fait, je l'espère ultérieurement, après avoir précisé les concepts d'orthogonalité et d'axe radical

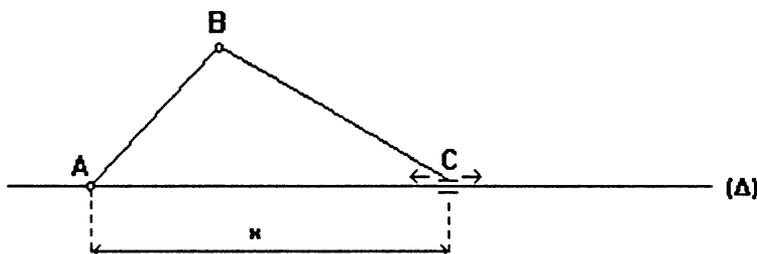
³ Dire que les cercles sont non concentriques revient à prendre la droite (CC') non parallèle à l'axe des z.

LA GEOMETRIE DES FIGURES ARTICULEES.

L'exposé suivant propose des études de fonctions numériques issues de problèmes géométriques basés sur la manipulation "mécanique" de figures (planes dans les trois premières parties: (1) triangles, (2) quadrangles quelconques (3) quadrangles inscrits dans un cercle) et de solides articulés. Ces fonctions sont parfois originales ou mènent éventuellement à des situations plus ou moins étonnantes; dans tous les cas, leur étude est possible à un niveau élémentaire.

I. Le triangle articulé:

Il s'agit de considérer le triangle suivant:



où le point A est fixe sur la droite Δ , le point C, lui est astreint à glisser le long de cette même droite de sorte que les deux "tiges" AB et BC restent de longueur constante. On pourra précisément poser $a = AB$ et $b = BC$ et choisir comme variable principale la longueur AC.

On peut dès lors s'intéresser aux variations de plusieurs autres quantités variables, telles que l'angle BAC ou l'angle ABC, par l'intermédiaire de leur cosinus respectif par exemple ou encore la hauteur issue de B ou tout simplement l'aire du triangle (*son périmètre pouvant à l'occasion faire l'objet d'une activité en classe de troisième pour introduire les fonctions affines!!*)

Avant même de chercher l'expression des variables précitées en fonction de x , épreuve déjà assez délicate qu'on réservera aux classes de S sans doute, on peut faire intervenir dans la mesure des moyens locaux, le logiciel "le Géomètre" qui permet une excellente visualisation de la (dés)articulation du triangle initial, mesure des longueurs et des angles à l'appui! En l'absence de ce logiciel, j'ai toutefois moi-même fait l'expérience du plaisir qu'avaient les élèves à construire les figures correspondantes pour des valeurs de x , puis à mesurer hauteurs et angles, à calculer l'aire du triangle et à regrouper les résultats de la communauté dans un tableau de valeurs menant à la courbe recherchée, obtensible de la sorte point par point.

Notons au passage que la variable x se déplace dans l'intervalle $[|a-b|; a+b]$, en vertu de l'inégalité triangulaire (*on constate, en particulier, que le point C n'atteint jamais le point A sauf dans le cas du triangle isocèle, i-e $a = b$*), et aussi que le point B se déplace sur un arc de cercle de rayon a ...

1°) Etude de l'aire du triangle $S(x)$:

L'occasion est trop belle de sortir de son écrin très Ier siècle-après-J-C, la formule de Héron:

On obtient aussitôt:

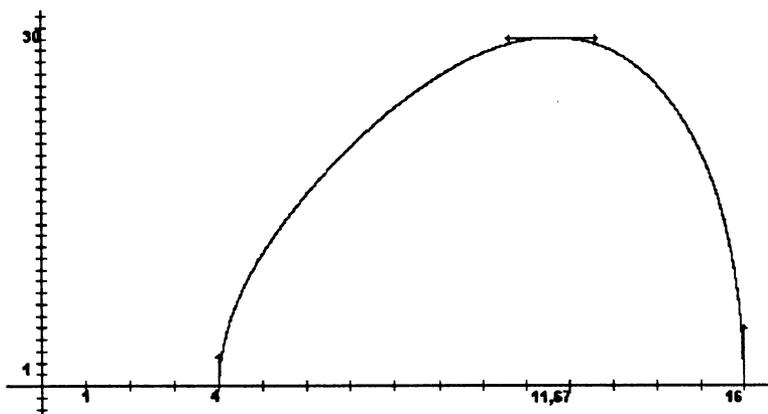
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{4} \sqrt{(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(-x+a+b)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2} \end{aligned}$$

Par exemple, pour $a = 10$ et $b = 6$, on a : $S(x) = \frac{1}{4} \sqrt{-x^4 + 272x^2 - 4096}$.

N.B.: A l'évidence, l'expression ci-dessus est toujours bicarrée et le discriminant du polynôme du second degré associé est: $\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$. On retrouve ainsi l'intervalle sur lequel étudier l'aire $S(x)$, à savoir l'intervalle "entre les racines":

$$[(a-b)^2; (a+b)^2] \text{ pour } x^2 \text{ et } [|a-b|; a+b] \text{ pour } x.$$

A ce stade, si on désire seulement chercher la valeur de x optimisant l'aire, on peut oublier la racine carrée ainsi que la fraction $1/4$ qui l'accompagne, pour n'avoir à travailler que sur le polynôme du 4ème degré ci-dessus. Il serait cependant dommage de passer à côté de la jolie courbe pas symétrique(!) qui représente $S(x)$ et dont voici un aperçu avec $a = 10$ et $b = 6$:

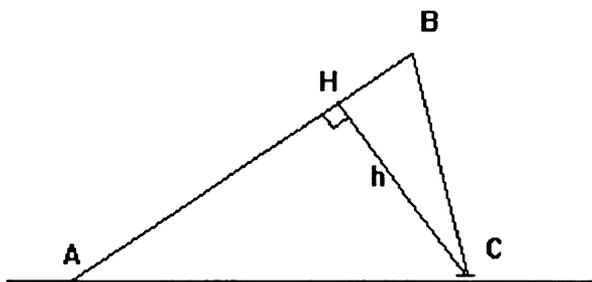


On notera que la dérivée de $S(x)$ est du signe de: $-4x^3 + 4(a^2 + b^2)x = 4x(a^2 + b^2 - x^2)$. On notera également que l'on a toujours $|a - b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ si bien que la dérivée de $S(x)$ est toujours positive sur l'intervalle $[|a - b|; \sqrt{a^2 + b^2}]$ et négative sur $[\sqrt{a^2 + b^2}; a + b]$. On en déduit le tableau de variations suivant:

x	$ a-b $	$\sqrt{a^2+b^2}$	$a+b$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	M	0

avec : $M = S(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}ab$

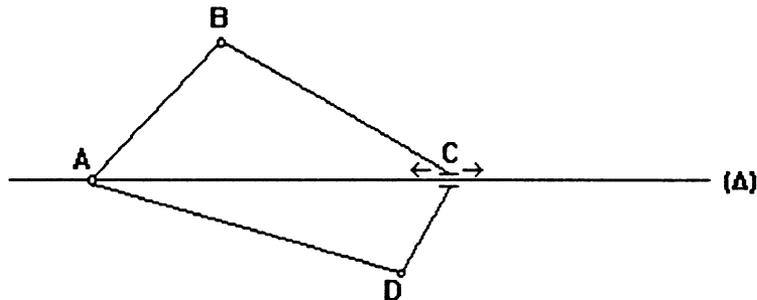
Tout ce travail analytique pour arriver à la conclusion que le triangle a une aire maximale quand il est rectangle en B (*simple réciproque du bon vieux théorème de Pythagorus!*) . On peut alors le redémontrer, disons géométriquement, en recalculant l'aire à partir de la base AB et la hauteur issue de C. On se rend bien compte que cette fois, l'aire varie linéairement par rapport à cette hauteur; or cette hauteur est maximale quand elle vaut BC!



autrement dit : $S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{a}{2} \cdot h$ et S maximale pour $h = b$, i-e $H = B$, i-e ABC rectangle en B, en vertu de cette autre bonne vieille règle géométrique d'antan qui prétend que le chemin le plus court pour aller d'un point à une droite est la perpendiculaire!.

II. Le quadrangle articulé :

On pourrait tout autant parler de "double-triangle-articulé" puisqu'on considère la mécanique représentée ci-dessous:



avec A fixe sur la droite Δ , C glissant le long de cette même droite de sorte que les longueurs AB, BC, CD, DA restent constantes. On pose naturellement $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ et $x = AC$.

Encore une fois, on peut faire appel au logiciel "le Géomètre" pour palier aux éventuelles défaillances de l'intuition quant aux déformations du quadrangles pendant le déplacement du point C! On notera que x varie entre $\max(|a-b|; |c-d|)$ et $\min(a+b; c+d)$.

On peut suivre les variations de grandeurs telles que la diagonale BD, les fonctions trigonométriques associées aux angles du quadrangle mais on se rendra vite à l'évidence que les problèmes posés sont franchement plus délicats que dans le cas du triangle simple. Pour s'en convaincre, voilà un aperçu portant sur l'aire du quadrangle ABCD:

Bien sûr, la formule de Héron utilisée au I. ne se généralise pas aussi bien qu'on le voudrait au quadrilatère. Il faut en effet écrire :

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \cdot [\cos(\beta + \delta) + 1]$$

où selon l'usage p est le demi-périmètre du quadrangle, et β et δ sont les angles ABC et ADC. On devine qu'il y a difficulté à exprimer simplement $\cos(\beta + \delta)$ en fonction de x .

On peut en revanche penser utiliser ce qui a déjà été calculé précédemment et écrire:

$$S(x) = \sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)} \quad \text{avec } u(x) = -x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$\text{et } v(x) = -x^4 + 2(c^2 + d^2)x^2 - (c^2 - d^2)^2$$

comme somme des aires des deux triangles ABC et ADC.

Si on restreint le but de l'étude de $S(x)$ à la recherche de son ou de ses extrémum(s), on est obligé de constater qu'ici l'élévation au carré de S ne donne pas de simplification immédiate.

Le calcul de la dérivée de S reste néanmoins un exercice tout à fait abordable, on a en effet, sur le bon intervalle:

$$S'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} + \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} \quad \text{du signe de } u'(x)\sqrt{v(x)} + v'(x)\sqrt{u(x)}$$

$$\text{avec } u'(x) = 4x(a^2 + b^2 - x^2) \quad \text{et } v'(x) = 4x(c^2 + d^2 - x^2).$$

L'étude du signe de cette expression est tout à fait fastidieuse dans le cas général! Une consolation, la recherche des valeurs de x qui pourraient à l'occasion annuler $S'(x)$ mène au calculs suivants:

$(c^2 + d^2 - x^2)^2 \cdot (-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2) = (a^2 + b^2 - x^2)^2 \cdot (-x^4 + 2(c^2 + d^2)x^2 - (c^2 - d^2)^2)$
 équation qui semble *a priori* du 8ème degré mais qui après simplification se trouve être une équation

bicarrée ! Avec un peu de patience, on finit même par entrevoir les racines évidentes (?!); on se ramène en effet à:

$$x^4(ab+cd)(ab-cd) - 2x^2[(a^2+b^2)c^2d^2 + (c^2+d^2)a^2b^2] + 4(ac+bd)(ac-bd)(ad+bc)(ad-bc) = 0$$

qui se factorise en:

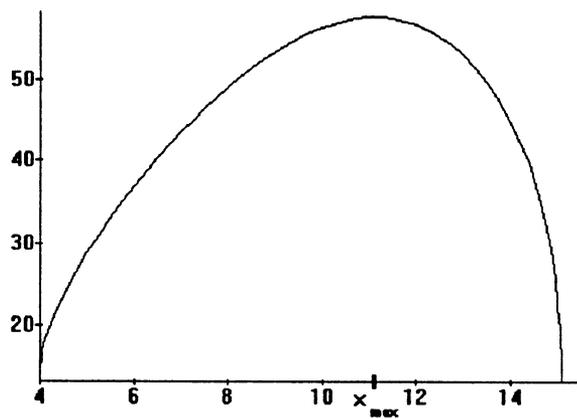
$$\left[x^2 - \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \right] \left[x^2 - \frac{(ac-bd)(ad-bc)}{(ab-cd)} \right] = 0$$

Les racines ainsi déterminées coïncident avec les formules que l'on obtient par ailleurs quand, à l'aide de l'identité d'Al-Kashi, on calcule les diagonales d'un quadrangle inscrit dans un cercle. Pas si étonnant que ça, puisqu'il se trouve que l'aire d'un quadrilatère dont les quatre côtés sont donnés, a une aire maximale quand il est inscriptible! (*pour s'en convaincre, revoir la formule de Héron généralisée au quadrilatère, donnée au début de cette deuxième partie*)

On s'en tiendra là pour l'étude de l'aire du quadrangle articulé, mais on ne quittera pas cette partie sans donner la représentation graphique de S dans un cas particulier, à savoir en prenant:

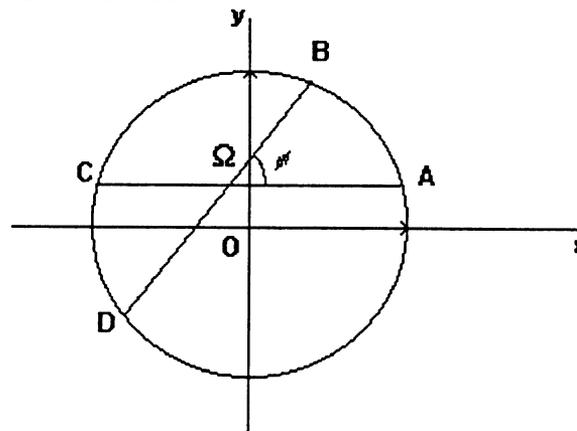
$$a = 6, b = 10, c = 7 \text{ et } d = 8.$$

$$S^2 = \sqrt{-x^4 + 272x^2 - 4096} + \sqrt{-x^4 + 226x^2 - 225}$$



III. Le quadrangle inscrit :

Ici, on considère un cercle de rayon unité C centré à l'origine O d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dans lequel on inscrit un quadrangle $ABCD$ convexe. Les diagonales $[A,C]$ et $[B,D]$ se coupent en un point Ω . On décide alors de fixer le point Ω selon ses coordonnées dans le repère R , disons $(a;h)$ et de faire "tourner" les diagonales autour de ce point; autrement dit on choisit comme variable principale l'angle (orienté, pourquoi pas) que font ces deux diagonales: appelons-le ϕ . La généralité du problème que l'on va se poser, ne sera aucunement entamée, on s'en rendra très vite compte, si on suppose la diagonale $[A,C]$ parallèle à l'axe des abscisses, d'où la figure ci-dessous:



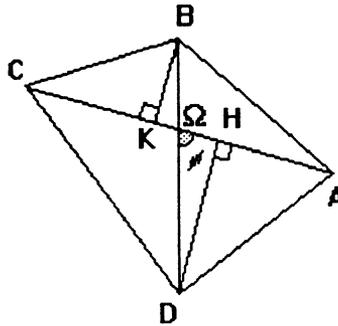
Intéressons-nous une dernière fois aux variations de l'aire du quadrangle ABCD.

Quelques remarques préliminaires s'imposent:

(1) L'aire peut être calculée, de façon avantageuse dans les conditions qu'on s'est fixées, grâce à la formule:

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin \phi$$

On établit cette formule de façon assez élémentaire à partir de la figure suivante et qui tient compte notamment du fait que les diagonales se coupent bien entre B et D!



(2) L'équation de la droite (BD) dans le repère donné, est:

$$x \cdot \sin \phi - y \cdot \cos \phi = a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi$$

et par conséquent la distance de Ω à la droite (BD) est:

$$|a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|$$

On en déduit l'égalité $BD^2 = 4(1 - |a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|^2)$.

Par ailleurs, on a directement: $AC^2 = 1 - h^2$

(3) En regroupant les résultats du (1) et du (2), on obtient:

$$\frac{1}{16} \cdot S^2 = (1 - h^2) \cdot \sin^2 \phi \cdot (1 - |a \cdot \sin \phi - h \cdot \cos \phi|^2)$$

Dés lors, on peut voir S comme une fonction de la variable ϕ dépendant de deux paramètres a et h. Une fois encore, l'étude dans le cas général s'avère assez ardue, aussi s'en tiendra-t-on présentement au cas $h = 0$, c'est-à-dire au cas où la diagonale [A,C] est confondue avec l'axe des abscisses.

On se ramène de la sorte à l'étude de la fonction:

$$f(\phi) = \sin^2 \phi \cdot (1 - a^2 \cdot \sin^2 \phi) \text{ avec } a \in [0;1] \text{ et } \phi \in [0; \pi].$$

On peut même restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \pi/2]$ puisque la fonction est paire (en fait le problème des variations de l'aire est symétrique par rapport aux deux axes du repère)

La dérivée de f est:

$$f'(\phi) = \sin 2\phi \cdot (1 - 2a^2 \cdot \sin^2 \phi)$$

Curiosité, la fonction f se comporte différemment selon que a se situe dans l'intervalle $[0; \sqrt{2}/2]$ ou dans l'intervalle $[\sqrt{2}/2; 1]$.

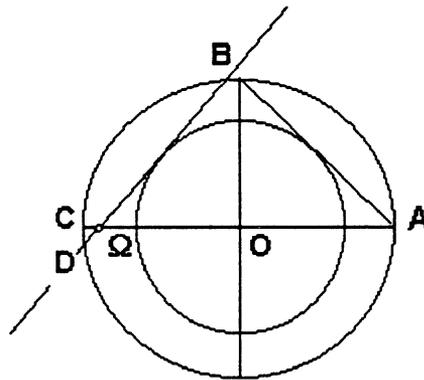
1er cas: $0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; ici, la dérivée de f est toujours positive sur l'intervalle $[0; \pi/2]$, autrement dit, la fonction f croît de 0 à $\pi/2$ pour atteindre alors un maximum qui vaut $f(\pi/2) = 1 - a^2$ puis décroît de $\pi/2$ à π , symétriquement

2ème cas: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$; ici, on peut dresser le tableau de variations suivant:

ϕ	0	α	$\pi/2$	
$f'(\phi)$		+	0	-
$f(\phi)$	0		M	m

avec $\alpha = \arcsin \frac{1}{a\sqrt{2}}$, et $m = 1 - a^2$.

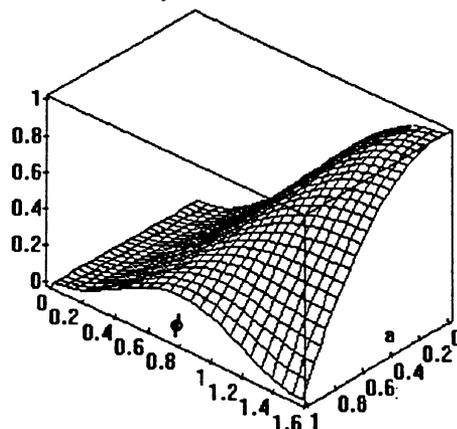
Il apparaît ainsi clairement que, dans le premier cas le maximum de l'aire est atteint quand les diagonales sont perpendiculaires mais qu'il en est tout à fait différemment dans le deuxième cas. Si on s'interroge sur ces directions "privilegiées" que prennent les diagonales [B;D] dans le deuxième cas, pour rendre l'aire maximale, on s'aperçoit qu'il s'agit des tangentes au cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, passant par le point Ω .



En effet, quand $\sin \phi = \frac{1}{a\sqrt{2}}$, alors $\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{1}{2a^2}}$, ϕ étant dans l'intervalle $[0; \pi/2]$. On en déduit que l'équation de la droite (BD) est (cf remarque (2) ci-dessus):

$$x - y\sqrt{2a^2 - 1} + a = 0 \text{ et par suite } d(0; (BD)) = \frac{|a|}{\sqrt{1^2 + (2a^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On peut resituer les extrêmes de la fonction aire du quadrangle inscrit dans un autre contexte, celui de la surface d'équation $z = S(a, \phi)$, l'aire étant considérée alors comme une fonction de deux variables a et ϕ , qu'on peut représenter de la façon suivante:



IV. La pyramide articulée :

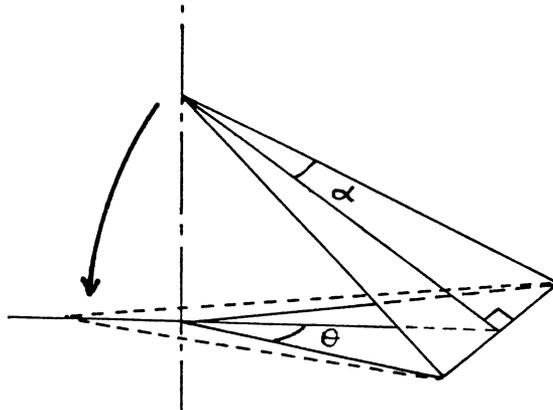
Un peu de géométrie dans l'espace... On se place dans une sphère de rayon r , centrée sur un repère $R = (O;x,y,z)$; Du pôle nord N situé en $(0,0,r)$ au pôle sud situé en $(0,0,-r)$, on déplace un plan "horizontal" H , ou plus précisément d'équation $z = r - h$, avec h égal à la distance du pôle nord à ce plan, distance qui dans la suite sera choisie comme variable principale. On construit alors une pyramide inscrite dans la sphère, de sommet N , en traçant un polygone régulier B sur le cercle intersection de cette sphère avec le plan variable.

C'est à partir de cette construction pour le moins élémentaire que l'on essaie ensuite de faire naître analytiquement les polyèdres réguliers tels que, par exemple, l'octaèdre ou l'icosaèdre.

Quelques rappels ne sembleront pas forcément inutiles:

(1) A propos, qu'est-ce qu'un polyèdre régulier? Ici, on considèrera les polyèdres inscrits dans une sphère, dont toutes les faces sont des polygones réguliers et tels que chaque sommet est entouré par la même configuration.

(2) Appelons n le nombre de faces latérales de la pyramide ci-dessus ; c'est aussi le nombre de côtés de la base B (n est donc un entier supérieur à 3). Appelons α l'angle au sommet d'une des faces latérales et θ l'angle au centre de la base B , projeté orthogonal de α sur le plan H . De façon triviale, on a $\theta = 2\pi / n$ et en utilisant par exemple la croissance de la fonction tangente sur $[0; \pi/2]$, on prouve que $\alpha < \theta$.



On en déduit:

$$3 \leq n < \frac{2\pi}{\alpha} \quad (*)$$

Si on considère que la pyramide initiale correspond à un sommet de polyèdre régulier, il faut donc admettre que α est un angle au sommet de polygone régulier. Or, le plus petit angle au sommet de polygone régulier est évidemment celui du triangle équilatéral, c'est-à-dire $\pi/3$. On obtient finalement, en remplaçant dans (*):

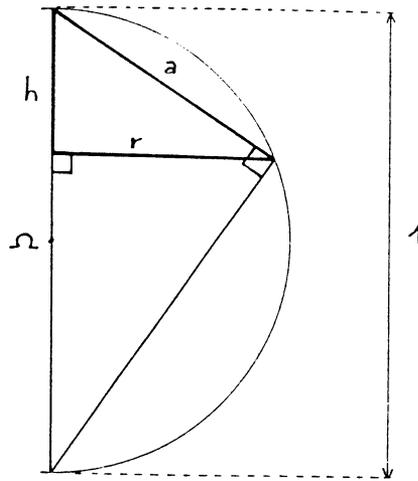
$$3 \leq n < \frac{2\pi}{\pi/3} \quad \text{donc} \quad 3 \leq n < 6 \quad \text{i-e} \quad 3 \leq n \leq 5.$$

Si on cherche à construire de la sorte des polyèdres réguliers, il faudra naturellement se restreindre à des pyramides régulières dont les bases auront 3, 4, ou 5 côtés au plus!

Intéressons-nous maintenant aux grandeurs variables (*en fonction de h*), que sont:

- a) le côté de la base, qu'on appellera c .
- b) l'arête latérale, qu'on appellera a .
- c) le rayon du cercle circonscrit à B , qu'on pourrait appelé ...b.

Un calcul rapide nous amène à écrire:



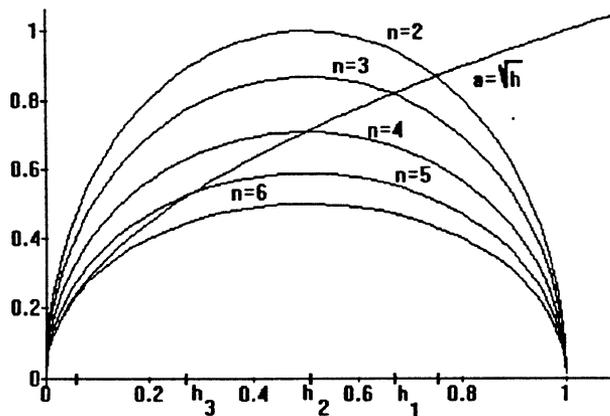
$$a = \sqrt{2rh}; \quad b = \sqrt{2rh - h^2}; \quad c = 2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{2rh - h^2}$$

$$\text{soit en choisissant } r = \frac{1}{2}, \quad a = \sqrt{h}; \quad b = \sqrt{h - h^2}; \quad c = 2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{h - h^2}$$

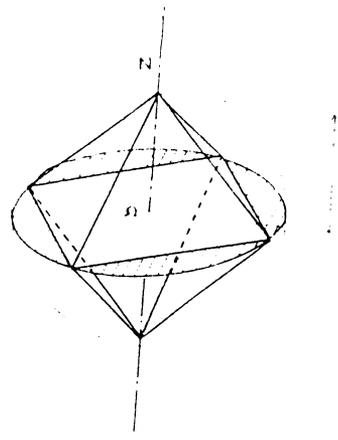
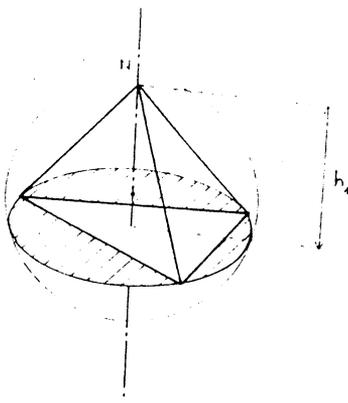
Une condition nécessaire pour que le polyèdre que l'on cherche à construire soit régulier et à faces triangulaires équilatérales est évidemment $a = c$! Les trois équations (*du second degré!*) associées aux valeurs 3,4,5 du paramètre n donnent les solutions:

$$h_1 = \frac{2}{3}; \quad h_2 = \frac{1}{2}; \quad h_3 = 1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \approx 0,2764.$$

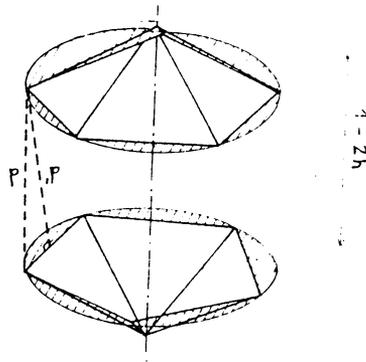
Solutions que l'on retrouve directement par lecture graphique.



Si les deux premières solutions conduisent rapidement au tétraèdre pour la première et à l'octaèdre pour la seconde, il n'en va pas du tout de même pour la troisième.



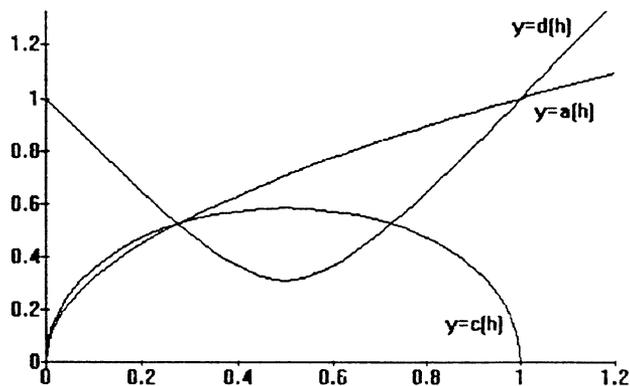
On peut alors faire agir la symétrie de centre, le centre de la sphère initiale, sur la pyramide à base pentagonale, puis mesurer, toujours en fonction de h , la distance la plus courte qui sépare les sommets des deux bases pentagonales, qu'on pourrait appeler ... d .



Après une âpre lutte sur les lignes trigonométriques adverses, on doit aboutir à la formule:

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}h^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}h + 1}$$

Il nous reste à vérifier graphiquement, ce que l'on espérait bien observer, c'est-à-dire que les trois courbes: $y = a(h)$, $y = c(h)$ et $y = d(h)$ sont concourantes...



REF : 99 – POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHÉMATIQUES.

*AUTEURS : – Bertrand FORT – Thierry HAMEL – Jean–Claude JOVET
– Gérard LAVAU – Luc SINEGRE*

Public Concerné : Lycée, BTS, Prépa.

Résumé : Actes du stage P.A.F "Pour aimer encore faire des mathématique".

Mots clefs : – Probabilités. – Dénombrément.
– Géométrie articulée. – Cercles.
– Ptolémée. – Séries.
– Angles (inscrits, extérieurs, intérieurs).

Date : Juin 1994

Nb de pages : 56 pages – **Format :** A4.

Prix : 35.00 F.

N°ISBN : 2–86239–060–7 – **Dépôt légal :** 2^{ème} trimestre 1994.

Publication : IREM de ROUEN.

1, Rue Thomas Becket

B.P.153

76130 Mont Saint Aignan

Bon de commande

M. , Mme, Mlle :

Adresse :

Libellé :

Prix Quantité Total

POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHÉMATIQUES 35.00 F

Frais d'envoi : 15. F pour le 1^{er} livre et 5 F par livre supplémentaire (France)

Frais réels pour l'étranger

SOMME DUE :.....

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. – B.P. 153 – 76135 MONT SAINT AIGNAN

Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TGV 10071 76000 00044004056 81

DATE :

SIGNATURE :