ROUEN

STAGE

UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE

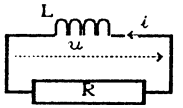
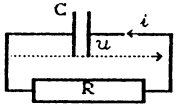
DE L'OSCILLATEUR AU CALCUL ANALOGIQUE

6 janvier 1992–10 janvier 1992

SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

I/ EXEMPLES DE SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Les exemples suivants ont été pris dans divers domaines des sciences physiques. On constatera que la mise en forme de l'équation différentielle fait apparaître une constante homogène à un temps : on appelera cette grandeur **constante de temps** τ.

SYSTEMES	Terme dynamiq.	Terme dissipa.	Equation d'évolution Equation standard	Cte. temps
Masse ponct. en translation avec nombre de Reynolds << 1	$m.\dot{\vec{v}}_R$	$-\alpha.\vec{v}_R$	Th. de la résultante cinétique : $m.\dot{\vec{v}}_R = -\alpha.\vec{v}_R$ $\frac{d\vec{v}}{dt}_R + \frac{\alpha}{m}\vec{v}_R = \vec{0}$	$\tau = \frac{m}{\alpha}$
Solide en rotation autour d'un axe avec couple résistant proportionnel à la vitesse Ω	$I_\Delta\dot{\Omega}$	$-\beta.\Omega$	Th. du moment cinétique : $I_\Delta\dot{\Omega} = -\beta.\Omega$ $\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\beta}{I_\Delta}.\Omega = 0$	$\tau = \frac{I_\Delta}{\beta}$
Circuit RL 	$L.\frac{di}{dt}$	$-R.i$	Loi d'Ohm et loi des mailles : $L.\frac{di}{dt} = -R.i$ $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$	$\tau = \frac{L}{R}$
Circuit RC 	$\frac{1}{C}.\frac{du}{dt}$	$-\frac{u}{R}$	Loi d'Ohm et loi des noeuds : $C.\frac{du}{dt} = -\frac{u}{R}$ $\frac{du}{dt} + \frac{1}{R.C}u = 0$	$\tau = RC$
Réaction chimique d'ordre 1 en A ou désintégration radioactive $A + B \longrightarrow C$ n_A : qté matière	$\dot{n}_A$	$-k.n_A$	Expression de la vitesse de réaction $\dot{n}_A = -k.n_A$ $\frac{dn}{dt}_A + k.n_A = 0$	$\tau = \frac{1}{k}$

II/ GENERALITES SUR LES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

II.1) Définition

L'étude précédente nous montre que chacun des problèmes proposés se ramène à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

On appelera donc en toute généralité **système du premier ordre** caractérisé par une grandeur u(t) un système dont l'équation d'évolution peut s'exprimer sous la forme standard suivante (en notation de Newton) :

$$\boxed{\dot{u} + \frac{u}{\tau} = F(t)}$$

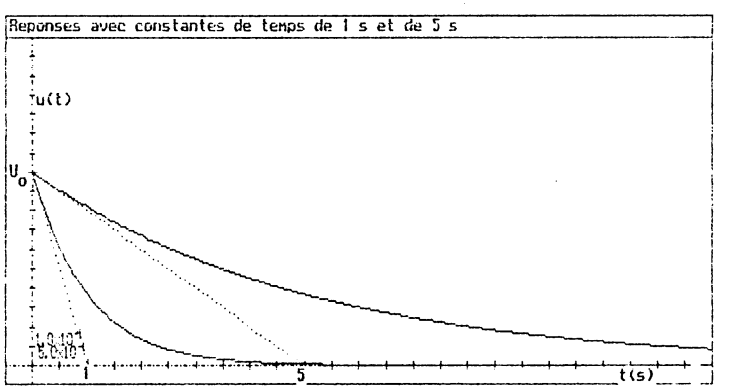
Si F(t) est nul, on dira que le système est en **régime libre** ; sinon il est en **régime forcé**.

II.2) Réponse du système en régime libre

On sait que la solution de l'équation différentielle précédente a pour expression générale :

$$u(t) = A.e^{-t/\tau} = U_o e^{-t/\tau}$$

U_o étant la valeur de u(t) à l'instant initial. On constate que plus τ sera grand et plus le système sera lent à revenir à son état d'équilibre (u[t] est à moins de 1 % de sa valeur initiale au bout de 5τ). On obtient τ par intersection de la tangente à l'origine et de l'axe des abscisses.



III/ REGIME FORCE

III.1) Présentation du problème :

Un théorème très important dû au physico-mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) indique que, dans la plupart des cas, on peut représenter une fonction temporelle F(t) sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales du temps, cette somme pouvant être discrète (si F[t] est périodique) ou intégrale (si F[t] n'est non nulle que sur un intervalle de temps fini et nulle partout ailleurs). Or beaucoup d'équations différentielles étudiées en physique sont **linéaires** ; c'est le cas, en particulier, de l'équation d'évolution des systèmes du premier ordre ou des oscillateurs étudiés ci-après. Chercher la solution générale de cette équation passe par la recherche d'une solution particulière ; F(t) étant décomposable en une somme de fonctions sinusoïdales du temps, il suffira de chercher une solution particulière pour chacune des composantes sinusoïdales de F(t), puis de faire la somme de toutes ces solutions pour avoir la solution particulière voulue. On comprend pourquoi l'on étudie préférentiellement les réponses des systèmes aux stimuli sinusoïdaux et l'étude du régime forcé se ramène donc à celle de l'équation :

$$\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \hat{F}.\cos(\omega t+\varphi_o)$$

On sait alors que la solution générale u(t) de cette équation différentielle est égale à la somme de la solution générale $u_o(t)$ de l'équation sans second membre et d'une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation générale :

$$u(t) = u_o(t) + u_p(t)$$

Or l'étude du paragraphe précédent nous a montré que, dans tous les cas : $\lim_{t\to\infty} u_o(t) = 0.$

Ainsi peut-on en conclure que $u_o(t)$ n'intervient que dans le **régime transitoire** du système forcé, $u_p(t)$ représentant le **régime permanent**. En régime permanent on pourra donc écrire :

$$u(t) = u_p(t)$$

III.2) Résolution par les complexes

Considérons une fonction sinusoïdale d'une variable quelconque α, soit : $f(\alpha) = A.\cos(\alpha+\varphi)$, fonction qui donc peut être considérée comme étant la partie réelle de la fonction complexe $\underline{F}(\alpha)$:

$$\underline{F}(\alpha) = A.\exp(j[\alpha+\varphi]) = A.e^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{A}.e^{j\omega t}$$

Supposons que $f(\alpha)$ soit régie par une équation différentielle linéaire $\mathcal{D}\left[f(\alpha)\right]$; si l'on considère alors $\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right]$, la linéarité de $\mathcal{D}$ implique que :

$$\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right] = \mathcal{D}\left[f(\alpha)\right] + j.\mathcal{D}\left[\sin(\alpha+\varphi)\right]$$

La partie réelle de $\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right]$ est justement l'équation différentielle $\mathcal{D}\left[f(\alpha)\right]$. Ainsi, en résolvant $\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right]$ et en prenant ensuite la partie réelle de la solution, on trouvera la solution de $\mathcal{D}\left[f(\alpha)\right]$. Or il est en général plus simple de résoudre $\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right]$: en effet on vérifie aisément que :

$$\frac{d}{d\alpha}\underline{F}(\alpha) = j.\underline{F}(\alpha) \qquad \frac{d^2}{d\alpha^2}\underline{F}(\alpha) = -\underline{F}(\alpha) \qquad \int\underline{F}(\alpha)d\alpha = -j.\underline{F}(\alpha) \qquad \text{etc...}$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ étant linéaire, on pourra mettre $\underline{F}(\alpha)$ en facteur d'un terme polynomiale complexe. En résumé, chercher une solution **sinusoïdale** d'une équation différentielle **linéaire** consistera à suivre la procédure suivante :

$f(\alpha) = A.\cos(\alpha+\varphi) \longrightarrow \underline{F}(\alpha) = A.e^{j\varphi} \longrightarrow$ résolution de $\mathcal{D}\left[\underline{F}(\alpha)\right] \longrightarrow$
$\longrightarrow$ déterm. de $\underline{A} \longrightarrow A = |\underline{A}|$ et $\varphi = \arg(\underline{A}) \longrightarrow$ obtention de $f(\alpha)$

Remarques

1) On peut tout aussi bien utiliser les sinus, auquel cas on les associera à la partie imaginaire des fonctions complexes utilisées dans le calcul. Réciproquement, dans ce cas, à partir des fonctions complexes, on retrouvera les fonctions réelles... en retenant les partie imaginaires.

2) Ce procédé de calcul n'est applicable que pour des fonctions et des opérations linéaires ! En particulier, on ne pourra associer à $f^2(\alpha)$ le carré de la fonction complexe. En revanche, en linéarisant $f^2(\alpha)$, on aura :

$$f^2(\alpha) = \frac{1}{2}A^2\left[1+\cos(2\alpha)\right] \longrightarrow \frac{1}{2}A^2\left[1+e^{2j\alpha}\right]$$

III.3) Application aux systèmes du premier ordre

Il s'agit donc de résoudre (en prenant $\varphi_0 = 0$ sans limiter la généralité du propos) :

$$\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \hat{F}.\cos(\omega t)$$

En passant par les complexes, il vient alors :

$$\underline{U}(j\omega + \frac{1}{\tau}) = \underline{F}$$

Posons alors $\omega_c = \frac{1}{\tau}$; l'équation précédente devient :

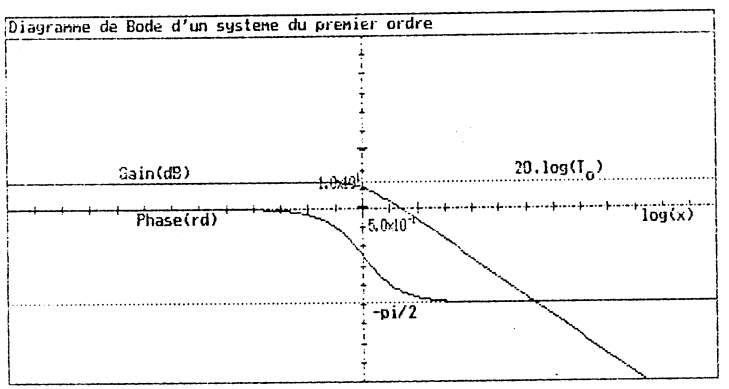
$$\underline{U}\omega_c(1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)) = \underline{F}$$

soit, en posant $x = \omega/\omega_c$ (**pulsation réduite**) :

$$\boxed{\frac{\underline{U}}{\underline{F}} = \frac{\tau}{1 + jx}}$$

On appelle alors le rapport $\underline{T} = \underline{U}/\underline{F}$ **transmittance complexe du système** (c'est le rapport de la réponse du système sur l'excitation) et on peut représenter celle-ci dans le diagramme de Bode donnant le module de $\underline{T}$ en décibel et son argument en fonction de log(x) :

$$T_{dB} = 20.\log(\tau[1+x^2]^{-0,5}) \qquad Arg(\underline{T}) = -\arctan(x)$$



On constate que pour x = 1, le module de $\underline{T}$ est égal à 0,707 fois sa valeur maximum ; en décibels, cela correspond à une chute de 3 dB ; aussi est-ce pour cela que l'on appelle ω_c **pulsation de coupure à -3 dB**. On a ici un système réagissant aux basses fréquences mais restant inerte aux hautes fréquences (**filtre passe-bas**).

L'exemple traité est d'importance car la transmittance d'un système linéaire plus général pourra se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle en (jω). En faisant alors apparaître les zéros (racines du numérateur) et les pôles (racines du dénominateur) de cette fraction, on pourra mettre le numérateur et le dénominateur sous forme de produits de termes du premier ordre si ces pôles et zéros sont simples et réels. L'analyse de Bode permet ensuite de superposer purement et simplement des diagrammes de système du premier ordre pour obtenir le diagramme de Bode de la transmittance étudiée.

* * *

OSCILLATEURS
SYSTEMES DE SECOND ORDRE

I/ DEFINITION

On appelle **oscillateur** (ou plus généralement **système du deuxième ordre**) un système physique dont l'équation d'évolution peut s'exprimer sous la forme standard suivante :

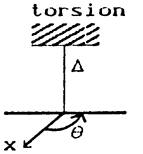
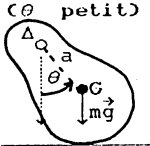
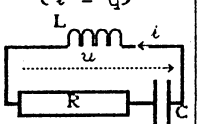
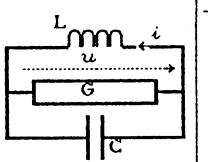
$$\ddot{u} + 2.\lambda.\dot{u} + \omega_o^2 u = F(t)$$

où u est un paramètre du système dépendant du temps t ; ω_o est appelée **pulsation propre du système** et le terme 2λ traduit les dissipations énergétiques du système.

Si F(t) est nul à tout instant, l'oscillateur est **en régime libre**. Sinon, il est **en régime forcé**. Enfin, si $\lambda = 0$, l'oscillateur est qualifié d'**harmonique**.

On donne en page suivante de ce polycopié quelques exemples d'oscillateurs en régime libre, mise en correspondance permettant d'établir des analogies formelles entre les équations régissant les systèmes.

EXEMPLES D'OSCILLATEURS EN REGIME LIBRE

SYSTEMES	Terme dynam.	Terme rappel	Terme dissi.	Equation d'évolution Equation standard	ω_o^2	2λ
Masse ponct. soumise à une force $-k.\vec{r}$ (atome dans un cristal...)	$m.\ddot{\vec{r}}$	$-k.\vec{r}$	$-\alpha.\dot{\vec{r}}$	Th. de la résultante cinétique : $m.\ddot{\vec{r}} = -k.\vec{r} - \alpha.\dot{\vec{r}}$ $\ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{m}\dot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\vec{r} = \vec{0}$	$\frac{k}{m}$	$\frac{\alpha}{m}$
Pendule de torsion 	$I_\Delta\ddot{\theta}$	$-K.\theta$	$-\beta.\dot{\theta}$	Th. du moment cinétique : $I_\Delta\ddot{\theta} = -K.\theta - \beta.\dot{\theta}$ $\ddot{\theta} + \frac{\beta}{I_\Delta}\dot{\theta} + \frac{K}{I_\Delta}\theta = 0$	$\frac{K}{I_\Delta}$	$\frac{\beta}{I_\Delta}$
Pendule pesant (θ petit) 	$I_\Delta\ddot{\theta}$	$-mga.\theta$	$-\beta.\dot{\theta}$	Th. du moment cinétique $I_\Delta\ddot{\theta} = -mga.\theta - \beta.\dot{\theta}$ $\ddot{\theta} + \frac{\beta}{I_\Delta}\dot{\theta} + \frac{mga}{I_\Delta}\theta = 0$	$\frac{mga}{I_\Delta}$	$\frac{\beta}{I_\Delta}$
Circuit RLC série ($i = \dot{q}$) 	$L.\ddot{q}$	$-\frac{q}{C}$	$-R.\dot{q}$	Loi d'Ohm et loi des mailles : $L.\ddot{q} = -\frac{q}{C} - R.\dot{q}$ $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{L.C}q = 0$ $\ddot{i} + \frac{R}{L}\dot{i} + \frac{1}{L.C}i = 0$	$\frac{1}{L.C}$	$\frac{R}{L}$
Circuit RLC parallèle 	$\frac{\int_0^t u.dt'}{L}$	$-C.\dot{u}$	$-G.u$	Loi d'Ohm et loi des noeuds : $\frac{\int_0^t u.dt'}{L} = -C.\dot{u} - G.u$ soit en dérivant/t : $\ddot{u} + \frac{G}{C}\dot{u} + \frac{1}{L.C}u = 0$	$\frac{1}{L.C}$	$\frac{G}{C}$

II/ ETUDE DE L'OSCILLATEUR EN REGIME LIBRE

La résolution de l'équation différentielle passe par celle de l'équation caractéristique, à savoir :

$$r^2 + 2\lambda.r + \omega_o^2 = 0$$

Soit $\Delta' = \lambda^2 - \omega_o^2$ le discriminant réduit de cette équation ; trois cas peuvent se produire :

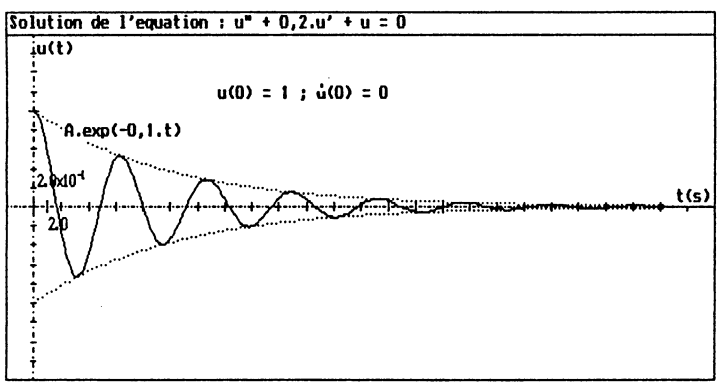
Régime pseudo-périodique : $\Delta' < 0$

On a donc $\lambda < \omega_o$: ce cas correspond aux **faibles dissipations énergétiques** ($\lambda = 0$ en constituant un cas particulier). En posant $\Delta' = -\omega_\lambda^2$, les racines de l'équation caractéristique ont pour expression : $r_\pm = -\lambda \pm j.\omega_\lambda$

et la solution de l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$u = e^{-\lambda t}\left(A.\cos(\omega_\lambda t) + B.\sin(\omega_\lambda t)\right)$$

A et B étant déterminés par les conditions initiales. $T_\lambda = 2\pi/\omega_\lambda$ est appelée **pseudo-période** (qui est nécessairement supérieure à ω_o) : le régime est dit **pseudo-périodique**. On obtient ainsi la courbe d'évolution suivante :



On appelle **décrément logarithmique** δ la valeur absolue du logarithme népérien du rapport de deux valeurs de u séparées par une pseudo-période, soit :

$$\delta = \mathrm{Ln}\left[u(t)\right] - \mathrm{Ln}\left[u(t+T_\lambda)\right] = -\mathrm{Ln}\left[\exp(-\lambda T_\lambda)\right]$$

d'où : $\boxed{\delta = \lambda.T_\lambda}$

On peut donc écrire :

$$\frac{u(t+T_\lambda)}{u(t)} = e^{-\delta}$$

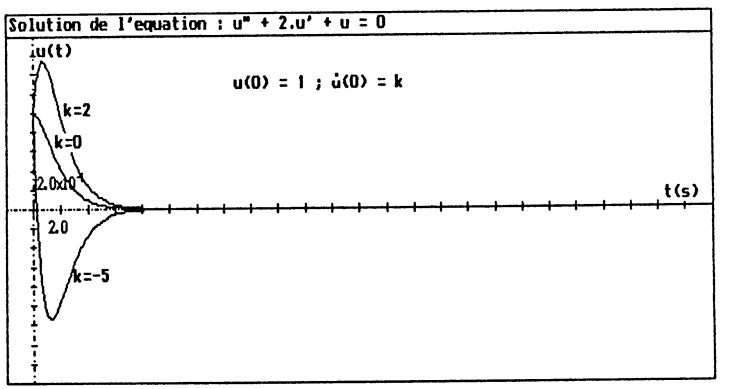
La mesure de δ et de T_λ permet alors de déduire λ, à savoir la grandeur caractéristique des dissipations énergétiques.

Régime critique : $\Delta' = 0$

Ce cas correspond à $\lambda = \omega_o$. L'équation caractéristique a maintenant une racine double : $r = -\lambda = -\omega_o$. La solution de l'équation différentielle a alors pour expression :

$$u = (A.t + B)e^{-\lambda t}$$

Les constantes A et B sont encore déterminées grâce aux conditions initiales. On donne ci-dessous la réponse du système en régime critique pour différentes "vitesses" initiales.



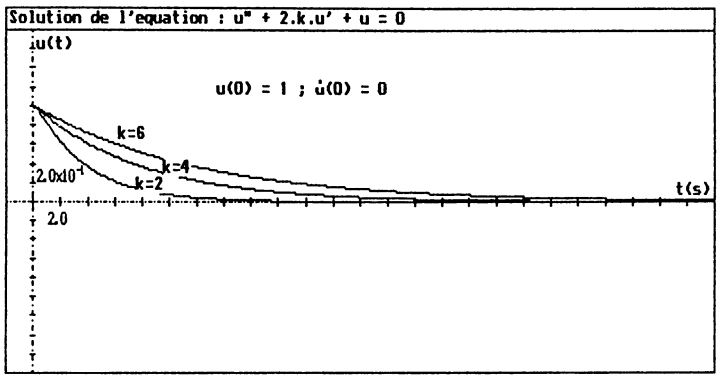
Régime apériodique : $\Delta' > 0$

Ce cas correspond à $\lambda > \omega_o$, c'est-à-dire aux fortes dissipations énergétiques. En posant $\Delta' = \lambda^2 - \omega_o^2 = \lambda_{\omega o}^2$, l'équation caractéristique a les racines suivantes :

$$r_\pm = -\lambda \pm \lambda_{\omega o}$$

et donc : $u = e^{-\lambda t}\left(A.\exp(\lambda_{\omega_o} t) + B.\exp(-\lambda_{\omega_o} t)\right)$

On a représenté ci-dessous la réponse du système pour différentes valeurs de λ. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, ce n'est pas pour ces régimes que le système revient le plus rapidement à son état équilibre mais pour le régime critique.



III/ OSCILLATIONS EN REGIME FORCE

Comme il a été dit dans le chapitre précédent, l'analyse de Fourier nous permet de ramener l'étude générale du régime forcé à celle d'une excitation sinusoïdale.

III.1) Résonance de position

On ne limitera pas la généralité du problème en supposant que $\varphi_o = 0$; nous avons donc à résoudre :

$$\ddot{u} + 2\lambda.\dot{u} + \omega_o u = \hat{F}.\cos(\omega t)$$

Pour déterminer le régime permanent, cherchons une solution particulière de la forme $\hat{U}.\cos(\omega t+\varphi)$ et utilisons pour ce la méthode des complexes :

$$\hat{F}.\cos(\omega t) \longrightarrow \hat{F}.\exp(j\omega t) \; ; \; \hat{U}.\cos(\omega t+\varphi) \longrightarrow \hat{U}.\exp(j[\omega t+\varphi]) = \underline{\hat{U}}e^{j\omega t}$$

$$\dot{u} \longrightarrow j\omega\underline{\hat{U}}e^{j\omega t} \; ; \; \ddot{u} \longrightarrow -\omega^2\underline{\hat{U}}e^{j\omega t}$$

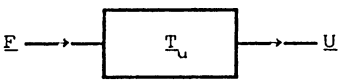
L'équation différentielle en complexe se réduit donc à :

$$\underline{\hat{U}}\left(-\omega^2 + 2\lambda.j\omega + \omega_o^2\right) = \hat{F}$$

$\hat{F}.\cos(\omega t)$ représentant l'excitation du système qui provoque une réponse u(t), on définit alors **la transmittance complexe** $\underline{T}_u$ du système comme étant le rapport de la grandeur complexe représentative de la réponse à celle représentative de l'excitation :

$$\underline{T}_u = \frac{\underline{\hat{U}}}{\hat{F}} = \frac{1}{\omega_o^2-\omega^2 + 2\lambda.j\omega}$$

ce qui permet de représenter le système à l'aide du schéma bloc suivant :



l'étude de $\underline{U}$ se ramenant ainsi à celle de $\underline{T}_u$. En effet, par identification, on en déduit immédiatement le module et l'argument de $\underline{T}_u$, ce dernier étant également celui de $\underline{\hat{U}}$ dans le cas présent :

$$T_u = \frac{\hat{U}}{\hat{F}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}} \; ; \; \arg(\underline{T}_u) = \varphi = -\arctan\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_o^2-\omega^2}\right)$$

On a alors intérêt à introduire la **pulsation réduite** $x = \omega/\omega_o$ et le **facteur de qualité** $Q = \omega_o/2\lambda$, si bien que les expressions précédentes peuvent se mettre sous la forme standard suivante :

$$\underline{T}_u = \frac{Q/\omega_o^2}{jx\left(1 + jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$T_u = \frac{Q/\omega_o^2}{x\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \; ; \; \arg(\underline{T}_u) = \arctan\left(\frac{1}{Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right)$$

Cherchons la condition pour laquelle T_u est maximum (condition de **résonance de position**) : pour cela, le carré de son dénominateur doit être minimum et, en dérivant ce dernier par rapport à x^2, il vient que cette dérivée a pour expression :

$$2Q^2x^2 + 1 - 2Q^2$$

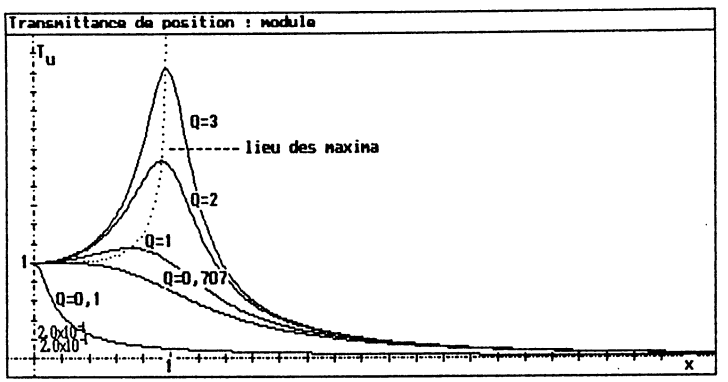
Cette dérivée ne peut s'annuler que si $Q > 1/\sqrt{2}$; si tel est le cas, on a, x_r désignant la pulsation réduite à la résonance :

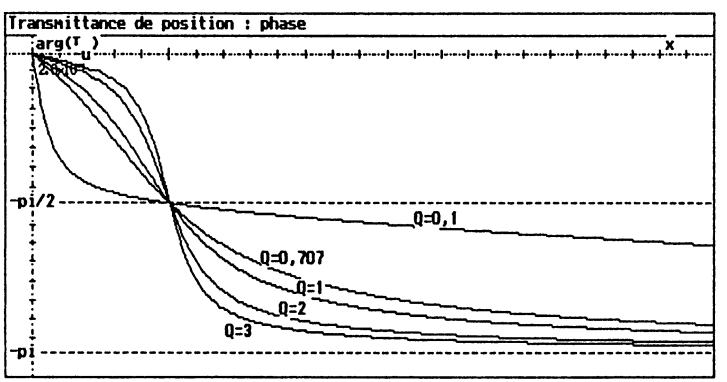
résonance de position :

$$x^2 = x_r^2 = 1-\frac{1}{2Q^2} \Rightarrow T_u = T_{max} = \frac{2Q^2/\omega_o^2}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

En x = 0, la courbe de réponse en fréquences présente alors un minimum. Si Q est inférieur à $1/\sqrt{2}$, il n'y a plus résonance et la courbe de réponse en fréquences décroît de façon monotone à partir d'un maximum en x = 0.

On a représenté ci-après les courbes de réponse en fréquences du module et de la phase de la transmittance (avec ω_o = 1 rd/s) pour différents facteurs de qualité.





III.2) Résonance en vitesse

Reprenons l'équation complexe permettant d'obtenir u(t) :

$$\hat{\underline{U}}e^{j\omega t}\left[-\omega^2 + 2\lambda.j\omega + \omega_o^2\right] = \hat{F}e^{j\omega t}$$

En appelant "vitesse de u" sa dérivée temporelle $v(t)$ et sachant que $\underline{V} = \dot{\underline{U}} = j\omega.\underline{U}$, on a donc, en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$j\omega.\hat{\underline{U}}e^{j\omega t}\left[-\omega^2 + 2\lambda.j\omega + \omega_o^2\right] = j\omega.\hat{F}e^{j\omega t}$$
$$\hat{\underline{V}}e^{j\omega t}\left[-\omega^2 + 2\lambda.j\omega + \omega_o^2\right] = j\omega.\hat{F}e^{j\omega t}$$

En appelant $\underline{T}_v$ la transmittance en vitesse et en utilisant la pulsation réduite, on aura donc :

$$\underline{T}_v = \frac{\hat{\underline{V}}}{\hat{F}} = j\omega.\underline{T}_u = \frac{Q/\omega_o}{1 + jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$
$$T_v = |\underline{T}_v| = \frac{Q/\omega_o}{\sqrt{1 + Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \; ; \; \arg(\underline{T}_v) = -\arctan\left[Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$$

La mise sous forme standard de la transmittance en vitesse permet d'analyser rapidement l'acuité de la résonance en déterminant la bande passante en x à -3 dB, c'est-à-dire la différence des variables réduites x pour lesquelles le module de la transmittance est égal à son module maximum divisé par $\sqrt{2}$. On a donc :

$$\sqrt{1 + Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow Q\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm 1$$
$$x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

En ne conservant que les racines positives, Δ étant le discriminant des équations précédentes, il vient :

$$x_+ = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\Delta} \qquad x_- = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\Delta}$$

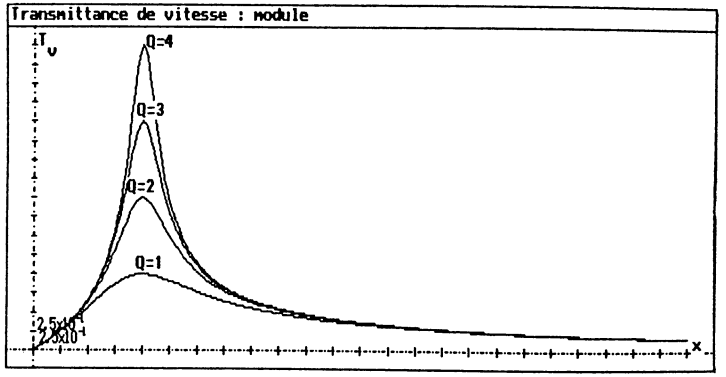
D'où la bande passant à -3 dB en pulsation réduite :

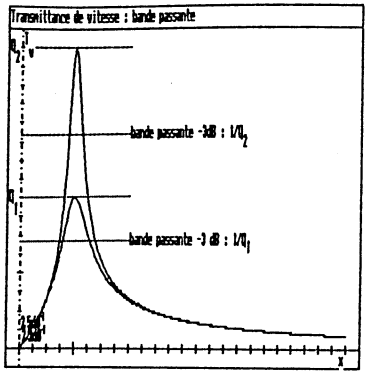
$$B_{-3dB} = x_+ - x_- = \frac{1}{Q}$$

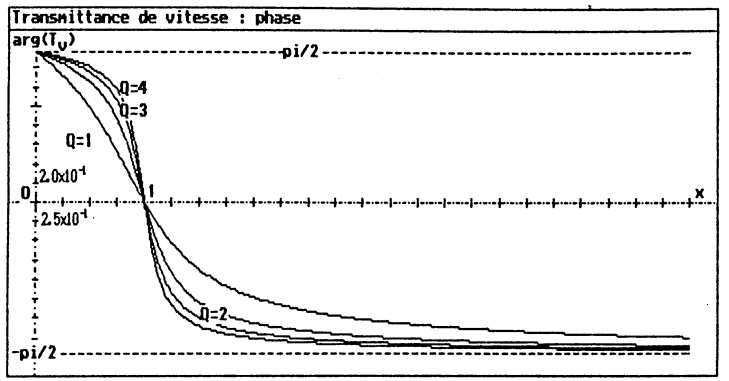
On obtiendra évidemment celle en rd/s en multipliant la précédente par ω_o. Ainsi, plus le facteur de qualité $Q = \omega_o/2\lambda$ est grand et plus l'acuité de la résonance est forte.

On a représenté ci-après le module et l'argument de la transmit-

tance pour divers facteurs de qualité.







IV/ ASPECT ENERGETIQUE

IV.1) Oscillateur harmonique en régime libre

Considérons les oscillateurs donnés en exemples dans le tableau analogique au début de ce chapitre et exprimons leur énergie cinétique et leur énergie potentielle dans le cas où il n'y a pas de dissipation énergétique ($\lambda = 0$). Il vient le nouveau tableau analogique suivant :

SYSTEMES	Energie cinétique	Energie potentielle	Energie mécanique
Masse soumise à une force en $-k.\vec{r}$	$\frac{1}{2}m.\vec{v}_R^2$	$\frac{1}{2}k.\vec{r}^2$	$\frac{1}{2}k.\hat{R}^2$
Pendule de torsion	$\frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2}K.\theta^2$	$\frac{1}{2}K.\hat{\theta}^2$
Pendule pesant (θ petit)	$\frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2}mga.\theta^2$	$\frac{1}{2}mga.\hat{\theta}^2$
Circuit LC	$\frac{1}{2}L.i^2$	$\frac{1}{2}q^2/C$	$\frac{1}{2}\hat{q}^2/C$

On constate que, dans tous les cas, l'énergie totale de l'oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude maximum de u(t). On démontre aussi aisément que, si l'on appelle $\langle \mathcal{E}_c \rangle$ et $\langle \mathcal{E}_p \rangle$ les énergies moyennes respectivement cinétique et potentielle d'un oscillateur harmonique, on a :

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{E}_T$$

IV.2) Oscillateur en régime libre

Considérons par exemple l'équation du mouvement du pendule de torsion :

$$I_\Delta\ddot{\theta} + K.\theta = -\beta.\dot{\theta}$$

En multipliant l'ensemble par $d\theta = \dot{\theta}.dt$, sachant que $d\dot{\theta} = \ddot{\theta}.dt$:

$$I_\Delta\dot{\theta}.d\dot{\theta} + K.\theta.d\theta = -\beta.\dot{\theta}^2dt$$

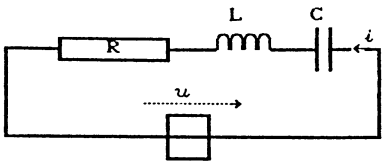
soit :

$$d\left(\frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K.\theta^2\right) = d\mathcal{E}_T = -\beta.\dot{\theta}^2dt < 0$$

On constate donc que l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du temps en raison des dissipations énergétiques.

IV.3) Oscillateur en régime forcé

Considérons maintenant un circuit (RLC) série soumis à une tension $u(t) = \hat{U}.\cos(\omega t)$, la convention adoptée étant la convention récepteur. Par un raisonnement analogue au précédent, on aura :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}q^2/C\right) = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_T = -R.i^2 + u.i$$

On reconnait dans $u.i$ la puisance électrique fournie au circuit et dans $R.i^2$ celle dissipée par effet Joule. En régime permanent on aura par ailleurs :

$$i(t) = \hat{I}.\cos(\omega t - \varphi)$$

où φ est le déphasage électrique. En moyennant par rapport au temps l'expression initiale et sachant que $\mathcal{E}_T$ est périodique, on obtient :

$$\frac{1}{T}\int_o^T \dot{\mathcal{E}}_T dt = 0 = -R\langle i^2\rangle + \langle u.i\rangle = -\frac{1}{2}R.\hat{I}^2 + \frac{1}{2}\hat{U}.\hat{I}\cos(\varphi)$$

soit, en faisant intervenir les grandeurs efficaces $I = \hat{I}/\sqrt{2}$ et $U = \hat{U}/\sqrt{2}$:

$$U.I.\cos(\varphi) = R.I^2$$

On retrouve ainsi le fait que la puissance active dans un tel circuit est intégralement dissipée sous forme d'effet Joule.

IV.4) Retour sur le facteur de qualité

Reprenons le solution générale du oscillateur en régime libre, dans le cas d'un régime pseudo-périodique :

$$u(t) = e^{-\lambda t}\left(A.\cos(\omega_\lambda t) + B.\sin(\omega_\lambda t)\right) = e^{-\lambda t}\hat{U}.\cos(\omega_\lambda t + \varphi)$$

En utilisant le fait que $\omega_o = \sqrt{\lambda^2+\omega_\lambda^2}$, la vitesse d'évolution de la grandeur u(t) sera donnée par :

$$\dot{u}(t) = -e^{-\lambda t}\hat{U}\left[\lambda.\cos(\omega_\lambda t+\varphi) + \omega_\lambda.\sin(\omega_\lambda t+\varphi)\right] = \ldots$$

$$\ldots = -e^{-\lambda t}\hat{U}\sqrt{\lambda^2+\omega_\lambda^2}.\cos(\omega_\lambda t+\varphi+\psi) = -e^{-\lambda t}\hat{U}.\omega_o\cos(\omega_\lambda t+\varphi+\psi)$$

ce en posant $\psi = \arccos(\lambda/\omega_o) = -\arcsin(\omega_\lambda/\omega_o)$.

Par alanlogie avec ce qui précède, on peut définir l''énergie totale du système à l'instant t par :

$$\mathcal{E}_T(t) = \frac{\mathcal{J}}{2}\left[\dot{u}^2(t) + \omega_o^2 u^2(t)\right]$$

$\mathcal{J}$ étant une constante traduisant l'inertie du système. On aura donc dans le cas présent :

$$\mathcal{E}_T(t) = \frac{\mathcal{J}}{2}\omega_o^2\hat{U}^2 e^{-2\lambda t}\left[\cos^2(\omega_\lambda t+\varphi+\psi) + \cos^2(\omega_\lambda t+\varphi)\right]$$

On définit alors le facteur de qualité énergétique Q_e par :

$$\boxed{\frac{2.\pi}{Q_e} = \frac{\mathcal{E}_T(t) - \mathcal{E}_T(t+T_\lambda)}{\mathcal{E}_T(t)}}$$

Ce facteur de qualité est donc inversement proportionnel à la variation relative de l'énergie totale sur une pseudo-période T_λ. On trouve donc dans le cas présent :

$$\boxed{\frac{2.\pi}{Q_e} = 1 - \exp(-2\lambda T_\lambda) = 1 - e^{-2\delta}}$$

δ étant le décrément logarithmique. Dans la pratique, on fait généralement en sorte de minimiser les dissipations énergétiques et donc d'avoir λ très petit devant ω_o. Il en résulte que $T_\lambda \simeq T_o$ et que :

$$\frac{2.\pi}{Q_e} = 1 - \exp(-2\lambda T_\lambda) \simeq 2\lambda T_o$$

D'où :

$$\boxed{Q_e \simeq \frac{\omega_o}{2\lambda} = Q}$$

Le facteur de qualité que nous avons introduit dans l'étude des résonances représente donc le facteur de qualité énergétique pour les faibles dissipations.

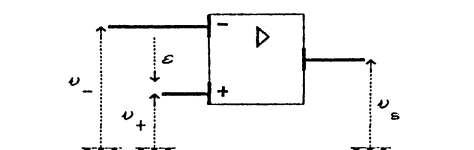
* * *

CALCUL ANALOGIQUE ET AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL

Il n'est pas question ici de donner une vue exhaustive du calcul dit *analogique*, c'est-à-dire de la technique consistant à simuler l'état ou l'évolution d'un système physique à l'aide d'un autre système physique en correspondance analogique avec le premier : le sujet est trop vaste et nécessiterait une étude dépassant largement le cadre de ce chapitre[1]. En revanche on trouvera ci-après de multiples applications analogiques de l'*amplificateur à circuit linéaire intégré* plus connu sous l'appellation d'*amplificateur opérationnel* ou de l'abréviation d'*ampli.op.*.

I/ RAPPELS SUCCINTS SUR L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL IDEAL

Un amplificateur opérationnel est avant tout un amplificateur différentiel (c'est-à-dire ayant pour fonction d'amplifier une différence de tensions) dont la représentation symbolique est la suivante :



Symbole de l'amplificateur opérationnel

[1] Pour avoir une idée des méthodes et de l'utilisation du calcul analogique, on pourra se reporter à l'ouvrage de Jean-Jacques Gleitz (voir bibliographie), bien que cet ouvrage commence à dater un peu : l'emprise du calcul numérique, c'est-à-dire effectué à l'aide d'ordinateurs et de programmes codés en binaire, s'est en effet étendue à bien des domaines qui étaient alors réservés au calcul analogique. On trouvera en bibliographie de ce chapitre d'autres ouvrages traitant du calcul analogique.

Dans la suite, on supposera systématiquement que l'amplificateur fonctionne en régime **linéaire**, et plus précisément que la tension de sortie v_s est à tout instant directement proportionnelle à la tension différentielle ε, soit[2] :

$$v_s(t) = \mathcal{A}.\varepsilon(t) = \mathcal{A}\left[v_+(t) - v_-(t)\right] \text{ avec } \mathcal{A} = \text{cte}$$

Dans la pratique $\mathcal{A}$ peut atteindre des valeurs allant de 10^4 à 10^6, voire plus : l'amplificateur devant être polarisé par une source de tension extérieure, on comprend pourquoi cet amplificateur se sature lorsque $|\varepsilon|$ dépasse un certain seuil de valeurs : l'amplificateur **saturé** a alors un fonctionnement **non-linéaire**. On supposera par ailleurs, pour simplifier, que l'amplificateur opérationnel est **idéal**, c'est-à-dire que :

— le coefficient d'amplification en tension $\mathcal{A}$ est infini (on rappellera cette condition en mettant à côté du symbole ▷ le signe ∞) ;

— les impédances d'entrée en mode commun sur les bornes "+" et "-" sont infinies ;

— l'impédance d'entrée différentielle $\underline{Z}_e$ mesurée entre les bornes "+" et "-" en régime harmonique est infinie ;

— l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$ est nulle[3].

[2] Plus généralement, un fonctionnement linéaire signifie que tension de sortie et tension d'entrée sont mise en relation à l'aide d'équations différentielles linéaires.

[3] Les écarts à l'idéalité des amplificateurs réels sont les suivants : $\mathcal{A}$ est de l'ordre de 10^4 à 10^6 comme nous l'avons vu, les impédances d'entrée varient du mégohm au térohm, l'impédance de sortie n'excède pas quelques dizaines d'ohms. A cela s'ajoutent les imperfections résultant des asymétries intrinsèques et des nécessités de la polarisation (existence de courants de polarisation de l'ordre de quelques dizaines de nanoampères, d'une tension d'offset de quelques millivolts), les problèmes de dérive thermique et structurelle, l'existence d'une bande passante,... On se contentera de savoir qu'il est possible d'"habiller" l'ampli.op. de diverses manières pour limiter ces défauts.

Ces quatre conditions (dont on s'écarte assez peu dans la pratique) ont pour conséquences immédiates que :

— pour une tension de sortie v_s observée, la tension différentielle ε doit être considérée comme quasiment nulle et donc que v_+ est pratiquement égal à v_- ($v_+ \simeq v_-$) ;

— les courants d'entrée i_+ et i_- sont pratiquement nuls ($i_+ = i_- = 0$).

— la tension de sortie ne varie pas lorsque l'on charge l'amplificateur (absence de chute de tension en charge).

Le schéma équivalent d'un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire est donc le suivant :

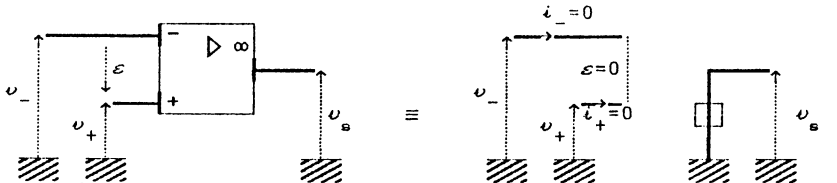


Schéma équivalent d'un amplificateur idéal en régime linéaire

II/ DE L'AMPLIFICATEUR A L'OPERATION

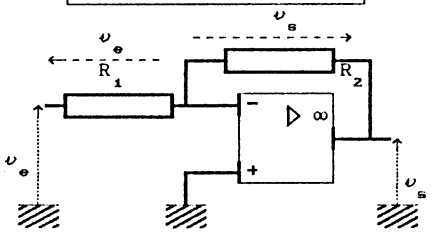
Les propriétés de l'amplificateur idéal lui permettent d'être utilisé, en régime linéaire, pour de multiples fonctions (filtres, déphaseurs, oscillateurs,...). La fonction principale, d'où il tire son qualificatif, reste toutefois celle de réaliser des opérations, c'est-à-dire de lier *algébriquement* des grandeurs de sortie aux grandeurs d'entrée. Nous nous proposons dans ce paragraphe de rappeler les opérations de base que l'on peut réaliser avec un amplificateur opérationnel.

II.1) Multiplication par une constante

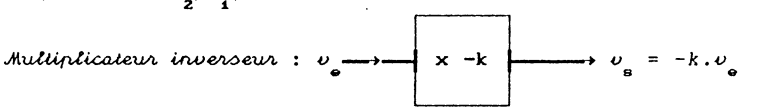
II.1.a) Multiplicateur inverseur

En considérant le montage représenté ci-après et en exprimant le fait que $v_- \simeq 0$ et que R_1 et R_2 sont traversées par la même intensité, on obtient ainsi :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e = -k.v_e$$



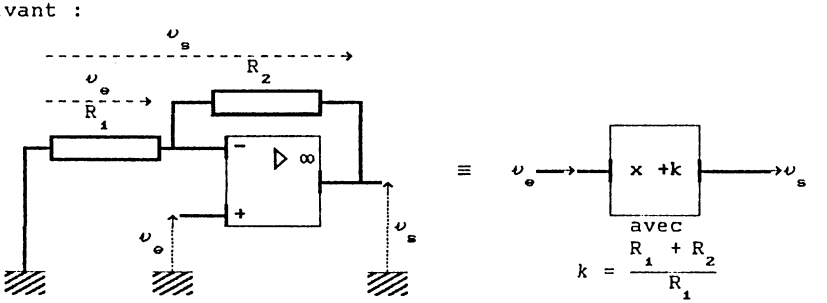
On constate donc que la tension de sortie est égale à la tension d'entrée multipliée par un nombre négatif. On peut donc représenter la fonction réalisée par ce circuit à l'aide du schéma bloc suivant (avec $k = R_2/R_1$) :



En faisant varier R_2, on peut alors faire varier le facteur multiplicateur.

II.1.b) Multiplicateur non-inverseur

Pour multiplier une grandeur par un nombre positif, on pourrait faire suivre un multiplicateur inverseur d'un multiplicateur par "-1" ; une solution plus élégante consiste à réaliser le montage suivant :



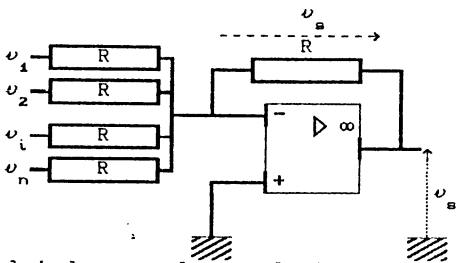
Multiplicateur non inverseur

Si R_1 est infinie, on constate que $k = 1$: on réalise ainsi un *montage suiveur* ou encore la *fonction identité* (permettant de réaliser une adaptation en tension entre deux étages en utilisant le fait que l'impédance de sortie de l'amplificateur opérationnel est nulle et donc qu'il n'y a pas de chute de tension lorsqu'on charge celui-ci).

II.2) Sommateur-Différentiateur

II.2.a) Sommateur

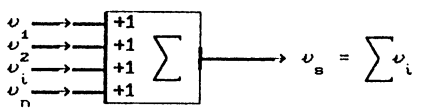
Les montages sommateurs-inverseurs ont la structure suivante :



En utilisant la loi des noeuds sur la borne "-", on montre aisément que : $$v_s = -\sum_{i=1}^{i=n} v_i$$

Si l'on ne veut pas qu'il y ait inversion, on peut faire suivre le bloc précédent par un multiplicateur "-1" ou encore attaquer l'amplificateur sur la borne "+" avec un jeu de résistances convenable. On représentera alors cette fonction par le schéma bloc suivant :

Sommateur :



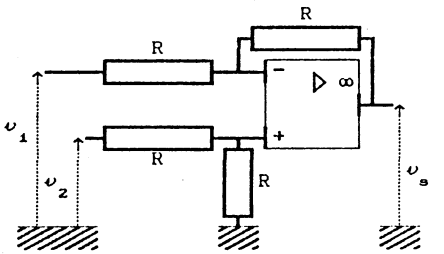
$$\rightarrow v_s = \sum v_i$$

II.2.b) Différentiateur

En considérant le schéma ci-après et en exprimant l'égalité entre la tension v_+ et la tension v_-, on montre aisément que :

$$v_s = v_2 - v_1$$

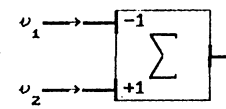
et donc que l'on a réalisé une différence entre les tensions d'entrée.



Différentiateur

On représentera un tel montage grâce au schéma-bloc suivant :

Différentiateur :

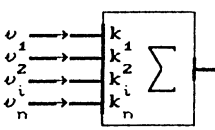


$$\rightarrow v_s = v_2 - v_1$$

II.2.c) Combinaison linéaire

On conçoit que si l'on fait varier les résistances attaquées par les tensions d'entrée dans un sommateur cela revient à pondérer ces tensions d'entrée par un facteur positif ; par ailleurs, si l'on combine sommateur et différentiateur, on pourra ainsi réaliser une combinaison linéaire des tensions d'entrée, combinaison linéaire que l'on représentera sous la forme :

Combinaison linéaire :



$$\rightarrow v_s = \sum_{k_i \in \mathbb{Q}} k_i v_i$$

II.3) Intégrateur-Dérivateur

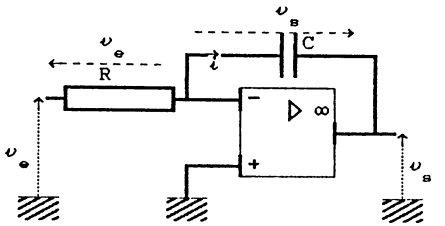
II.3.a) Intégrateur

La structure élémentaire d'un intégrateur est représentée sur la page ci-après. Sachant $v_e = R.i$ et que $i = -\dot{q} = -C.\dot{v}_s$ (dérivée temporelle en notation de Newton), on en déduit que :

$$v_s = -\left(\frac{1}{R.C}\right)\int_0^t v_e(\theta)d\theta$$

Un tel montage permet donc d'obtenir à un facteur multiplicatif

près l'intégrale de la tension d'entrée.

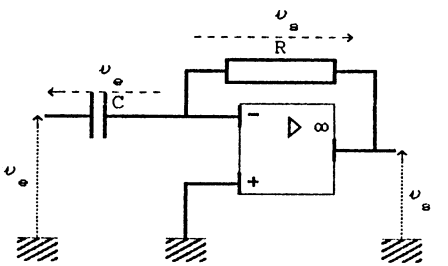


En faisant suivre ce montage d'un multiplicateur inverseur, on pourra ainsi réaliser l'intégrale pure et simple de la tension v_e et on représentera cette opération par le schéma bloc suivant :

Intégrateur : $v_e \longrightarrow \boxed{\int dt} \longrightarrow v_s = \int v_e dt$

II.3.b) Dérivateur

Un dérivateur a la structure élémentaire suivante :



Comme précédemment on démontre que :

$$v_s = -(RC)\dot{v}_e$$

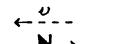
et, en faisant suivre ce montage par un multiplicateur inverseur, on peut ainsi réaliser la fonction dérivation :

Dérivateur : $v_e \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow v_s = \dot{v}_e$

II.4) Logarithme-Exponentielle

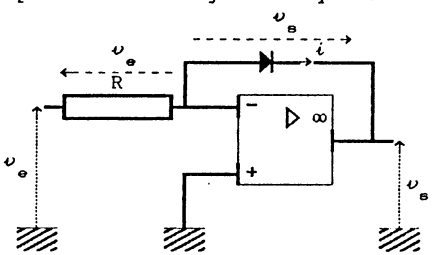
On peut obtenir le logarithme ou l'exponentielle de la tension

d'entrée grâce à un montage utilisant une jonction semi-conductrice[4]. On sait en effet que l'intensité traversant une telle jonction est liée à la tension entre ses bornes de la façon suivante (loi de Shockley) :



$$i = I_s\left[\exp\left(\frac{e.v}{k.T}\right) - 1\right]$$

où I_s est l'intensité dite de *saturation*, e la charge de l'électron, k la constante de Boltzmann et T la température absolue. On obtient ainsi l'amplificateur logarithmique :



Amplificateur logarithmique

On a en effet, en posant $\alpha = kT/e$ et $v_o = R.I_s$:

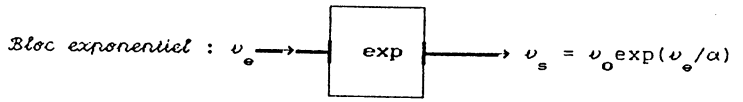
$$v_e = R.i = v_o\left[\exp(-v_s/\alpha) - 1\right] \Rightarrow v_s = -\alpha.\mathrm{Ln}\left[\frac{v_e}{v_o} + 1\right]$$

Pratiquement on fera en sorte que le rapport des tensions v_e/v_o soit grand devant 1 et on pourra effectuer une inversion à la suite de l'amplificateur logarithmique de façon à obtenir le bloc suivant :

Bloc logarithmique : $v_e \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}} \longrightarrow v_s = \alpha.\mathrm{Ln}\left[\frac{v_e}{v_o}\right]$

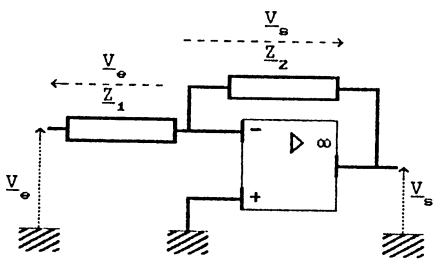
[4] On pourrait utiliser une diode, mais dans la pratique on utilise plutôt un transistor pris entre son collecteur et son émetteur avec sa base à la masse, ce qui permet d'étendre la plage de fonctionnement. Compte tenu de la loi qui les régit, de tels amplificateurs devront être stabilisés en température.

En permutant diode et résistance et lorsque v_e est très supérieur à α, on obtient l'amplificateur exponentiel de schéma bloc :



II.5) Représentation harmonique

Tant que le fonctionnement des dispositifs reste linéaire, on sait que l'utilisation de la transformation de Fourier permet de privilégier l'étude de la réponse harmonique des dispositifs, c'est-à-dire l'étude de la grandeur de sortie de ces dispositifs lorsque l'entrée est sinusoïdale. Ainsi, à titre d'exemple, étudions le montage suivant :



On montre aisément que le coefficient d'amplification en tension complexe du dispositif a pour expression :

$$\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

On retrouve alors la relation différentielle entre v_s et v_e en effectuant les correspondances opérationnelles suivantes :

$$j.\omega.\underline{V} \longleftrightarrow \dot{v}$$

$$-\omega^2\underline{V} \longleftrightarrow \ddot{v}$$

$$\frac{1}{j\omega}\underline{V} \longleftrightarrow \int v.dt$$

etc...

Par exemple si $\underline{Z}_1$ est une résistance R et $\underline{Z}_2$ une capacité C, on

aura :

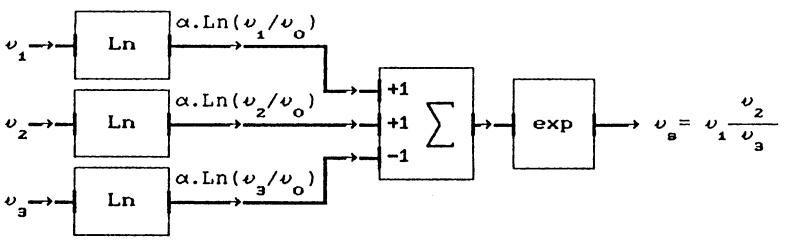
$$\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{RC.j\omega} \Rightarrow \underline{V}_s = -\frac{1}{RC.j\omega}.\underline{V}_e \longrightarrow v_s = -\frac{1}{R.C}\int v_e\,dt$$

Cette méthode permet de trouver assez rapidement la fonction que réalise tel ou tel circuit (qui est ici un intégrateur).

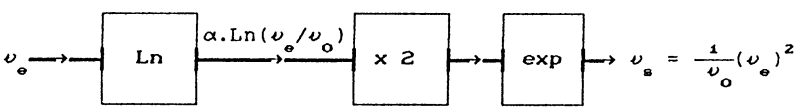
III/ APPLICATIONS ANALOGIQUES

III.1) Multiplication algébrique de grandeurs

Supposons que l'on ait à réaliser l'opération "règle de trois" $v = v_1\frac{v_2}{v_3}$ à l'aide des tensions images v_1, v_2 et v_3. On peut réaliser une telle opération à l'aide d'amplificateurs logarithmiques, d'un amplificateur exponentiel et d'une combinaison linéaire intervenant dans le schéma-bloc suivant :



On réalisera de même le carré d'une grandeur de la manière suivante :



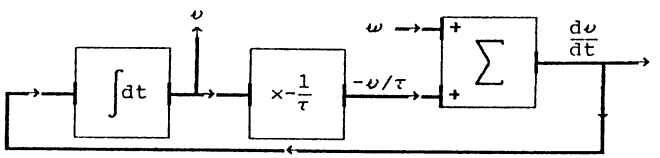
On généralise ainsi aisément à la simulation de puissances algébriques quelconques de grandeurs physiques.

III.2) Equation différentielle linéaire du premier ordre

Supposons que l'on ait à simuler l'évolution d'un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = w(t),$$

où τ est une constante de temps et w(t) une excitation quelconque. Soit υ l'image de v(t) et ω celle de w(t). Sachant que υ est l'intégrale de $\frac{d\upsilon}{dt}$ et que l'on peut écrire $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} + w(t)$, on peut simuler l'équation précédente à l'aide des schémas blocs suivants



Simulation d'un système du premier ordre

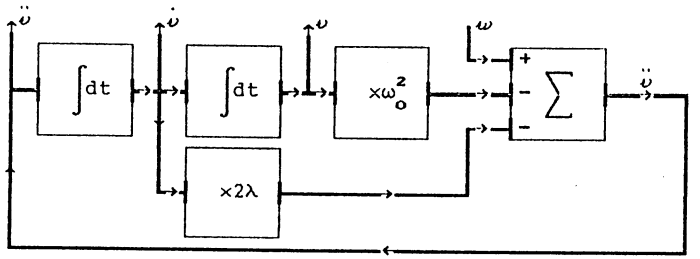
On aura ainsi accès simultanément à la grandeur v et à sa vitesse.

III.3) Equation différentielle linéaire du second ordre

Soit de même un système régi par une équation différentielle du type :

$$\ddot{v} + 2\lambda.\dot{v} + \omega_o^2 v = w(t)$$

Sur le même principe que précédemment, on pourra simuler cette évolution grâce au système suivant :

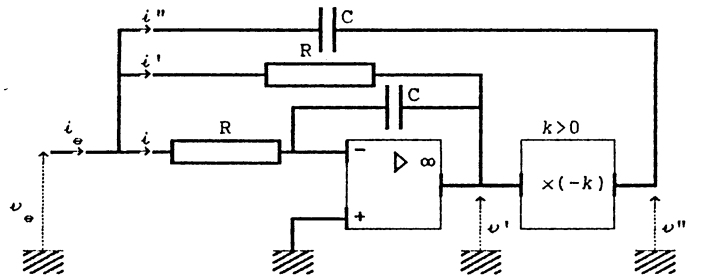


Simulation d'un système du second ordre

On obtient ainsi simultanément la grandeur v, sa vitesse et son accélération.

III.4) Circuit R-L-C... sans L

Soit le circuit suivant :



Ce circuit permet de simuler un circuit {R,L,C} sans élément inductif : cet aspect est intéressant car ce dernier composant est en général assez difficile à mettre en oeuvre et possède un facteur de fiabilité relativement modeste. Comme on le voit dans le schéma de principe, le montage proposé ne met en oeuvre que des résistances, des capacités et évidemment des amplificateurs opérationnels.

Le système d'équations régissant ce montage est le suivant :

— $\upsilon" = -k.\upsilon'$; $i_e = i + i' + i"$

— $i = -C.\frac{d\upsilon'}{dt}$; $i' = \frac{\upsilon_e - \upsilon'}{R}$; $i" = C.\frac{d}{dt}(\upsilon_e - \upsilon")$

— $\upsilon_e = R.i$

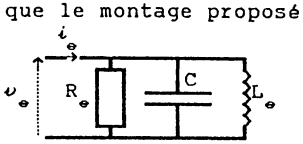
En exprimant toutes les tensions en fonction de υ_e, on obtient alors :

$$i_e = \frac{\upsilon_e}{R} + \frac{\upsilon_e + (RC)^{-1}\int \upsilon_e dt}{R} + C.\frac{d}{dt}\left(\upsilon_e - k(RC)^{-1}\int \upsilon_e dt\right)$$

soit

$$\boxed{i_e = (2-k)\frac{\upsilon_e}{R} + C.\dot{\upsilon}_e + (R^2C)^{-1}\int \upsilon_e dt}$$

On constate que le montage proposé est équivalent à :



avec $\begin{cases} R_e = \frac{R}{2-k} \\ L_e = R^2C \end{cases}$

Ainsi, grâce à un tel circuit et en faisant varier *k*, on peut passer continûment d'une résistance positive à une résistance négative, soit un passage continu du fonctionnement en résonateur à celui en oscillateur.

IV/ POUR ALLER PLUS LOIN

Bien sûr, dans l'étude qui précède, nous n'avons pas tenu compte des imperfections de l'amplificateur, imperfections qu'il faut impérativement limiter si l'on ne veut pas que le montage ait un fonctionnement aberrant : par exemple, une tension d'offset en tête d'intégrateur donnera une "rampe" en sortie et conduira donc nécessairement l'amplificateur à un état de saturation au bout d'un certain temps.

Par ailleurs, nous n'avons pas abordé la question incontournable en calcul analogique de la *mise à l'échelle*, à savoir :

— *mise à l'échelle en amplitude* : chaque amplificateur présente une tension de saturation ; il faut donc faire en sorte que la réponse de chacun de ces amplificateurs ait une amplitude inférieure à cette tension de saturation, sinon l'amplificateur aura un fonctionnement non linéaire. Pour cela, on peut être amené à pondérer les grandeurs à l'aide de multiplicateurs par une constante.

— *mise à l'échelle en temps* : on peut vouloir obtenir la représentation simulée d'un processus physique sur une table traçante ; or une telle table est limitée dans ses temps de réponse et le processus physique réel peut être ou très rapide ou très lent. Il faudra donc faire une homothétie sur le temps pour que le calculateur analogique puisse répondre correctement en temps aux stimuli. Il faudra aussi tenir compte des temps de réponse des différents blocs, temps de réponse qui n'apparaissent pas, a priori, sur les schéma de principe.

Ces problèmes de mise à l'échelle ne sont pas toujours très simples à résoudre et il faut parfois avoir recours au tâtonnement pour obtenir un fonctionnement exploitable d'un caculateur analo-

gique. C'est d'ailleurs souvent cet aspect de la question qui fait que l'on préfère avoir recours, quand c'est possible, au calcul numérique.

* * *

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

J.BOUTIGNY, *Circuits électroniques et amplificateur opérationnel*, Vuibert, Paris, 1985

R.DAMAYE, *L'amplificateur opérationnel, principes et applications*, Editions Radio, Paris, 1974

J.J. GLEITZ, *Le calcul analogique*, Que sais-je ? Presses Universitaires de France, Paris, 1968

C.GROSSETETE, *Electronique : opérateurs analogiques et amplificateur opérationnel réel*, Ed. Ellipses, Paris, 1987

B.JECH, *Simulation analogique d'un circuit d'électronique de puissance*, rapport de D.E.A., Orsay, 1977

C.MASSELOT, M.GIRARD, *Electronique non linéaire (2 tomes)*, Masson, Paris, 1975

F.MILSANT, *Cours d'électronique : amplification, circuits intégrés*, Eyrolles, Paris, 1974

Notice d'utilisation du calculateur ANALAC 110 (à courant porteur)

* * *