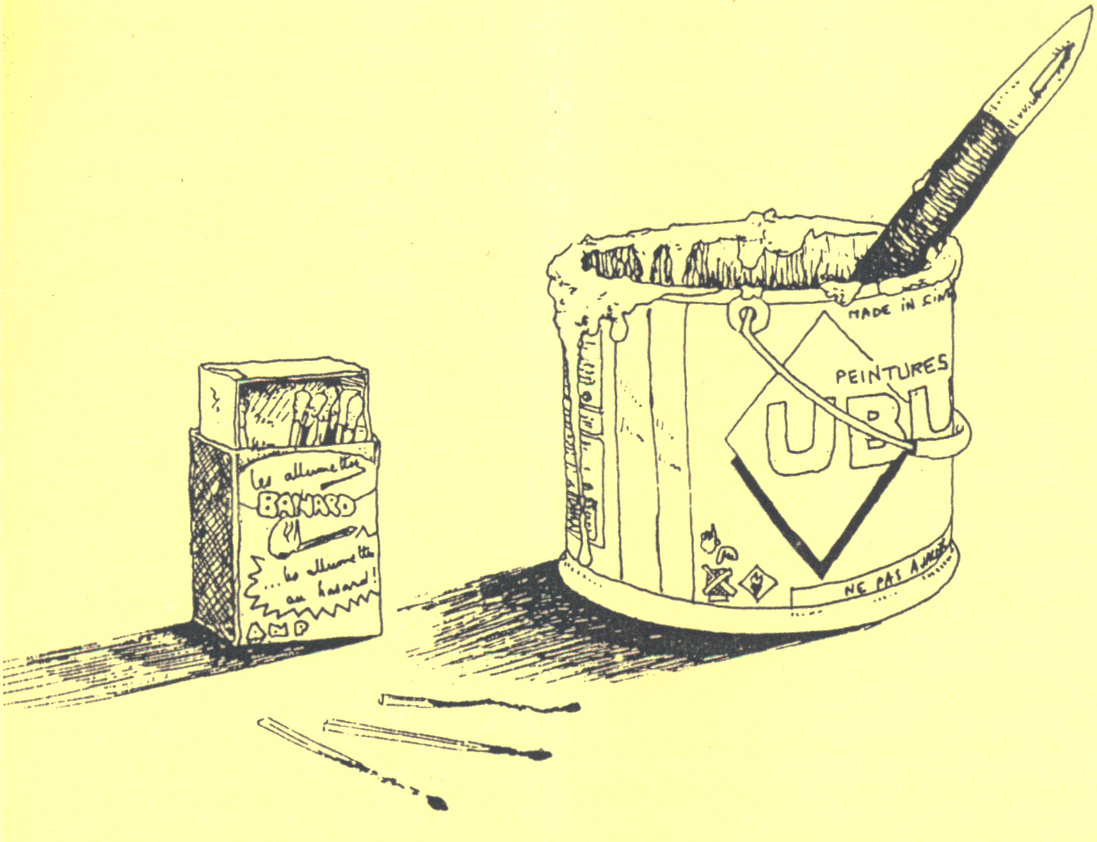
UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

INSTITUT de RECHERCHE
sur
l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

IREM
tél : 35 14 61 41



LES PROBABILITES pour le Lycée 1

IREM de ROUEN
1, rue Thomas Becket - BP 153, 76135 Mont-Saint-Aignan Cédex

STAGE PROBABILITES

0 INTRODUCTION

L'enseignement des probabilités au Lycée présente une histoire assez récente et surtout mouvante. Les probabilités ont fait leur entrée dans le programme "Bourbakiste" des années 1970, et furent présentes dans toutes les terminales de l'époque avec même l'introduction des "Tribus". Un problème de bac C à Paris en 1976 (?) entièrement centré sur les probabilités fit, je crois, scandale et consacra leur relégation progressive, au moins pour ce qui est de la série C. Les probabilités sont depuis, en attendant leur retour dans les sections scientifiques qui est maintenant programmé, la matière d'un des deux exrcices des Bac A, B ou D. Les modèles présents au Bac sont très peu nombreux et l'on voit souvent apparaître le même exercice sous des formulations diverses. Reconnaître le "Schéma de Bernoulli"[1] suffit au candidat, même s'il ignore en vérité si l'on cherche le nombre de succès, d'échecs, ou le temps d'attente de la troisième noire, pour résoudre la plus difficile des questions posées.

Les candidats de ces séries qui ne sont pas toujours très à l'aise avec les mathématiques, redoutent pourtant cette partie du programme, et on s'aperçoit de plus que, même ceux qui semblent réussir dans ce type d'exercice en Terminale ont beaucoup de mal à dominer ensuite les généralisations ou les prolongements de ces notions[2] dans les nombreux cursus[3] où elles sont exigibles ensuite. La différence avec l'enseignement de l'Analyse est à tous égards très remarquable.

....

[1] Suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

[2] Passage de la loi binômiale à la loi multinômiale par exemple.

[3] Sciences Eco, Prépa HEC etc...

Les pages qui suivent ne sont:

ni un cours de Terminale d'abord parce qu'on y trouve de nombreux concepts dépassant les programmes de ces classes,

ni un cours de Deug car là il y manquerait des notions ou du moins leur présentation méthodique (V.a.r par exemple).

Nous avons voulu exposer des modèles qui peuvent aider le professeur dans son travail quotidien: l'expérience montre que les degrés d'abstraction de chaque modèle sont largement subjectifs et qu'il est très profitable pour l'élève, quand c'est possible, de donner plusieurs modélisations ou plusieurs interprétations d'un même problème: on peut confronter les résultats, ou les vérifier, on peut parfois dans le cas de divergences rechercher les causes de l'erreur[4].

La dernière difficulté provient du caractère "Physique" des expériences. Il faut comprendre (comme Pascal) que le modèle "Physique", s'il conditionne le modèle du dénombrement, ne permet pas en général de le déterminer tout à fait, mais il faut aussi jouer avec un "Temps", a priori non nécessaire pour bien organiser les probabilités conditionnelles[5].

Une partie de ce papier utilise les remarques des stagiaires et il faut les en remercier.
Thierry HAMEL a bien voulu relire l'ensemble de ce texte pour lui apporter des remarques ou des commentaires, qui, je crois, l'enrichissent, il l'a également illustré avec humour.

Luc SINEGRE.

....

[4] Problèmes de données implicites, fausses hypothèses, mauvaises partitions...

[5] Bayes avait d'ailleurs développé toute sa théorie "dans le Temps" (cf Clero mélanges sur le temps Irem Rouen).

1 LE DENOMBREMENT

Nous donnons ici un résumé des différents modèles de dénombrement utiles. Nous avons priviligier toutes les démonstrations par "Comptage":
Dans toute la suite, E désigne un ensemble fini de cardinal n fixé.

A p-Listes

DEFINITION: On appelle p liste de E tout élement de E^p. Il y a donc n^p p-listes de E.
Synonymes: p uple, p uplet, suite de p éléments de E.

Application: Notons $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Soit A un sous ensemble de E (ou encore une partie de E).
On associe à A le n uple $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ avec la convention suivante $\delta_i = 0$ si $x_i \in A$ et 0 sinon.

Par exemple si n=4 la partie $\{x_1, x_2, x_4\}$ est codée par (1101).

Nous avons défini une application de $\mathcal{P}(E)$ dans l'ensemble des n listes de {0,1}. Elle est bien sûr bijective[6].

Il y a donc autant de parties dans E que de n listes de {0,1} c'est à dire 2^n.

B Arrangement

DEFINITION: Soit p un entier inférieur à n, on appelle arrangement à p éléments de E une p-liste de E sans répétition.

Synonymes: partie ordonnée, suite d'éléments distincts...

Il y a $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments.

Exercice: Probabilité que les p personnes d'une rame de métro qui dessert n stations descendent toutes à des stations différentes. ($n \geq p$)

....

[6] On peut facilement exhiber son application réciproque.

Les cas possibles sont les p-listes représentant les choix des personnes, les cas possibles sont les p-listes sans répétition donc le résultat est:

$$\frac{A_n^p}{n^p}$$

Application: probabilité que parmi les p personnes d'une classe, au moins deux fêtent leur anniversaire le même jour.
En prenant l'évènement contraire qui est donc que tous souhaitent leurs anniversaires à des jours différents on trouve (cf l'exercice précédent):

$$1 - \frac{A_{365}^p}{365^p}$$

Le résultat appliqué à une classe d'effectif habituel donne un résultat qui surprend toujours l'auditoire: pour p=36 on trouve 83%
pour p=40 on trouve 89%
pour p=30 on trouve 71%

C Permutation

DEFINITION: On appelle permutation une n-liste d'éléments distincts de E ou encore un arrangement à n éléments de E. Il y a donc n! permutations de E.

Un EXERCICE CLASSIQUE "autour d'une table"[7]:

Nous avons n garçons et n filles à placer autour d'une table circulaire. Quelle est la probabilité d'obtenir l'alternance parfaite?[8]

Première remarque: pour résoudre la question posée on n'envisage que les relations des uns avec les autres et pas les places[9] mais dans un premier

....

7 On trouve aussi des situations de drapeaux, ou de livres de bibliothèques...

8 ie garçon fille etc...

9 Imaginons un instant qu'il y ait une fenêtre par exemple et donc des "bonnes

temps il paraît préférable de distinguer les chaises que nous pouvons toujours numéroter de 1 à 2n avec de la peinture.[10]

Les cas possibles sont alors les permutations de {1...2n} ie (2n)!.

Pour les cas favorables on peut d'abord envisager les configurations où les garçons se trouvent sur les sièges impairs (n!) et les filles sur les pairs (n!) donc en tout $(n!)^2$ configurations puis ensuite la situation symétrique. donc la réponse est $\frac{2\,n!n!}{(2n)!} = \frac{(n-1)!n!}{(2n-1)!}$

Commentaire: Nous venons de voir comment nous avons compliqué les hypothèses du modèle "physique" en distinguant les chaises pour obtenir au dénominateur un modèle classique. Dans la suite nous allons poser l'hypothèse suivante: il est possible de rendre compte de toute formule sommatoire ou toute simplification en créant un nouveau modèle.
Puisque pour résoudre l'exercice on ne tient compte que des relations des convives les uns avec les autres décidons de faire occuper le siège n°1 par le plus âgé des garçons. Nous n'aurons plus alors que (2n-1)! cas possibles. Les n-1 autres garçons devront pour les cas favorables occuper les (n-1) sièges impairs et nous retrouvons en tout (n-1)!n! cas favorables. Nous continuons toutefois de distinguer les convives alors que seul leur sexe importe pour traiter la question. Nous allons voir au D comment on peut s'en passer.

D Permutation avec répétitions.

En terminale on fait souvent résoudre aux élèves l'exercice suivant: combien de mots (avec ou sans sens) peut on écrire avec toutes les lettres du mot Anticonstitutionnellement?
Nous pensons que le modèle qui est sous jacent a une portée qui va bien au delà de ce simple calcul, et qu'il est donc particulièrement intéressant que les élèves comprennent vraiment ce qui ce passe plutôt que de retenir la "recette".
On peut commencer par dénombrer les mots formés avec UBU car pour eux il n'y a pas besoin de théorie. Pour modéliser acceptons de peindre en vert le premier U et en bleu le second nous trouverons 3! pseudo mots dans ce cas. Il est facile alors de faire découvrir que chaque paire de pseudo mots fournit un mot véritable. On recommence alors avec par exemple ERREUR, ou même par un exercice intermédiaire pour voir qu'il faut alors 2!3! pseudo mots pour faire un mot.

....

places" et des "mauvaises".

10 Nous verrons dans la suite qu'il est très utile de se munir d'un pot de peinture pour dénombrer.

Soit E un ensemble de n lettres composés de n_1 signes n°1, n_2 signes n°2,

etc....n_q signes n°q il y a alors

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots\ldots\ldots\ldots n_q!} \text{ mots.}$$

THEOREME: Il y a $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots\ldots\ldots\ldots n_q!}$ permutations de E avec n_1 répétitions d'un premier élément etc...

RETOUR sur l'EXERCICE.

Puisque nous avons décidé de placer le garçon le plus âgé, nous pouvons maitenant "déplier" la tablée (dans le sens trigonométrique par exemple). La répartition commencera toujours par un G et continuera par (n-1) G et n F selon le schéma

G				....	

Il n'y a plus alors <u>qu'un seul cas favorable</u>:

G	F	G	F	....	F

.

Notre modèle est donc le modèle <u>minimal</u> pour la question posée puisque notre évènememnt devient élémentaire.
Constituer une tablée revient à écrire un mot avec n-1 G et n F il y en a

$$\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

La probabilité recherchée est donc $\frac{(n-1)!n!}{(2n-1)!}$.
Cette simplification ne peut bien sûr n'être opérée qu'a posteriori.

E Parties de E.

DEFINITION: Soit p un entier inférieur à n, on appelle partie à p éléments de E un sous ensemble de E comprennant p éléments.

Synonyme: combinaison de p éléments.

Une partie A non ordonnée permet de constituer p! (pourquoi?) parties ordonnées donc il y a $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons à p éléments.

REMARQUE: La dernière de ces égalités est bien sûr importante, mais la première est trop souvent volatile dans la mémoire des élèves c'est dommage pour deux raisons: .beaucoup de candidats au Bac se ridiculisent en trouvant C_n^1 ou C_n^2 après de long calculs alors que

.l'interprétation même de cette égalité est trop importante pour pouvoir être perdue.

Application: On tire p éléments de E = {1,2,....,n}. Quelle est la probabilité que le plus grand des p numéros se trouve à la dernière place?

Il y a donc a priori A_n^p cas possibles ie $C_n^p.p!$

C'est cette décomposition qui va nous indiquer la marche à suivre. Tirons d'abord une partie A de E, elle nous donne (p-1)! parties ordonnées favorables puisque le dernier élément est fixé soit:

$$\frac{C_n^p\ (p-1)!}{C_n^p\ p!} = \frac{1}{p}$$

Remarque: Un stagiaire a proposé pour faire ce calcul, la partition suivante pour les cas favorables, ayant gardé le même univers:

Le plus grand nombre tiré est n A_{n-1}^{p-1} cas favorables.
Le plus grand nombre tiré est n-1 A_{n-2}^{p-1} cas favorables.

Le plus grand nombre tiré est n-k A_{n-k-1}^{p-1} cas favorables.

Le plus grand nombre tiré est n-(n-p) A_{p-1}^{p-1} cas favorables.

Le total des cas favorables est $\sum_{k=0}^{n-p} A_{n-k-1}^{p-1} = (p-1)! \sum_{k=0}^{n-p} C_{n-k-1}^{p-1}$

somme des termes d'une colonne du tableau de Pascal.

En réunissant les deux méthodes, on trouve donc une relation classique reliant les coefficients binômiaux du triangle de Pascal:

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-k-1}^{p-1} = C_n^p$$

Application: Il y a autant de suites strictement croissantes de p éléments de E={1,2,....,n} que de combinaisons de E: C_n^p.

Retour sur la tablée: Une fois le plus âgé des garçons placé on peut imaginer que l'on ait à installer les n-1 autres, les filles étant toutes en retard. La question posée est encore soluble. Il y a autant de tablées que de places pour ces n-1 garçons soit C_{2n}^{n-1} la probabilité recherchée est donc

$$\frac{1}{C_{2n}^{n-1}}$$

F Quelques propriétés des Combinaisons.

Nous avons simplement abordé quelques unes des propriétés des combinaisons, mais la liste est loin d'être exhaustive (il manque le binôme de Newton).
Nous donnons quelques formules qui se démontrent facilement de manière combinatoire.

L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longrightarrow & \bar{A} \end{array}$$
est bijective (car involutive), elle envoie l'ensemble des parties de E à p éléments sur l'ensemble des parties de E à n-p éléments

$$\text{donc } C_n^p = C_n^{n-p}$$

On a aussi classiquement $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$ en dénombrant successivement les parties de E à 0, 1, ..., n éléments. La somme des éléments sur une ligne du triangle de Pascal est donc 2^n.

Mais on peut aussi calculer la somme des éléments de rang pair ou impair:

Prenons maintenant notre peinture et peignons en rouge un élément a de E.

On construit alors sur $\mathcal{P}(E)$ l'application involutive φ suivante:
si A contient a on l'enlève et sinon on le rajoute.

φ envoie donc bijectivement les parties paires de E sur les parties impaires il y a donc 2^{n-1} parties paires dans $\mathcal{P}(E)$.

Soit n un entier supérieur à p, lui même supérieur à 1. Maintenant que a est peint en rouge, on peut sur l'ensemble des parties à p éléments de E faire la partition suivante: ou bien elles contiennent a

il y en a C_{n-1}^{p-1} puisqu'il reste p-1 élements à choisir parmi n-1

ou bien on se passe des services de a

il y en a C_{n-1}^{p} puisqu'il reste p élements à choisir parmi n-1

On trouve ainsi que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$ (Pascal).

Peignons maintenant deux éléments a et b de E. (si $p \geq 2$)

On obtient une nouvelle partition:

sans a ni b	C_{n-2}^{p-2}
avec un seul de {a,b}	$2\,C_{n-2}^{p-1}$
ni a ni b	C_{n-2}^{p}

On trouve alors:

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p}$$

Généralisation: La Formule de VanderMonde:

Supposons maintenant que E contienne a éléments peints et b intacts.

Pour $0 \leq k \leq p$ appelons E_k défini ainsi: E_k contient k élements peints et p-k intacts. L'ensemble des E_k forment une partition de l'ensemble des parties de E à p éléments.

Chaque E_k contient $C_a^k C_b^{p-k}$ éléments:

On démontre ainsi que $C_{a+b}^p = \sum_{k=0}^{p} C_a^k C_b^{p-k}$

Application: si a=b=n on a $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$

Exercice: Parmi n personnes on en extrait p, ces dernières élisent un chef combien y a t il de cas possibles?

il y a C_n^p comités possibles et dans chacun d'eux p choix conduisent à l'élection du chef: au total p C_n^p

Dans un autre pays peu démocratique, on désigne d'abord le chef, lui même choisissant ses équipiers:

Il y a n chefs possibles, puis C_{n-1}^{p-1} compagnons donc n C_{n-1}^{p-1} équipes.

Conclusion: $p\, C_n^p = n\, C_{n-1}^{p-1}$

Généralisation: soit $q \le p \le n$ trois entiers. Un comité de p personnes pris parmi les n peut élire en son sein un directoire de q personnes: au total

$$C_n^p\, C_p^q$$

Mais comme précédemment on peut commencer par désigner le directoire qui choisira "ensuite" les équipiers:

$$C_n^q\, C_{n-q}^{p-q}$$

Conclusion $C_n^p\, C_p^q = C_n^q\, C_{n-q}^{p-q}$

On comprend facilement que le jeu consiste à démontrer par l'analyse combinatoire des formules classiques, la difficulté dépend en fait de la formule elle même. Pour finir on peut regarder une formule classique sur les factorielles qu'on donne souvent pour illustrer le raisonnement par récurrence.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k.k! = n! - 1$$ [11]

Le modèle sous jacent tourne clairement autour des permutations, mais la

....

[11] Une méthode simple est algébrique:

on remarque que $n.n! = (n+1)! - n!$

$(n-k).(n-k)! = (n-k+1)!-(n-k)!$

Donc en sommant "ces différences" on obtient directement le résultat.

solution est moins facile qu'il y paraît[12].

Exercice: n personnes prennent place autour d'une table (encore!). Chacune possède une place déterminée. On suppose de plus les personnes ordonnées.[13]

On appelle A_k l'évènement les k-1 premières occupent la place qui leur était impartie et la k ième pas. Trouvez le cardinal de A_k. Retrouvez une formule classique...

$A_1 \longrightarrow a_1$ ne retrouve pas sa place.

n-1 choix pour a_1 et (n-1)! pour les autres

en tout (n-1)(n-1)!

$A_2 \longrightarrow a_1$ retrouve sa place et pas a_2

1 choix pour a_1 (n-2) pour a_2 (n-2)! pour les autres.

en tout (n-2)(n-2)!

$A_k \longrightarrow$ les k-1 premiers retrouvent leur place et pas a_k.

(n-k)(n-k)!

$A_n \longrightarrow$ tout le monde est placé sauf le dernier ce qui est impossible.[14]

On remarque ensuite que les A_k sont disjoints deux à deux.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \longrightarrow \text{toute permutation possible sauf l'identité.}$$

$$\text{On a donc } \sum_{k=1}^{n-1} k\,k! = n! - 1$$

G Combinaison avec repetition.

DEFINITION: Une combinaison avec répétition de p éléments de E est une partie non ordonnée de p éléments supportant des répétitions.

On note Γ_n^p le nombre de combinaisons de à p éléments avec

....

[12] On a vite envie d'aller vers des permutations sans point fixe, mais c'est une erreur car c'est un sujet plus compliqué encore que la formule, cf plus loin.

[13] L'âge, ou l'alphabet comme on veut.

[14] (n-n)(n-n)! si l'on veut.

répétition.

Il faut noter que p n'a pas besoin d'être inférieur à n.

Le calcul le plus simple est

$$\Gamma^1_n = n$$

$$\Gamma^2_n = C^2_n + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

L'exemple le plus élémentaire est le jeu de dominos.

Il y a Γ^2_7 dominos donc 28.[15]

Pour dénombrer ces combinaisons ont peut utiliser le stratagème suivant:

On fait correspondre à toute partie avec répétition un "mot":

Par exemple si n=4

les deux a_1

$\{a_1 a_1 a_2\}$ sera codée par 110 10 0 0

pas d'élément a_4

On peut ainsi coder toute partie par une suite de n-1 séparateurs 0 encadrant des séries de 1. En tout il doit y avoir p " 1 ".

On retrouve le modèle "des mots": on fait des mots de n+p-1 lettres avec p " 1 " et n-1 " 0 " en tout il y en a $\frac{n+p-1}{(n-1)!p!}$

on peut aussi tout simplement choisir les places des séparateurs pour obtenir $\Gamma^p_n = C^p_{n+p-1} = C^{n-1}_{n+p-1}$.[16]

On retrouve ainsi que $\Gamma^2_n = C^2_{n+1}$

Application: Si E={1,2...,n} on peut dénombrer les suites croissantes au sens large de p éléments pris parmi E. Après avoir vu que prendre une suite croissante de p éléments correspond à prendre une combinaison avec répétition de p éléments on en trouve $\Gamma^p_n = C^p_{n+p-1}$.

....

[15] Il est évident que tout ce paragraphe dépasse de beaucoup les programmes de Terminale, mais il ne semble pas outrancier de calculer "à la main" Γ^2_n ou Γ^3_n.

[16] Pour une autre démonstration par les chemins monotones cf note 21.

Application: Dénombrer les suites de n entiers dont la somme fait p.

Si nous représentons chaque entier par un bâton (le vide pour 0) nous sommes amené à construire des suites de p bâtons séparés par n-1 signes +.

Le modèle "des mots" donne une fois de plus la solution:

$$\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} = \Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p .$$

Exercice: On lance p boules dans n cases. Dénombrons les configurations.

1°) Chaque case ne peut contenir au plus qu'une boule:

a) les boules sont différentes (ou numérotées)

on trouve A_n^p

b) les boules sont identiques

on trouve C_n^p

2°) Chaque case peut contenir plusieurs boules (au plus p):

a) les boules sont différentes (ou numérotées) on trouve n^p

b) les boules sont identiques

on trouve Γ_n^p

H QUELQUES REMARQUES

LE MODELE

Les problèmes de probabilités ou de dénombrement reposent presque toujours sur des expériences physiques, souvent présentées sous forme de jeux. Le professeur peut s'assurer que la première étape de la solution, la compréhension du texte, est franchie en lui demandant[17] d'esquisser une expérience particulière (si possible générique) respectant, sans les dépasser, toutes les données du texte (ie un ω de Ω). Parfois il est utile, comme en physique de donner un schéma résumant l'expérience.

LES ARBRES

Une des erreurs les plus fréquentes est de confondre dans un dénombrement la multiplication et l'addition.

La pratique des arbres paraît la seule capable d'aider l'élève qui se pose ce genre de questions. Le problème sera de passer d'un arbre déterminé, qui possède un petit nombre de branches et de noeuds, et qu'on peut donc représenter facilement à un arbre "idéal" dont on devra imaginer les branches et les noeuds pour figurer le dénombrement.

[17] C'est ensuite l'élève qui doit s'appliquer à se poser ces questions avant de commencer toute résolution.

La compréhension juste du modèle physique permet parfaitement de dresser l'arbre déterminé, mais il faut prendre bien garde au fait qu'alors, le dénombrement est encore possible par addition (en dénombrant les terminaisons) et nous croyons qu'il est bien préférable, même dans ce cas, de montrer comment on peut trouver le résultat <u>par multiplication</u>, car seul ce procédé est généralisable et fécond.
Pour éviter les pièges dans les situations délicates, on aura aussi besoin de savoir faire la démarche inverse, celle qui part d'un modèle aux multiples paramètres et ramène les arbres "indéterminés" à des arbres déterminés en fixant des valeurs simples, petites, mais restant génériques.

AU MOINS

Tout le monde a fait dans les premiers exercices sur les probabilités l'erreur classique du au moins un pique:
On prend 8 cartes d'un jeu de 32 et l'on cherche la probabilité d'avoir au moins un pique on écrit pour les cas favorables
$C_8^1 C_{31}^7$ en faisant bien attention à retirer des secondes ramifications de l'arbre le premier pique tiré. Très vite, les élèves évitent cette erreur en utilisant l'astuce de l'évènement complémentaire, mais il est loin d'être sûr qu'ils aient tous compris exactement pourquoi la méthode était erronée.
La particularisation proposée au paragraphe précédent peut peut-être nous aider à comprendre ou faire comprendre ce qui se passe.
Maintenant le jeu comporte 3 cartes As, Roi , Dame et seulement deux couleurs

et l'on va tirer 3 cartes:

donc A, R, D, $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{D}$ Dénombrons les configuration où il y au moins un pique: en suivant la même méthode on trouve $C_3^1 C_5^2$

mais nous pouvons détailler le calcul

A	R D	R	A D	D	A R
	R $\mathfrak{A}$		A $\mathfrak{A}$		R $\mathfrak{A}$
	R $\mathfrak{R}$		A $\mathfrak{R}$		R $\mathfrak{R}$
	R $\mathfrak{D}$		A $\mathfrak{D}$		R $\mathfrak{D}$
	D $\mathfrak{A}$		D $\mathfrak{A}$		A $\mathfrak{A}$
	D $\mathfrak{R}$		D $\mathfrak{R}$		A $\mathfrak{R}$
	D $\mathfrak{D}$		D $\mathfrak{D}$		A $\mathfrak{D}$
	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{R}$		$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{R}$		$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{R}$
	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{D}$		$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{D}$		$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{D}$
	$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{D}$		$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{D}$		$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{D}$

On s'aperçoit alors qu'on retrouve plusieurs fois les mêmes ensembles de cartes par exemple ARD est compté trois fois etc....

De L'ORDRE

L'exemple donné plus haut peut sembler bien classique, nous allons voir ici que l'on retrouve des exemples très proches dans des situations plus compliquées.
Sur un exercice classique de dénombrement toute une classe de prépa Hec avait fait la même erreur que voici:

On tire deux dominos d'un jeu ordinaire. Quelle est la probabilité que les deux dominos soient compatibles?

La première question qui consistait à dénombrer le nombre de dominos n'a pas posé de problèmes et l'on trouve quelle que soit la méthode 28.

Pour le cardinal de l'univers, tout le monde avait pris C^2_{28}, car dans le doute un élève se laisse guider par l'expérience physique.

Les meilleurs élèves avaient remarqué qu'il fallait distinguer les dominos non doubles et les doubles. Comme on ne peut avoir favorablement une paire de doubles ils avaient été conduits à la partition suivante:

Premier cas la paire comporte un double:

les doubles
↓
7 x 6 ⟵ le compatible ordinaire

Second Cas on a une paire d'ordinaires

les 21 ord
↓
21 x 10 ⟵ on compte 10 compatibles ord pour chaque domino

les élèves trouvaient ainsi un résultat de $\dfrac{7\times 6 + 21 \times 10}{27\times 14}$

Qui était différent de la réponse qu'attendait le professeur qui lui avait pris un modèle basé sur les arrangements avec une partition voisine:

les doubles
↓
Premier cas le premier est un double: 7 x 6 ⟵ le compatible ordinaire

Second Cas le premier n'est pas un double:

les 21 ord
↓
21 x 12 ⟵ on compte alors 12 compatibles

La réponse finale était donc $\dfrac{7\times 6 + 21 \times 12}{27\times 28} = \dfrac{147}{27\times 14}$

Un retour à l'arbre finit par donner la solution de cette divergence: quand on compte les dominos sans double par la méthode élève on va avoir par exemple:

au début
21
entrées

et ensuite 10 branches dont celle ci

On retrouvera aussi le cas suivant:

Les élèves se sont ainsi aperçu qu'ils avaient compté deux fois, dans ce cas, chaque possibilité, ils comptaient les couples après avoir affirmé partir sur des paires. Ils trouvèrent ainsi $\frac{7x6 + 21 \times 5}{27 \times 14} = \frac{147}{27 \times 14}$

ce qui est bien sûr satisfaisant.

Conclusion: Les arbres reposent sur la notion (simple) de produit cartésien. Celle-ci, nous l'avons vu se rapporte aux p listes. Prendre un modèle basé sur des combinaisons et recourir aux arbres présentent donc un risque. Le danger n'existe pas tant qu'on utilise des sous ensembles de E qui en forment une partition[18] mais sinon...

LE MODELE PHYSIQUE

Le problème célèbre de Pascal et du Chevalier de Méré qui s'était aperçu qu'au jeu de la Passe dix les fréquences d'apparition du 9 et du 10[19] différaient alors que dans chaque cas 6 configurations étaient favorables, 621, 531, 522, 441, 432, 333 pour le 9 et 631, 622, 541, 532, 442, 433 pour le 10.
La réponse la plus appropriée est encore de recourir au pot de peinture. Si les trois dés sont de couleurs distinctes, il apparaît que pour obtenir 111, il faut "contraindre" les trois dés à délivrer des 1, alors que pour obtenir 123, 6 configurations sont possibles. Le modèle implicitement décrit par le Chevalier, bien que directement inspiré par l'expérience, n'est donc pas un modèle équiprobable et conduit à la faute bien des élèves qui ignorent pourtant suivre les pas d'un aussi illustre joueur.

Le cardinal des cas possibles est donc 6^3.

Pour le neuf, cas où on a 1 + 2x3 + 3x6 cas favorables et pour le dix, 3x3 + 3x6 la différence des probabilités est de 1/108.[20]

....

18 C'est le cas pour tous les problèmes ordinaires de Terminale sur les cartes et les boules, si l'on n'a pas commis l'erreur signalée précédemment.

19 On lançait trois dés et l'on faisait la somme des points marqués.

20 Ce qui témoigne des qualités d'observation et de l'assiduité du Chevalier!

2 QUELQUES CLASSIQUES

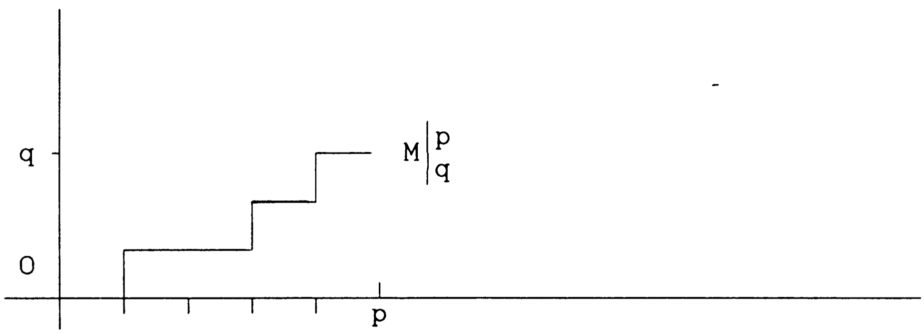
A LES CHEMINS MONOTONES

On appelle "grille" tous les points du plan rapporté à un repère orthonormé (O,i,j), à coordonnées entières positives.

Etant donné un point $M\left|\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\right.$ de la grille, on appelle "chemin monotone" une ligne polygonale qui relie O à M telle que:

* tous les sommets de la ligne appartiennent à la grille.

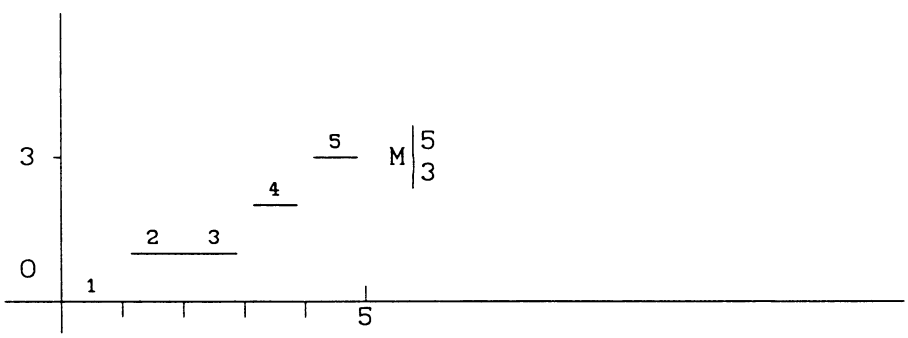
** l'abscisse et l'ordonnée d'un point qui décrit cette ligne de O à M ne décroissent jamais.



Définir un chemin monotone jusqu'à M revient donc à considérer une suite de segments horizontaux ou verticaux ie une suite de p "i" et de q "j". Nous savons qu'il y a $\frac{(p+q)}{p!q!}$ mots de p+q lettres formés avec p "i" et q "j" soit

$$C^{p}_{p+q} \text{ chemin monotones de O à M.}$$

On peut aussi coder les chemins monotones uniquement par ses segments horizontaux: par exemple le chemin précédent seracodée par 5 segments



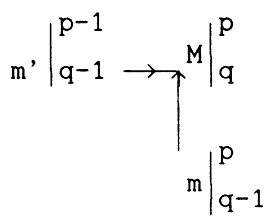
Et sera représenté par $(0,1,1,2,3)$ indiquant la position sur l'axe des y de chacun de ces segments: On trouve en générale des parties à p éléments pris dans q+1 (à cause du 0) symboles.

Il y a donc Γ^{p}_{q+1} chemins.

On retrouve ainsi que $\Gamma^{p}_{q+1} = C^{p}_{p+q}$ [21]

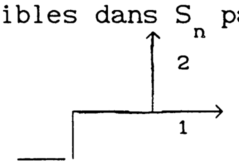
On peut enfin utiliser un codage par les suites de p+q couples (1,0) et (0,1), chaque couple caractérisant la translation de vecteur i ou de vecteur j.

Après avoir terminé le dénombrement des chemins monotones on affecte à chaque point de la grille le nombre de chemins monotones qui le relient à l'origine, pour retrouver "le triangle de Pascal".



Le dessin précédent montre qu'on peut séparer l'ensemble des chemins de 0 à M en chemins passant par m ou m'. Comme on a réalisé une partition on retrouve que: $C^{p}_{p+q} = C^{p-1}_{p+q-1} + C^{p}_{p+q-1}$ donc la formule de Pascal.

Si on calcule la somme S_n des coefficients sur le segment qui relie le point
$A\left|\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right.$ et le point $B\left|\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right.$ on peut remarquer que tout chemin compté dans S_{n-1} produit deux chemins possibles dans S_n par le dessin

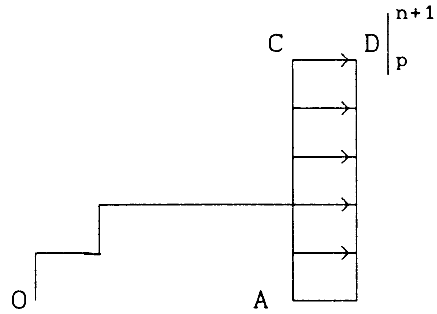


On a donc $S_n = 2\ S_{n-1}$ et puisque $S_0=1$ $\quad S_n = 2^n$.

....

21 Ceci permet bien sûr de retrouver une présentation des parties avec répétition et $\Gamma^{p}_{q} = C^{p}_{p+q-1}$.

On peut aussi chercher la somme des coefficients qui relient le point A au point $C\left|\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}\right.$



Le dessin précédent montre que tout chemin qui relie O à un des points du segment de [AC] peut être prolongé de façon unique en un chemin qui aboutit à D. La somme sur le segment est donc C^p_{n+p+1}.

Nous avons démontré en prime que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} C^n_{i+n} = C^p_{n+p+1}$.

C'est-à-dire que dans le "vrai triangle de Pascal", la somme des coefficients qui se trouvent sur une même colonne entre la n ième ligne et la p+n ième se retrouve sur la p ième colonne à la n+p+1 ème ligne.

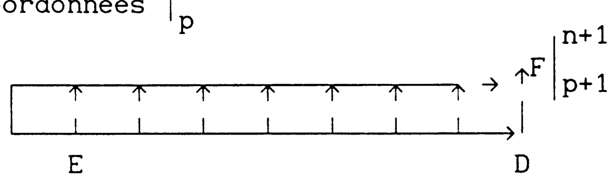
Exemple : avec n=3 et p = 5

somme des coefficients sur la troisième colonne

1								
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1
			1	26 ← C^5_9				

On peut maintenant chercher la somme des coefficients définis par le rectangle de sommet O, A et C.

Cela revient à rechercher la somme des coefficients sur le segment [ED] E étant de coordonnées $\left|\begin{matrix} 1 \\ p \end{matrix}\right.$

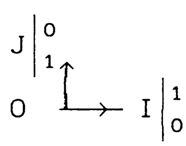


Tout chemin du segment [ED] peut être prolongé en un chemin qui mène à F, sauf le premier chemin qui fait le tour du rectangle on a donc

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} C_{i+j}^{j} = \sum_{j=0}^{n} C_{j+p+1}^{p} = C_{n+p+2}^{n+1} - 1$$ [22]

B Le Scrutin

Le Problème classique du scrutin prend l'hypothèse qu'au cours d'une élection le candidat A gagnant a obtenu a voix contre b pour B. (a>b).[23]
On cherche la probabilité que pendant le dépouillement, A reste constamment strictement en tête.
Si l'on représente le scrutin dans la grille du § précédent, chaque dépouillement est un chemin monotone reliant l'origine au point $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$.
Nous savons donc qu'il y a C_{a+b}^{a} cas possibles.
Les cas favorables sont donc les trajets qui restent strictement au dessous de la première bissectrice. Mais il est plus simple, ici, de raisonner sur l'évènement contraire, c'est-à-dire rechercher les chemins qui coupent au sens large la première bissectrice.



On peut partitionner l'ensemble de ces chemins qui coupent la bissectrice en chemin qui passent par J et chemin qui passent par I et qui coupent la première bissectrice Δ.
On dénombre les chemins qui passent par J (ils coupent obligatoirement Δ), par un simple changement de repère: il y en a C_{a+b-1}^{a}.

Pour les chemins qui passent par I on utilise l'astuce suivante:

....

[22] On peut aussi directement réappliquer la formule précédente:

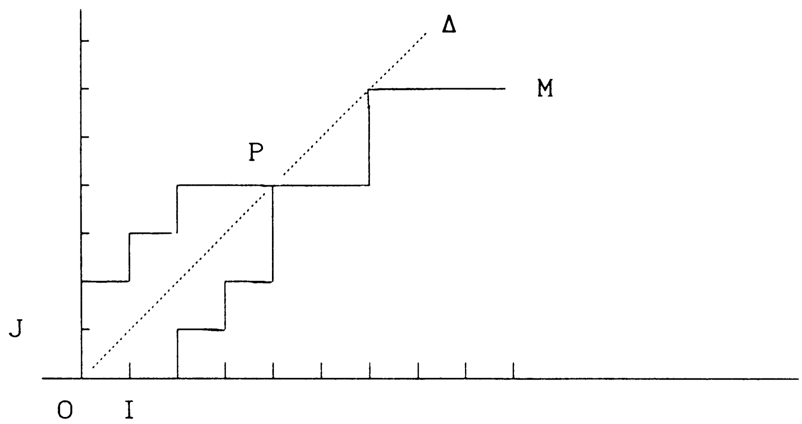
$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} C_{i+j}^{j} = \sum_{j=0}^{n} C_{j+p+1}^{p} = \sum_{j=0}^{n+1} C_{j+p}^{p} - 1 = C_{n+p+2}^{n+1} - 1$$

[23] Voir par exemple LEBOEUF édition Ellipse. (Cours de Probabilités).

Prenons un chemin $\mathcal{C}$ et appelons P le premier point où $\mathcal{C}$ coupe Δ. On peut alors associer au chemin $\mathcal{C}$ = chemin(OP) + chemin(PM)

le chemin $\mathcal{C}'$ = s(chemin(OP)) + chemin(PM)

s désignant la symétrie / Δ.



Le nouveau chemin passant alors par J, on établit ainsi une bijection de l'ensemble des chemins qui passent par I et qui coupent Δ sur l'ensemble de ceux qui passent par I.

La probabilité recherchée est donc

$$1 - \frac{2\,C^{a}_{a+b-1}}{C^{a}_{a+b}} = \frac{a-b}{a+b}$$

On peut se demander ce que devient ce résultat si l'on n'interdit plus l'égalité relative. Il suffit alors de donner une voix fictive à A pour ramener toute égalité à une inégalité: on aura donc $\dfrac{a+1-b}{a+1+b}$

C La boîte d'allumettes de Banach.

Le problème suivant fut posé par Steinhaus ami du mathématicien Banach et "lui même grand fumeur." (? [24])

....

[24] Les sources sont encore le livre de LEBOEUF.

Banach possède n allumettes dans chaque poche. A chaque fois qu'il veut du feu il pioche dans l'une ou l'autre de ses poches sans préférence. Quelle est la probabilité que quand il prend conscience que l'une des deux poches est vide l'autre en contienne encore x?[25]

Le problème est symétrique, privilégions dans un premier temps l'une des poches, par exemple la droite pour raisonner.
Nous savons donc que la gauche contient x allumettes et la droite 0, il a donc fait n-x essais à gauche et n+1[26] à droite. En tout 2n+1-x tentatives sont nécessaires pour amener le résultat recherché.
On va donc raisonner sur des chemins décroissants partant du point $A\left|\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right.$.
Parmi ces chemins seuls sont favorables ceux qui mènent au point $B\left|\begin{matrix} 0 \\ x \end{matrix}\right.$ [27]

Après changement de repère, on peut dire qu'il y en a C_{2n-x}^{n}.

On peut aussi dire que le jeu revient à une suite de G et D selon que le tirage se passe à gauche ou à droite. Il y a 2n+1-x tirages mais le dernier tirage est obligatoirement un D. On compte les mots de 2n-x lettres formés avec n G donc C_{2n-x}^{n}.

$$\text{La probabilité est donc } 2\,\frac{C_{2n-x}^{n}}{2^{2n+1-x}} = \frac{C_{2n-x}^{n}}{2^{2n-x}}$$

. . . .

[25] On fait généralement l'hypothèse suivante: il s'aperçoit qu'une poche est vide non pas quand il prend la dernière allumette, mais quand il cherche la suivante.

[26] A cause de notre convention.

[27] toujours avec la convention il faut aller au point de coordonnées $\left|\begin{matrix} -1 \\ x \end{matrix}\right.$ mais les chemins qui y arrivent passent soit par B soit par le point de coordonnées $\left|\begin{matrix} -1 \\ x+1 \end{matrix}\right.$ chemins exclus car dans ce cas il se serait déjà aperçu que la poche était vide.

3 PROBABILITES CONDITIONNELLES

A DEFINTIONS

On suppose maintenant que P est une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.

THEOREME: Etant donnée une partie A de E telle que $P(A)\neq 0$, l'application définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$P_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longrightarrow & \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}$$

vérifie les deux propriétés élémentaires qui définissent une probabilité.[28]

Démonstration:

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = 1$$

$$P_A(C\cup B) = \frac{P(C\cup B\cap\Omega)}{P(A)} = \frac{P(C\cap\Omega \cup B\cap\Omega)}{P(A)} = \frac{P(C\cap\Omega)}{P(A)} + \frac{P(B\cap\Omega)}{P(A)}$$

puisque les parties $C\cap\Omega$ et $B\cap\Omega$ sont disjointes

Donc $P_A(C\cup B) = P_A(C) + P_A(B)$

Dans la suite on note $P_A(B) = P(B/A)$ on lit P(B sachant A)

REMARQUE: P_A est construite pour permettre $P(A/A) = 1$

Application: l'évènement B n'est pas conditionné par A quand P(A) est non nul si $P(B/A) = P(B)$, ce qui conduit à la définition suivante:

....

28 Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ on appelle probabilité une application P de $\mathcal{B}$ dans [0,1] telle que $P(\Omega) = 1$ et $P(C\cup B) = P(C) + P(B)$ pour tout couple (C,B) de parties disjointes de $\mathcal{B}$.

DEFINITION: Les évènements A et B sont dits indépendants si et ssi

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$ [29]

Il est clair que dans toute cette construction mathématique, le temps ne joue aucun rôle. Au contraire la commutativité de l'intersection nous autorise d'utiliser la symétrie de ces formules.
Par contre pour les exercices il sera presque toujours utile d'utiliser une direction temporelle, en privilégiant la première expérience, celle qui est arrivée la première dans le temps.

Exemple: J'ai n boules noires et b blanches. J'en tire deux successivement sans remise, quelle est la probabilité que les deux soient noires?

Il est d'abord plus simple de tirer les deux boules instantanément, ce qui n'enlève rien: on trouve $\dfrac{C_n^2}{C_{n+b}^2} = \dfrac{n(n-1)}{(n+b)(n+b-1)}$

Si on veut suivre à la lettre l'indication du tirage il faut calculer

$P(N_1\cap N_2)$ N_i désignant la probabilité d'avoir noir au i ème tirage.

La décomposition la plus simple est toujours celle qui se déroule naturellement "dans le temps".

$$P(N_1\cap N_2) = P(N_2/ N_1)P(N_1) = \frac{(n-1)}{(n+b-1)}\ \frac{n}{(n+b)}$$

Pour calculer une probabilité conditionnelle on est souvent ramener à deux voies:

ou bien on repasse par l'intersection sur laquelle le texte nous a donné des indications sûres. C'est en fait le cas le plus rare, reservé souvent à des problèmes "préfabriqués" que l'on résout à l'aide de diagrammes de Venn (tant d'élèves font du Grec et tant de l'Anglais...etc...)

ou bien la probabilité conditionnelle se calcule directement car le conditionnement a apporté des hypothèses supplémentaires importantes pour la résolution et par un processus inverse, on trouve l'intersection.

....

[29] Cette définition se généralise pour un nombre quelconque d'évènements on dit alors qu'ils ont indépendants deux à deux.
Si on veut passer au produit sur une intersection quelconque d'événements et pas uniquement pour deux on introduit la notion de mutuelle indépendance.

LA FORMULE DES PROBABILITES TOTALES:

On prend $\{A_i\}_{i \in I}$ un système complet d'évènements c'est à dire une partition de Ω. On suppose que l'on connaît la probabilité de chacun de ces événements et aussi la probabilité que B arrive dans chaque population homogène A_i. On a:

THEOREME: P(B) est le barycentre de probabilités conditionnelles $P(B/A_i)$ affectées des coefficients $P(A_i)$. C'est à dire:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B/A_i)\ P(A_i)$$

Démonstration

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = P(\underbrace{\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)}_{\text{union disjointe}}) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B/A_i)\ P(A_i)$$

Au delà de la démonstration formelle la signification de cette formule importante est claire. Si par exemple une maladie sévit dans un troupeau hétérogène Ω composé par plusieurs races de bovins A_1, A_2, etc... si l'on connait les probabilités que chaque race attrape la maladie $P(B/A_i)$ on pourra trouver la probabilité qu'un élément donné contracte la maladie, si l'on fait la moyenne des probabilités "pures" à condition bien sûr de les pondérer de l'importance relative de chaque catégorie.

Exemple: J'ai deux urnes, $\mathcal{U}_1$ qui comporte 5 noires et 5 blanches, et $\mathcal{U}_2$ qui comporte 1 blanche et 9 noires. La probabilité de tirer dans $\mathcal{U}_1$ est p.

Je choisis d'abord une urne puis une boule, quelle est la probabilité qu'elle soit blanche?

Appelons B l'évènement "tirer une blanche" et U_i "tirer dans $\mathcal{U}_i$".

$$P(B) = P(B/U_1)P(U_1) + P(B/U_2)\ P(U_2)$$

$$P(B) = p/2 + (1-p)/10 = \frac{1+4p}{10}$$

Application 1: **CHAINE DE MARKOV**

Une urne A contient deux jetons numérotés 0 et une urne B contient deux jetons numérotés 1. On tire un jeton dans chaque urne et on les échange (le jeton provenant de A est placé dans B, celui prélevé dans B est remis dans A). On procède ainsi à n échanges ($n \in \mathbb{N}$). On note $[X_n=i]$ l'évènement la somme aléatoire des numéros des jetons alors contenus à la nième étape dans A vaut i. On pose $P(X_n=0)=p_n$, $P(X_n=1)=q_n$, $P(X_n=2)=r_n$.

1) Pour n entier naturel, exprimer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.

2) Pour n entier naturel, exprimer q_{n+2} en fonction de q_{n+1} et q_n.

En déduire qu'il existe deux réels λ et μ (que l'on déterminera) tels que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ q_n = \lambda + \mu.(-\frac{1}{2})^n$.

4) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$, $\lim_{n \to +\infty} q_n$, $\lim_{n \to +\infty} r_n$.

On remarque qu'au début on a $p_0= 1$ et $q_0=r_0=0$.

Dans A il peut y avoir zéro, une, ou deux boules marquées 1 donc quel que soit l'entier n, $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, $(X_n=2)$ forment un système complet d'évènements.

La formule des probabilités totales va nous permettre de passer du rang n au rang n+1:

$$p_{n+1}=P[X_{n+1}=0]$$
$$=P[X_{n+1}=0/X_n=0]P[X_n=0]+P[X_{n+1}=0/X_n=1]P[X=1]+P[X_{n+1}=0/X_n=2]\ P[X_n=2]$$

Il faut donc calculer les probabilités "de transition":

$P[X_{n+1}=0\ /\ X_n=0] = 0$ (on est obligé de tirer un 1)

$P[X_{n+1}=0\ /\ X_n=1] = 1/4$ probabilité de tirer le 1 dans l'urne 1 et le 0 dans l'urne 2.

$P[X_{n+1}=0\ /\ X_n=2] = 0$

$$p_{n+1} = (1/4)q_n$$

$$q_{n+1}=P[X_{n+1}=1]$$
$$= P[X_{n+1}=1/X_n=0]P[X_n=0]+P[X_{n+1}=1/X_n=1]P[X_n=1]+P[X_{n+1}=1/X_n=2]P[X_n=2]$$

$P[X_{n+1}=1\ /\ X_n=0] = 1$ on ne peut que tirer un as dans la seconde

$P[X_{n+1}=1\ /\ X_n=1] = 1/2$ tirer deux fois zéro ou deux fois l'as.

$P[X_{n+1}=1\ /\ X_n=2] = 1$

$$q_{n+1} = p_n + (1/2)q_n + r_n \qquad \text{(Donc } q_1=1\text{)}$$

$$r_{n+1}=P[X_{n+1}=2]$$
$$=P[X_{n+1}=2/X_n=0]P[X_n=0]+P[X_{n+1}=2/X_n=1]P[X_n=1]+P[X_{n+1}=2/X_n=2]P[X_n=2]$$

donne $r_{n+1} = (1/4)q_n$

Ainsi $q_{n+2} = p_{n+1} + (1/2)q_{n+1} + r_{n+1} = (1/4)q_n + (1/2)q_{n+1}+(1/4)q_n$

$$q_{n+2} = (1/2)(q_{n+1}+q_n)$$

$q_{n+2} - q_{n+1} = (-1/2)(q_{n+1} - q_n)$

$q_{n+1} - q_n = (-1/2)^n (q_1 - q_0) = (-1/2)^n$

(suite géométrique de raison -1/2)

$q_{n+2} + (1/2)q_{n+1} = (q_{n+1} + (1/2)q_n)$

(suite constante)

$q_{n+1} + (1/2)q_n = q_1 + (1/2)q_0 = 1$

$q_{n+1} - q_n = (-1/2)^n$

$q_{n+1} + (1/2)q_n = 1$ en soustrayant on trouve

$(3/2)q_n = 1 - (-1/2)^n$

$q_n = (2/3)(1 - (-1/2)^n)$

$p_n = r_n = (1/6)(1 - (-1/2)^{n-1})$ pour $n \geq 1$

Les probabilités asymptotiques sont donc de 1/6 pour les cas 00, 11 et de 2/3 pour l'égalité (Est ce étonnant? [30]).

Application2: **BIJECTIONS SANS POINT FIXE.**

Nous avons été tenté tout au début du stage de recourir aux bijections sans point fixe à propos d'une formule sommatoire. Puis nous avons repoussé cette idée. Revenons y.
Supposons que n personnes investissent n chambres qu'elles ont réservées (une unique personne par chambre) après avoir égaré les réservations. Quelle est la probabilité p_n qu'aucune des personnes ne retrouve sa chambre?

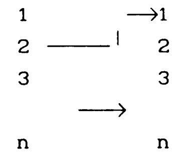
Soit $\mathcal{A}$ l'évènement: aucune des personnes ne retrouve la chambre qu'elle avait réservée.

Soit $\mathcal{B}$ l'évènement: la personne qui avait réservé la chambre 1 occupe la chambre réservée par celle qui occupe le 1.

....

30 Plusieurs stagiaires étaient au début "intuitivement" convaincus que l'on aboutirait à l'état d'équilibre 1/4, 1/2, 1/4. Ils croyaient, à tort que l'état $(X_n=1)$ reviendrait deux fois plus souvent que les deux autres. Cette vision est trop statique car si $(X_n=1)$ distribue équitablement sur $(X_n=0)$ et $(X_n=2)$ il peut aussi "se servir lui même" ce qui explique le 2/3.

Commençons par calculer $P(\mathcal{B})$



$$P(\mathcal{B}) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Car nous avons n-1 choix de la personne qui va occuper le 1, désignant alors d'office sa chambre au numéro 1, puis il faut faire tourner les n-2 autres dans les autres chambres.

La formule des probabilités totales nous permet d'écrire:

$$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}/\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{A}/\bar{\mathcal{B}})P(\bar{\mathcal{B}})$$

Soit

$$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}/\mathcal{B})(\frac{1}{n}) + P(\mathcal{A}/\bar{\mathcal{B}})(1-\frac{1}{n})$$

Il nous reste à calculer les probabilités conditionnelles:

$P(\mathcal{A}/\mathcal{B})$: Appelons x le numéro de la chambre occupée par celui qui avait réservé le 1. On sait donc que le numéro x se trouve dans la chambre 1. Il y a donc encore n-2 personnes à placer sans qu'elles puissent retrouver la leur: p_{n-2}

$P(\mathcal{A}/\bar{\mathcal{B}})$: Nous pouvons garder la même notation, mais nous savons alors que le numéro x n'occupe pas la chambre numéro 1.

Nous avons donc à placer les personnes {2,3, ,x,...,n} dans les chambres {1,2,3,....,x-1,x+1,..,n} de telle manière que tout numéro distinct de x ne retrouve pas sa chambre. x par contre a droit à toute chambre sauf la chambre 1. Si nous renumérotons provisoirement la chambre 1 chambre x, on s'aperçoit qu'on est en train de placer n-1 personnes dans n-1 chambres sans point fixe, donc on trouve p_{n-1}.

$$p_n = p_{n-2}(\frac{1}{n}) + p_{n-1}(1-\frac{1}{n})$$

Il suffit de calculer $p_2 = 1/2$ $\quad$ $p_3 = 1/3$

Pour trouver p_n quel que soit n.

Mieux on peut démontrer que $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$[31].

....

31 par récurrence: $\quad \mathcal{P}_i: \quad p_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k}{k!}$

on vérifie que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies.

Si nous supposons maitenant $\mathcal{P}_i$ vraie jusqu'à l'ordre n-1

Nous venons de traiter ce problème par les "probabilités", mais il se fait aussi agréablement par le dénombrement et les cycles:

Appelons c_n le nombre de bijections sans point fixe de $\{1,2,..,n\}$.
Il est pratique de poser $c_0=1$.

Une fois de plus privilégions le candidat numéro 1. Comme il n'a pas le droit de retrouver sa chambre, nous sommes sûrs qu'il appartient nécessairement à un "cycle"[32] de longueur au moins deux. Nous allons faire une partition de l'ensemble des bijections sans point fixe en faisant varier la longueur du cycle d'origine 1:

Les transpositions[33] : A^1_{n-1} possibilités de chambre pour 1 et à chaque fois c_{n-2} possibilités pour les n-2 personnes non concernées par le cycle.

Les 3-cycles: A^2_{n-1} possibilités de "triangles" et chaque fois c_{n-3} possibilités pour les n-3 personnes non concernées par le cycle.

Pour les k-cycles: A^k_{n-1} possibilités et chaque fois c_{n-k-1} possibilités pour les n-k-1 personnes non concernées par le cycle.

Ainsi, $$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} A^k_{n-1}\, c_{n-k-1}$$

....

on a $$p_n = p_{n-2}\left(\frac{1}{n}\right) + p_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$p_n = \frac{1}{n}(p_{n-2} - p_{n-1}) + p_{n-1}$$

$$p_n = \frac{-1}{n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

[32] Un cycle correspond à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ,\dots & x_p \\ x_1 & x_2 & \dots, & x_{p-1} & 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons que cela correspond à l'évènement "1 et a échangent leur chambre".

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \sum_{k=1}^{n} A_n^k \, c_{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k \, c_{n-k-1} \\ &= A_n^1 \, c_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (A_n^{k+1} - A_{n-1}^k) \, c_{n-k-1} \\ &= A_n^1 \, c_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ((n-1) \, A_{n-1}^k) \, c_{n-k-1} \\ &= A_n^1 \, c_{n-1} + (n-1) \, c_n \end{aligned}$$

D'où la formule centrale $c_{n+1} = n(c_n + c_{n-1})$

qui conduit à $p_n = p_{n-2} \left(\frac{1}{n}\right) + p_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

après division par n!.

B Les arbres.

On peut utiliser au début les arbres pour représenter les chemins conditionnés, il faut toutefois se méfier de la systématisation. Prenons par exemple ce problème, proposé par un stagiaire à une classe de Lycée: Une urne contient 5 boules, 3 noires et 2 blanches, A et B jouent successivement en tirant une boule. Si elle est noire elle est gardée en main par le joueur, si elle est blanche elle est remise en jeu. A commence, le vainqueur est le premier joueur qui obtient en main deux boules noires.

Les questions proposées étaient les suivantes:

Calculer la probabilité des évènements suivants:

1°) A est vainqueur au troisième tour.

2°) B est vainqueur au quatrième tour.

3°) A l'issue de quatrième tour il n'y a pas encore de vainqueur.[34]

....

[34] La formulation de l'exercice a été conservé, mais il faut prendre particulièrement garde aux confusions entre les probabilités conditionnelles et les probabilités d'intersection. Ici je crois qu'il faut comprendre 1°) il y a un quatrième tour et 2°) il n'y a pas de vainqueur c'est à dire $(X=4) \cap (\bar{\mathcal{B}}_4)$ qu'il faut distinguer de B perd sachant qu'il y a 4 tours!

Nous laissons au lecteur le soin de composer cet arbre....
L'arbre que l'on vient courageusement de dresser permet sans problème de répondre aux deux premières questions.[35]

$p_1 = 1/4$

Pour traiter la seconde question on peut encore plus courageusement continuer cet arbre mais il semble plus facile d'écrire avec les notations suivantes: X le nombre de tours.

$\mathcal{A}_i$ ="A gagne à l'issue du ième tour" $\mathcal{B}_i$ ="B gagne à l'issue du ième tour"

n_i="Noir sort au ième tour" b_i="blanc sort au ième tour"

on a donc
$$
\begin{aligned}
p_2=P(\mathcal{B}_4) &= P((b_1\cap n_2\cap b_3\cap n_4)\cup(b_1\cap n_2\cap n_3\cap n_4)\cup(n_1\cap n_2\cap b_3\cap n_4))\\
&= P(b_1\cap n_2\cap b_3\cap n_4)+P(b_1\cap n_2\cap n_3\cap n_4)+P(n_1\cap n_2\cap b_3\cap n_4)\\
&= P(n_4/b_1\cap n_2\cap b_3)P((b_3/b_1\cap n_2)P(n_2/\bar{b}_1)P(b_1) +\\
&\qquad P(n_4/b_1\cap n_2\cap n_3)P((n_3/b_1\cap n_2)P(n_2/b_1)P(b_1) +\\
&\qquad P(n_4/n_1\cap n_2\cap b_3)P((b_3/n_1\cap n_2)P(n_2/n_1)P(n_1)\\
&= 3/50 + 1/25 + 1/15 = 1/6
\end{aligned}
$$

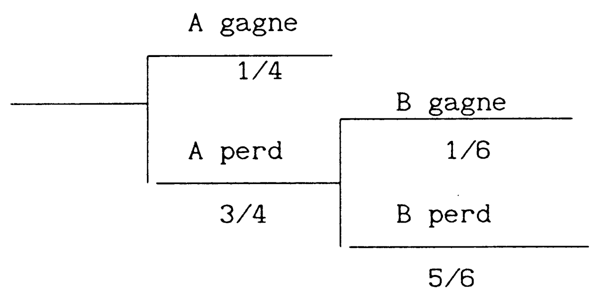
Pour la troisième question on peut encore revenir à l'arbre mais aussi remarquer que:

$$
\begin{aligned}
P(X>4) = P((X\geq 4)\cap\bar{\mathcal{B}}_4) &= P(X\geq 4) - P((X\geq 4)\cap\mathcal{B}_4)\\
&= P(\bar{\mathcal{A}}_3) - P(\mathcal{B}_4)\\
&= P(X\geq 3) - P(\mathcal{A}_3) - P(\mathcal{B}_4)\\
&= 1 - 1/4 - 1/6 = 7/12
\end{aligned}
$$

Joël Fouldrin a proposé cette erreur très intéressante d'un élève "intelligent" qui construit l'arbre suivant:

....

[35] L'arbre de cet exercice dépasse les programmes de Lycée puisque dans le Ω on trouve des suites infinies (que des blanches par exemple), toutefois ces cas ne jouent pas un rôle très important puisqu'on peut tout traiter à la main.



et propose $(3/4)\times(5/6) = 5/8$.

Essayons de comprendre ce qu'il fait:

il cherche $P(\bar{\mathcal{A}}_3 \cap \bar{\mathcal{B}}_4)$ qu'il associe à $P(\bar{\mathcal{A}}_3)P(\bar{\mathcal{B}}_4) = 5/8$

Or comme les évènements $\bar{\mathcal{A}}_3$ et $\bar{\mathcal{B}}_4$ ne sont pas indépendants on devrait plutôt écrire $P(\bar{\mathcal{B}}_4/\bar{\mathcal{A}}_3)P(\bar{\mathcal{A}}_3)$. Or si la dernière probabilité a déjà été calculée la probabilité conditionnelle est beaucoup plus coriace.
En raisonnant à l'envers on sait qu'elle vaut $(7/12)\div(3/4) = 7/9$.[36]
A part l'indépendance une des erreurs de l'étudiant était aussi la suivante, quand on raisonne avec des probabilités conditionnelles, dans le temps, il faut toujours savoir de quel point on pose la question.

C Le Temps

LA ROULETTE RUSSE:

Un revolver (russe?) contient 1 balle pour un barillet de 6 alvéoles. 6 joueurs font jouer successivement le percuteur <u>sans relancer</u> le <u>barillet</u>.
Quelle est la meilleure place?
Appelons $\mathcal{A}_i$ l'évènement le ième joueur est atteint par la balle.
Ainsi $P(\mathcal{A}_1) = 1/6$
Il ne faut pas maintenant don
Calculons $P(\mathcal{A}_2) = P(\mathcal{A}_2 \cap (\mathcal{A}_1 \cup \bar{\mathcal{A}}_1)) = P(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2 \cap \bar{\mathcal{A}}_1)$ (évènements disjoints)

$$= P(\mathcal{A}_2 \cap \bar{\mathcal{A}}_1)$$

$$= P(\mathcal{A}_2/\bar{\mathcal{A}}_1)P(\bar{\mathcal{A}}_1)$$

....

[36] Joel Fouldrin proposait même la suite suivante. On recommence le même problème avec n+1 boules noires et n blanches, trouver n pour que l'erreur commise par l'élève soit indiscernable numériquement.

$$= \frac{1}{5}\ \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Ainsi une fois le premier joueur sauvé le second a une chance sur 5 de trépasser alors que s'il examine ses chances <u>au debut de la partie</u> elles sont les mêmes que celles du premier joueur.
Si l'on passe au troisième joueur on s'aperçoit que

$$P(\mathcal{A}_3 \cap \bar{\mathcal{A}}_2 \cap \bar{\mathcal{A}}_1) = P(\mathcal{A}_3 / \bar{\mathcal{A}}_2 \cap \bar{\mathcal{A}}_1) P(\bar{\mathcal{A}}_2 \cap \bar{\mathcal{A}}_1) P(\bar{\mathcal{A}}_1) = \frac{1}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Les joueurs ont donc <u>au départ</u> les mêmes chances de survie.[37]

D PROBABILITES DES CAUSES

C'est le temps qui va nous permettre de bien comprendre la formule "De Bayes".
Supposons que nous ayons effectuer deux expériences aléatoires que nous allons appeler "successives".

sens naturel de l'expérience

exp 1 ⟶ exp 2

⟵ remontée "dans le temps"

Si les deux expériences ne sont pas indépendantes nous avons vu qu'il est commode pour obtenir B de se ramener à B/A.[38]

On peut aussi écrire que $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$.

Le numérateur ne pose pas de problèmes. Par contre on a souvent besoin d'un système complet dont A est un élément pour calculer P(B). Sous cette forme la formule prend le nom de formule des probabilités des causes.

Exemple: Dans une certaine population sévit une maladie.
Dans cette population une proportion p de vaccinés et q de non vaccinés.

....

[37] Pour le rapport avec les temps d'attente, cf stage 2.

[38] B étant un évènement se rapportant à l'expérience 2 et A à l'expérience 1.

($p+q=1$ et $p \in]0,1[$). Si une personne est vaccinée elle a une probabilité τ d'attraper la maladie, si elle n'est pas vaccinée elle a simplement une probabilité τ'.

On choisit une personne au hasard, elle présente la maladie, qu'elle est la probabilité qu'elle soit non vaccinée?

Appelons $\mathcal{A}$ l'évènement la personne est vaccinée, $\mathcal{B}$ elle présente la maladie.

On nous demande $P(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = \dfrac{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{P(\mathcal{B}))} = \dfrac{P(\mathcal{B}/\mathcal{A})P(\mathcal{A}))}{P(\mathcal{B}))}$.

Calculons $P(\mathcal{B})$ grâce au système complet $\mathcal{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$.

$$\text{Donc } P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}/\mathcal{A})P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}/\bar{\mathcal{A}})P(\bar{\mathcal{A}})))$$

$$= \tau\, p + \tau'\, q$$

$$P(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = \frac{\tau\, p}{\tau\, p + \tau'\, q} = \frac{\tau\, p}{\tau' + p(\tau-\tau')} .$$

Le stage s'est terminé par séance sur la loi binômiale.

Cette partie sera reprise dans le polycopié N°2 qui je l'espère suivra le stage probabilités 92-93.

A Suivre .....

Titre : LES PROBABILITES POUR LE LYCEE 1

Auteurs : Luc SINEGRE

Public concerné : Professeurs de Lycée, Bts, prépa.

Niveau : Lycée, BTS, Prépa.

Résumé : On présente quelques modèles de dénombrements, utiles pour résoudre les problèmes de Terminale. On essaie d'envisager plusieurs situations, sous des angles et des éclairages différents, pour finir par préciser le rôle du Temps dans les probabilités conditionnelles.

Mots clefs :
- Arrangement
- Combinaison
- p–liste
- Chemin monotone
- Probabilité conditionnelle
- Bayes.

Date : Juin 1992

Nombre de pages : 34
Format : 21\29.7
Prix : 30 F
Publication :IREM DE ROUEN

Dépôt légal : ISBN 2-86239-039 -9

****

BON DE COMMANDE

M. , Mme, Mlle :
Adresse :

Libellé	Prix	Quantité	Total
	....	....	....

Frais d'envoi : 10 F pour le 1er livre et 5 F par livre supplémentaire (France) ....
Frais réels pour l'étranger ....

SOMME DUE : ....

Les chèques de règlement seront libellés à l'ordre de :

L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITE DE ROUEN

Et adressés directement à l'I.R.E.M. – B.P. 153 – 76135 MONT SAINT AIGNAN
Pour tout renseignement complémentaire Tél. : 35.14.61.41.

RIB : TP ROUEN TG 10071 76000 00044004056 81

****