

ROUEN

STAGE
*UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE*

ANALOGUES ELECTRIQUES
EN THERMODYNAMIQUE
ET EN OPTIQUE

6 janvier 1992-10 janvier 1992

ROUEN

STAGE
*UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE*

ANALOGUES ELECTRIQUES
EN THERMODYNAMIQUE
ET EN OPTIQUE

6 janvier 1992-10 janvier 1992

ANALOGUES ELECTRIQUES EN THERMODYNAMIQUE ET EN OPTIQUE

A/ CONDUCTION THERMIQUE

I/ DE FOURIER à OHM

On se propose ici de présenter une analogie qui, d'un point de vue historique, eut une grande importance pour le développement de l'électromagnétisme, à savoir l'analogie existant entre la loi de Fourier régissant la conduction de la chaleur et la loi d'Ohm régissant la conduction électrique.

En effet, définissons tout d'abord le **champ densité de courant thermique** \vec{J}_a par son flux à travers une surface qui est égal à la quantité de chaleur Q par unité de temps traversant cette surface, quantité que l'on appelle **flux thermique** I_a :

$$I_a = \int_S \vec{J}_a \cdot d\vec{s}_n = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_D$$

La loi de Fourier (Joseph, 1768-1830) lie de façon simple ce champ densité de courant thermique à la température : il y aura courant thermique lorsqu'existera un gradient de température et ce courant sera dirigé dans le sens des températures décroissantes, si bien que :

$$\vec{J}_a = -K \cdot \overline{\text{grad}}(T)$$

\vec{J}_a s'exprimant en $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$, la constante K , dite **conductivité thermique**, s'exprimera en $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Fourier publia ses travaux théoriques sur la conduction thermique entre 1807 et 1811, l'ensemble de ces travaux étant réunis dans un important ouvrage, *Théorie analytique de la chaleur*, qu'il publia en 1822. L'allemand Georg Simon Ohm (1787-1854) commença par étudier empiriquement la question de la conduction électrique et établit en 1826 sa célèbre loi, dégageant du même coup la notion de **résistance électrique** ainsi qu'une relation entre la notion

d'intensité électrique formalisée cinq ans plus tôt par Ampère et la notion de tension électrique. L'année suivante, transposant purement et simplement les travaux de Fourier publiés en 1822 à la conduction électrique, Ohm retrouva par la voie théorique sa loi établie empiriquement. Il faut cependant remarquer que Ohm n'avait pas encore identifié la différence de potentiels électriques (qu'il appelait alors *forces électroscopiques*) à la notion de tension : il faudra pour cela attendre 1845 et Kirchhoff.

Toujours est-il que la loi locale d'Ohm liant champ densité de courant électrique \vec{J}_q au champ électrique \vec{E} s'exprime aujourd'hui par :

$$\vec{J}_q = \gamma \cdot \vec{E} = -\gamma \cdot \overline{\text{grad}}(V)$$

$\gamma(M)$ étant la conductivité du métal et $V(M)$ le champ potentiel électrique.

A l'analogie formelle :

$$\vec{J}_a \longleftrightarrow \vec{J}_q ; K \longleftrightarrow \gamma ; T(M) \longleftrightarrow V(M)$$

correspond en fait une analogie phénoménologique qui ne sera véritablement explicitée qu'en 1900 par Paul Drude, les deux phénomènes de conduction dans les métaux ayant pour porteurs les électrons.

Dans le même ordre d'idée (phénomènes de transport), on peut également invoquer comme analogue la loi de Fick régissant le phénomène d'auto-diffusion :

$$\vec{J}_n = -D \cdot \overline{\text{grad}}(n)$$

$\vec{J}_n(M)$ étant le champ densité de courant de diffusion, $n(M)$ la densité volumique de molécules diffusant au point M et D le coefficient de diffusion (en $m^2 \cdot s^{-1}$). Au phénomène de diffusion dû au gradient de concentration peuvent d'ailleurs se superposer celui des diffusions thermiques et barométriques.

II/ ANALOGIE CONDUCTION THERMIQUE-ÉLECTRIQUE

Etant donné un conducteur, on pourra donc écrire :

$$V_2 - V_1 = R \cdot I \qquad T_2 - T_1 = R_a I_a$$

R_α désignant une résistance thermique (en K.s/J) et $I_\alpha = \frac{dQ}{dt}$ le flux thermique traversant une certaine surface.

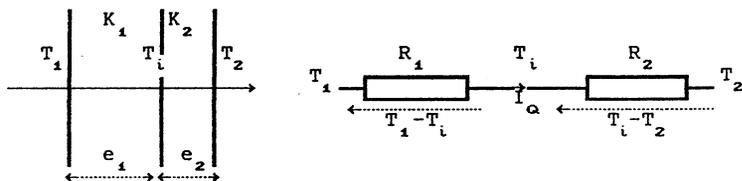
Si le conducteur est rectiligne, de longueur l et de section constante S , on aura :

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S} \quad R_\alpha = \frac{1}{K} \cdot \frac{l}{S}$$

En utilisant ces règles analogiques, nous allons traiter dans ce qui suit deux problèmes simples.

II.1) Température de l'interface entre un mur et un isolant

Considérons un mur de conductibilité thermique K_1 , d'épaisseur e_1 , et un isolant de conductibilité K_2 ($K_2 < K_1$) et d'épaisseur e_2 .



Considérons une section droite S de l'ensemble mur-isolant ; on peut alors définir les résistances thermiques R de chacune des parties par $R = \frac{1}{K} \cdot \frac{e}{S}$. En exprimant la conservation du flux thermique, il vient (analogue de la loi du diviseur potentiométrique) :

$$\frac{T_1 - T_i}{R_1} = \frac{T_i - T_2}{R_2}$$

On en déduit que :

$$T_i = \frac{R_1 T_2 + R_2 T_1}{R_1 + R_2} = \frac{e_1 K_2 T_2 + e_2 K_1 T_1}{e_1 K_2 + e_2 K_1}$$

II.2) Un "condensateur" thermique ... qui ne condense pas

Considérons une sphère métallique de température T et de rayon a à l'intérieur d'une autre sphère métallique de rayon αa ($\alpha > 1$) et de température constante T_0 (inférieure à T pour fixer les idées), les deux sphères étant séparées par un milieu de conductivité

thermique K . Pour calculer le flux thermique instantané s'écoulant de la sphère intérieure vers la sphère externe, il faut d'abord calculer la résistance thermique du milieu qu'un calcul simple donne comme étant égale à :

$$R_\alpha = \frac{\alpha - 1}{4\pi K \alpha a}$$

Pour cela, on exprime d'abord le fait que le flux thermique se conserve à travers toute surface sphérique de rayon r compris entre a et αa , ce qui donne l'expression du module du champ gradient de températures et on calcule ensuite la circulation de ce champ entre les deux sphères. On peut également utiliser l'expression de la résistance de fuite d'un condensateur sphérique.

Appelons alors C_α la capacité calorifique de la sphère intérieure. Si l'on considère comme système cette sphère, une variation de température dT se traduira par une quantité de chaleur échangée $dQ = C_\alpha dT$. Or le flux thermique I_α est défini par :

$$I_\alpha = \oint_{\mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha \cdot d\vec{\mathcal{V}}_n = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_D$$

La quantité de chaleur perdue par la sphère intérieure se retrouve dans le flux thermique et on a donc :

$$I_\alpha = -C_\alpha \frac{dT}{dt}$$

Par ailleurs, on a :

$$T - T_0 = R_\alpha I_\alpha$$

En posant $\theta = T - T_0$ et $\tau = R_\alpha C_\alpha$, on en déduit que :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = 0$$

On pourra ainsi déterminer la température instantanée de la sphère intérieure, cette loi d'évolution étant formellement identique à celle de la tension entre les bornes d'un condensateur sphérique se déchargeant par le diélectrique.

Toutefois, si l'analogie est formellement très jolie, il faut reconnaître qu'à part utiliser la même lettre C , capacité calorifique et capacité électrique sont de nature très différente. Ainsi la capacité électrique du condensateur tient compte de l'influence de l'armature externe sur l'armature interne, ce qui n'est pas le

cas avec la conduction thermique ; d'ailleurs, la capacité d'un condensateur sphérique a pour expression : $C = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{\alpha-1}$ où ϵ représente la permittivité du diélectrique alors que la capacité calorifique C_a dépendra exclusivement de la nature et de la géométrie de la sphère intérieure (sphère pleine, creuse,...). Il y a donc là analogie formelle sans qu'il y ait analogie phénoménologique, la cause en étant que s'il y a condensation de l'électricité dans un condensateur, il n'y a pas, à notre connaissance, de phénomène analogue dans le système étudié concernant la chaleur. Le titre de ce paragraphe est en cela abusif et ne rend compte que d'une analogie purement formelle. Enfin, notons que la conduction thermique est un phénomène essentiellement dynamique, alors que la capacité d'un condensateur peut se définir statiquement.

Toutefois, on remarquera que, dans les deux cas, il y a équilibre lorsque les températures ou les potentiels des deux sphères sont égaux et que l'étude statique du condensateur est régie en partie par la formule :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

qui présente malgré tout quelques similitudes avec la loi de Fourier.

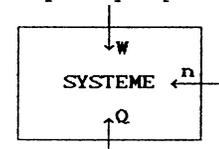
B/ QUADRIPOLES THERMODYNAMIQUES

Nous nous proposons de donner ici une représentation des principes de la thermodynamique qui, si elle n'est pas véritablement du ressort de l'analogie formelle, a le mérite de visualiser clairement les échanges énergétiques entre un système effectuant des cycles thermodynamiques et son milieu extérieur. Mais auparavant, donnons quelques rappels sur le premier principe de la thermodynamique.

I/ PREMIER PRINCIPE ET REPRÉSENTATION ÉNERGÉTIQUE

I.1) Énoncé

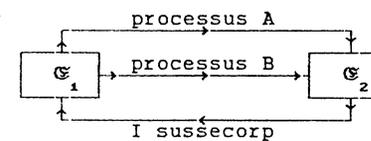
Considérons un système thermodynamique limité par une paroi et siège d'échanges énergétiques et éventuellement de matière (systèmes ouverts) avec son milieu extérieur. Le premier principe de la thermodynamique peut alors s'exprimer de la façon suivante :



La somme algébrique des échanges énergétiques (avec le milieu extérieur) d'un système ayant effectué un cycle est nulle.

On définit alors la convention récepteur si l'on oriente les échanges énergétiques du milieu extérieur vers le système et la convention générateur dans le cas contraire. Pour simplifier, on ne considérera que des systèmes fermés.

I.2) Énergie totale



En considérant un système fermé passant d'un état (C_1) à un état (C_2) et en supposant qu'il existe plusieurs processus pour qu'il en soit ainsi et qu'il existe aussi des

processus permettant de passer de l'état (\mathcal{E}_2) à l'état (\mathcal{E}_1), on peut alors aisément démontrer le **théorème de l'état initial et de l'état final** suivant (qui peut éventuellement servir de premier principe si l'on inverse les rôles entre ce théorème et le principe énoncé précédemment) :

La somme algébrique des échanges énergétiques d'un système avec le milieu extérieur lors du passage de l'état (\mathcal{E}_1) à l'état (\mathcal{E}_2) ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

La somme des échanges énergétiques peut donc être égalée avec la variation d'une fonction qui dépend de l'état du système, cette fonction définissant ainsi l'énergie totale \mathcal{E}_T :

$$\mathcal{E}_T(\mathcal{E}_2) - \mathcal{E}_T(\mathcal{E}_1) = W + Q$$

$\mathcal{E}_T(\mathcal{E}_i)$ représentant l'énergie totale du système dans l'état (\mathcal{E}_i) et $W + Q$ représentant les échanges énergétiques pour passer d'un état à un autre.

La variation d'énergie totale pour un cycle est donc nulle : autrement dit, suite à un cycle, l'énergie totale finale d'un système est égale à l'énergie totale initiale. Mathématiquement, le fait que \mathcal{E}_T soit une fonction d'état revient à dire que pour une transformation élémentaire, la variation d'énergie totale correspondante $d\mathcal{E}_T$ est une différentielle totale exacte. Les travaux et quantités de chaleur élémentaires dépendant du processus, on les distinguera des variations différentielles en les indiquant par δW et δQ . On aura ainsi, toujours pour un système fermé :

$$d\mathcal{E}_T = \delta W + \delta Q$$

I.3) Représentation énergétique

La représentation énergétique consiste à ne prendre comme variables d'état (en nombre égal, par définition, au nombre de degrés de liberté) d'un système que des grandeurs extensives X (c'est-à-dire pour un système homogène, proportionnelles à sa quantité de

matière) ; $d\mathcal{E}_T$ étant une différentielle totale exacte, on pourra donc écrire :

$$d\mathcal{E} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial X_1} \right)_{X_2} dX_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial X_2} \right)_{X_1} dX_2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial X_i} \right)_{X_j} dX_i + \dots$$

Puisque \mathcal{E}_T et les X_i sont des grandeurs extensives, les dérivées partielles $\partial \mathcal{E}_T / \partial X_i$ sont évidemment des grandeurs intensives : on dit que ce sont les **grandeurs intensives conjuguées** des X_i par rapport à \mathcal{E}_T . On les notera Y_i et la différentielle de l'énergie totale pourra alors s'exprimer de la manière suivante :

$$d\mathcal{E}_T = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial X_i} \right)_{X_j} dX_i = \sum_i Y_i dX_i$$

En considérant alors des processus quasistatiques où seule une variable extensive intervient, on peut dresser le tableau des correspondances variables intensives-extensives en identifiant la variation d'énergie totale avec le travail mis en jeu pour les exemples suivants :

X_i	Y_i	δW
volume \mathcal{V}	-P (pression)	-P.d \mathcal{V}
qté élect. q	V (pot. électrique)	V.dq
...

I.4) Nécessité de l'entropie

Inversement, pour les échanges de chaleur, on dispose d'une variable intensive, à savoir la température T qu'il serait bon d'associer à une grandeur extensive : on peut définir ainsi l'entropie S comme étant la variable extensive conjuguée de la température par rapport à \mathcal{E}_T et on pose donc, par définition :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial S} \right)_S = T$$

En tant que variable extensive, l'entropie est donc une grandeur additive. En absence d'échange de matière avec l'extérieur, on

peut donc écrire $d\mathcal{E}_T$ en faisant ressortir le volume et l'entropie de la manière suivante :

$$d\mathcal{E}_T = -P \cdot dV + T \cdot dS + \sum Y_i dX_i \quad X_i \neq V, S$$

On peut invoquer une deuxième raison à la nécessité d'introduire l'entropie dès le premier principe. En effet, considérons par exemple un système isolé, donc d'énergie totale constante, et supposons que ce système mette en jeu des forces d'interaction dérivant d'une énergie potentielle \mathcal{E}_P . L'énergie totale de ce système pourra donc se mettre sous la forme de cette énergie potentielle et d'une autre énergie \mathcal{E}_α et on doit donc avoir :

$$d\mathcal{E}_T = d\mathcal{E}_P + d\mathcal{E}_\alpha$$

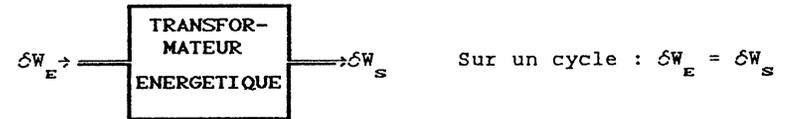
Si le système est hors équilibre, on sait qu'il va évoluer dans le sens d'une diminution de l'énergie potentielle (ses potentialités d'évolution spontanée diminuent), ce au profit de \mathcal{E}_α (par exemple l'énergie cinétique). Mais en dernier ressort, quand tous les aspects dynamiques de l'énergie auront été épuisés, il faut bien qu'il y ait un terme qui compense le $\Delta\mathcal{E}_P$ pour assurer la constance de l'énergie totale et ce terme c'est $T \cdot \Delta S$ (si le processus est isotherme) qui sera alors positif puisque $\Delta\mathcal{E}_P$ est nécessairement négatif (exemple du pendule pesant avec frottements fluides). En fait, le second principe généralise le raisonnement mécaniste suivi précédemment à tous processus physiques.

Remarque : dans le cas général, il n'y a pas identification entre les termes différentiels et les travaux/quantités de chaleur. Cette identification n'est en fait possible que dans le cas de transformations quasistatiques réversibles, c'est-à-dire quand il n'y a pas création d'entropie dans le système.

II/ MODÉLISATION D'UN TRANSFORMATEUR ÉNERGÉTIQUE

Nous appellerons transformateur énergétique un système thermodynamique ayant un fonctionnement cyclique et dont l'objet est de transformer une forme d'énergie en une autre forme d'énergie

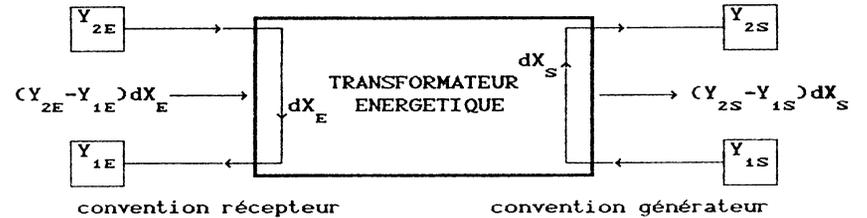
(exemples : turbine, alternateur, moteur électrique, machine à vapeur, moteur à explosion,...). Dans un premier temps, nous supposons qu'il n'y a pas création d'entropie dans le transformateur, c'est-à-dire que les processus qui s'y produisent sont réversibles. Appelons alors δW_E le travail (ou l'équivalent chaleur) absorbé par le transformateur nécessaire à la production d'un certain travail (ou équivalent chaleur) δW_S durant un cycle ; en adoptant la convention récepteur pour W_E et la convention générateur pour W_S , on aura donc :



Or l'expérience montre que le moyen le plus simple d'absorber ou de produire du travail est de faire transiter un flux de variable extensive X entre au moins deux sources caractérisées par des variables intensives Y_1 et Y_2 , de telle sorte que :

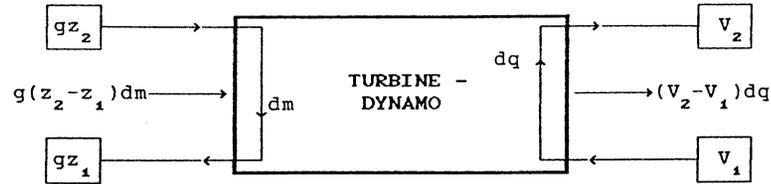
$$\delta W = (Y_2 - Y_1) dX$$

Par exemple, un travail électrique a pour expression $(V_2 - V_1) dq$, un travail de pesanteur $(gz_2 - gz_1) dm$, etc... Si bien que l'on pourra représenter le transformateur énergétique le plus simple par :

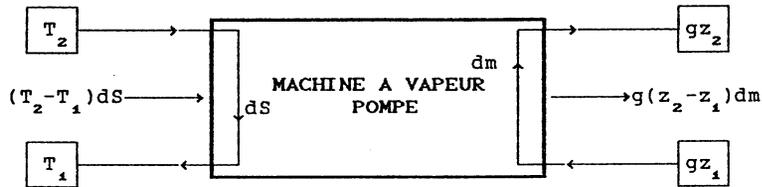


Ainsi, à titre d'exemple, on pourra interpréter énergétiquement une chute hydraulique permettant d'entraîner une dynamo en fonctionnement réversible de la manière suivante : le passage d'une masse dm d'eau du potentiel gravitationnel gz_2 au potentiel gravitationnel gz_1 permet de lever la quantité d'électricité $dq = I \cdot dt$

du potentiel V_1 au potentiel V_2 .



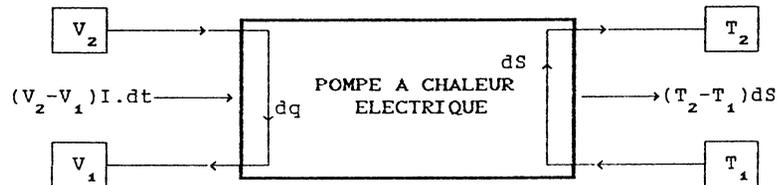
Une turbine à vapeur ditherme entraînant une pompe hydraulique en fonctionnement réversible reçoit une quantité de chaleur $T_2 dS$ de la source chaude et cède une quantité de chaleur $T_1 dS$ à la source froide, si bien que l'on pourra lui donner comme représentation :



La quantité de chaleur absorbée est ici $T_2 dS$, le travail fourni est égal à $g(z_2 - z_1)dm = (T_2 - T_1)dS$, si bien que le rendement de l'ensemble a pour expression : $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

C'est le rendement de Carnot.

Enfin, une pompe à chaleur électrique réversible aura pour représentation :



Son efficacité aura donc pour expression :

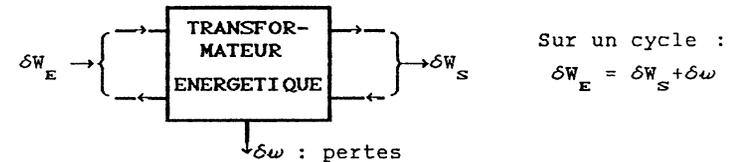
$$e = \frac{T_2}{T_2 - T_1} > 1$$

A titre de réflexion : à partir de ce qui précède, peut-être pourrions nous généraliser le second principe énoncé par Kelvin de la façon suivante :

Pour qu'un système en fonctionnement cyclique soit susceptible de fournir du travail au milieu extérieur, il faut qu'il soit en relation avec au moins deux sources de même nature caractérisées par des grandeurs intensives différentes.

En effet, il est impossible d'avoir un moteur monotherme (énoncé de Kelvin) ou un moteur électrique alimenté par un seul potentiel, de même qu'il ne faut rien attendre d'une "chute horizontale" ou d'un écoulement de fluide sans différence de pression.

Si maintenant le cycle n'est pas réversible, c'est-à-dire si le transformateur présente des pertes, on représentera celles-ci par une sortie monopolaire de la façon suivante :

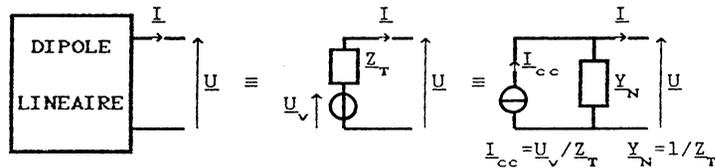


Ces pertes se manifesteront sous forme d'un dégagement de chaleur, correspondant à l'entropie créée dans le transformateur.

Enfin, il est évidemment possible de généraliser cette représentation à des échanges multipolaires où le nombre de pôles est supérieur à 4.

C/ MILIEUX OPTIQUES ET REPRESENTATION ELECTRIQUEI/ HYMNE AU THEOREME DE THEVENIN-NORTONI.1) Enoncé

L'électrotechnique générale, c'est-à-dire ce domaine de l'électromagnétisme englobant l'électrocinétique, l'électronique et l'électrotechnique de puissance (machines), est une discipline ayant pour vocation d'unifier. En effet, c'est le royaume du schéma équivalent dont le rôle est de simplifier l'étude des systèmes électriques complexes. Or, lorsque les systèmes étudiés sont linéaires (c'est-à-dire régis par un système d'équations linéaires) et que l'on étudie ce qui se passe entre deux pôles de ce système (dipôle), nous disposons d'un théorème d'une importance considérable permettant de simplifier cette étude : c'est le théorème de Thévenin-Norton. Dans le cadre de l'hypothèse harmonique, c'est-à-dire lorsque toutes les grandeurs électriques actives sont sinusoïdales et que l'on peut donc les représenter à l'aide de grandeurs complexes, ce théorème stipule que tout dipôle électrique linéaire est équivalent à une source de tension en série avec une impédance, ce schéma équivalent étant lui-même équivalent à une source de courant en parallèle avec une admittance.



C'est ainsi que l'étage de sortie d'un amplificateur, un transformateur vu au secondaire, un alternateur, une dynamo, un moteur quelqu'il soit seront représentables par un schéma équivalent du type précédent, pourvu qu'ils aient un fonctionnement linéaire.

Ce théorème ne traduit ni plus, ni moins qu'une transformation énergétique, cette transformation s'effectuant au niveau de U_v , Z_T représentant le côté passif du dipôle ; si le dipôle est récepteur, $u(t)i(t)$ sera alors une puissance absorbée, s'il est générateur, ce sera une puissance utile. Notons au passage que la loi des mailles n'est qu'une manière particulière de traduire le principe de conservation de l'énergie (on multiplie chaque tension par l'intensité pour passer aux puissances), les résistances se faisant en quelque sorte les porte-parole du second principe (création d'entropie par effet Joule).

I.2) Résistance-inductance-capacité

Il se peut également que le dipôle soit purement passif, auquel cas la tension à vide U_v sera nulle. Or l'impédance Z_T peut se représenter en toute généralité sous la forme (ω étant la pulsation des grandeurs sinusoïdales en présence) :

$$Z_T = R(\omega) + jX(\omega)$$

$R(\omega)$ étant la résistance (traduisant les pertes Joule) du dipôle et $X(\omega)$ sa réactance (siège de la puissance réactive). En représentation parallèle, l'admittance Y_N aura pour expression générale :

$$Y_N = G(\omega) + jB(\omega)$$

$G(\omega)$ étant la conductance du dipôle (localisant les pertes Joule) et $B(\omega)$ sa susceptance (localisant la puissance réactive).

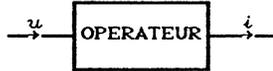
Or, en dernier ressort, toute impédance peut être représentée par la série d'une résistance-inductance-capacité (toute admittance par le même trio mais en parallèle). Que représente chacun de ces objets ? D'un point de vue énergétique, ce sont des coefficients entrant dans la mise en oeuvre de l'une des trois énergies fondamentales :

- résistance : traduit les dissipations énergétiques (création d'entropie par effet Joule) ;
- inductance : terme de type inertiel attaché à une énergie

de type cinétique ;

— **capacité** : terme de rappel attaché à une énergie de type potentiel.

On peut également considérer ces objets comme des opérateurs permettant de passer de grandeurs type tension à des grandeurs type courant et représentable par le schéma bloc suivant :



CONSTANTES LOCALISEES	OPERATION	REPRESEN. COMPLEXE	OPERATEUR
	$i = G \cdot u$	$\underline{I} = G \cdot \underline{U}$	multiplication par une constante
	$i = \frac{1}{L} \int_0^t u \cdot dt$	$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jL\omega}$	intégrateur
	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$\underline{I} = jC\omega \cdot \underline{U}$	dérivateur

II/ REPRESENTATION ELECTRODYNAMIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

II.1) Solution type O.M.P.P.

L'analyse de Fourier nous autorise à étudier préférentiellement des solutions électromagnétiques de la forme :

$$\underline{E}(M, t) = \underline{\hat{E}} \cdot \exp(j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{OM}))$$

solution donc du type onde monochromatique plane progressive (O.M.P.P.) ; ω est la pulsation de l'onde et \underline{k} le vecteur d'onde complexe. Toute solution générale sera alors obtenue par combinaison linéaire de ces solutions type O.M.P.P.. On peut également introduire l'indice complexe \underline{n} défini par :

$$\underline{k} = \underline{n} \left(\frac{\omega}{c} \right)$$

où \underline{k} est le module algébrique complexe de \underline{k} .

En recherchant des solutions de ce type, l'opérateur dérivation temporelle est identifiable à $j\omega$ et l'opérateur nabla à :

$$\nabla = -j\underline{k}$$

Si bien que les équations de Maxwell prennent pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{E} &= 0 & -\underline{k} \wedge \underline{E} + \omega \underline{D} &= \underline{J} \\ -j\underline{k} \cdot \underline{E} &= \rho_q / \epsilon_0 & -j\underline{k} \wedge \underline{E} - j\omega c^{-2} \underline{E} &= \mu_0 \underline{J} \end{aligned}$$

II.2) Réduction des équations de Maxwell au champ électrique

En reprenant les équations précédentes, on a donc :

$$\underline{E} = \frac{1}{\omega \underline{k} \wedge \underline{E}} \Rightarrow -j \left(\underline{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega \underline{k} \wedge \underline{E}} \right) + \omega c^{-2} \underline{E} \right) = \mu_0 \underline{J}$$

soit, en divisant tout par μ_0 :

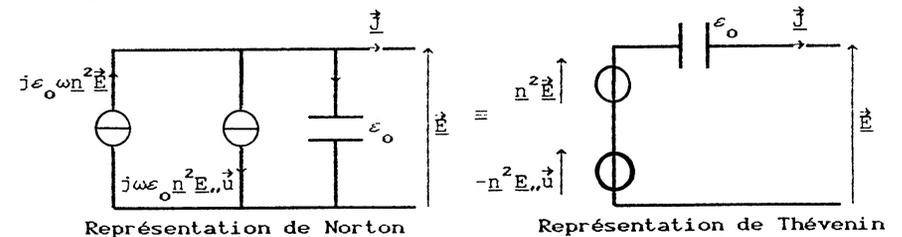
$$-j \frac{1}{\mu_0 \omega} (\underline{k} \cdot \underline{E}) \underline{k} + j \frac{1}{\mu_0 \omega} \underline{k}^2 \underline{E} - j \epsilon_0 \omega \underline{E} = \underline{J}$$

soit encore, en utilisant l'indice complexe \underline{n} :

$$j\omega \epsilon_0 \left(-\underline{n}^2 \underline{E}, \underline{u} + \underline{n}^2 \underline{E} - \underline{E} \right) = \underline{J}$$

On constate que les termes de droites sont homogènes à des densités de courant et on peut donc considérer cette expression comme traduisant une loi de noeuds ; le premier terme existera s'il y a une composante parallèle $\underline{E}, \underline{u}$ du champ électrique à la direction de propagation \underline{u} , donc si la divergence du champ électrique est non nulle, c'est-à-dire s'il y a une densité de charge ρ_q ; la somme des deux termes suivants correspond au dalembertien de \underline{E} .

Compte tenu de ce qui précède, on pourra représenter cette équation sous la forme suivante :



II.3) Modélisation d'un diélectrique et d'une population de porteurs libres

On sait que la densité de courant la plus générale est de la somme d'un courant de conduction, d'un courant de polarisation et d'un courant de magnétisation, avec, $\vec{\mathcal{P}}(M,t)$ et $\vec{\mathcal{M}}(M,t)$ étant respectivement le champ polarisation et le champ d'aimantation :

$$\vec{j} = \vec{j}_c + \vec{j}_p + \vec{j}_m$$

$$\vec{j}_p = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{P}} = j\omega \vec{\mathcal{P}} \quad \vec{j}_m = \text{rot}(\vec{\mathcal{M}}) = -j\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{M}}$$

Dans la suite, nous allons supposer que le champ polarisation $\vec{\mathcal{P}}(M,t)$ est uniforme, que le phénomène de magnétisation est négligeable et qu'il n'y a pas de charges d'espace. En conséquence, la densité volumique de charge de polarisation est nulle (car égale à $-\text{div}(\vec{\mathcal{P}})$) et le champ électrique est normal au vecteur d'onde \vec{k} . Localement, les hypothèses précédentes sont tout à fait acceptables lorsque l'on étudie un diélectrique ou encore une population de porteurs libres dans un diélectrique.

Pour connaître la densité de courant de polarisation \vec{j}_p , il faut donc au préalable connaître le champ polarisation $\vec{\mathcal{P}}$. Nous allons déterminer ce champ dans le cadre d'un modèle purement classique dont les résultats restent formellement valables en physique statistique et quantique et dans les milieux condensés. Lorsqu'une charge q est écartée de sa position d'équilibre d'un déplacement $\delta \vec{r}$, il apparaît un moment dipolaire $\vec{p} = q \cdot \delta \vec{r}$. En supposant que tous les porteurs d'un type particulier sont écartés du même déplacement $\delta \vec{r}$ par rapport à leur position d'équilibre, le champ polarisation aura donc pour expression :

$$\vec{\mathcal{P}} = n \cdot q \delta \vec{r}$$

n représentant la densité volumique de porteurs considérés.

Considérons l'un de ces porteurs ; placé dans le champ $\vec{E}(M,t)$, il subit les forces suivantes :

- la force électrique $q \cdot \vec{E}$;
- une force de rappel de la forme $-m \cdot \omega_0^2 \delta \vec{r}$;
- une force traduisant des dissipations énergétiques que

nous poserons égale à $-\frac{m}{\tau} \frac{d}{dt}(\delta \vec{r})$.

En appliquant le principe fondamental de la mécanique à cette charge, il vient donc :

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\delta \vec{r}) = q \cdot \vec{E} - m \cdot \omega_0^2 \delta \vec{r} - \frac{m}{\tau} \frac{d}{dt}(\delta \vec{r})$$

Soit, en introduisant le champ polarisation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{P}} + \omega_0^2 \vec{\mathcal{P}} = \frac{nq^2}{m} \vec{\mathcal{E}}$$

ou encore, en utilisant \vec{j}_p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_p + \frac{1}{\tau} \vec{j}_p + \omega_0^2 \int \vec{j}_p dt = \frac{nq^2}{m} \vec{\mathcal{E}}$$

On peut alors introduire un coefficient γ analogue à une conductivité et égal à :

$$\gamma = \frac{nq^2 \tau}{m}$$

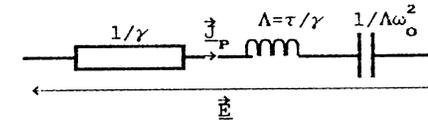
si bien que l'expression précédente devient :

$$\tau \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_p + \vec{j}_p + \omega_0^2 \tau \int \vec{j}_p dt = \gamma \vec{\mathcal{E}}$$

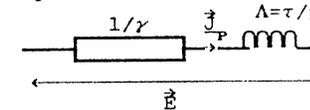
En régime harmonique, on peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + j\omega\tau \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \right\} \vec{j}_p = \vec{\mathcal{E}}$$

et représenter localement le diélectrique considéré sous la forme suivante :



Si les charges considérées constituent une population de porteurs libres, il n'y a plus de force de rappel et cette population de porteurs pourra être représentée localement par :



où γ représente ici la conductivité de la population de porteurs libres, le coefficient inductif traduisant l'inertie de ces porteurs.

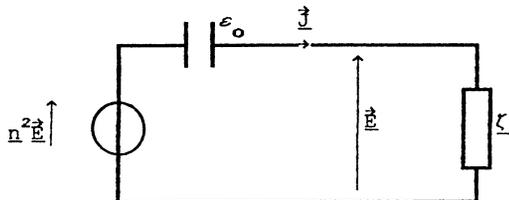
Si le milieu est constitué d'un mélange de porteurs, libres ou non, de type différents, on pourra représenter chacune des populations à l'aide d'une branche analogues à celles représentées ci-dessus, chacune de ces branches étant caractérisées par les coefficients γ (conductivité), τ (temps de relaxation) et ω_0 (pulsation de résonance), toutes ces branches étant ensuite "connectées" en parallèle.

II.4) Propagation d'une O.M.P.P. dans une population de porteurs

De ce qui précède, il découle que l'on peut représenter localement un milieu non magnétique homogène et isotrope par ce que l'on peut appeler une impédance ζ telle que :

$$\underline{E} = \zeta \cdot \underline{j}$$

La propagation d'une O.M.P.P. dans ce milieu revient à connecter le pseudo-générateur de Thévenin traduisant les équations de Maxwell à cette impédance :



En utilisant la loi du diviseur potentiométrique, on aura ainsi :

$$n^2 = \frac{1}{j\epsilon_0 \omega + \zeta}$$

soit, en introduisant une admittance $\underline{Y} = 1/\zeta$:

$$\boxed{n^2 = 1 + (\underline{Y}/j\epsilon_0 \omega)}$$

On peut à partir de là étudier les conditions de transparence ou d'opacité d'un milieu, l'absorption de ce milieu,...

Il nous semble que l'intérêt principal de ce mode de présentation réside d'une part en ce que l'on peut utiliser des méthodes propres aux réseaux électriques pour traiter des problèmes d'optique (diagrammes de Bode, par exemple) et d'autre part en ce qu'elle permet de localiser les différents paramètres intervenant dans la propagation et donc d'évaluer l'importance de leur influence sur la propagation. En cela, ce mode de présentation peut être utile pour des étudiants ayant des difficultés d'abstraction.

* * *