STAGE

UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE

ELEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

6 janvier 1992–10 janvier 1992

ELEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

I/ CHAMP VECTORIEL

I.1) Définition

Etant donné l'espace affine $\mathcal{E}_M$ des points M, on appelle champ vectoriel éventuellement variable au cours du temps toute application qui, à tout point M, fait correspondre à l'instant t un vecteur $\vec{V}(M,t)$ d'un espace vectoriel *E* construit sur $\mathbb{R}^3$:

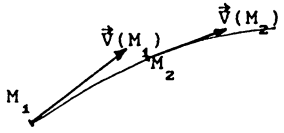
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M & \longrightarrow & E \\ M & \longrightarrow & \vec{V}(M,t) \end{array}$$

Si l'on définit dans *E* un repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ on aura donc :

$$\vec{V}(M,t) = V_x(x,y,z,t)\vec{u}_x + V_y(x,y,z,t)\vec{u}_y + V_z(x,y,z,t)\vec{u}_z$$
$$= V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y + V_z\vec{u}_z$$

Si $\frac{\partial}{\partial t}\vec{V}(M,t) = \vec{0}$: le champ est dit **statique** ou **stationnaire** ou **permanent**. Dans la suite de ce chapitre et pour simplifier, on ne considèrera que des champs stationnaires.

I.2) Lignes de champ



Ce sont les courbes de $\mathcal{E}_M$ telles qu'en tout point de l'une d'elles le vecteur champ $\vec{V}(M)$ en ce point lui soit tangent. Ces lignes sont orientées par le vecteur champ $\vec{V}(M)$.

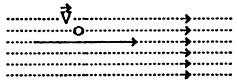
Il en résulte que si M appartient à une ligne de champ, alors $d\overrightarrow{OM}$ est parallèle à $\vec{V}(M)$, d'où sur ces courbes l'on a :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \text{cte}$$

Cette relation permet de déterminer les équations de lignes de champ connaissant l'expression du champ.

En général, $\vec{V}(M)$ ne fait correspondre à M qu'un vecteur champ : **il ne passe donc en ce point qu'une ligne de champ.** Si l'on observe des lignes de champ concourrantes en un point, alors, en ce point, le champ est soit nul soit non défini.

I.3) Champs particuliers

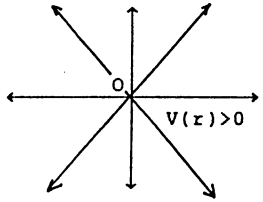


I.3.a) Champ uniforme

$\vec{V}(M)$ est indépendant de M et on a :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_o$$

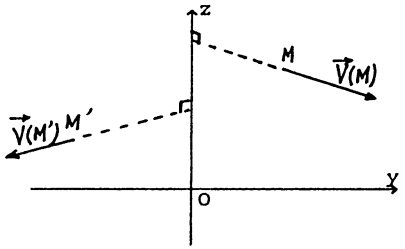
L'uniformité est à l'espace ce que la stationarité est au temps.



I.3.b) Champ radial à symétrie sphérique

Soit $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r$ ($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) ; un champ radial à symétrie sphérique a pour expression générale :

$$\vec{V}(M) = V(r).\vec{u}_r$$



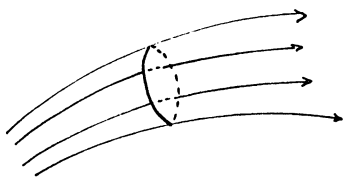
I.3.c) Champ radial à symétrie cylindrique

Soit $\overrightarrow{OM} = r_p.\vec{u}_{rp} + z.\vec{u}_z$; un champ radial à symétrie cylindrique d'axe Oz a pour expression générale :

$$\vec{V}(M) = V(r_p).\vec{u}_{rp}$$

On aura un champ radial à symétrie axiale si la fonction scalaire V dépend de r_p et de z.

I.4) Tubes de champ



On appelle tube de champ l'ensemble des lignes de champ traversant un contour fermé (Γ) orienté. D'après le I.2), un tube de champ ne peut évidemment pas être traversé transversalement par une ligne de champ, sauf s'il est non défini en des points de sa surface latérale.

II/ GRADIENT

II.1) Définition

Considérons une fonction scalaire f(M) (on peut aussi dire *champ scalaire*). Sa différentielle a pour expression :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Or : $d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z$; on peut donc exprimer df sous forme d'un produit scalaire en introduisant le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{grad}(f[M]) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On a alors :

$$\boxed{df = \overrightarrow{grad}(f).d\overrightarrow{OM}}$$

Remarque : mathématiquement parlant, $\overrightarrow{grad}(f)$ n'est pas tout à fait un vecteur au sens courant du terme, mais tant que l'on travaille dans l'espace euclidien à trois dimensions, on n'a pas à faire cas de cette subtilité mathématique.

II.2) Opérateur nabla

Par définition, l'opérateur nabla[1], que l'on utilise *uniquement en coordonnées cartésiennes*, a pour expression :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{u}_z$$

Ainsi on peut écrire :

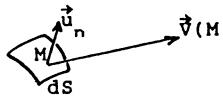
$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f[M]) = \vec{\nabla}f(M)}$$

Attention nabla est un **opérateur, mais pas un vecteur** : il ne faut pas lire la relation précédente comme un produit entre un vecteur par un scalaire, mais comme une opération sur un scalaire. En particulier, on a $\vec{\nabla}f \neq f.\vec{\nabla}$: le premier terme est un vecteur, le second est un opérateur. De même on distinguera : $\vec{\nabla}.\vec{A} \neq \vec{A}.\vec{\nabla}$.

[1] C'est le physico-mathématicien anglais William Hamilton (1805-1865) qui a introduit cet opérateur en référence à la forme d'un instrument de musique hébraïque appelé *nabla*.

III/ FLUX D'UN CHAMP VECTORIEL

III.1) Flux élémentaire



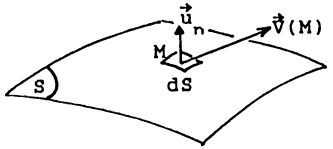
Considérons un élément de surface $d\mathcal{S}$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_n$. $\vec{V}(M)$ étant un champ vectoriel défini, on appelle flux élémentaire $d\phi$ de $\vec{V}(M)$ à travers $d\mathcal{S}$ la quantité

$$d\phi = \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n$$

Par définition même, c'est une quantité **algébrique, additive**. Plus généralement, pour un champ vectoriel composé :

$$\vec{V}(M) = \lambda.\vec{V}_1(M) + \mu.\vec{V}_2(M) \Rightarrow d\phi = \lambda.d\phi_1 + \mu.d\phi_2$$

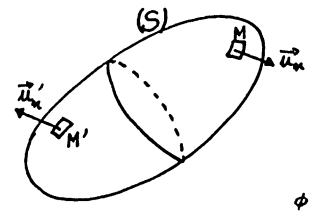
III.2) Flux à travers une surface



Par définition, c'est la somme des flux élémentaires sur la surface orientée considérée :

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{V}(M_S).d\mathcal{S}.\vec{u}_n$$

III.3) Flux sortant d'une surface fermée



Convention : étant donnée une surface fermée, on orientera les vecteurs unitaires normaux à la surface **vers l'extérieur de la surface**. Cette convention adoptée, on appelle flux de $\vec{V}(M)$ sortant de la surface fermée $(\mathcal{S})$:

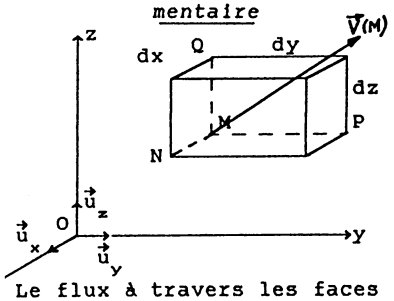
$$\phi = \oint_S d\phi = \oint_S \vec{V}(M_S).d\mathcal{S}.\vec{u}_n$$

Si $\vec{V}(M)$ "sort" de la surface, $d\phi>0$; si $\vec{V}(M)$ "entre" dans la surface, $d\phi<0$. Un flux sortant peut ainsi être globalement nul tout en étant localement non nul.

III.4) Théorème d'OSTROGRADSKI

Dans ce qui suit, nous allons donner l'expression d'un théorème permettant de passer d'une intégrale volumique à une intégrale surfacique et réciproquement.

III.4.a) Détermination du flux sortant d'un volume élémentaire



Considérons un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et un champ vectoriel $\vec{V}(M)$; déterminons le flux du champ sortant de l'élément de volume $d\tau = dxdydz$.

Le flux à travers les faces parallèles à yOz a pour valeur :

$$\vec{V}(M)(-dydz.\vec{u}_x) + \vec{V}(N)(dydz.\vec{u}_x = \left[\vec{V}(N)-\vec{V}(M)\right]dydz.\vec{u}_x = \ldots$$

$$\frac{\partial\vec{V}(M)}{\partial x}dxdydz.\vec{u}_x = \frac{\partial}{\partial x}V_x dxdydz$$

De même on aura :

— à travers les faces parallèles à xOz : $\frac{\partial}{\partial y}V_y dxdydz$;

— à travers les faces parallèles à xOz : $\frac{\partial}{\partial z}V_z dxdydz$.

On a donc au total :

$$d\phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z\right]dxdydz$$

ou, sous une forme plus condensée utilisant l'opérateur nabla :

$$\boxed{d\phi = \vec{\nabla}.\vec{V}(M)\ d\tau}$$

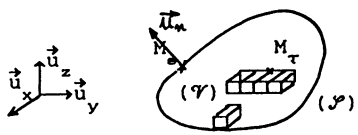
III.4.b) Divergence d'un champ vectoriel

Par définition, on appelle divergence du champ vectoriel $\vec{V}(M)$ la quantité scalaire :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{V}[M]) = \vec{\nabla}.\vec{V}(M) = \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z}$$

On a ici l'expression cartésienne de la divergence de $\vec{V}(M)$. On montre aisément que l'opérateur divergence est un opérateur linéaire, soit : $\mathrm{div}(\lambda.\vec{V}_1 + \mu.\vec{V}_2) = \lambda.\mathrm{div}(\vec{V}_1) + \mu.\mathrm{div}(\vec{V}_2)$.

III.4.c) Enoncé du théorème d'Ostrogradski



Considérons maintenant un volume $(\mathcal{V})$ limité par une surface fermée $(\mathcal{S})$. Ce volume est la somme des volumes élémentaires $d\tau$. Le flux étant un quantité additive, le flux de $\vec{V}(M)$ sortant de $(\mathcal{S})$ a donc pour expression :

$$\phi = \int_{\mathcal{V}} d\phi = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}.\vec{V}(M_\tau).d\tau$$

Or, si l'on considère un élément $d\tau$ à l'intérieur du volume, le flux sortant d'une de ses faces est nécessairement un flux entrant à travers la face d'un volume contigu : ces flux vont donc se compenser si on les somme. Seuls ne seront pas compensés les flux sortant des faces contigües à la surface $(\mathcal{S})$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Etant donné un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini sur un domaine de l'espace affine des points M limité par une surface fermée $(\mathcal{S})$, le flux de $\vec{V}(M)$ sortant de cette surface est égal à l'intégrale volumique sur le volume $(\mathcal{V})$ limité par $(\mathcal{S})$ de la divergence de $\vec{V}(M)$.

$$\phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{V}[M]).d\tau$$

III.5) Laplacien

On démontre aisément que :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f[M])) = \vec{\nabla}^2 f(M) = \Delta f(M)$$

où $\Delta = \vec{\nabla}^2$ est l'opérateur laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On peut aussi définir le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{V}(M)$:

$$\boxed{\Delta\vec{V}(M) = \Delta V_x.\vec{u}_x + \Delta V_y.\vec{u}_y + \Delta V_z.\vec{u}_z}$$

Le laplacien est évidemment un opérateur linéaire.

IV/ CIRCULATION D'UN CHAMP VECTORIEL

IV.1) Circulation élémentaire

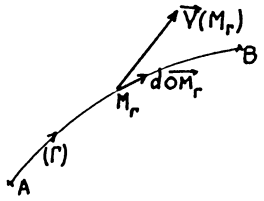
Etant donné un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini sur un domaine de l'espace affine des points M, on appelle circulation élémentaire $\delta\mathcal{C}$ de $\vec{V}(M)$ sur le chemin élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ la forme différentielle :

$$\delta\mathcal{C} = \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM}$$

C'est une quantité algébrique, additive. Plus généralement, pour un champ composé $\vec{V}(M) = \lambda.\vec{V}_1(M) + \mu.\vec{V}_2(M)$, on aura :

$$\delta\mathcal{C} = \lambda.\delta\mathcal{C}_1 + \mu.\delta\mathcal{C}_2.$$

IV.2) Circulation sur une courbe



Etant donné une courbe orientée (Γ) entre deux points A et B. Si $\vec{V}(M)$ est défini en tout point de (Γ), sa circulation sur ce chemin est l'intégrale curviligne définie sur (Γ) :

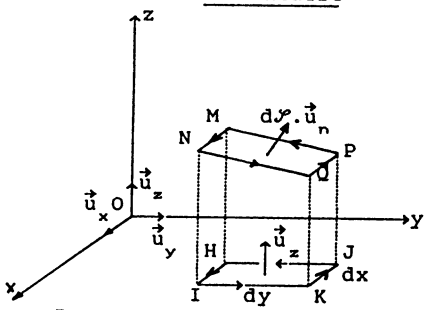
$$\mathcal{C}_A^B = \int_\Gamma \vec{V}(M_\Gamma).d\overrightarrow{OM}_\Gamma$$

Remarque La courbe n'est pas nécessairement une ligne de champ. Si c'est le cas, $d\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M)$ sont alors colinéaires et on pourra écrire, s étant l'abscisse curviligne sur (Γ) :

$$\mathcal{C} = \int_\Gamma V(M_\Gamma).ds$$

IV.3) Théorème de STOKES (George Stokes, 1819-1903)

IV.3.a) Détermination de la circulation sur un contour élémentaire



Considérons un élément de surface orienté $d\mathcal{S}$ rectangulaire quelconque, le vecteur $\vec{u}_n$ orientant le contour de $d\mathcal{S}$. Par définition :

$d\mathcal{S}.\vec{u}_n = dydz.\vec{u}_x + dxdz.\vec{u}_y + dxdy.\vec{u}_z$

Déterminons la circulation $\delta\mathcal{C}$ d'un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini sur le contour.

Remarquons au préalable que :

— la circulation élémentaire $\delta\mathcal{C}$ peut être interprétée de la façon suivante :

$$\delta\mathcal{C} = \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = V_x dx + V_y dy + V_z dz =$$
$$\vec{V}(M).dx\vec{u}_x + \vec{V}(M).dy\vec{u}_y + \vec{V}(M).dz\vec{u}_z$$

Ainsi, $\delta\mathcal{C}$ apparaît comme étant la somme des circulations élémentaires de $\vec{V}(M)$ sur les projections de $d\overrightarrow{OM}$ suivant les trois axes.

— par définition, le vecteur surface élémentaire a pour composantes :

$$dS.\vec{u}_n = dxdy.\vec{u}_z + dydz.\vec{u}_x + dzdx.\vec{u}_y$$

Ainsi, toute surface élémentaire $dS.\vec{u}_n$ délimitée par un contour orientant $\vec{u}_n$ peut-être projetée sur trois rectangles élémentaires dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes du repère.

Ainsi, la circulation élémentaire de $\vec{V}(M)$ sur un contour fermé élémentaire quelconque est égale à la somme des trois circulations élémentaires calculées sur les rectangles projections du contour sur les plans xOy, xOz et yOz.

En projection sur xOy, on a donc :

$$\delta\mathcal{C}_{HIK} = V_x(M)dx + V_y(N)dy \quad \text{et} \quad \delta\mathcal{C}_{HJ} = V_y(M)dy + V_x(P)dx$$

D'où la circulation projetée sur xOy $\delta\mathcal{C}_{xOy}$ a pour expression :

$$\delta\mathcal{C}_{xOy} = \delta\mathcal{C}_{HIK} - \delta\mathcal{C}_{HJK} = \left[V_x(M)-V_x(P)\right]dx - \left[V_y(M)-V_y(N)\right]dy = \ldots$$
$$\ldots = \frac{\partial}{\partial y}V_x(M)dydx - \frac{\partial}{\partial x}V_y(M)dydx = \left[\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)\right]\vec{u}_z dxdy$$

On aura de même :

$$\delta\mathcal{C}_{yOz} = \left[\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)\right]\vec{u}_x dydz \quad \text{et} \quad \delta\mathcal{C}_{xOz} = \left[\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)\right]\vec{u}_y dzdx$$

soit au total :

$$\delta\mathcal{C} = \left[\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)\right].\left[dydz\vec{u}_x + dxdz\vec{u}_y + dxdy\vec{u}_z\right]$$

ou encore :

$$\boxed{\delta\mathcal{C} = (\vec{\nabla}\wedge\vec{V}[M]).d\mathcal{S}.\vec{u}_n}$$

$\vec{u}_n$ orientant (ou étant orienté par) le contour.

IV.3.b) Rotationnel d'un champ vectoriel

Par définition, on appelle rotationnel du champ vectoriel $\vec{V}(M)$ le champ vectoriel :

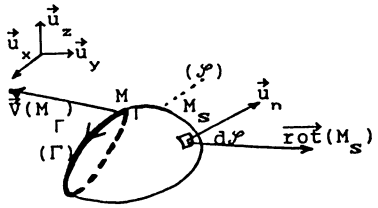
$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)=\ldots \\ \ldots = \left(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\right)\vec{u}_z\end{array}}$$

On a là l'expression cartésienne du rotationnel de $\vec{V}(M)$. On montre aisément que cet opérateur est linéaire. Ainsi, la circulation $\delta\mathcal{C}$ sur le contour élémentaire fermé apparaît comme étant égale au flux élémentaire de $\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])$ à travers ce contour.

IV.3.c) Enoncé du théorème de Stokes

Considérons un contour (Γ) orienté et fermé quelconque, et une surface ($\mathcal{S}$) s'appuyant sur et orientée par ce contour.

Soit alors un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini sur un domaine de l'es-



pace englobant (Γ) et $(\mathscr{S})$; supposons de plus que son rotationnel soit défini en tout point de ce domaine. Décomposons cette surface en éléments de surface orientés $d\mathscr{S}$. Le flux élémentaire de $\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])$ à travers ces éléments est égal à la circulation de $\vec{V}(M)$ sur le contour fermé élémentaire.

Mais si l'on considère deux contours élémentaires côte-à-côte, les circulations sur les côtés contigus vont se compenser. Seules ne seront pas compensées les circulations le long de (Γ). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Etant donné un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ et son rotationnel défini sur un domaine de l'espace affine des points M, la circulation de $\vec{V}(M)$ sur tout contour fermé (Γ) orienté de ce domaine est égale au flux de $\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])$ à travers toute surface $(\mathscr{S})$ de cette zone s'appuyant sur et orientée par (Γ).

$$\mathscr{C} = \oint_\Gamma \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]).d\mathscr{S}.\vec{u}_n$$

IV.3.d) Conséquences

Les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski permettent donc de calculer des intégrales fermées curvilignes ou doubles à partir d'intégrales doubles ou triples, et réciproquement. Par ailleurs, la démarche précédente souligne le parallèlisme entre les opérateurs divergence et rotationnel. Ceux-ci sont intimement liés par l'importante relation suivante :

$$div(\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}[M]) = 0$$

De même on a : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f[M])) = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}f(M) = 0$

Il en résulte que si un champ $\vec{R}(M)$ vérifie la relation $\vec{R}(M) = \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])$, tout champ $\vec{W}(M) = \vec{V}(M)+\overrightarrow{grad}(f[M])$ vérifiera $\vec{R}(M) = \overrightarrow{rot}(\vec{W}[M]) = \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])$. Enfin on montre que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M])) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}[M]) = \ldots$$
$$\ldots = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}[M]) - \nabla^2\vec{V}[M] = \overrightarrow{grad}(div\vec{V}[M]) - \Delta\vec{V}[M]$$

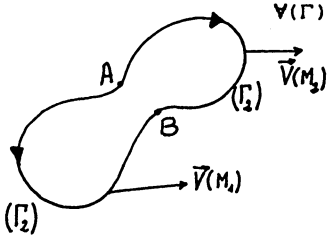
V/ CHAMPS VECTORIELS ET PROPRIETES CONSERVATIVES

V.1) Champ vectoriel à circulation conservative

V.1.a) Définition

Un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ est dit à *circulation conservative* si la circulation du champ sur tout contour fermé (Γ) du domaine où il est défini est nulle :

$$\forall(\Gamma) \text{ fermée, } \oint_\Gamma \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = 0$$



Il résulte immédiatement de la définition précédente que, si un champ est à circulation conservative, sa circulation entre deux points A et B quelconques est indépendante du contour considéré :

$$(\mathscr{C}_A^B)_1 = (\mathscr{C}_A^B)_2$$

V.1.b) Potentiel scalaire

Considérons la circulation du vecteur champ $\vec{V}(M)$ sur un contour fermé (Γ). On a :

$$\mathscr{C} = \oint_\Gamma \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = 0 = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]).d\mathscr{S}.\vec{u}_n$$

et ce pour toute surface $(\mathscr{S})$ s'appuyant sur et orientée par (Γ). On en conclut que le rotationnel d'un champ à circulation conservative est identiquement nul.

$$\vec{V}(M) \text{ à circulation conservative} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]) = \vec{0}$$

Compte tenu des propriétés du rotationnel, on peut donc dire qu'il existe un champ scalaire U(M) tel que :

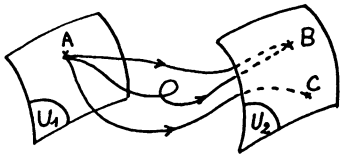
$$\vec{V}(M) = \pm\overrightarrow{grad}(U[M])$$

U(M) est appelé *potentiel scalaire* et on dit qu'*un champ à circulation conservative dérive d'un potentiel scalaire*. Soit, pour récapituler :

$\vec{V}(M)$ à circulation conservative $\Leftrightarrow \forall(\Gamma)$ fermée, $\oint_\Gamma \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]) = 0 \Leftrightarrow \exists\, U(M) \;/\; \vec{V}(M) = \pm\overrightarrow{grad}(U[M])$

Remarque Si l'on peut dire qu'il existe un potentiel scalaire dont dérive un champ vectoriel à circulation conservative, on ne peut affirmer qu'il n'en existe qu'un (non unicité).

V.1.c) Propriétés du potentiel scalaire



α) Surfaces équipotentielles : par définition, ce sont des surfaces pour lesquelles U(M) = cte. Pour les points M de ces surfaces, on a :

$$dU(M) = \overrightarrow{grad}(U[M]).d\overrightarrow{OM} = 0$$

Comme on a $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$ où les $\overrightarrow{MM'}$ appartiennent à une tangente à la surface équipotentielle, on en conclut que **les lignes d'un champ à circulation conservative sont normales aux équipotentielles.**

β) Relation circulation-potentiel

On a : $\delta\mathcal{C} = \vec{V}(M).d\overrightarrow{OM} = \pm\overrightarrow{grad}(U[M]).d\overrightarrow{OM} = \pm dU$

La circulation élémentaire d'un champ vectoriel à circulation conservative est égale à plus ou moins la différentielle du potentiel scalaire. Si l'on calcule la circulation entre deux points A et B, on aura donc :

$$\boxed{\mathcal{C}_A^B = \pm\left[U[B] - U[A]\right]}$$

La circulation de $\vec{V}(M)$ entre deux points A et B est égale à variation du potentiel (cas "+") ou à la différence de potentiels (cas "-") entre ces deux points et est **indépendante du chemin suivi.**

γ) Orientation des lignes de champ

On démontre aisément que le champ dérivant d'un potentiel scalaire est orienté dans le sens des potentiels croissants (cas "+") ou décroissants (cas "-").

δ) Equation de Poisson (Siméon Poisson, 1781-1840)

On peut écrire :

$$\Delta U(M) = div(\overrightarrow{grad}(U[M])) = \pm div(\vec{V}[M])$$

Si la divergence du champ est identiquement égale à un champ scalaire f(M), on aura donc :

$$\boxed{\Delta U \pm f(M) = 0}$$

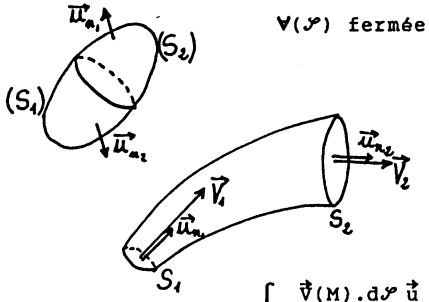
C'est l'équation de Poisson permettant de déterminer le potentiel scalaire U(M). Si la divergence du champ est identiquement nulle, on a une équation dite de Laplace.

V.2) Champ vectoriel à flux conservatif

V.2.a) Définition

Un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ est dit à flux conservatif si le flux de ce champ à travers toute surface fermée $(\mathcal{S})$ du domaine où il est défini est nul :

$$\forall(\mathcal{S}) \text{ fermée}, \oint_S \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = 0$$



Il résulte de la définition précédente que, pour un champ à flux conservatif, le flux entrant dans $(\mathcal{S}_1)$ est égal au flux sortant de $(\mathcal{S}_2)$. Comme surface fermée, on peut éventuellement prendre un tube de champ. On aura alors :

$$\int_{S1} \vec{V}(M).d\mathcal{S}_1\vec{u}_{n1} = \int_{S2} \vec{V}(M).d\mathcal{S}_2\vec{u}_{n2}$$

On dit qu'alors **le flux se conserve dans un tube de champ.** Si de plus $\vec{V}(M)$ est pratiquement uniforme sur une section normale du tube, on aura alors :

$$V_1\mathcal{S}_1 = V_2\mathcal{S}_2$$

V.2.b) Potentiel vecteur

Etant donnée une surface $(\mathcal{S})$ fermée limitant un volume $(\mathcal{V})$ et un champ $\vec{V}(M)$ à flux conservatif défini sur un domaine contenant $(\mathcal{V})$, on a, en appliquant le théorème d'Ostrogradski :

$$\oint_S \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = 0 = \int_{\mathcal{V}} div(\vec{V}[M])d\tau$$

et ce pour toute surface fermée $(\mathcal{S})$ du domaine. On en déduit que, sur ce domaine, la divergence de $\vec{V}(M)$ est identiquement nulle :

$$\text{champ à flux conservatif} \Leftrightarrow div(\vec{V}[M]) = 0$$

Compte tenu des propriétés du rotationnel, on peut donc dire qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ tel que :

$$\vec{V}(M) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}[M])$$

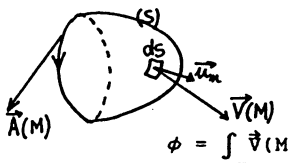
$\vec{A}(M)$ est appelé *potentiel vecteur* et on dit qu'*un champ à flux conservatif dérive d'un potentiel vecteur.*

Pour récapituler :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{champ à flux conservatif} \Leftrightarrow \forall(\mathcal{S}) \text{ fermée}, \oint_S \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = 0 \\ \Leftrightarrow div(\vec{V}[M]) = 0 \Leftrightarrow \exists\ \vec{A}(M) \ /\ \vec{V}(M) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}[M])\end{array}}$$

Remarque Comme pour le potentiel scalaire, il n'y a pas unicité de définition de $\vec{A}(M)$. En effet, $\vec{V}(M)$ dérive tout aussi bien de $\vec{A}(M)$ que de $\vec{A}(M)+\overrightarrow{grad}(f[M])$, f(M) étant un champ scalaire quelconque.

V.2.c.) Propriétés du potentiel vecteur



Considérons un contour fermé (Γ) et une surface ($\mathcal{S}$) s'appuyant sur ce contour. Si le champ $\vec{V}(M)$ est à flux conservatif, on aura :

$$\phi = \int_S \vec{V}(M).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}[M]).d\mathcal{S}.\vec{u}_n$$

soit :

$$\boxed{\phi = \oint_\Gamma \vec{A}(M).d\overrightarrow{OM}}$$

Le flux d'un champ vectoriel à flux conservatif à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé (Γ) est égal à la circulation sur ce contour du potentiel vecteur dont il dérive. On pourra utiliser cette propriété lorsque l'on connaîtra l'expression du potentiel vecteur pour calculer un flux.

On peut aussi établir une équation de Poisson pour le potentiel vecteur :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A}[M])) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}[M]) - \Delta\vec{A}[M]$$

soit, si l'on impose de plus que $\vec{A}(M)$ soit aussi à flux conservatif ($div\vec{A}[M] = 0$, condition dite *de jauge*) :

$$\Delta\vec{A}(M) = -\overrightarrow{rot}(\vec{V}[M]) \text{ avec } div\vec{A}[M] = 0$$

Si enfin le rotationnel du champ $\vec{V}(M)$ est identiquement égal à un autre champ $\vec{W}(M)$, on a :

$$\boxed{\Delta\vec{A}(M) + \vec{W}(M) = \vec{0}}$$

Cette équation de Poisson permettra de déterminer $\vec{A}(M)$ connaissant le champ $\vec{W}(M)$. Si le rotationnel du champ $\vec{V}(M)$ est identiquement nul, on a une équation de Laplace.

* * *